TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U PROSINCU 2010. – OSNOVNA RAZINA

I. ZADATCI VIŠESTRUKOGA IZBORA

1. **D.** Svih šest zadanih razlomaka svedemo na najmanji zajednički nazivnik. Taj nazivnik je najmanji zajednički višekratnik brojeva 2, 3 i 5, tj. *NZV*(2, 3, 5) = 30. Dobijemo redom:

$$\left(-\frac{18}{30}\right), \left(-\frac{50}{30}\right), \left(-\frac{45}{30}\right), \left(-\frac{20}{30}\right) \text{ i } \left(-\frac{15}{30}\right).$$

Usporedimo brojnike dobivenih razlomaka, pa zaključujemo da je jedino –15 strogo veći od –18.

2. **B.** Od 18. travnja 2010. u 09:15 sati do 20. travnja 2010. u 09:15 sati prošla su puna dva dana, odnosno 2 · 24 sata = 48 sati. Preostaje utvrditi koliko je vremena prošlo od 20. travnja 2010. u 09:15 sati do 20. travnja 2010. u podne, tj. 20. travnja 2010. u 12:00 sati. Od 09:15 sati do 11:15 sati prošla su puna 2 sata, a od 11:15 sati do 12:00 sati prošlo je 45 minuta. Stoga je traženo vrijeme jednako 48 sati + 2 sata + 45 minuta = 50 sati i 45 minuta.

3. **C.** Zaokružimo li zadani broj na jednu decimalu, dobit ćemo 3.5 (druga decimala 4 je strogo manja od 5, pa pri zaokruživanju prva decimala ostaje nepromijenjena). Zaokružimo li zadani broj na dvije decimale, dobit ćemo 3.54 (treća decimala 2 je strogo manja od 5, pa pri zaokruživanju prva i druga decimala ostaju nepromijenjene). Zaokružimo li zadani broj na tri decimale, dobit ćemo 3.543 (četvrta decimala 7 je strogo veća od 5, pa se pri zaokruživanju treća decimala povećava za 1). Napokon, zaokružimo li zadani broj na četiri decimale, dobit ćemo 3.5427 (peta decimala 3 je strogo manja od 5, pa pri zaokruživanju prve četiri decimale ostaju nepromijenjene). Stoga je netočna treća tvrdnja.

4. **C.** Neka su *A* točka u kojoj ljestve dodiruju zid, *B* točka u kojoj ljestve dodiruju podnožje, te *C* ortogonalna projekcija točke *A* na podnožje. Trokut *ABC* je pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu *C*. Duljina njegove hipotenuze $\overline{AB}$ jednaka je duljini ljestava, duljina njegove katete $\overline{BC}$ jednaka udaljenosti ljestava od zida, tj. $a = \left|\overline{BC}\right|$ = 80 cm = 0.8 m, a visina na kojoj ljestve dodiruju zid jednaka je duljini druge katete $\overline{AC}$ trokuta, tj. $b = \left|\overline{AC}\right|$ = 1.35 m. Primjenom Pitagorina poučka dobijemo:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{\left|\overline{AC}\right|^2 + \left|\overline{BC}\right|^2} = \sqrt{1.35^2 + 0.8^2} = \sqrt{1.8225 + 0.64} = \sqrt{2.4625} = \sqrt{\frac{24\ 625}{10\ 000}} = \sqrt{\frac{985}{400}} = \frac{1}{20} \cdot \sqrt{985}$$

$$\left|\overline{AC}\right| \approx 1.569235 \text{ m} \approx 1.57 \text{ m}$$

5. **B.** Primjenom formule za razliku kvadrata dobivamo::

$$4 \cdot p^2 - 9 = 2^2 \cdot p^2 - 3^2 = (2 \cdot p)^2 - 3^2 = (2 \cdot p - 3) \cdot (2 \cdot p + 3).$$

6. **A.** Neka je *x* traženi iznos**.** Obujam potrošenoga plina i cijena potrošenoga plina su upravno razmjerne veličine. Stoga možemo postaviti sljedeću shemu:

↑ obujam plina [m^3]	↑ cijena plina [kn]
33	80.32
127	x

(Strjelice naznačuju da se radi o upravno razmjernim veličinama.) Iz zadanih podataka možemo postaviti razmjer:

$$x : 80.32 = 127 : 33.$$

Odatle je

$$33 \cdot x = 127 \cdot 80.32,$$

odnosno

$$33 \cdot x = 10\,200.64$$

Dijeljenjem ove jednadžbe s 33 dobit ćemo $x = 309.11$.

