

**PRIRUČNICI TEHNIČKOG VELEUČILIŠTA U ZAGREBU**  
MANUALIA POLYTECHNICI STUDIORUM ZAGRABIENSIS

# **Repetitorij matematike za studente elektrotehnike**

*Bojan Kovačić*

*Luka Marohnić*

*Tihana Strmečki*

Zagreb, 2016.



**TEHNIČKO VELEUČILIŠTE  
U ZAGREBU UNIVERSITY OF  
APPLIED SCIENCES ZAGREB**

**Izdavač** Tehničko veleučilište u Zagrebu  
Vrbik 8, Zagreb

**Za izdavača** Slavica Čosović Bajić

**Autori** Bojan Kovačić, Luka Marohnić i Tihana Strmečki

**Recenzenti** prof.dr.sc. Šime Ungar, redoviti profesor Odjela za matematiku  
Sveučilišta u Osijeku  
prof.dr.sc. Juraj Šiftar, redoviti profesor Matematičkog odsjeka  
Prirodoslovno–matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu

**Vrsta djela** Priručnik

Objavljivanje je odobrilo Stručno vijeće Tehničkog veleučilišta u  
Zagrebu odlukom broj: 2055–5 od 16.2.2016.

**ISBN** 978–953–7048–54–9

# Predgovor

Ovaj priručnik namijenjen je studentima 1. godine stručnih studija elektrotehnike na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu kao pomoć prigodom polaganja pisanog dijela ispita iz predmeta Matematika 1 i Matematika 2. Priručnik je pisan tako da redosljed tematskih cjelina odgovara redosljedu obrade tih cjelina u navedenim predmetima. Radi boljeg razumijevanja obrađene materije, osim matematičkih formula i postupaka, čije se poznavanje provjerava na ispitu, navedene su i teorijske činjenice. To ni u kojem slučaju ne znači da ovaj priručnik može zamijeniti nastavne materijale prema kojima se održavaju predavanja i auditorne vježbe, nego mu je osnovna svrha poslužiti kao koristan podsjetnik na definicije, svojstva i formule koji se na ispitu možda zaborave.

Ugodna nam je dužnost zahvaliti svima koji su nam na bilo koji način pomogli u nastajanju ovog priručnika. Tu ponajprije mislimo na recenzente prof.dr.sc. Šimu Ungara i prof.dr.sc. Jurja Šiftara čije su nam vrlo korisne primjedbe, prijedlozi i savjeti bili od neprocjenjive koristi. Zahvalnost na objavi priručnika dugujemo i dekanici Tehničkog veleučilišta u Zagrebu prof.dr.sc. Slavici Čosović Bajić i pročelniku Elektrotehničkog odjela Tehničkog veleučilišta u Zagrebu prof.dr.sc. Krešimiru Meštoviću. Posebno zahvaljujemo svim studentima koji su svojim pitanjima na nastavi i konzultacijama utjecali da u priručnik uvrstimo i neke tematske cjeline bitne za druge predmete na stručnim studijima elektrotehnike, informatike i računarstva.

Pokude za sve „preživjele” nenamjerne pogreške, kojih u priručniku nesumnjivo ima i nakon višestrukih korektura, preuzimamo isključivo na sebe. Unaprijed zahvaljujemo svima koji nas obavijeste o svakoj uočenoj pogreški ili nekom drugom propustu.

Svim korisnicima priručnika želimo uspješno korištenje.

*Autori*

U Zagrebu, listopada 2014.



# Sadržaj

<b>Predgovor</b>	<b>iii</b>
<b>1 Kompleksni brojevi</b>	<b>1</b>
1.1 Skup kompleksnih brojeva . . . . .	1
1.2 Algebarski oblik . . . . .	2
1.3 Trigonometrijski oblik . . . . .	3
1.4 Eksponecijalni oblik . . . . .	5
<b>2 Osnove matričnog računa</b>	<b>7</b>
2.1 Operacije s matricama . . . . .	7
2.2 Determinanta i inverz matrice . . . . .	9
<b>3 Sustavi linearnih jednadžbi</b>	<b>13</b>
<b>4 (Radij)vektori</b>	<b>15</b>
4.1 Pojam radijvektora i osnovna svojstva . . . . .	15
4.2 Skalarno i vektorsko množenje vektora . . . . .	16
4.3 Linearna (ne)zavisnost skupa vektora . . . . .	17
<b>5 Realne funkcije</b>	<b>19</b>
5.1 Opći pojmovi . . . . .	19
5.2 Polinomi i racionalne funkcije . . . . .	21
5.3 Trigonometrijske i ciklotometrijske funkcije . . . . .	22
5.4 Harmonijske funkcije . . . . .	23
5.5 Eksponecijalna funkcija . . . . .	24
5.6 Logaritamska funkcija . . . . .	25
5.7 Hiperbolne i area funkcije . . . . .	25
5.8 Nizovi i limes niza . . . . .	27
5.9 Limes funkcije . . . . .	28
5.10 Neprekidne funkcije . . . . .	29
5.11 Vrste prekida funkcije . . . . .	30
<b>6 Diferencijalni račun</b>	<b>31</b>
6.1 Derivacija funkcije . . . . .	31
6.2 Lokalni i globalni ekstremi . . . . .	33
6.3 Neki osnovni poučci diferencijalnog računa . . . . .	35
6.4 L'Hôpital-Bernoullijevo pravilo . . . . .	35
6.5 Derivacije višeg reda . . . . .	35
6.6 Diferencijal funkcije . . . . .	36
6.7 Konveksnost i konkavnost funkcije . . . . .	37

