TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U PROSINCU 2011. – VIŠA RAZINA

I. ZADATCI VIŠESTRUKOGA IZBORA

1. **A.** Pomnožimo zadanu jednadžbu s 2. Dobivamo:

$$x - 3 - 2 \cdot 2 \cdot (4 - 3 \cdot x) = 2 \cdot (2 - x),$$
$$x - 3 - 16 + 12 \cdot x = 4 - 2 \cdot x,$$
$$x + 12 \cdot x + 2 \cdot x = 4 + 3 + 16,$$
$$15 \cdot x = 23.$$

Dijeljenjem s 15 dobivamo $x = \frac{23}{15}$.

2. **C.** Odredimo najprije koordinate točaka C i E. Iz podatka da je koordinata točke C aritmetička sredina koordinata točaka B i D slijedi da je koordinata točke C jednaka

$$\frac{-\frac{3}{4}+\frac{9}{2}}{2} = \frac{-\frac{3}{4}+\frac{18}{4}}{2} = \frac{\frac{15}{4}}{2} = \frac{15}{8},$$

tj. $C\left(\frac{15}{8}\right)$. Tako je koordinata točke E jednaka

$$\frac{15}{8} - 3 = \frac{15}{8} - \frac{24}{8} = -\frac{9}{8},$$

tj. $E\left(-\frac{9}{8}\right)$.

Preostaje poredati brojeve $0, -\frac{3}{4}, \frac{9}{2}, \frac{15}{8}, -\frac{9}{8}$ i $\frac{80}{21}$ uzlazno po veličini (od najmanjega do najvećega). Svedimo te razlomke na najmanji zajednički nazivnik. Taj je nazivnik jednak $21 \cdot 8 = 168$. Tako dobijemo niz $0, -\frac{126}{168}, \frac{756}{168}, \frac{315}{168}, -\frac{189}{168}$ i $\frac{640}{168}$ koji je lako uzlazno sortirati:

$$-\frac{189}{168}, -\frac{126}{168}, 0, \frac{315}{168}, \frac{640}{168}, \frac{756}{168}.$$

Odatle zaključujemo da se točka $A\left(\frac{80}{21}\right)$, tj. točka $A\left(\frac{640}{168}\right)$ nalazi između točaka $C\left(\frac{15}{8}\right)$, tj. $C\left(\frac{315}{168}\right)$ i $D\left(\frac{9}{2}\right)$, tj. $D\left(\frac{756}{168}\right)$.

Napomena: Zadatak je moguće riješiti i decimalnom aproksimacijom svih zadanih razlomaka npr. s točnošću od 10^{-5}. No, izložena metoda rješenja zadatka vrijedi za bilo koje razlomke i moguće ju je primijeniti u bilo kojem slučaju bez potrebe razmatranja točnosti aproksimacije razlomaka decimalnim brojevima.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U PROSINCU 2011. – VIŠA RAZINA

3. **B.** Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je a = 5 cm, a samim tim i α = 30°. Izračunajmo duljine ostalih dviju stranica zadanoga trokuta. Imamo redom:

$$b = a \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 5 \cdot \operatorname{ctg} 30° = 5 \cdot \sqrt{3} \text{ cm},$$
$$c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{5}{\sin 30°} = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10 \text{ cm}.$$

Opseg zadanoga trokuta iznosi

$$O = a + b + c = 5 + 5 \cdot \sqrt{3} + 10 = 15 + 5 \cdot \sqrt{3} \text{ cm},$$

dok je površina jednaka

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} = \frac{25}{2} \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Odatle zaključujemo da je od četiriju ponuđenih tvrdnji točna jedino druga tvrdnja.

4. **B**. Cijeli zadani blok možemo zamisliti kao kvadar (uspravni pravokutni paralelepiped) čije su dimenzije 21.5 cm, 29.7 cm i 6.5 mm = $\frac{6.5}{10}$ cm = 0.65 cm. Obujam toga kvadra jednak je umnošku njegovih dimenzija:

$$V = a \cdot b \cdot c = 21.5 \cdot 29.7 \cdot 0.65 = 415.0575 \text{ cm}^3.$$

Iz formule za izračun gustoće slijedi da je masa cijeloga bloka papira jednaka umnošku gustoće papira i obujma cijeloga bloka:

$$m = \rho \cdot V,$$
$$m = 1.20 \text{ g/cm}^3 \cdot 415.0575 \text{ cm}^3,$$
$$m = 498.069 \text{ g}.$$

Preostaje zaključiti: Ako blok od 100 listova papira ima masu 498.069 g, onda je masa jednoga lista papira 100 puta manja od mase bloka i iznosi

$$m' = \frac{498.069}{100} = 4.98069 \approx 4.98 \text{ g}.$$

5. **A**. Prema definiciji funkcije apsolutne vrijednosti, iz zadane jednadžbe proizlazi $3 \cdot x + 5 = \pm 2$, odnosno

$$3 \cdot x + 5 = -2 \text{ ili } 3 \cdot x + 5 = 2,$$

odnosno

$$3 \cdot x = -2 - 5 \text{ ili } 3 \cdot x = 2 - 5,$$

odnosno

$$3 \cdot x = -7 \text{ ili } 3 \cdot x = -3,$$

te nakon dijeljenja s 3

$$x = -\frac{7}{3} \text{ ili } x = -1.$$

Dakle, skup svih rješenja zadane jednadžbe je $S = \left\{-\frac{7}{3},\ -1\right\}$. Oba elementa skupa S su strogo negativni racionalni brojevi, pa treći i četvrti interval ne dolaze u obzir jer ti intervali sadrže isključivo strogo pozitivne realne brojeve. Također, oba elementa skupa S su strogo manja od $-\frac{1}{3}$, pa niti drugi interval ne dolazi u obzir jer on sadrži realne brojeve strogo veće od $-\frac{1}{3}$ (i strogo manje od $\frac{8}{3}$, ali taj podatak nije bitan). Budući da očito vrijede nejednakosti:

$$-\frac{11}{3} < -\frac{7}{3} < -1 < -\frac{1}{3},$$

zaključujemo da oba elementa skupa S pripadaju intervalu $\left\langle -\frac{11}{3},\ -\frac{1}{3} \right\rangle$.

6. **B.** Oduzmimo drugu jednadžbu od prve. Dobivamo:

$$(-2) \cdot x + (-2) \cdot y = 4,$$

a odatle dijeljenjem s (–2) izravno slijedi

$$x + y = -2.$$

7. **D.** Neka je $C > 0$ početna cijena jakne, odnosno hlača. Nakon poskupljenja od 20% nova cijena jakne iznosi

$$C_j = C + \frac{20}{100} \cdot C = C \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right) = C \cdot \frac{100+20}{100} = \frac{120}{100} \cdot C.$$

Nakon prvoga poskupljenja od 10% cijena hlača iznosi

$$C_1 = C + \frac{10}{100} \cdot C = C \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right) = C \cdot \frac{100+10}{100} = \frac{110}{100} \cdot C = \frac{11}{10} \cdot C,$$

a nakon drugoga poskupljenja od 10% cijena hlača iznosi

$$C_h = C_1 + \frac{10}{100}\cdot C_1 = C_1\cdot\left(1+\frac{10}{100}\right) = C_1\cdot\frac{100+10}{100} = \frac{110}{100}\cdot C_1 = \frac{11}{10}\cdot C_1 = \frac{11}{10}\cdot\frac{11}{10}\cdot C = \frac{121}{100}\cdot C .$$

Budući da je $C > 0$ jer cijena ne može biti nepozitivan realan broj, zaključujemo da vrijedi:

$$C_h = \frac{121}{100}\cdot C > \frac{120}{100}\cdot C = C_j ,$$

pa su hlače skuplje od jakne za $\dfrac{\frac{121}{100}\cdot C - \frac{120}{100}\cdot C}{\frac{120}{100}\cdot C}\cdot 100 = \dfrac{\frac{1}{100}\cdot C}{\frac{120}{100}\cdot C}\cdot 100 = \dfrac{100}{120} = \dfrac{5}{6}\,\% \approx 0.83\%.$

8. **B.** Iz zadanih podataka slijedi da se u slučaju pražnjenja bačve samo kroz otvor A u jednoj minuti isprazni $\frac{1}{12}$ bačve, te, analogno, u slučaju pražnjenja bačve samo kroz otvor B u jednoj minuti isprazni $\frac{1}{6}$ bačve. Otvorimo li oba otvora, u jednoj minuti ispraznit će se $\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{12}+\frac{2}{12}=\frac{3}{12}=$ $=\frac{1}{4}$ bačve. Stoga su za pražnjenje cijele bačve kroz oba otvora potrebne $1:\frac{1}{4} = 1\cdot 4 = 4$ minute.