7. **D.** Iz podatka $a < 0$ zaključujemo da je pripadna linearna funkcija (čiji je graf zadani pravac) strogo padajuća, tj. graf ide u smjeru „sjeverozapad – jugoistok“. Iz podatka $b > 0$ zaključujemo da traženi graf siječe os ordinata, tj. os y iznad ishodišta pravokutnoga koordinatnoga sustava (točnije, u točki čija je ordinata strogo pozitivan realan broj). Jedini od četiriju ponuđenih grafova koji ima oba navedena svojstva je posljednji graf.

8. **A.** Imamo redom:

$$a \cdot d - b \cdot c = 3 \cdot (-6) - (-4) \cdot (-5) = -18 - 20 = -38.$$

9. **A.** Iz podatka da je mjera jednoga kuta trokuta 101° slijedi da je zbroj preostalih dvaju kutova toga trokuta jednak 180° – 101° = 79°. Označimo te kutove s α i β. Iz podatka da se mjere tih kutova odnose kao 2 : 5 slijedi da postoji strogo pozitivan realan broj k takav da je $\alpha = 2 \cdot k$ i $\beta = 5 \cdot k$. Budući da zbroj $\alpha + \beta$ mora biti jednak 79°, dobivamo:

$$2 \cdot k + 5 \cdot k = 79°,$$
$$7 \cdot k = 79°.$$

Dijeljenjem ove jednadžbe sa 7 dobivamo $k = \frac{79}{7}$. Stoga je mjera manjega kuta

$$\alpha = 2 \cdot k = 2 \cdot \frac{79}{7} = \frac{158}{7} \approx 22.571428571° \approx 22°34'17''$$

10. **C**. Za $x \neq 0$ i $y \neq 1$ imamo redom:

$$\frac{x \cdot y}{x \cdot y - x} = \frac{x \cdot y}{x \cdot (y-1)} = \frac{y}{y-1}$$

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U PROSINCU 2010. – OSNOVNA RAZINA

11. **A**. Najmanja vrijednost pripadne kvadratne funkcije jednaka je ordinati tjemena parabole (a postiže se za vrijednost varijable x jednaku apscisi tjemena parabole). Iz grafa možemo očitati da je tjeme parabole $T(2, -3)$, pa je tražena vrijednost jednaka –3.

12. **D.** Neka je x broj učenika 4.A razreda, a y broj učenika 4.B razreda. Iz podatka da razred 4.B ima jednoga učenika manje od 4.A razreda slijedi:

$$y = x - 1.$$

Podijele li se 224 olovke na x učenika 4.A razreda tako da svaki učenik 4.A. razreda dobije isti broj olovaka i da sve olovke budu raspodijeljene, slijedi da je jedan učenik 4.A razreda dobio $n_1 = \frac{224}{x}$ olovaka. U 4.B razredu podijeljeno je ukupno 224 – 8 = 216 olovaka na y učenika tako da je svaki učenik dobio isti broj olovaka. Stoga je jedan učenik 4.B razreda dobio $n_2 = \frac{216}{y}$ olovaka. Iz podatka da je svaki učenik 4.A razreda dobio jednako mnogo olovaka kao i svaki učenik 4.B razreda zaključujemo da je $n_1 = n_2$, odnosno

$$\frac{224}{x} = \frac{216}{y},$$

odnosno invertiranjem lijeve i desne strane te jednakosti

$$\frac{x}{224} = \frac{y}{216}.$$

Odatle množenjem s 224 dobivamo:

$$x = \frac{224}{216} \cdot y = \frac{28}{27} \cdot y.$$

Tako smo dobili sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} y &= x - 1 \\ x &= \frac{28}{27} \cdot y \end{aligned}$$

Uvrstimo li drugu jednadžbu sustava u prvu jednadžbu, dobijemo:

$$\begin{aligned} y &= \frac{28}{27} \cdot y - 1 \quad / \cdot 27 \\ 27 \cdot y &= 28 \cdot y - 27 \\ 27 \cdot y - 28 \cdot y &= -27 \\ (-1) \cdot y &= -27 \end{aligned}$$

Odatle dijeljenjem s (–1) slijedi $y = 27$, i to je traženi broj.