6.8	Asimptote na graf realne funkcije . . . . .	38
6.9	Ispitivanje tijeka funkcije . . . . .	38
<b>7</b>	<b>Osnove integralnog računa</b>	<b>39</b>
7.1	Primitivna funkcija i neodređeni integral . . . . .	39
7.2	Metoda zamjene varijable . . . . .	40
7.3	Metoda parcijalne integracije . . . . .	41
7.4	Integriranje racionalnih funkcija . . . . .	41
7.4.1	Integriranje pravih racionalnih funkcija . . . . .	41
7.4.2	Metoda neodređenih koeficijenata . . . . .	41
7.4.3	Integriranje nepravih racionalnih funkcija . . . . .	42
7.5	Integriranje iracionalnih funkcija . . . . .	42
7.6	Integriranje trigonometrijskih i hiperbolnih funkcija . . . . .	43
7.6.1	Integriranje iracionalnih funkcija pomoću trigonometrijskih i hiperbolnih zamjena . . . . .	44
7.7	Određeni integral . . . . .	44
7.7.1	Neka osnovna svojstva određenog integrala . . . . .	44
7.7.2	Neke primjene određenog integrala . . . . .	45
<b>8</b>	<b>Nepravi integrali</b>	<b>47</b>
8.1	Integrali s beskonačnim granicama . . . . .	47
8.2	Integrali neomeđenih funkcija . . . . .	47
8.3	Kriteriji usporedbe za neprave integrale . . . . .	48
<b>9</b>	<b>Redovi realnih brojeva</b>	<b>49</b>
9.1	Pravila za ispitivanje konvergencije reda . . . . .	49
9.2	Algebarske operacije s redovima . . . . .	50
9.3	Neki posebni redovi realnih brojeva . . . . .	50
<b>10</b>	<b>Taylorov i MacLaurinov red</b>	<b>51</b>
10.1	Neki osnovni razvoji u MacLaurinov red . . . . .	52
<b>11</b>	<b>Osnove harmonijske analize</b>	<b>53</b>
11.1	Fourierov red (ne)parne funkcije . . . . .	54
<b>12</b>	<b>Obične diferencijalne jednadžbe</b>	<b>57</b>
12.1	Jednadžba sa separiranim varijablama . . . . .	58
12.2	Homogena diferencijalna jednadžba . . . . .	58
12.3	Linearna diferencijalna jednadžba . . . . .	58
12.4	Bernoullijeva diferencijalna jednadžba . . . . .	58
12.5	Homogena diferencijalna jednadžba 2. reda . . . . .	59
12.6	Nehomogena diferencijalna jednadžba 2. reda . . . . .	59
12.7	Princip superpozicije rješenja . . . . .	60
12.8	Metoda varijacije konstanti . . . . .	60
12.9	Laplaceovi transformati . . . . .	61
<b>13</b>	<b>Dodatak</b>	<b>63</b>
13.1	Formule iz algebre . . . . .	63
13.2	Formule iz analitičke geometrije u ravnini . . . . .	64
13.3	Formule iz trigonometrije . . . . .	65
13.4	Formule iz planimetrije . . . . .	67

<i>SADRŽAJ</i>	vii
13.5 Formule iz stereometrije . . . . .	67
13.6 Neke korisne antiderivacije . . . . .	68
<b>Kazalo</b>	<b>69</b>
<b>Popis tablica</b>	<b>73</b>
<b>Bibliografija</b>	<b>75</b>





# Poglavlje 1

## Kompleksni brojevi

### 1.1 Skup kompleksnih brojeva

Elemente skupa  $\mathbb{R}^2 := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ , tj. uređene parove realnih brojeva, možemo zbrajati i množiti koristeći formule:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \quad \text{i} \quad (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Skup  $\mathbb{R}^2$  obogaćen ovim dvjema operacijama označavamo s  $\mathbb{C}$  i nazivamo **skup kompleksnih brojeva**.

Posebno, za kompleksne brojeve  $(a, 0)$  i  $(b, 0)$  vrijedi

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \quad \text{i} \quad (a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0).$$

Prema tome smisleno je i uobičajeno umjesto  $(a, 0)$  pisati jednostavno  $a$  za sve  $a \in \mathbb{R}$ , budući da se za takve kompleksne brojeve gore definirane operacije svode na zbrajanje i množenje realnih brojeva. U skladu s time skup  $\mathbb{R}$  možemo promatrati kao podskup skupa  $\mathbb{C}$ , odnosno smatrati da vrijedi  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ . Drugim riječima, svaki realan broj ujedno je i kompleksan broj.

Među „pravim“ kompleksnim brojevima, tj. onima koji nisu realni, ističe se broj

$$i := (0, 1)$$

kojega nazivamo **imaginarna jedinica**. Vrijedi:

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0).$$

Kako je rezultat kvadriranja imaginarne jedinice realan broj, jednostavno pišemo

$$i^2 = -1.$$

## 1.2 Algebarski oblik kompleksnog broja

Svaki kompleksni broj  $z = (a, b)$  može se jednoznačno zapisati u obliku

$$z = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1),$$

odnosno kraće

$$z = a + bi, \tag{1.1}$$

pri čemu su  $a, b \in \mathbb{R}$ . Zapis (1.1) naziva se **algebarski** ili **standardni** oblik kompleksnog broja  $z$ . Pritom definiramo:

- $\operatorname{Re}(z) := a$  je **realni dio** kompleksnog broja  $z$ ,
- $\operatorname{Im}(z) := b$  je **imaginarni dio** kompleksnog broja  $z$ .

Kompleksan broj  $z$  je realan ako i samo ako vrijedi  $\operatorname{Im}(z) = 0$ .

Grafički prikaz skupa  $\mathbb{C}$  je **Gaussova** ili **kompleksna** ravnina. U toj se ravnini uvodi standardni pravokutni koordinatni sustav u kojemu se os apscisa naziva **realna os**, a os ordinata **imaginarna os**. U tako uvedenom koordinatnom sustavu kompleksnom je broju  $z = a + bi$  pridružena točka  $Z = (a, b)$ .