9. **A.** Koristeći formulu za razliku kvadrata imamo redom:

$$\left[\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right):(a+b)+\frac{a}{b}-1\right]\cdot\frac{b}{1+a} = \left(\frac{a^2-b^2}{a\cdot b}\cdot\frac{1}{a+b}+\frac{a}{b}-1\right)\cdot\frac{b}{1+a} = \left[\frac{(a-b)\cdot(a+b)}{a\cdot b}\cdot\frac{1}{a+b}+\frac{a}{b}-1\right]\cdot\frac{b}{1+a} =$$
$$= \left(\frac{a-b}{a\cdot b}+\frac{a}{b}-1\right)\cdot\frac{b}{1+a} = \frac{a-b+a\cdot a-a\cdot b}{a\cdot b}\cdot\frac{b}{1+a} = \frac{(a-b)+a\cdot(a-b)}{a}\cdot\frac{1}{1+a} = \frac{(a-b)\cdot(1+a)}{a}\cdot\frac{1}{1+a} = \frac{a-b}{a}.$$

10. **C**. Postavljeni zadatak najlakše je riješiti pomoću vektora i njihova skalarnoga umnoška. Iz slike je razvidno da je $A(-2, -1)$, $B(1, -3)$ i $C(2, 2)$. Stoga je:

$$\overrightarrow{BA} = (x_A - x_B)\cdot\vec{i} + (y_A - y_B)\cdot\vec{j} = (-2-1)\cdot\vec{i} + [-1-(-3)]\cdot\vec{j} = (-3)\cdot\vec{i} + 2\cdot\vec{j},$$
$$\overrightarrow{BC} = (x_C - x_B)\cdot\vec{i} + (y_C - y_B)\cdot\vec{j} = (2-1)\cdot\vec{i} + [2-(-3)]\cdot\vec{j} = \vec{i} + 5\cdot\vec{j}.$$

Označimo li traženi kut s β, primjenom skalarnoga umnoška dobijemo:

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} = \frac{\left[(-3)\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}\right]\cdot\left(\vec{i}+5\cdot\vec{j}\right)}{\sqrt{(-3)^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+5^2}} = \frac{(-3)\cdot 1+2\cdot 5}{\sqrt{9+4}\cdot\sqrt{1+25}} = \frac{-3+10}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}} = \frac{7}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}} = \frac{7}{13\cdot\sqrt{2}} =$$
$$= \frac{7\cdot\sqrt{2}}{13\cdot 2} = \frac{7}{26}\cdot\sqrt{2}$$

Odatle je $\beta = 67.619864948° \approx 67°37'11.5'' \approx 67°37'12''$.

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U PROSINCU 2011. – VIŠA RAZINA

11. D. Iz zadane formule izrazimo veličinu F. Pomnožimo navedenu jednakost s $\frac{9}{5}$ i iz dobivene jednakosti izrazimo F:

$$\frac{9}{5}\cdot C = F - 32,$$

$$F = \frac{9}{5}\cdot C + 32\,.$$

Neka je početna temperatura T (iskazana u stupnjevima Celzijusa). Promjena od 10 stupnjeva Celzijusa zapravo znači povećanje temperature za 10 stupnjeva Celzijusa, pa nova temperatura iznosi $T + 10$ stupnjeva Celzijusa. Ta promjena iskazana u stupnjevima Fahrenheita iznosi:

$$\Delta F = \left[\frac{9}{5}\cdot(T+10)+32\right]-\left(\frac{9}{5}\cdot T+32\right)=\frac{9}{5}\cdot 10 = 18 \text{ stupnjeva Fahrenheita.}$$

12. C. Imamo redom:

$5 \cdot 2^{2010} - 3 \cdot 2^{2011} + 14 \cdot 2^{2009} = 5 \cdot 2^{2010} - 3 \cdot 2 \cdot 2^{2010} + 7 \cdot 2 \cdot 2^{2009} = 5 \cdot 2^{2010} - 6 \cdot 2^{2010} + 7 \cdot 2^{2010} = (5 - 6 + 7) \cdot 2^{2010} = 6 \cdot 2^{2010} = 3 \cdot 2 \cdot 2^{2010} = 3 \cdot 2^{2011}$.

13. B. Riješimo zasebno svaku pojedinu jednadžbu.

$2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 = 2 \cdot x - 3 \Leftrightarrow x^2 \cdot (2 \cdot x - 3) = 2 \cdot x - 3 \Leftrightarrow x^2 \cdot (2 \cdot x - 3) - (2 \cdot x - 3) = 0 \Leftrightarrow (2 \cdot x - 3) \cdot (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (2 \cdot x - 3) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot x - 3 = 0$ ili $x + 1 = 0$ ili $x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot x = 3$ ili $x = -1$ ili $x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ ili $x = -1$ ili $x = 1 \Leftrightarrow x \in \left\{-1,\ 1,\ \frac{3}{2}\right\}$. Sva tri rješenja ove jednadžbe su očito racionalni brojevi.

$x^4 - 3 \cdot x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 2 \cdot x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x^2 - 1) - 2 \cdot (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot \left(x+\sqrt{2}\right)\cdot\left(x-\sqrt{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ ili $x - 1 = 0$ ili $x+\sqrt{2}=0$ ili $x-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow x = -1$ ili $x = 1$ ili $x = \sqrt{2}$ ili $x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow x \in \left\{-\sqrt{2},\ -1,\ 1,\ \sqrt{2}\right\}$. Od dobivenih četiriju realnih rješenja ove jednadžbe dva rješenja su racionalni brojevi (to su -1 i 1), a dva rješenje su iracionalni brojevi (to su $-\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$).

$\cos(\pi \cdot x) = 1 \Leftrightarrow \pi\cdot x = 2\cdot k\cdot\pi,\ k\in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x = 2 \cdot k,\ k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x \in \{2 \cdot k : k \in \mathbf{Z}\}$. Budući da za svaki $k \in \mathbf{Z}$ vrijedi $2 \cdot k \in \mathbf{Z}$ jer je umnožak dvaju cijelih brojeva ponovno cijeli broj, sva rješenja ove jednadžbe su cijeli brojevi, pa posebno i racionalni brojevi.