13. B. Osjenčani dio kvadrata je usporedniik (paralelogram) kojemu je duljina jedne stranice jednaka polovici duljini stranice kvadrata, a duljina visine na tu stranicu jednaka duljini stranice kvadrata. Stoga je površina toga usporednika jednaka:

$$P = a_1 \cdot v_{a_1} = \frac{a}{2} \cdot a = \frac{1}{2} \cdot a^2 .$$

14. C. Iz zadanoga razmjera izrazimo veličinu S. Imamo redom:

$$\begin{gathered} 100 \cdot (S + g) = S \cdot (100 + p), \\ 100 \cdot S + 100 \cdot g = 100 \cdot S + p \cdot S \\ 100 \cdot S - 100 \cdot S - p \cdot S = (-100) \cdot g \\ -p \cdot S = (-100) \cdot g. \end{gathered}$$

Odatle dijeljenjem cijele jednakosti s $(-p)$ dobivamo:

$$S = \frac{100}{p} \cdot g .$$

U ovu jednakost uvrstimo $p = 2.65$ i $g = 864.96$, pa dobijemo:

$$S = \frac{100}{2.65} \cdot 864.96 = \frac{86\ 496}{2.65} = 32\ 640 .$$

15. A. Na dan igranja utakmice za 600 kn može se kupiti ukupno $n_1 = \frac{600}{40} = 15$ ulaznica. Za isti se iznos u pretprodaji može kupiti 5 ulaznica više, tj. ukupno 15 + 5 = 20 ulaznica, pa je cijena jedne ulaznice u pretprodaji $c_1 = \frac{600}{20} = 30$ kuna. Dakle, cijena jedne ulaznice na dan igranja utakmice je za $\Delta c = c - c_1 = 40$ kn – 30 kn = 10 kn veća nego u pretprodaji.

16. A. Imamo redom:

$$\begin{aligned} &(2 \cdot x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x + 2) = \\ &= (2 \cdot x^2 - x - 6 \cdot x + 3) \cdot (x + 2) = \\ &= (2 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 3) \cdot (x + 2) = \\ &= 2 \cdot x^3 - 7 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 4 \cdot x^2 - 14 \cdot x + 6 = \\ &= 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 11 \cdot x + 6. \end{aligned}$$

II. ZADATCI KRATKIH ODGOVORA

17. 14. Iz osnovne formule postotnoga računa $P = \frac{p}{100} \cdot S$ množenjem sa 100 dobivamo:

$$100 \cdot P = p \cdot S \quad / : S$$
$$p = \frac{100 \cdot P}{S}$$

U ovu jednakost uvrstimo P = postotni iznos = 71.54 i S = 511, pa dobijemo:

$$p = \frac{100 \cdot 71.54}{511} = \frac{7\ 154}{511} = 14\,[\%].$$

18. $\frac{7}{4}$**.** Pomnožimo drugu jednadžbu s (–2) i pribrojimo tako dobivenu jednadžbu prvoj jednadžbi sustava. Dobivamo:

$$0 = 3 - 4 \cdot y - 10 + 8 \cdot y$$
$$4 \cdot y - 8 \cdot y = 3 - 10$$
$$(-4) \cdot y = -7.$$

Odatle dijeljenjem s (–4) slijedi $y = \frac{7}{4}$.

19. 42; 129. Pola smjese kolača sadrži $\frac{1}{2} \cdot 28 = 14$ dag šećera i $\frac{1}{2} \cdot 86 = 43$ dag brašna. Stoga smjesa i pol sadrži ukupno 28 dag + 14 dag = 42 dag šećera i 86 + 43 = 129 dag brašna.