**Jednakost kompleksnih brojeva:** Kompleksni brojevi  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  jednaki su ako i samo ako vrijedi

$$\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2).$$

**Algebarske operacije s kompleksnim brojevima zapisanim u algebarskom obliku:** Neka su  $z_1 = a_1 + b_1 i$  i  $z_2 = a_2 + b_2 i$ , pri čemu su  $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ . Tada vrijedi:

- $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$ ,
- $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i$ ,
- $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$ ,
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$ , uz uvjet  $z_2 \neq 0$ .

**Konjugat broja**  $z$  je kompleksan broj  $\bar{z} = a - b i$ . Točka u Gaussovoj ravnini pridružena kompleksnom broju  $\bar{z}$  je  $\bar{Z} = (a, -b)$ . Točke pridružene brojevima  $z$  i  $\bar{z}$  međusobno su simetrične s obzirom na realnu os.

Konjugiranje kompleksnih brojeva ima sljedeća svojstva:

1.  $\bar{\bar{z}} = z$  ako i samo ako  $z \in \mathbb{R}$ ,
2.  $\bar{z} = z$  ako i samo ako  $z \in \mathbb{R}$ ,
3.  $\bar{\bar{z}} = -z$  ako i samo ako  $z = b i$  za neki  $b \in \mathbb{R}$ ,
4.  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ ,
5.  $\overline{\bar{z}} = z$ ,
6.  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ ,
7.  $\overline{z^n} = \bar{z}^n$  za  $n \in \mathbb{N}$ ,
8.  $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \overline{\frac{z_1}{z_2}}$  ako je  $z_2 \neq 0$ .

**Apsolutna vrijednost (modul)** kompleksnog broja je nenegativan realan broj  $r$  definiran s

$$r := |z| := \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

Broj  $r$  obično se interpretira kao udaljenost točke pridružene broju  $z$  od ishodišta  $O$  Gaussove ravnine.

Apsolutna vrijednost ima sljedeća svojstva:

1.  $|z| \geq 0$ ,
2.  $|z| = 0$  ako i samo ako je  $z = 0$ ,
3.  $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ,
4.  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ ,
5.  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$  ako je  $z_2 \neq 0$ ,
6.  $|\bar{z}| = |z|$ ,
7.  $|z^n| = |z|^n$ ,
8.  $z \bar{z} = |z|^2$ .

**Napomena:** Za  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  takve da je  $z_2 \neq 0$  vrijedi jednakost  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$ .

Skup  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ , gdje je  $z_0 \in \mathbb{C}$  i  $r \geq 0$ , u Gaussovoj ravnini predstavlja kružnicu sa središtem u točki  $z_0$  i polumjerom  $r$ .

### 1.3 Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Pridružimo li kompleksnom broju  $z$  točku  $Z$  u Gaussovoj ravnini, onda kut  $\varphi \in [0, 2\pi)$  kojega pravac  $OZ$  zatvara s pozitivnim dijelom realne osi nazivamo **glavni argument** kompleksnog broja  $z$ . Pišemo:  $\varphi = \operatorname{Arg}(z)$ .

**Argument** kompleksnog broja  $z$  je bilo koji element skupa  $S = \{\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ , a označava se s  $\operatorname{arg}(z)$ .

Ako je  $z = a + bi$  algebarski oblik zapisa kompleksnog broja  $z \neq 0$ , onda je pripadni glavni argument  $\varphi$  jednoznačno određen jednažbama:

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin \varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Argument kompleksnog broja ima sljedeća svojstva:

1. za svaki  $\alpha > 0$  vrijedi  $\operatorname{arg}(\alpha z) = \operatorname{arg}(z)$ ,
2. za svaki  $\alpha < 0$  vrijedi  $\operatorname{arg}(\alpha z) = \operatorname{arg}(z) + \pi$ ,
3.  $\operatorname{arg}(\bar{z}) = -\operatorname{arg}(z)$ ,
4.  $\operatorname{arg}(z_1 z_2) = \operatorname{arg}(z_1) + \operatorname{arg}(z_2)$ ,
5.  $\operatorname{arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{arg}(z_1) - \operatorname{arg}(z_2)$ ,
6. za svaki  $k \in \mathbb{Z}$  vrijedi  $\operatorname{arg}(z^k) = k \operatorname{arg}(z)$ .

**Trigonometrijski oblik** zapisa kompleksnog broja  $z$  je:

$$z = r \operatorname{cis} \varphi := r (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Pritom su  $r$  apsolutna vrijednost (modul), a  $\varphi$  glavni argument kompleksnog broja  $z$ .

**Pretvorba oblika zapisa kompleksnih brojeva:**

1. *Algebarski*  $\rightarrow$  *trigonometrijski*

Ako je  $z = a + bi$  algebarski oblik zapisa kompleksnog broja  $z$ , algoritam je sljedeći:

**Korak 1.** Izračunati apsolutnu vrijednost (modul)  $r$  broja  $z$  koristeći definiciju.

**Korak 2.** Odrediti glavni argument  $\varphi$  iz jednadžbi (1.2).

**Korak 3.** Zapisati  $z = r \operatorname{cis} \varphi$ .

2. *Trigonometrijski*  $\rightarrow$  *algebarski*

Ako je  $z = r \operatorname{cis} \varphi$  trigonometrijski oblik zapisa kompleksnog broja  $z$ , algoritam je sljedeći:

**Korak 1.** Izračunati  $a = r \cos \varphi$ .

**Korak 2.** Izračunati  $b = r \sin \varphi$ .

**Korak 3.** Zapisati  $z = a + bi$ .

**Algebarske operacije s kompleksnim brojevima zapisanima u trigonometrijskom obliku:** Zbrajanje i oduzimanje izvode se pretvorbom zapisa pribrojnika iz trigonometrijskoga u algebarski oblik.