Četvrta jednadžba ima smisla za $x > 0$ jer je prirodno područje definicije funkcije $\log x$ skup $\langle 0, +\infty\rangle$. Stoga je $\log(x^2) = 2 \cdot \log x$ i, neovisno o tome, $\log 100 = \log(10^2) = 2 \cdot \log 10 = 2 \cdot 1 = 2$, pa četvrtu jednadžbu možemo pisati u obliku:

$$2 \cdot \log x - \log x = 2,$$

odnosno

$$\log x = 2.$$

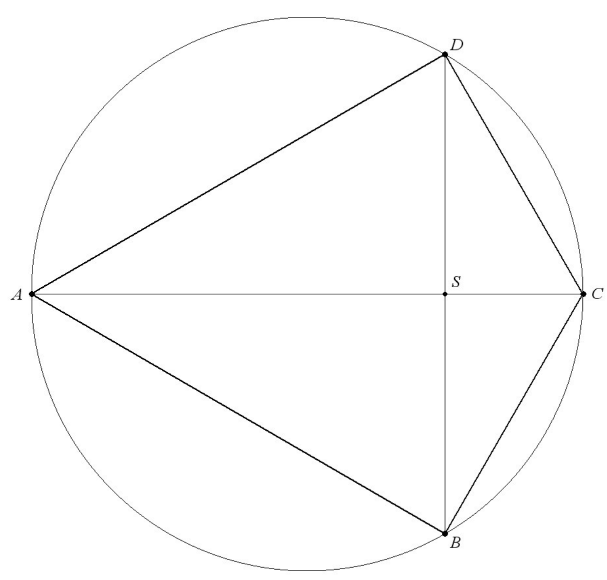
Odatle je $x = 10^2$, tj. $x = 100$, i to je jedino rješenje polazne jednadžbe. Stoga ova jednadžba ima jedinstveno rješenje i ono je prirodan, pa posebno i racionalan broj.

Zaključimo: Od četiriju ponuđenih jednadžbi jedino druga jednadžba ima barem jedno rješenje koje pripada skupu iracionalnih brojeva.

14. A. Uspješnost nakon $2 \cdot n$ ponavljanja iznosi $p(2 \cdot n) = \frac{5+9\cdot(2\cdot n-1)}{10+9\cdot(2\cdot n-1)} = \frac{5+18\cdot n-9}{10+18\cdot n-9} = \frac{18\cdot n-4}{18\cdot n+1}$, a uspješnost nakon n ponavljanja $p(n) = \frac{5+9\cdot(n-1)}{10+9\cdot(n-1)} = \frac{5+9\cdot n-9}{10+9\cdot n-9} = \frac{9\cdot n-4}{9\cdot n+1}$.

Tražena razlika tih dviju uspješnosti iznosi $p(2\cdot n) - p(n) = \frac{18\cdot n-4}{18\cdot n+1} - \frac{9\cdot n-4}{9\cdot n+1} = \frac{(18\cdot n-4)\cdot(9\cdot n+1)-(9\cdot n-4)\cdot(18\cdot n+1)}{(18\cdot n+1)(9\cdot n+1)} = \frac{162\cdot n^2-36\cdot n+18\cdot n-4-162\cdot n^2+72\cdot n-9\cdot n+4}{(18\cdot n+1)(9\cdot n+1)} = \frac{45\cdot n}{(9\cdot n+1)\cdot(18\cdot n+1)}$.

15. B. Vidjeti Sliku 1. Neka je S sjecište dijagonala AC i BD.



Slika 1.

Dokažimo najprije da je $\left|\overline{DS}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{BD}\right|$. Prema pretpostavci, dužina $\overline{AB}$ je promjer kružnice. Prema Talesovu poučku, svaki kut konstruiran nad promjerom kružnice (takav da vrh toga kuta pripada kružnici) je pravi kut. To znači da je

$$\angle CDA = \angle CBA = 90°,$$

pa su trokutovi ACD i ABC pravokutni sa zajedničkom hipotenuzom AC.
Nadalje, prema pretpostavci vrijedi $\overline{BD} \perp \overline{AC}$. To znači da su dužine $\overline{DS}$ i $\overline{BS}$ visine na hipotenuzu $\overline{AC}$ u pravokutnim trokutovima ACD i ABC. Te dvije visine imaju zajedničko nožište S. Prema Euklidovu poučku, duljina svake od tih visina jednaka je drugom korijenu iz umnoška duljina odsječaka na koje nožište visine dijeli hipotenuzu. U obama su slučajevima ti odsječci dužine $\overline{AS}$ i $\overline{CS}$. To znači da su duljine spomenutih dviju visina međusobno jednake, tj.

$$\left|\overline{DS}\right| = \left|\overline{BS}\right|.$$

Ovu jednakost uvrstimo u jednakost $\left|\overline{DS}\right| + \left|\overline{BS}\right| = \left|\overline{BD}\right|$, pa slijedi:

$$\left|\overline{DS}\right| + \left|\overline{DS}\right| = \left|\overline{BD}\right|$$

i odatle izravno $\left|\overline{DS}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{BD}\right|$, što smo i tvrdili. Dakle, $\left|\overline{DS}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{BD}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10}$ cm.
Primjenom Pitagorina poučka na pravokutan trokut CDS (s pravim kutom kod vrha S) dobijemo:

$$|CS| = \sqrt{|CD|^2 - |DS|^2} = \sqrt{\left(5 \cdot \sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{10}\right)^2} = \sqrt{25 \cdot 5 - \frac{1}{4} \cdot 10} = \sqrt{125 - \frac{10}{4}} = \sqrt{\frac{125 \cdot 4 - 10}{4}} =$$
$$= \sqrt{\frac{500 - 10}{4}} = \sqrt{\frac{490}{4}} = \sqrt{\frac{49 \cdot 10}{4}} = \frac{7}{2} \cdot \sqrt{10} \text{ cm}$$

Ponovno primjenom Euklidova poučka na trokut ACD dobijemo:

$$|DS|^2 = |AS| \cdot |CS| \Leftrightarrow |AS| = \frac{|DS|^2}{|CS|} = \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{10}\right)^2}{\frac{7}{2} \cdot \sqrt{10}} = \frac{\frac{10}{4}}{\frac{7}{2} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5}{7 \cdot \sqrt{10}} = \frac{5 \cdot \sqrt{10}}{7 \cdot 10} = \frac{1}{14} \cdot \sqrt{10} \text{ cm.}$$

Stoga je tražena duljina dijagonale $\overline{AC}$ jednaka

$$\left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{AS}\right| + \left|\overline{CS}\right| = \frac{1}{14} \cdot \sqrt{10} + \frac{7}{2} \cdot \sqrt{10} = \left(\frac{1}{14} + \frac{7}{2}\right) \cdot \sqrt{10} = \frac{1 + 49}{14} \cdot \sqrt{10} = \frac{50}{14} \cdot \sqrt{10} = \frac{25}{7} \cdot \sqrt{10} \approx 11.29 \text{ cm.}$$

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U PROSINCU 2011. – VIŠA RAZINA

II. ZADATCI KRATKIH ODGOVORA

16. $\frac{55}{32}$**.** Imamo redom:

$$\frac{a-\frac{5}{b}}{b-\frac{3}{a}}=\frac{\frac{a\cdot b-5}{b}}{\frac{a\cdot b-3}{a}}=\frac{a\cdot(a\cdot b-5)}{b\cdot(a\cdot b-3)}=\frac{\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}-5\right)}{\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}-3\right)}=\frac{\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{5}-5\right)}{\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}-3\right)}=\frac{\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3-25}{5}\right)}{\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{3-15}{5}\right)}=\frac{\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{22}{5}\right)}{\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{12}{5}\right)}=\frac{-\frac{33}{10}}{-\frac{48}{25}}=\frac{55}{32}$$

17. $\frac{2\cdot P}{a\cdot\sin\beta}$**.** Množenjem zadane jednakosti s $\frac{2}{a\cdot\sin\beta}$ odmah dobivamo $c=\frac{2\cdot P}{a\cdot\sin\beta}$.