20. $\mathbf{2 \cdot S - b}$**.** Pomnožimo zadanu jednakost s 2, pa dobivamo redom:

$$2 \cdot S = a + b$$
$$a = 2 \cdot S - b.$$

21. Vidjeti Sliku 1. Graf zadane funkcije je parabola. Za crtanje bilo koje parabole dovoljno je odrediti koordinate bilo kojih triju njezinih točaka, od kojih točno jedna treba biti tjeme parabole. Iz zadane funkcije očitamo vrijednosti pripadnih parametara:

$$a = 1,\ b = 0,\ c = 2,$$

pa računamo koordinate tjemena parabole:

$$T\left(-\frac{b}{2 \cdot a}, \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}\right) \Rightarrow T\left(-\frac{0}{2 \cdot 1}, \frac{4 \cdot 1 \cdot 2 - 0^2}{4 \cdot 1}\right) \Rightarrow T\left(0,\ \frac{8}{4}\right) \Rightarrow T(0,\ 2).$$

Nadalje, primijetimo da za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi stroga nejednakost:

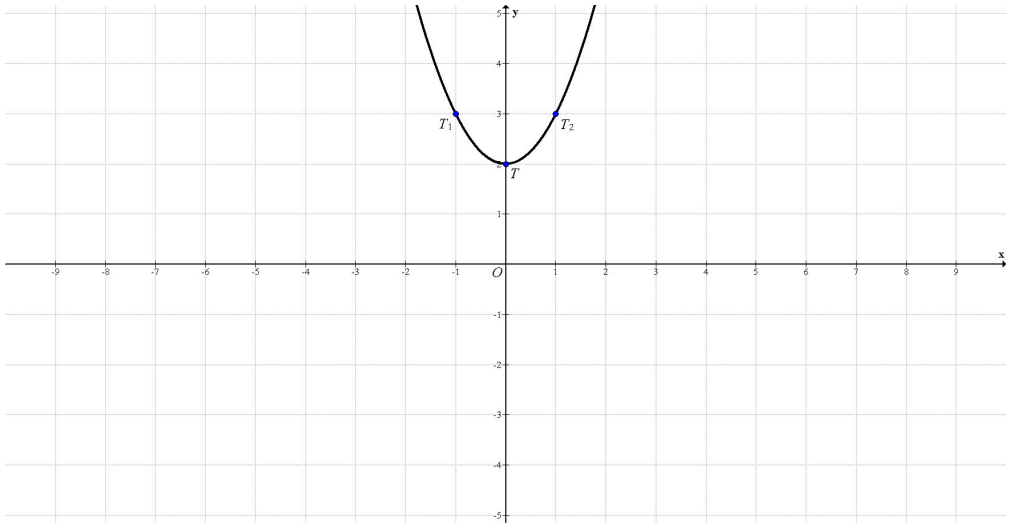
$$x^2 + 2 > 0,$$

što znači da funkcija f nema realnih nultočaka, tj. da njezin graf ne siječe os x. Sjecište toga grafa s osi y već smo odredili: to je tjeme parabole, tj. točka $T(0, 2)$.

Preostaje izračunati vrijednosti funkcije f za dvije različite vrijednosti varijable x. Radi lakšega crtanja, najbolje je odabrati točno jednu vrijednost varijable x koja je strogo manja od nule (tj. od prve koordinate tjemena parabole) i točno jednu vrijednost varijable x koja je strogo veća od nule (tj. od prve koordinate tjemena parabole). Uzmimo npr. $x = \pm 1$, pa dobijemo:

$$f(-1) = (-1)^2 + 2 = 1 + 2 = 3,$$
$$f(1) = 1^2 + 2 = 1 + 2 = 3.$$

Tako dobivamo još dvije točke parabole: $T_1(-1, 3)$ i $T_2(1, 3)$. Traženi graf prikazan je na Slici 1.



Slika 1.

22. $x_1 = \sqrt{5} + 1,\ x_2 = \sqrt{5} - 1$. Imamo redom:

$$x_{1,2} = \frac{2\cdot\sqrt{5} \pm \sqrt{\left(2\cdot\sqrt{5}\right)^2 - 4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1} = \frac{2\cdot\sqrt{5} \pm \sqrt{2^2\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2 - 16}}{2} = \frac{2\cdot\sqrt{5} \pm \sqrt{4\cdot 5 - 16}}{2} = \frac{2\cdot\sqrt{5} \pm \sqrt{20 - 16}}{2} =$$
$$= \frac{2\cdot\sqrt{5} \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{2\cdot\sqrt{5} \pm 2}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{2\cdot\sqrt{5} + 2}{2} = \frac{2\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)}{2} = \sqrt{5} + 1,\ x_2 = \frac{2\cdot\sqrt{5} - 2}{2} = \frac{2\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}{2} = \sqrt{5} - 1$$