Za  $z_1 = r_1 \operatorname{cis} \varphi_1$  i  $z_2 = r_2 \operatorname{cis} \varphi_2$  vrijede formule:

$$1. z_1 z_2 = (r_1 r_2) \operatorname{cis}(\varphi_1 + \varphi_2),$$

$$2. \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\varphi_1 - \varphi_2), \text{ uz uvjet } z_2 \neq 0.$$

**Potenciranje kompleksnog broja:** Za  $z = r \operatorname{cis} \varphi$  i svaki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi **De Moivrèova formula za potenciranje**:

$$z^n = r^n \operatorname{cis}(n \varphi).$$

Pretpostavimo da je  $z \neq 0$ . Definiramo  $z^{-1} = \frac{1}{z}$ . Tada vrijedi:

$$z^{-n} = (z^{-1})^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Korjenovanje kompleksnog broja:** Za  $z = r \operatorname{cis} \varphi$  i svaki  $n \in \mathbb{N}$  skup svih kompleksnih rješenja jednadžbe  $x^n = z$  je

$$S = \left\{ \sqrt[n]{r} \operatorname{cis} \left( \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) : k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}.$$

Svi elementi skupa  $S$  tvore vrhove pravilnoga  $n$ -terokuta upisanoga u središnju kružnicu polumjera  $\sqrt[n]{r}$ .

## 1.4 Eksponencijalni oblik kompleksnog broja

Osnova eksponencijalnog oblika zapisa kompleksnog broja je Eulerova formula:

$$e^{i\varphi} = \operatorname{cis} \varphi.$$

**Eksponencijalni oblik** zapisa kompleksnog broja  $z$  je

$$z = r e^{i\varphi}.$$

Pritom su  $r$  apsolutna vrijednost (modul) i  $\varphi$  argument kompleksnog broja  $z$ .

**Pretvorba oblika zapisa kompleksnih brojeva:**

1. *Eksponencijalni*  $\rightarrow$  *trigonometrijski*

Ako je  $z = r e^{i\varphi}$  eksponencijalni oblik zapisa kompleksnog broja  $z$ , onda je pripadni trigonometrijski oblik zapisa toga broja  $z = r \operatorname{cis} \varphi$ .

2. *Trigonometrijski*  $\rightarrow$  *eksponencijalni*

Ako je  $z = r \operatorname{cis} \varphi$  trigonometrijski oblik zapisa kompleksnog broja  $z$ , onda je pripadni eksponencijalni oblik zapisa toga broja  $z = r e^{i\varphi}$ .

3. *Eksponencijalni*  $\rightarrow$  *algebarski*

Kompleksan broj zapisan u eksponencijalnom obliku najprije treba zapisati u trigonometrijskom obliku. Potom se dobiveni trigonometrijski oblik pretvara u algebarski oblik koristeći algoritam naveden na stranici 4.

4. *Algebarski*  $\rightarrow$  *eksponencijalni*

Kompleksan broj zapisan u algebarskom obliku najprije treba zapisati u trigonometrijskom obliku koristeći algoritam naveden na stranici 4. Potom se dobiveni trigonometrijski oblik pretvara u eksponencijalni oblik.

**Algebarske operacije s kompleksnim brojevima u eksponencijalnom obliku:** Zbrajanje i oduzimanje provodi se pretvorbom iz eksponencijalnog u algebarski oblik.

Množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva  $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$  i  $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$  izvodi se prema sljedećim formulama:

1.  $z_1 z_2 = (r_1 r_2) e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$
2.  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},$  uz uvjet  $z_2 \neq 0.$



## Poglavlje 2

# Osnove matičnog računa

### 2.1 Operacije s matricama

**Realna matrica tipa**  $(r, s)$  je pravokutna tablica realnih brojeva s ukupno  $r$  redaka i  $s$  stupaca, pri čemu su  $r, s \in \mathbb{N}$ . Matrica se uobičajeno označava velikim tiskanim slovom:  $A, B, C, \dots$ . Skup svih realnih matrica tipa  $(r, s)$  označava se s  $M_{r,s}(\mathbb{R})$ .

Element matrice  $A$  na presjeku  $i$ -tog retka i  $j$ -tog stupca označava se s  $a_{ij}$ . Matricu  $A$  obično zapisujemo u obliku:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rs} \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix},$$

odnosno u skraćenom obliku:  $A = [a_{ij}]$ .

Matrica  $A$  je **kvadratna matrica** reda  $n$  (u daljnjem tekstu: matrica reda  $n$ ) ako vrijedi  $r = s = n$ . Skup svih realnih matrica reda  $n$  označava se s  $M_n(\mathbb{R})$ .

Neka je  $A$  matrica reda  $n$ . Elementi  $a_{ii}$  tvore **glavnu dijagonalu**, a elementi  $a_{n-i+1,i}$  tvore **sporednu dijagonalu** matrice  $A$ .

Dvije matrice su međusobno jednake ako su istog tipa i ako na istim mjestima imaju međusobno jednake elemente.

**Zbrajanje i oduzimanje matrica** definira se isključivo za matrice koje su istog tipa. Ako su  $A$  i  $B$  matrice tipa  $(r, s)$ , onda je:

- zbroj matricâ  $A$  i  $B$  jednak matrici  $C$  tipa  $(r, s)$  takvoj da je  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .
- razlika matricâ  $A$  i  $B$  jednaka matrici  $D$  tipa  $(r, s)$  takvoj da je  $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ .

**Umnožak realnog broja  $\alpha$  i realne matrice**  $A$  tipa  $(r, s)$  je realna matrica  $B$  tipa  $(r, s)$  takva da vrijedi  $b_{ij} = \alpha a_{ij}$  za sve  $i, j$ . Pišemo:  $B = \alpha \cdot A$ .

Matrice  $A$  i  $B$  su **ulančane** ako je broj stupaca matrice  $A$  jednak broju redaka matrice  $B$ . Ako su  $A$  i  $B$  ulančane matrice, onda matrice  $B$  i  $A$  općenito ne moraju biti ulančane.