18. 1.) $\frac{3}{5}\cdot\sqrt{5}$**.** Najprije zapišimo jednadžbu zadanoga pravca u implicitnom obliku. Pomnožimo zadanu jednadžbu s 4, pa dobijemo:

$$2\cdot x-y=4,$$
$$2\cdot x-y-4=0.$$

Tako dobivamo da je tražena udaljenost jednaka:

$$d=\frac{|2\cdot 2-3-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|4-3-4|}{\sqrt{4+1}}=\frac{|-3|}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3}{5}\cdot\sqrt{5}.$$

2.) $y=-\frac{1}{2}\cdot x+3$ **ili** $x+2\cdot y-6=0$ **ili** $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$ **.** Tražena simetrala je pravac koji prolazi polovištem zadane dužine okomito na pravac kojem pripada zadana dužina. Koeficijent smjera toga pravca je

$$k=-\frac{x_B-x_A}{y_B-y_A}=-\frac{2-6}{-3-5}=-\frac{-4}{-8}=-\frac{1}{2}.$$

Polovište zadane dužine je točka

$$P\left(\frac{x_A+x_B}{2},\ \frac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\frac{6+2}{2},\ \frac{5+(-3)}{2}\right)=(4,\ 1).$$

Stoga je tražena jednadžba simetrale (u eksplicitnom obliku)

$$y-1=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(x-4),$$

$$y = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x + 2 + 1,$$
$$y = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x + 3.$$

Rješenje zadatka još je moguće zapisati u dvama oblicima: implicitnom i segmentnom:

$$y = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x + 3 \quad / \cdot 2$$
$$2 \cdot y = -x + 6,$$
$$x + 2 \cdot y - 6 = 0 \Rightarrow \text{ implicitni oblik: } x + 2 \cdot y - 6 = 0$$
$$x + 2 \cdot y = 6, \quad / : 6$$
$$\frac{x}{6} + \frac{2 \cdot y}{6} = 1,$$
$$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow \text{ segmentni oblik: } \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1.$$

19. 1.) 6; 9. Pretpostavimo da je $B(x_B, y_B)$. Tada je $\overrightarrow{AB} = (x_B + 2) \cdot \vec{i} + (y_B - 3) \cdot \vec{j}$, pa dobivamo sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$x_B + 2 = 8,$$
$$y_B - 3 = 6.$$

Iz prve jednadžbe je odmah $x_B = 8 - 2 = 6$, a iz druge $y_B = 6 + 3 = 9$. Dakle, $B(6, 9)$.

2.) –*a* + 2 ili 2 – *a*. Najprije je

$$\vec{a} + \vec{b} = (2 + 5) \cdot \vec{i} + (4 - 10) \cdot \vec{j} = 7 \cdot \vec{i} - 6 \cdot \vec{j},$$

pa slijedi:

$$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|7 \cdot \vec{i} - 6 \cdot \vec{j}\right| = \sqrt{7^2 + (-6)^2} = \sqrt{49 + 36} = \sqrt{85}.$$

20. 1.) Vidjeti Sliku 2. Zadana funkcija je polinom drugoga stupnja (odnosno, kvadratna funkcija). Njezin graf je parabola. Za potpuno određivanje bilo koje parabole dovoljno je zadati bilo koje tri njezine točke. U ovom slučaju odredit ćemo presjecišta parabole i osi apscisa (osi x), te tjeme parabole.

Presjecišta parabole s osi x su točke čije su prve koordinate nultočke zadane funkcije. Stoga riješimo jednadžbu $f(x) = 0$. Imamo redom:

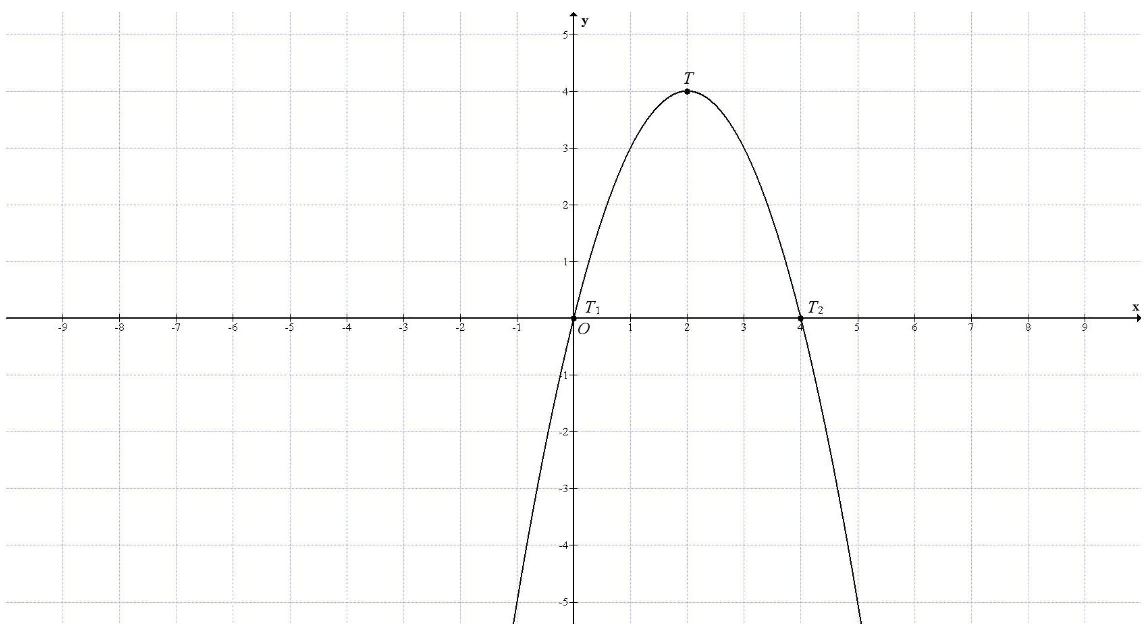
$$-x^2 + 4 \cdot x = 0,$$
$$(-1) \cdot x \cdot (x - 4) = 0.$$

Odatle slijedi $x = 0$ ili $x - 4 = 0$, tj. $x = 0$ ili $x = 4$. Dakle, nultočke zadane funkcije su $x = 0$ i $x = 4$, pa njezin graf siječe os apscisa u točkama $T_1(0, 0)$ i $T_2(4, 0)$.

Preostaje odrediti tjeme tražene parabole:

$$T\left(-\frac{4}{2\cdot(-1)}, \frac{4\cdot(-1)\cdot 0-4^2}{4\cdot(-1)}\right)=\left(-\frac{4}{-2}, \frac{0-16}{-4}\right)=(2,\ 4)\,.$$

Istaknimo da zbog negativnoga vodećega koeficijenta (to je broj –1 uz potenciju x^2) tražena parabola ima oblik znaka presjeka skupova, tj. $\cap$.



Slika 2.

2.) Vidjeti Sliku 3. Iz podatka da je $A(-1, 0)$ točka lokalnoga maksimuma, a $C(1, -2)$ točka lokalnoga minimuma slijedi da polinom p strogo raste na intervalu $\langle -2, -1\rangle$, strogo pada na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ i potom strogo raste na intervalu $\langle 1, 3\rangle$. Njegov graf presijeca os apscisa u točkama A i D, a os ordinata u točki B. Crtamo ga ovako:

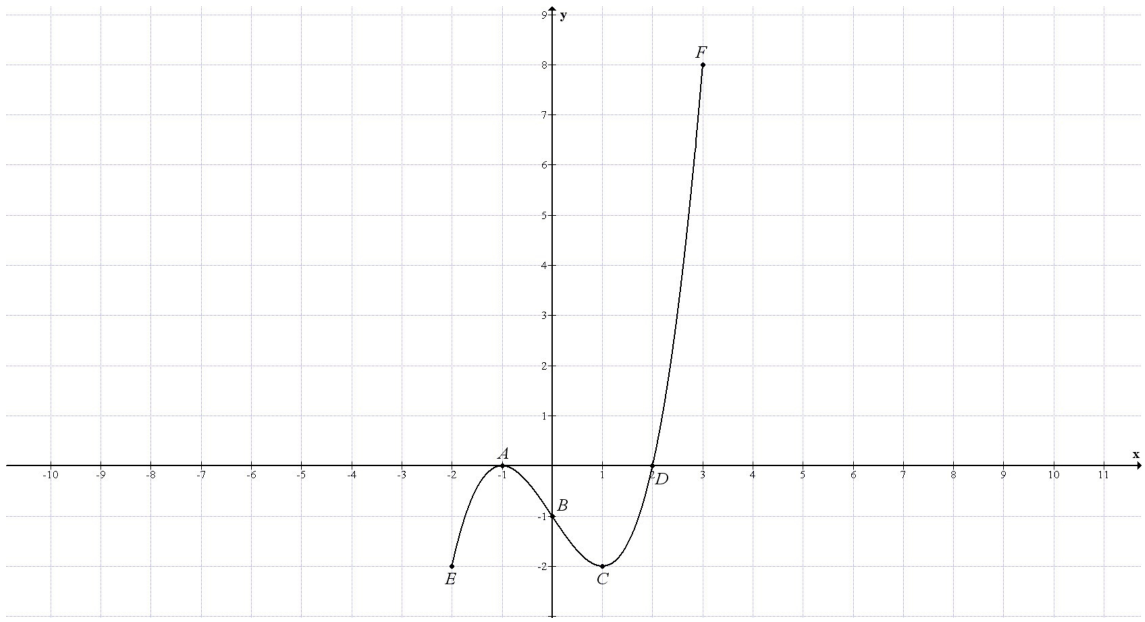
Proizvoljno odredimo točku $E(-2, p(2))$, ali moramo paziti da ona bude „ispod“ točke $A(-1, 0)$. Zadamo npr. $E(-2, -2)$. Spojimo točke E i A „rastućom“ krivuljom (bez ijednoga ravnoga dijela). Potom u točki A napravimo „zaokret“ i spojimo je s točkom B „padajućom“ krivuljom (bez ijednoga ravnoga dijela). Prođemo kroz točku B i dalje crtajući „padajuću“ krivulju (bez ijednoga ravnoga dijela) i dođemo do točke C. Potom u točki C napravimo novi „zaokret“ i spojimo točke C i D „rastućom“ krivuljom (bez ijednoga ravnoga dijela). Naposljetku, nastavimo crtanje „rastuće“ krivulje (bez ijednoga ravnoga dijela) prema proizvoljno odabranoj točki $F(3, p(3))$, npr. $F(3, 8)$. Tako dobivamo traženi graf.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U PROSINCU 2011. – VIŠA RAZINA



Slika 3.

Napomena: Nije teško pokazati da polinom p čiji smo graf na intervalu $\langle -2, 3\rangle$ upravo nacrtali ima propis $p(x) = \frac{1}{2}\cdot x^3 - \frac{3}{2}\cdot x - 1$.

21. 1.) $\left\langle -2, \frac{1}{4}\right\rangle$. Riješimo najprije pripadnu kvadratnu jednadžbu $4 \cdot x^2 - 7 \cdot x - 2 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4\cdot 4\cdot(-2)}}{2\cdot 4} = \frac{-7 \pm \sqrt{49+32}}{8} = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{8} = \frac{-7 \pm 9}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-7+9}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4},\ x_2 = \frac{-7-9}{8} = -\frac{16}{8} = -2$$

Graf pripadnoga polinoma drugoga stupnja (kvadratne funkcije) je parabola koja ima oblik znaka unije skupova ($\cup$) jer je vodeći koeficijent polinoma (koeficijent uz potenciju x^2) strogo veći od nule (to je broj 4). Stoga dotični polinom drugoga stupnja poprima strogo negativne vrijednosti na otvorenom intervalu određenom realnim nultočkama toga polinoma, pa je rješenje zadatka otvoreni interval $\left\langle -2, \frac{1}{4}\right\rangle$.

2.) $\boldsymbol{x \geq -1}$ **ili** $\boldsymbol{x \in [-1, +\infty\rangle}$ **.** Podijelimo cijelu nejednadžbu s njezinom desnom stranom. Ona je sigurno strogo pozitivan realan broj jer je riječ o umnošku strogo pozitivnoga realnoga broja 7 i potencije 14^x koja je uvijek strogo pozitivna. Dobivamo:

$$\frac{8\cdot 16^x}{7\cdot 14^x}\geq 1,$$
$$\frac{8}{7}\cdot\left(\frac{16}{14}\right)^x\geq 1,$$
$$\frac{8}{7}\cdot\left(\frac{8}{7}\right)^x\geq 1,$$
$$\left(\frac{8}{7}\right)^{x+1}\geq 1,$$
$$\left(\frac{8}{7}\right)^{x+1}\geq\left(\frac{8}{7}\right)^0$$

Baza potencije na lijevoj, odnosno desnoj strani posljednje nejednakosti je strogo pozitivan realan broj strogo veći od 1, pa se „skidanjem“ eksponenata znak nejednakosti neće promijeniti. Tako dobivamo nejednadžbu:

$$x + 1 \geq 0,$$

iz koje je $x \geq -1$. Dakle, rješenje zadatka je poluotvoreni interval $[-1, +\infty\rangle$.

22. **1.) ≈ 126°52'12''**. Pomoću kalkulatora odredimo šiljasti kut (tj. kut iz intervala $\langle 0, 90°\rangle$) čiji je sinus jednak 0.8. To je kut $\beta \approx 53.1301° \approx 53°7'48''$. Preostaje primijeniti identitet

$$\sin(180° - \beta) = \sin\beta,$$

prema kojemu kutovi β i $180° - \beta$ imaju jednake vrijednosti funkcije sinus. Tako dobivamo:

$$\alpha = 180° - \beta \approx 180° - 53°7'48 = 126°52'12''.$$

2.) ≈ 99°35'39''. Najveći kut zadanoga trokuta nalazi se nasuprot najdulje stranice, tj. nasuprot stranice čija je duljina 9 cm. Primjenom kosinusova poučka slijedi:

$$\cos\alpha=\frac{3^2+8^2-9^2}{2\cdot 3\cdot 8}=\frac{9+64-81}{48}=-\frac{8}{48}=-\frac{1}{6}.$$

Pomoću kalkulatora dobivamo traženi kut: $\alpha \approx 99.59407° \approx 99°35'39''$.

23. **1.) 61.94.** Središnji kut pravilnoga peterokuta jednak je $\alpha=\frac{360°}{5}=72°$. Duljina visine jednoga od karakterističnih trokutova pravilnoga peterokuta jednaka je $v=\frac{a}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, pa je površina petrokuta jednaka:

$$P = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot v = \frac{5}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{4} \cdot a^2 \cdot \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{4} \cdot 6^2 \cdot \mathrm{ctg}\frac{72°}{2} = \frac{5}{4} \cdot 36 \cdot \mathrm{ctg}\ 36° = 45 \cdot \mathrm{ctg}\ 36° \approx 61.94$$ cm^2.