23. (približno) 0.6876; 32.3373. Novčana vrijednost iskazana u eurima, novčana vrijednost iskazana u švicarskim francima i novčana vrijednosti iskazana u britanskim funtama su upravno razmjerne veličine. U rješenju zadatka primijenit ćemo verižni račun. Za izračun prvoga nepoznatog iznosa (u prvomu stupcu tablice) formiramo verižnik:

x GBP	1 €
1 €	1.5462 CHF
50 CHF	22.235157 GBP

Ovime je verižnik zatvoren, pa vrijednost nepoznanice x izračunamo kao količnik umnoška svih vrijednosti iz drugoga stupca verižnika i umnoška svih vrijednosti iz prvoga stupca verižnika (pri čemu vrijednosti jednake 1 zanemarujemo):

$$x = \frac{1.5462 \cdot 22.235157}{50} = 0.687599995068 \approx 0.6876.$$

Nepoznati iznos u drugomu stupcu tablice (označimo ga s y) izračunat ćemo iz razmjera:

$$y : 50 = 1 : 1.5462.$$

Iz toga razmjera slijedi:

$$1.5462 \cdot y = 50 \cdot 1,$$

odnosno

$$1.5462 \cdot y = 50.$$

Odatle dijeljenjem jednadžbe s 1.5462 dobivamo $y = 32.337343 \approx 32.3373$.

24. Vidjeti Sliku 2. Bilo koji pravac u ravnini jednoznačno je određen zadavanjem svojih bilo kojih dviju različitih točaka. Iz zadane jednadžbe pravca možemo očitati odsječak na osi y:

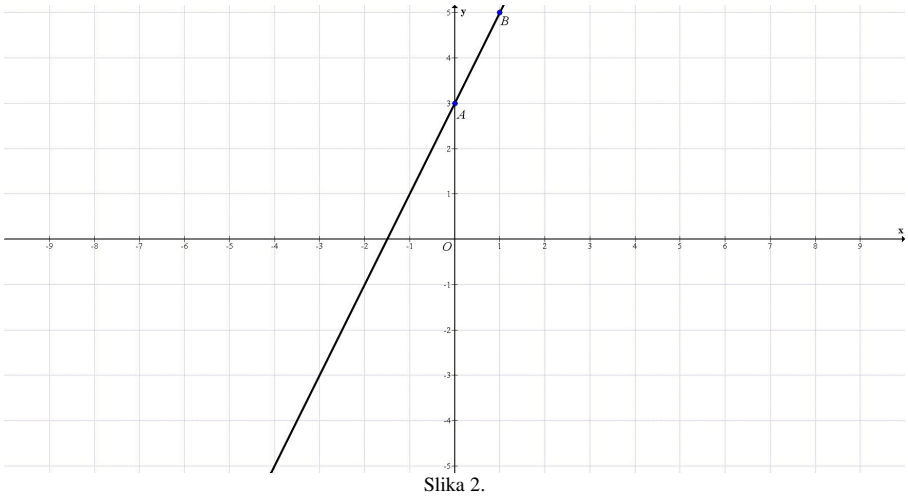
$$l = 3$$

pa pravac prolazi točkom $A(0, 3)$. Još jednu točku pravca dobit ćemo uzmemo li npr. $x = 1$ i izračunamo pripadnu vrijednost varijable y:

$$y = 2 \cdot 1 + 3 = 2 + 3 = 5.$$

Dakle, pravac prolazi i točkom $B(1, 5)$. Ucrtamo obje navedene točke u priloženi pravokutni koordinatni sustav u ravnini, te ih spojimo jednim pravcem.

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U PROSINCU 2010. – OSNOVNA RAZINA



Slika 2.