**Množenje matrica** definira se isključivo za ulančane matrice. Umnožak matrice  $A$  tipa  $(r, s)$  i matrice  $B$  tipa  $(s, t)$  je matrica  $C$  tipa  $(r, t)$  takva da vrijedi

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, t.$$

Pišemo:  $C = A \cdot B$ .

Množenje matrica je asocijativno, ali nije komutativno. Preciznije, vrijede sljedeće tvrdnje.

1. Ako postoji umnožak  $A \cdot B$ , to općenito **ne** znači da postoji umnožak  $B \cdot A$ . Ako umnošci  $A \cdot B$  i  $B \cdot A$  postoje, oni općenito **nisu** jednaki.
2. Jednakost  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$  vrijedi kad god su ti umnošci definirani.

**Neki posebni tipovi matrica:**

- **Nulmatrica** (oznaka:  $0$ ) je svaka matrica čiji su svi elementi jednaki  $0$ .
- **Jedinična matrica** je kvadratna matrica čiji su svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki  $1$ , a svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki  $0$ , tj. vrijedi

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Jedinična matrica reda  $n$  označava se s  $E_n$  ili  $I_n$ .

- **Dijagonalna matrica** je kvadratna matrica čiji su svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki nuli, tj.  $A \in M_n(\mathbb{R})$  je dijagonalna ako je  $a_{ij} = 0$  za sve  $i \neq j$ .
- **Gornja trokutasta matrica** je kvadratna matrica čiji su svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki  $0$ , tj.  $A \in M_n(\mathbb{R})$  je gornja trokutasta ako je  $a_{ij} = 0$  za sve  $j < i$ .
- **Donja trokutasta matrica** je kvadratna matrica čiji su svi elementi iznad glavne dijagonale jednaki  $0$ , tj.  $A \in M_n(\mathbb{R})$  je donja trokutasta ako je  $a_{ij} = 0$  za sve  $i < j$ .

**Transponirana matrica** matrice  $A$  tipa  $(r, s)$  je matrica  $B$  tipa  $(s, r)$  takva da je  $b_{ij} = a_{ji}$ . Transponirana matrica uobičajeno se označava s  $A^T$ .

Transponiranje matrica ima sljedeća svojstva:

1.  $(A^T)^T = A$ .
2.  $(A + B)^T = A^T + B^T$ , ako su matrice  $A$  i  $B$  istog tipa.
3.  $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ , ako su matrice  $A$  i  $B$  ulančane.

Matrica  $A \in M_n(\mathbb{R})$  je **simetrična** ako za sve  $i, j$  vrijedi jednakost  $a_{ij} = a_{ji}$ , tj. ako vrijedi jednakost  $A^T = A$ .

Matrica  $A \in M_n(\mathbb{R})$  je **antisimetrična** ako za sve  $i, j$  vrijedi jednakost  $a_{ij} = -a_{ji}$ , tj. ako vrijedi jednakost  $A^T = -A$ . Ako je  $A$  antisimetrična matrica, onda su svi elementi njezine glavne dijagonale jednaki  $0$ .





**Svojstva determinante:**

1. Ako bilo koji redak (stupac) determinante tvore isključivo nule, njezina je vrijednost jednaka nuli.
2. Ako determinanta sadrži barem dva jednaka retka (stupca), njezina je vrijednost jednaka nuli.
3. Zamjenom dvaju redaka ili dvaju stupaca determinante njezina se vrijednost množi s  $-1$ .
4. Dodavanjem odabranog retka (stupca) determinante nekom drugom retku (stupcu), vrijednost determinante se ne mijenja.
5. Pomnoži li se svaki element nekog retka (stupca) determinante nekim realnim brojem pa se tako dobiveni redak (stupac) determinante doda nekom drugom retku (stupcu), vrijednost determinante se ne mijenja.
6. Determinanta bilo koje gornje trokutaste, donje trokutaste ili dijagonalne matrice jednaka je umnošku svih elemenata glavne dijagonale te matrice.
7.  $\det(A) = \det(A^T)$ , za bilo koju kvadratnu matricu  $A$ .

**Binet–Cauchyjev poučak:** Za  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  vrijedi jednakost:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \det(B).$$

Posebno, za svaki  $k \in \mathbb{N}$  vrijedi jednakost  $\det(A^k) = (\det(A))^k$ .

**Inverz matrice**  $A \in M_n(\mathbb{R})$  je matrica  $A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$  takva da vrijedi  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$ . Ako matrica  $A$  ima inverz, on je nužno jedinstven. Posebno,  $E_n^{-1} = E_n$ .

**Napomena:** Pojam inverza matrice nema smisla za matrice koje nisu kvadratne.

**Regularna matrica** je svaka kvadratna matrica koja ima inverz. **Singularna matrica** je svaka kvadratna matrica koja nema inverz. Vrijede sljedeći kriteriji:

1. Matrica  $A \in M_n(\mathbb{R})$  je regularna ako i samo ako vrijedi  $\det(A) \neq 0$ .
2. Matrica  $A \in M_n(\mathbb{R})$  je singularna ako i samo ako vrijedi  $\det(A) = 0$ .

Invertiranje regularnih matrica ima sljedeća svojstva:

1.  $(A^{-1})^{-1} = A$ , za regularnu matricu  $A$ .
2.  $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ , za regularne matrice  $A$  i  $B$  istog reda.
3.  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ , za regularnu matricu  $A$ .

**Elementarne transformacije nad redima** matrice  $A$  su

1. zamjena dvaju redaka,
2. množenje jednog retka realnim brojem različitim od nule,
3. zbrajanje dvaju redaka i zamjena jednog od tih dvaju redaka dobivenim zbrojem (umjesto dotičnog retka).

U nastavku navodimo dva algoritma za određivanje inverza regularne matrice.

**Napomena:** Prije primjene svakog algoritma treba utvrditi je li zadana matrica regularna, odnosno je li njezina determinanta različita od nule.