Napomena: Može se pokazati da je točna vrijednost tražene površine $P = 9 \cdot \sqrt{5 \cdot \left(5 + 2 \cdot \sqrt{5}\right)}$ cm^2. Naime, iz jednakosti cos(2 · 18°) = = sin(90° – 2 · 18°) slijedi cos(2 · 18°) = sin(3 · 18°), pa je x = 18° rješenje jednadžbe cos(2 · x) = sin(3 · x). Tu jednadžbu, zbog identiteta cos(2 · x) = 1 – 2 · sin^2x i sin(3 · x) = 3 · sin x – 4 · sin^3 x, možemo zapisati u obliku 4 · sin^3x – 2 · sin^2x – 3 · sin x + 1 = 0. Uz zamjenu sin x = t dobiva se kubna jednadžba 4 · t^3 – 2 · t^2 – 3 · t + 1 = 0. Lako se vidi da je jedno rješenje te jednadžbe t = 1, pa lijevu stranu jednadžbe možemo faktorizirati ovako: (t – 1) · (4 · t^2 + 2 · t – 1) = 0. Budući da je 0 < sin 18° < 1, iz posljednje jednadžbe slijedi sin 18° = $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, odnosno cos 18° = $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$. Tako redom dobivamo:

$$\cos 36° = 2 \cdot \cos^2 18 - 1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)^2 - 1 = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{5+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{5+\sqrt{5}}{4} - 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$\sin 36° = 2 \cdot \sin 18° \cdot \cos 18° = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 \cdot \sqrt{5} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{\sqrt{5} \cdot \left(\sqrt{5}-1\right) \cdot \left(\sqrt{5}-1\right) \cdot \left(\sqrt{5}+1\right)}{32}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{5} \cdot \left(\sqrt{5}-1\right) \cdot (5-1)}{32}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5} \cdot \left(\sqrt{5}-1\right)}{8}}$$

$$\mathrm{ctg}\ 36° = \frac{\cos 36°}{\sin 36°} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{4}}{\sqrt{\frac{\sqrt{5} \cdot \left(\sqrt{5}-1\right)}{8}}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2}{\frac{\sqrt{5} \cdot \left(\sqrt{5}-1\right)}{8}}} = \sqrt{\frac{\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{16}}{\frac{\sqrt{5} \cdot \left(\sqrt{5}-1\right)}{8}}} = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \left(\sqrt{5}-1\right)}} = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^3}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot 4}} = \sqrt{\frac{8 \cdot \left(\sqrt{5}+2\right)}{8 \cdot \sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}}$$

$$P = 45 \cdot \mathrm{ctg}\ 36° = 9 \cdot 5 \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}} = 9 \cdot \sqrt{25 \cdot \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}} = 9 \cdot \sqrt{5 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}} = 9 \cdot \sqrt{5 \cdot \sqrt{5} \cdot \left(2+\sqrt{5}\right)}$$

2.) $8 \cdot \sqrt{362.67}$ **≈ 152.35**. Površina osnovke šest je puta veća od površine karakterističnoga jednakostraničnoga trokuta čija stranica ima duljinu a = 4 cm:

$$B = 6 \cdot P = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$$

Visina piramide, jedna od stranica karakterističnoga trokuta u osnovki i bočni brid tvore pravokutan trokut kojemu je hipotenuza upravo bočni bid piramide. Prema Pitagorinu je poučku duljina visine piramide jednaka $h = \sqrt{b^2 - a^2}$ .Stoga je obujam zadane piramide jednak

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{b^2 - a^2} = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3 \cdot (b^2 - a^2)}\ .$$

Uvrštavanjem numeričkih podataka a = 4 i b = 11.7 dobijemo:

$$V = \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \sqrt{3 \cdot (11.7^2 - 4^2)} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \sqrt{3 \cdot (136.89 - 16)} = 8 \cdot \sqrt{3 \cdot 123.89} = 8 \cdot \sqrt{362.67} \approx 152.35\ \mathrm{cm}^3.$$

24. 1.) 32 · ***i***. Uočimo da je $(1 + i)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot i + i^2 = 1 + 2 \cdot i + (-1) = 2 \cdot i$. Stoga je:

$(1 + i)^{10} = [(1 + i)^2]^5 = (2 \cdot i)^5 = 2^5 \cdot i^5 = 32 \cdot i^4 \cdot i = 32 \cdot 1 \cdot i = 32 \cdot i.$

2.) –4. Zapišimo zadani kompleksni broj u standardnom (algebarskom) obliku. Imamo redom:

$$\frac{x-2\cdot i}{1+i}=\frac{(x-2\cdot i)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)}=\frac{x-2\cdot i-x\cdot i+2\cdot i^2}{1^2-i^2}=\frac{x-2\cdot i-x\cdot i+2\cdot(-1)}{1-(-1)}=\frac{x-2\cdot i-x\cdot i-2}{2}=$$
$$=\frac{x-2}{2}+\frac{-2-x}{2}\cdot i\Rightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{x-2\cdot i}{1+i}\right)=\frac{-2-x}{2}$$

Stoga dobivamo jednadžbu:

$$\frac{-2-x}{2}=1,$$

odnosno, nakon množenja s 2,

$$-2 - x = 2.$$

Odatle izravno slijedi $x = -4$.

25. 1.) 189. Neka su a_1 prvi član i d razlika (diferencija) zadanoga niza. Treći član aritmetičkoga niza računamo prema formuli

$$a_3 = a_1 + 2 \cdot d,$$

a sedmi član istoga niza prema formuli

$$a_7 = a_1 + 6 \cdot d.$$

Iz zadanih podataka dobivamo sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$a_1 + 2 \cdot d = 9,$$
$$a_1 + 6 \cdot d = 49.$$

Oduzimanjem ovih jednadžbi dobijemo $(-4) \cdot d = -40$, a odatle je $d = 10$. Uvrštavanjem $d = 10$ u bilo koju jednadžbu sustava dobijemo $a_1 = -11$. Tako je

$$a_{21} = a_1 + (21 - 1) \cdot d = (-11) + 20 \cdot 10 = 200 - 11 = 189.$$

2.) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Neka su g_1 prvi član i q količnik (kvocijent) zadanoga geometrijskog niza. Tada je drugi član $g_1 \cdot q$, a treći $g_1 \cdot q^2$. Prema uvjetu zadatka, prvi je član jednak zbroju drugoga i trećega, pa dobivamo jednadžbu:

$$g_1 = g_1 \cdot q + g_1 \cdot q^2.$$

Prema pretpostavci, $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ je niz s pozitivnim članovima, pa posljednju jednakost smijemo podijeliti s $g_1 > 0$:

$$1 = q + q^2,$$

tj.

$$q^2 + q - 1 = 0.$$

Ova kvadratna jednadžba ima dva rješenja: $q_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ i $q_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Rješenje q_1 je strogo negativan realan broj, pa u tom slučaju niz $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne može biti niz s pozitivnim članovima, što je suprotno pretpostavci zadatka. Dakle, jedino je moguće $q = q_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, i taj je broj traženi količnik niza.

3.) 4224. Brojevi zrna na šahovskim poljima tvore aritmetički niz 3, 5, 7, 9, … Prvi član toga niza je $a_1 = 3$, a razlika $d = 2$. Posljednji, 64. član niza (jer imamo ukupno $8 \cdot 8 = 64$ različita polja) jednak je

$$a_{64} = a_1 + (64 - 1) \cdot d = 3 + 63 \cdot 2 = 3 + 126 = 129.$$

Zbroj svih 64 člana niza jednak je

$$S_{64} = \frac{64}{2} \cdot (a_1 + a_{64}) = 32 \cdot (3 + 129) = 32 \cdot 132 = 4224,$$

i toliko smo zrna riže stavili na šahovsku ploču.

26. $-\frac{3}{4}$; **28.** Sa slike se vidi da se zadani pravci sijeku u točki $S(4, -2)$. Tu točku uvrstimo u svaku pojedinu jednadžbu sustava, pa dobijemo:

$$\begin{cases} a \cdot 4 - (-2) + 1 = 0, \\ 3 \cdot 4 - 8 \cdot (-2) + b = 0 \end{cases},$$

odnosno

$$\begin{cases} 4 \cdot a = -3, \\ b = -16 - 12 \end{cases}$$

Odatle izravno slijedi $(a, b) = \left(-\frac{3}{4},\ -28\right)$.