Nadalje, pravac usporedan sa zadanim pravcem ima isti koeficijent smjera kao i zadani pravac, tj. $k = 2$. Preostaje napisati jednadžbu pravca koji ima koeficijent smjera $k = 3$ i prolazi točkom T:

$$p \ldots y - (-2) = 2 \cdot (x - 0),$$
$$p \ldots y = 2 \cdot x + (-2),$$
$$p \ldots \mathbf{y = 2 \cdot x - 2.}$$

25. 1.) $\frac{4}{11}$. Pomnožimo zadanu jednadžbu s 6. Dobivamo:

$$3 \cdot (2 - x) = 2 \cdot (4 \cdot x + 1),$$
$$6 - 3 \cdot x = 8 \cdot x + 2,$$
$$-3 \cdot x - 8 \cdot x = 2 - 6$$
$$(-11) \cdot x = -4$$

Odatle dijeljenjem s (–11) slijedi $x = \frac{4}{11}$

2.) $\boldsymbol{x > \frac{19}{4}}$ **ili** $x \in \left\langle \frac{19}{4}, +\infty \right\rangle$. Imamo redom:

$$5 \cdot x + 15 + 2 \cdot x < 11 \cdot x - 4,$$
$$5 \cdot x + 2 \cdot x - 11 \cdot x < -4 - 15,$$
$$(-4) \cdot x < -19$$

Dijeljenjem ove nejednadžbe s (–4), pri čemu se znak nejednakosti mijenja iz < u >, slijedi $x > \frac{19}{4}$, odnosno, zapisano u obliku intervala, $x \in \left\langle \frac{19}{4}, +\infty \right\rangle$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U PROSINCU 2010. – OSNOVNA RAZINA

26. **1.) 56.75; 2.) 14.97797 ≈ 14.98.** Obujam od 12.5 galona jednak je obujmu od $4.54 \cdot 12.5 = 56.75$ litara. Obujam od 68 litara jednak je obujmu od $\frac{68}{4.54} \approx 14.977973 \approx 14.98$ galona.

27. **1.) 0.8**. Iz grafa očitamo: $f(1.2) = 0.8$.
2.) 102. Iz grafa vidimo da se tijelo ukupno gibalo 1.7 sati, odnosno $1.7 \cdot 60 = 102$ minute.
3.) 0.6. Tijelo se počelo gibati jednolikom brzinom 0.4 sata nakon početka gibanja i prestalo se gibati jednolikom brzinom 1 sat nakon početka gibanja (te se tada ponovno počelo gibati jednoliko ubrzano). Stoga je traženo vrijeme $t = 1$ sat – 0.4 sata = 0.6 sati.

28. Sastanku je nazočilo ukupno 24 + 14 = 38 učenika, što čini 76% ukupnoga broja članova vijeća. Označimo li s x ukupan broj članova vijeća, zaključujemo da mora vrijediti jednakost:

$$\frac{76}{100} \cdot x = 40 .$$

Odatle slijedi

$$x = 38 : \frac{76}{100} = 38 \cdot \frac{100}{76} = \frac{3\,800}{76} = 50 .$$

Dakle, učeničko vijeće u punom sastavu broji ukupno 50 članova.

1.) 48. Tražimo koliko postotaka iznosi 24 u odnosu na 50. Analogno kao u zadatku **17.** dobijemo:

$$p = \frac{24}{50} \cdot 100 = \frac{2\,400}{50} = 48[\%]$$

Dakle, za prijedlog je glasovalo 48% od ukupnoga broja članova vijeća.

2.) 25. Najmanji broj glasova potreban za izglasavanje prijedloga iznosi 65% od ukupnoga broja nazočnih članova, tj. 65% od 38. Izračunajmo koliko iznosi 65% od 38:

$$P = \frac{65}{100} \cdot 38 = \frac{13}{20} \cdot 38 = \frac{494}{20} = \frac{247}{10} = 24.7 .$$

Budući da broj glasova, prema prirodi zadatka, nužno mora biti prirodan broj, dobiveni postotni iznos zaokružujemo na prvi veći prirodan broj, tj. na 25. (Ovo zaokruživanje nema veze s prvom decimalom iza decimalne točke jer se u zadatku zahtijeva da postotni udio broja glasova za prihvaćanje prijedloga u odnosu na ukupan broj nazočnih članova bude strogo veći od 65%, pa se uvijek zaokružuje naviše). Dakle, traženi broj članova je 25.

pripremio:
mr.sc. Bojan Kovačić, predavač