**Algoritam za određivanje inverza regularne matrice  $A$  reda  $n$  pomoću elementarnih transformacija:**

**Korak 1.** Formirati matricu  $B = [A \mid E_n]$  tipa  $(n, 2n)$ .

**Korak 2.** Elementarnim transformacijama nad recima matrice  $B$  transformirati matricu  $A$  u jediničnu matricu, odnosno svesti matricu  $B$  na oblik  $B' = [E_n \mid X]$ . To je moguće učiniti jer je  $A$  regularna matrica.

**Korak 3.** Inverz matrice  $A$  je matrica  $X$ , tj.  $A^{-1} = X$ .

**Algoritam za određivanje inverza regularne matrice  $A$  reda  $n$  pomoću adjunkte:**

**Korak 1.** Za sve  $i, j = 1, 2, \dots, n$  izračunati vrijednost  $b_{ij}$  definiranu s:

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij},$$

pri čemu je  $D_{ij}$  determinanta matrice koja se dobije izostavljanjem  $i$ -tog retka i  $j$ -tog stupca matrice  $A$ .

**Korak 2.** Formirati matricu  $B = [b_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ .

**Korak 3.** Odrediti matricu  $\tilde{A} := B^T$ . Matricu  $\tilde{A}$  nazivamo **adjunkta** matrice  $A$ .

**Korak 4.** Inverz matrice  $A$  jednak je  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}$ .

**Napomena:** Ako je  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ , vrijedi  $A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$ .



## Poglavlje 3

# Sustavi linearnih jednadžbi

Neka je  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . **Linearni sustav reda  $n$**  (u daljnjem tekstu: sustav) je sustav od  $n$  linearnih jednadžbi s  $n$  (različitih) **nepoznanica**  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned}$$

pri čemu su  $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$  konstante za sve  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Brojeve  $a_{ij}$  nazivamo **koeficijenti**, a brojeve  $b_i$  **slobodni članovi** sustava.

Matricu  $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ , nazivamo **matrica sustava**.

Matricu  $B = [b_i] = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ , nazivamo **matrica slobodnih članova**.

Matricu  $X = [x_i] = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ , nazivamo **matrica nepoznanica**.

Svaka uređena  $n$ -torka  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$  realnih brojeva, takva da zamjenom  $x_k = \gamma_k$  za  $k = 1, 2, \dots, n$  u svim jednadžbama sustava te jednadžbe prelaze u numeričke jednakosti, predstavlja (jedno) **rješenje sustava**. Kraće kažemo da je uređena  $n$ -torka  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$  rješenje sustava ako i samo ako zadovoljava sve jednadžbe sustava.

Ovisno o ukupnom broju međusobno različitih rješenja, sustave dijelimo na:

1. proturječne (nemaju niti jedno rješenje),
2. Cramerove (imaju točno jedno rješenje),
3. sustave s beskonačno mnogo različitih rješenja.

**Determinanta sustava** (oznaka:  $D$ ) je determinanta matrice sustava.

**$k$ -ta pomoćna matrica sustava** je matrica  $A_k \in M_n(\mathbb{R})$  koja se dobije kad se  $k$ -ti stupac matrice sustava  $A$  zamijeni matricom slobodnih članova.

**$k$ -ta pomoćna determinanta sustava** (oznaka:  $D_k$ ) je determinanta matrice  $A_k$ .

Sustav je Cramerov ako i samo ako je  $D \neq 0$ .

Svaki se sustav može zapisati kao matrična jednadžba  $A \cdot X = B$ , gdje su  $A$  matrica sustava,  $X$  matrica nepoznanica i  $B$  matrica slobodnih članova. Ako je sustav Cramerov, njegovo je rješenje dano izrazom:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Odavde slijedi sljedeći postupak za određivanje rješenja Cramerova sustava.

**Cramerovo pravilo:** Rješenje  $(x_1, \dots, x_n)$  bilo kojeg Cramerova sustava reda  $n$  određeno je izrazima

$$x_k = \frac{D_k}{D}, \quad k = 1, \dots, n.$$

**Homogeni sustav** je sustav u kojemu su svi slobodni članovi jednaki nuli. Takav sustav ili ima jedinstveno (trivijalno) rješenje  $(0, \dots, 0)$  ili ima beskonačno mnogo različitih rješenja.

## Poglavlje 4

# (Radij)vektori

### 4.1 Pojam radijvektora i osnovna svojstva

Neka je  $O$  ishodište pravokutnoga koordinatnog sustava u euklidskom prostoru  $E^3$  čije točke poistovjećujemo s uređenim trojkama realnih brojeva. Posebno,  $O = (0, 0, 0)$ . **Radijvektor** točke  $T \in E^3$  je usmjerena dužina kojoj je početak točka  $O$ , a kraj točka  $T$ . Svaki radijvektor je jednoznačno određen svojom završnom točkom  $T$ . Ako je  $T = (x_T, y_T, z_T)$ , piše se:  $\vec{OT} = (x_T, y_T, z_T)$ .

Posebno se izdvajaju četiri radijvektora:  $\vec{0} = (0, 0, 0)$ ,  $\vec{i} := (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} := (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} := (0, 0, 1)$ . Skup svih radijvektora u prostoru  $E^3$  standardno se označava s  $V^3(O)$ . Ako se ne istakne drugačije, pretpostavlja se da su razmatrani radijvektori elementi skupa  $V^3(O)$ .