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U PROSINCU 2011. – VIŠA RAZINA

27. 3; $\frac{\pi}{3}$. Zadana funkcija $f(x) = A \cdot \sin(x + C)$ je harmonijska funkcija. Pritom se pretpostavlja da je $A > 0$ i da je $C \in \mathbf{R}$. Interpretacija parametra A glasi: *A je najveća vrijednost harmonijske funkcije $f(x)$*. Sa slike se vidi da je najveća vrijednost zadane funkcije jednaka 3 (i postiže se npr. za $x = \frac{\pi}{6}$). Stoga je $A = 3$.

Nadalje, sa slike se vidi da je najveća strogo negativna vrijednost varijable x u kojoj zadana harmonijska funkcija postiže lokalni minimum –3 jednaka $x_1 = -\frac{5}{6}\cdot\pi$, te da je najmanja strogo pozitivna vrijednost varijable x u kojoj zadana harmonijska funkcija postiže lokalni maksimum 3 jednaka $x_2 = \frac{\pi}{6}$. Vrijednost faznoga pomaka C koja pripada segmentu $[-\pi, \pi]$ dobije se kao broj suprotan aritmetičkoj sredini brojeva x_1 i x_2. Dakle,

$$C = -\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{-\frac{5}{6}\cdot\pi + \frac{1}{6}\cdot\pi}{2} = -\frac{-\frac{4}{6}\cdot\pi}{2} = \frac{1}{3}\cdot\pi .$$

<u>Napomena</u>: **Bez uvjeta $C \in [-\pi, \pi]$ zadatak ima za rješenje svaki broj oblika $\frac{\pi}{3} + k\cdot 2\cdot\pi$. Može se pokazati da se bez smanjenja općenitosti smije pretpostaviti $A > 0$ i to rješenje je jedinstveno, ali za jedinstveno rješenje nepoznanice C mora se pretpostaviti $C \in [-\pi, \pi]$.**

28. 1.) $-\frac{3}{2}$; 0; $\frac{3}{2}$; 0 ili $\frac{3}{2}$; 0; $-\frac{3}{2}$; 0 **.** Podijelimo jednadžbu zadane hiperbole s 2, pa dobijemo:

$$\frac{x^2}{2} - \frac{4\cdot y^2}{1} = 1,$$
$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1.$$

Odatle očitamo: $a^2 = 2,\ b^2 = \frac{1}{4}$, pa slijedi:

$$F_{1,2}\left(\pm\sqrt{a^2+b^2},0\right) = \left(\pm\sqrt{2+\frac{1}{4}},0\right) = \left(\pm\sqrt{\frac{2\cdot 4+1}{4}},0\right) = \left(\pm\sqrt{\frac{8+1}{4}},0\right) = \left(\pm\sqrt{\frac{9}{4}},0\right) = \left(\pm\frac{3}{2},0\right) \Rightarrow F_1\left(-\frac{3}{2},0\right), F_2\left(\frac{3}{2},0\right)$$

2.) $36\cdot x^2 - 9\cdot y^2 = 324$ ili $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$. Neka su a duljina velike poluosi i b duljina male poluosi hiperbole. Iz podatka da je pravac $y = 2\cdot x$ asimptota tražene hiperbole slijedi

$$\frac{b}{a}=2,$$

a odatle je $b = 2 \cdot a$. Iz podatka da hiperbola prolazi točkom $T(5, 8)$ slijedi:

$$b^2 \cdot 5^2 - a^2 \cdot 8^2 = a^2 \cdot b^2,$$

pa uvrštavanjem jednakosti $b = 2 \cdot a$ dobijemo:

$$25 \cdot (2 \cdot a)^2 - 64 \cdot a^2 = a^2 \cdot (2 \cdot a)^2,$$

odnosno

$$25 \cdot 4 \cdot a^2 - 64 \cdot a^2 = a^2 \cdot 4 \cdot a^2.$$

Podijelimo li ovu jednakost s $4 \cdot a^2$, dobit ćemo:

$$25 - 16 = a^2,$$

odnosno $a^2 = 9$. Stoga je $b^2 = (2 \cdot a)^2 = 4 \cdot a^2 = 4 \cdot 9 = 36$. Dakle, jednadžba hiperbole glasi:

$$36 \cdot x^2 - 9 \cdot y^2 = 36 \cdot 9,$$

tj.

$$36 \cdot x^2 - 9 \cdot y^2 = 324.$$

Tu jednadžbu možemo zapisati u ekvivalentnom obliku:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1.$$

3.) $\frac{5}{299}$**.** Neka su a duljina velike poluosi elipse i e linearni ekscentricitet elipse (iskazani u milijunima kilometara). Najmanja udaljenost Zemlje od Sunca iznosi $a - e$, a najveća $a + e$. Tako dobivamo sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$a - e = 147,$$
$$a + e = 152.$$

Zbrajanjem tih jednadžbi odmah slijedi $2 \cdot a = 299$, a oduzimanjem $(-2) \cdot e = -5$, tj. $2 \cdot e = 5$. Dijeljenjem potonje jednakosti s prvom dobivamo traženi numerički ekscentricitet:

$$\varepsilon=\frac{e}{a}=\frac{2\cdot e}{2\cdot a}=\frac{5}{299}.$$

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U PROSINCU 2011. – VIŠA RAZINA

III. ZADATCI PRODUŽENIH ODGOVORA

29. 1.) $\left\langle \frac{1}{5}, +\infty \right\rangle$**;** $\frac{2}{5}$**; 4.585.** Bilo koja logaritamska funkcija definirana je isključivo za strogo pozitivne vrijednosti logaritmanda. Stoga iz nejednadžbe

$$5 \cdot x - 1 > 0$$

slijedi $5 \cdot x > 1$, odnosno $x > \frac{1}{5}$. Dakle, prirodno područje definicije (domena) zadane funkcije je skup svih realnih brojeva strogo većih od $\frac{1}{5}$. Ti brojevi tvore otvoreni interval $\left\langle \frac{1}{5}, +\infty \right\rangle$.

Nadalje, bilo koja logaritamska funkcija oblika $\log_a x$ poprima vrijednost 0 ako i samo ako je njezin logaritmand jednak 1. Stoga dobivamo jednadžbu:

$$5 \cdot x - 1 = 1,$$

odnosno

$$5 \cdot x = 2.$$

Odatle je $x = \frac{2}{5}$. Uočimo da vrijedi: $\frac{2}{5} \in \left\langle \frac{1}{5}, +\infty \right\rangle$, pa je $x = \frac{2}{5}$ doista nultočka zadane funkcije. Preostaje izračunati $f(5)$. Imamo redom:

$$f(5) = \log_2(5 \cdot 5 - 1) = \log_2(25 - 1) = \log_2 24 = \frac{\ln 24}{\ln 2} \approx 4.5849625 \approx 4.585.$$

2.) $\frac{3 \cdot x^2 - 10 \cdot x}{(3 \cdot x - 5)^2}$**.** Zadanu funkciju deriviramo prema pravilu za deriviranje količnika dviju funkcija i deriviranje zbroja dviju funkcija koristeći tablicu derivacija:

$$f'(x) = \frac{(x^2)' \cdot (3 \cdot x - 5) - x^2 \cdot (3 \cdot x - 5)'}{(3 \cdot x - 5)^2} = \frac{2 \cdot x^{2-1} \cdot (3 \cdot x - 5) - x^2 \cdot (3 \cdot 1 \cdot x^0 - 0)}{(3 \cdot x - 5)^2} =$$
$$= \frac{2 \cdot x \cdot (3 \cdot x - 5) - x^2 \cdot (3 \cdot 1 - 0)}{(3 \cdot x - 5)^2} = \frac{6 \cdot x^2 - 10 \cdot x - 3 \cdot x^2}{(3 \cdot x - 5)^2} = \frac{3 \cdot x^2 - 10 \cdot x}{(3 \cdot x - 5)^2}$$