**Napomena:** U ostatku teksta ovoga poglavlja, pod pojmom „vektor” podrazumijevat ćemo radijvektor.

**Algebarske operacije s vektorima:** Za  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  i  $\alpha \in \mathbb{R}$  operacije zbrajanja i oduzimanja vektora, te množenja vektora skalarom definirane su s:

$$\begin{aligned}\vec{a} \pm \vec{b} &:= (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3), \\ \alpha \cdot \vec{a} &:= (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \alpha \cdot a_3).\end{aligned}$$

**Napomena:**  $\alpha \cdot \vec{a} = \vec{0}$  ako i samo ako je  $\alpha = 0$  ili  $\vec{a} = \vec{0}$ .

**Duljina vektora**  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  je nenegativan realan broj

$$|\vec{a}| := \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  su **kolinearni** ako je jedan od njih nulvektor  $\vec{0}$  ili ako postoji  $\alpha \in \mathbb{R}$  takav da je  $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b}$ . Ako je  $\alpha > 0$ , kolinearni vektori **imaju istu orijentaciju**. Ako je  $\alpha < 0$ , kolinearni vektori **imaju suprotnu orijentaciju**.

Ako je  $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b}$ , onda je  $|\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{b}|$ . Pritom su  $|\vec{a}|$  i  $|\vec{b}|$  duljine vektora, a  $|\alpha|$  apsolutna vrijednost realnoga broja.

## 4.2 Skalarno i vektorsko množenje vektora

**Skalarni umnožak** (oznaka:  $\cdot$ ) dvaju vektora  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  i  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  je realan broj  $s$  definiran s

$$s := \vec{a} \cdot \vec{b} := \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Skalarno množenje je komutativna operacija (svejedno je u kojem poretku množimo vektore).

**Mjera kuta** između dvaju vektora  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  i  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  je realan broj  $\varphi \in [0, \pi]$  određen trigonometrijskom jednadžbom:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Dva vektora su međusobno **okomita** ako zatvaraju kut od  $90^\circ$ , odnosno  $\frac{\pi}{2}$  radijana. Po definiciji, nulvektor je okomit na svaki vektor.

Dva vektora (različita od nulvektora) su međusobno okomita ako i samo ako je njihov skalarni umnožak jednak nuli.

**Vektorski umnožak** (oznaka:  $\times$ ) dvaju vektora  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  i  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  je vektor  $\vec{c}$  definiran s

$$\vec{c} := \vec{a} \times \vec{b} := \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Vektorsko množenje ima sljedeća svojstva:

1.  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$ , gdje je  $\varphi$  kut između vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .
2. Duljina vektorskog umnoška dvaju vektora jednaka je površini paralelograma kojega razapinju ti vektori.
3. Vektorski umnožak dvaju vektora je okomit na svaki od tih vektora. Ako je  $\vec{c} \neq 0$ , onda se smjer vektora  $\vec{c}$  određuje tako da vektori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  u danom poretku tvore **desni sustav**. Praktično, ako kažiprst desne ruke usmjerimo u smjeru vektora  $\vec{a}$ , a srednji prst u smjeru vektora  $\vec{b}$ , onda će palac pokazivati u smjeru vektorskog umnoška  $\vec{c}$ .
4. Vektorski umnožak dvaju vektora jednak je nulvektoru ako i samo ako su ti vektori kolinearni.
5. Vektorsko množenje je **antikomutativno**, tj. vrijedi:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (-1) \cdot (\vec{b} \times \vec{a}).$$

6. Vektorsko množenje ima svojstvo distributivnosti prema zbrajanju, tj. vrijede jednakosti:

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &= \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}, \\ \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}. \end{aligned}$$

**Napomena:** U sljedećoj su tablici navedeni međusobni vektorski umnošci vektora,  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  i  $\vec{k}$ .



$$\begin{array}{c|ccc} \times & \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \hline \vec{i} & \vec{0} & \vec{k} & -\vec{j} \\ \vec{j} & -\vec{k} & \vec{0} & \vec{i} \\ \vec{k} & \vec{j} & -\vec{i} & \vec{0} \end{array}$$

**Mješoviti umnožak** triju vektora  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  i  $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$  je realan broj  $M$  definiran s

$$M := (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Obujam paralelepipeda razapetog vektorima  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  jednak je  $|M|$ . Obujam tetraedra razapetog tim vektorima jednak je  $\frac{1}{6}|M|$ . Obujam trostrane prizme razapete tim vektorima jednak je  $\frac{1}{2}|M|$ .

Mješoviti umnožak triju vektora jednak je nuli ako i samo ako je jedan od vektora nulvektor ili ako su sva tri vektora **komplanarna** (tj. ako pripadaju istoj ravnini).

### 4.3 Linearna nezavisnost i zavisnost skupa vektora

Neka su  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \in V^3(O)$  bilo koji vektori, a  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$  bilo koji brojevi. Tada vektor

$$\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k$$

nazivamo **linearna kombinacija vektora**  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  s **koficijentima**  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ .

Za konačan skup vektora  $S = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k\} \subset V^3(O)$  kažemo da je **linearno nezavisan** ako iz jednakosti

$$\vec{0} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k \quad (*)$$

slijedi  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ , tj. ako se nul-vektor može prikazati kao linearna kombinacija vektora iz skupa  $S$  na točno jedan, tzv. *trivijalan* način.

Ako postoje  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$  takvi da vrijedi (\*) i ako je barem jedan od tih brojeva različit od nule, kažemo da je skup  $S$  **linearno zavisan**.

Jednočlan skup  $S \subset V^3(O)$  je linearno zavisan ako i samo je  $S = \{\vec{0}\}$ .

Dvočlani skup  $S \subset V^3(O)$  je linearno zavisan ako i samo ako su njegovi elementi kolinearni.

Tročlani skup  $S \subset V^3(O)$  je linearno zavisan ako i samo ako je mješoviti umnožak njegovih elemenata (u bilo kojem poretku) jednak nuli.

Za svaki  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 4$ ,  $n$ -člani skup vektora iz skupa  $V^3(O)$  je linearno zavisan.

Svaki skup  $S \subset V_3(O)$  koji sadrži barem dva vektora je linearno zavisan ako i samo ako se barem jedan vektor iz  $S$  može prikazati kao linearna kombinacija preostalih vektora iz  $S$ .