3.) –1. Odredimo najprije prvu i drugu derivaciju zadane funkcije koristeći pravilo za deriviranje zbroja dviju funkcija, te umnoška konstante i funkcije, kao i tablicu derivacija:

$$f'(x) = (x^3)' - 3 \cdot (x)' + (5)' = 3 \cdot x^{3-1} - 3 \cdot 1 \cdot x^0 + 0 = 3 \cdot x^2 - 3 \cdot 1 = 3 \cdot x^2 - 3;$$
$$f''(x) = (3 \cdot x^2 - 3)' = 3 \cdot (x^2)' - (3)' = 3 \cdot 2 \cdot x^{2-1} - 0 = 6 \cdot x^1 = 6 \cdot x.$$

Kandidati za lokalne ekstreme su nultočke prve derivacije zadane funkcije. Stoga riješimo jednadžbu $f'(x) = 0$. Dobivamo:

$$3 \cdot x^2 - 3 = 0, \quad /:3$$
$$x^2 - 1 = 0,$$
$$(x-1) \cdot (x+1) = 0.$$

Odatle slijedi $x = 1$ ili $x = -1$. Za $x = 1$ vrijedi $f''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0$, pa u toj točki funkcija f ima lokalni minimum. Za $x = -1$ vrijedi $f''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0$, pa u toj točki funkcija f ima lokalni maksimum. Stoga je rješenje zadatka $x = -1$.

4.) $\langle 2, +\infty \rangle$; nijedno. Za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi nejednakost $3^x > 0$. Stoga je $3^x + 2 > 0 + 2 = 2$, tj. $f(x) > 2$, za svaki $x \in \mathbf{R}$. Dakle, slika zadane funkcije je otvoreni interval $\langle 2, +\infty \rangle$. Broj $c = -3$ ne pripada tom intervalu, pa zaključujemo da ne postoji $x \in \mathbf{R}$ takav da je $f(x) = -3$. Stoga navedena jednadžba nema niti jedno realno rješenje.

5.) $\frac{7}{2}$. Odredimo najprije kompoziciju $f \circ g$. Imamo redom:

$$(f \circ g)(x) = f\left[g(x)\right] = f(2 \cdot x - 3) = \sqrt{2 \cdot x - 3}.$$

Tako dobivamo iracionalnu jednadžbu

$$\sqrt{2 \cdot x - 3} = 2.$$

Lijeva i desna strana te jednadžbe su nenegativni realni brojevi, pa jednadžbu smijemo kvadrirati. Dobijemo:

$$2 \cdot x - 3 = 2^2,$$
$$2 \cdot x - 3 = 4,$$
$$2 \cdot x = 4 + 3,$$
$$2 \cdot x = 7.$$

Dijeljenjem te jednadžbe s 2 slijedi $x = \frac{7}{2}$ i to je jedino rješenje zadane jednadžbe.

30. (10, 3). Odredimo najprije polumjer kružnice po kojoj se tijelo giba. Taj je polumjer jednak udaljenosti između točaka A i S:

$$r = |SA| = \sqrt{(3-4)^2 + \left[2-(-5)\right]^2} = \sqrt{(-1)^2 + (2+5)^2} = \sqrt{1+7^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5 \cdot \sqrt{2}.$$

Izračunajmo nadalje središnji kut luka $\sphericalangle ASB$. Iz formule

$$l = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180°}$$

izrazimo kut α tako da cijelu jednakost pomnožimo sa $\frac{180°}{r \cdot \pi}$. Dobijemo:

$$\alpha = \frac{180° \cdot l}{r \cdot \pi}.$$

U tu jednakost uvrstimo $l = \frac{5 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi}{2}$ i $r = 5 \cdot \sqrt{2}$, pa dobijemo:

$$\alpha = \frac{180° \cdot \frac{5 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi}{2}}{5 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi} = 90°.$$

Promotrimo sada trokut ASB. Taj trokut je pravokutan s pravim kutom kod vrha S. To znači da su pravci AS i BS okomiti. Koeficijent smjera pravca AS jednak je:

$$k_{AS} = \frac{y_S - y_A}{x_S - x_A} = \frac{2-(-5)}{3-4} = \frac{2+5}{-1} = -7,$$

pa je koeficijent smjera pravca BS jednak

$$k_{BS} = -\frac{1}{k_{AS}} = \frac{1}{7}.$$

Jednadžba pravca koji prolazi točkom S i ima koeficijent smjera k_{BS} glasi:

$$y - 2 = \frac{1}{7} \cdot (x-3),$$
$$y = \frac{1}{7} \cdot x - \frac{3}{7} + 2,$$
$$y = \frac{1}{7} \cdot x + \frac{11}{7}$$

Dakle, točka B pripada pravcu $y = \frac{1}{7} \cdot x + \frac{11}{7}$. No, točka B pripada i kružnici sa središtem u $S(3, 2)$ i polumjerom $r = 5 \cdot \sqrt{2}$. Jednadžba te kružnice je:

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 50.$$

Preostaje presjeći pravac $y = \frac{1}{7} \cdot x + \frac{11}{7}$ i kružnicu $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 50$, tj. riješiti sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U PROSINCU 2011. – VIŠA RAZINA

$$(x-3)^2+(y-2)^2=50$$
$$y=\frac{1}{7}\cdot x+\frac{11}{7}$$

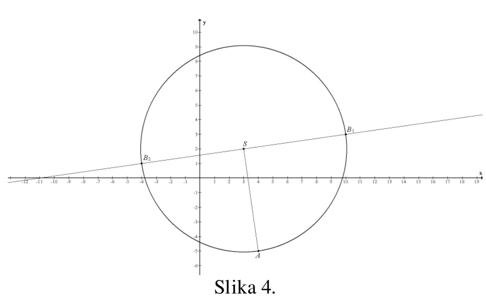
Uvrstimo li drugu jednadžbu sustava u prvu, dobijemo redom:

$$(x-3)^2+\left(\frac{1}{7}\cdot x+\frac{11}{7}-2\right)^2=50$$
$$(x-3)^2+\left(\frac{1}{7}\cdot x-\frac{3}{7}\right)^2=50$$
$$(x-3)^2+\left(\frac{x-3}{7}\right)^2=50,$$
$$(x-3)^2+\frac{(x-3)^2}{49}=50,$$
$$(x-3)^2\cdot\left(1+\frac{1}{49}\right)=50,$$
$$(x-3)^2\cdot\frac{50}{49}=50,\quad /\cdot\frac{49}{50}$$
$$(x-3)^2=49$$

Odatle slijedi $x - 3 = -7$ ili $x - 3 = 7$, tj. $x = -4$ ili $x = 10$. Uvrštavanjem u jednadžbu $y=\frac{1}{7}\cdot x+\frac{11}{7}$ dobijemo:

$$y=\frac{1}{7}\cdot(-4)+\frac{11}{7}=\frac{-4+11}{7}=\frac{7}{7}=1 \text{ ili } y=\frac{1}{7}\cdot 10+\frac{11}{7}=\frac{10+11}{7}=\frac{21}{7}=3\,.$$

Tako smo dobili dvije točke: $B_1(-4, 1)$ i $B_2(10, 3)$. Promotrimo Sliku 4. Iz te je slike razvidno da se iz točke A do točke B_1 dolazi krećući se po kružnici u smjeru kazaljke na satu (tj. u negativnom smjeru), a da se iz točke A do točke B_2 dolazi krećući se po kružnici u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu (tj. u pozitivnom smjeru). Stoga je rješenje zadatka točka $B_2(10, 3)$.



Slika 4.

pripremio:

mr.sc. Bojan Kovačić, predavač