**Baza** prostora  $V^3(O)$  je svaki linearno nezavisan podskup skupa  $V^3(O)$  takav da se svaki element skupa  $V^3(O)$  može napisati kao linearna kombinacija svih elemenata skupa  $S$ . Skup  $S \subset V^3(O)$  je baza prostora  $V^3(O)$  ako i samo ako je  $S$  tročlani linearno nezavisan skup. Najjednostavnija baza prostora  $V^3(O)$  je kanonska baza  $S = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  jer za općeniti vektor  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  vrijedi  $\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{i}) \cdot \vec{i} + (\vec{a} \cdot \vec{j}) \cdot \vec{j} + (\vec{a} \cdot \vec{k}) \cdot \vec{k} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$ .



## Poglavlje 5

# Realne funkcije jedne realne varijable

### 5.1 Opći pojmovi

Neka su  $X, Y \subset \mathbb{R}$ . **Realna funkcija jedne realne varijable**  $f : X \rightarrow Y$  je svako pridruživanje koje *svakom* elementu  $x \in X$  pridružuje *točno jedan* element  $y \in Y$ . Tada pišemo  $x \xrightarrow{f} y$  ili, jednostavnije,  $y = f(x)$ .

Skup  $X$  naziva se **područje definicije (domena)** funkcije  $f$ , a skup  $Y$  **područje vrijednosti (kodomena)** funkcije  $f$ .

Skup  $f(X) := \{f(x) : x \in X\}$  naziva se **slika** funkcije  $f$  ili **skup svih vrijednosti funkcije**  $f$ . Slika funkcije uvijek je podskup kodomene te funkcije, odnosno vrijedi  $f(X) \subset Y$ .

Kad god se ne istakne drugačije, pretpostavljat ćemo da je  $f$  realna funkcija jedne realne varijable, dakle  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  za neki podskup  $X \subseteq \mathbb{R}$ .

Svaka funkcija je potpuno određena zadavanjem skupova  $X$  i  $Y$  te pravila pridruživanja  $f$  koje svakom  $x \in X$  pridružuje  $y = f(x) \in Y$ . Dvije funkcije  $f$  i  $g$  su **jednake** ako imaju zajedničku domenu  $X$  i zajedničku kodomenu  $Y$ , te vrijedi  $f(x) = g(x)$  za sve  $x \in X$ .

**Kompozicija** realnih funkcija  $f : X \rightarrow Y$  i  $g : X' \rightarrow Y'$  za koje vrijedi  $Y' \subset X$  je realna funkcija  $h : X' \rightarrow Y$  definirana s

$$h(x) := (f \circ g)(x) := f(g(x)), \quad x \in X'.$$

Komponiranje funkcija općenito **nije komutativno**.

Funkcija  $f : X \rightarrow Y$  je **injekcija** ako iz jednakosti  $f(x_1) = f(x_2)$  slijedi  $x_1 = x_2$  za sve  $x_1, x_2 \in X$ .

Funkcija  $f : X \rightarrow Y$  je **surjekcija** ako za svaki  $y \in Y$  postoji barem jedan  $x \in X$  takav da vrijedi  $y = f(x)$ .

Funkcija  $f$  je **bijekcija** ako je injekcija i surjekcija.

**Inverz** bijekcije  $f : X \rightarrow Y$  je funkcija  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  takva da za svaki  $x \in X$  i svaki  $y \in Y$  vrijedi

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \text{i} \quad (f \circ f^{-1})(y) = y.$$

**Pravilo inverza** bijekcije  $f$  može se odrediti tako da se jednačba  $y = f(x)$  riješi po varijabli  $x$ .

**Graf funkcije**  $f$  je skup  $\Gamma(f) := \{(x, f(x)) : x \in X\}$ . On se obično predočava u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini tako da se na os apscisa nanese vrijednosti nezavisne varijable  $x$ , a na os ordinata funkcijske vrijednosti  $f(x)$ .

Ravninska krivulja  $K$  je graf neke funkcije ako i samo ako svaki pravac usporedan s osi ordinata siječe krivulju  $K$  u najviše jednoj točki.

**Napomena:** Nisu sve ravninske krivulje grafovi funkcija. Primjeri takvih ravninskih krivulja su kružnica, elipsa i hiperbola.

Ravninska krivulja  $K$  je graf neke bijekcije ako i samo ako svaki pravac usporedan s osi apscisa i svaki pravac usporedan s osi ordinata siječe krivulju  $K$  u najviše jednoj točki. Graf inverza bijekcije  $f$  može se dobiti zrcaljenjem grafa bijekcije  $f$  s obzirom na pravac čija je jednačba  $y = x$ .

**Nultočka** funkcije  $f$  je svaki  $x \in X$  takav da je  $f(x) = 0$ . Nultočka se grafički interpretira kao sjecište grafa funkcije  $f$  i osi apscisa. Skup svih nultočaka funkcije  $f$  označavamo s  $N(f)$ .

Funkcija  $f : X \rightarrow Y$  je **omeđena odozdo** ako postoji barem jedan  $m \in \mathbb{R}$  takav da za svaki  $x \in X$  vrijedi  $f(x) \geq m$ .

Funkcija  $f : X \rightarrow Y$  je **omeđena odozgo** ako postoji barem jedan  $M \in \mathbb{R}$  takav da za svaki  $x \in X$  vrijedi  $f(x) \leq M$ .

Funkcija  $f : X \rightarrow Y$  je omeđena ako je omeđena i odozdo i odozgo.

Neka je  $f : X \rightarrow Y$ . Ako za sve  $x_1, x_2 \in X$  takve da je  $x_1 < x_2$  vrijedi

1.  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , tada je funkcija  $f$  **rastuća**.
2.  $f(x_1) < f(x_2)$ , tada je funkcija  $f$  **strogo rastuća**.
3.  $f(x_1) \geq f(x_2)$ , tada je funkcija  $f$  **padajuća**.
4.  $f(x_1) > f(x_2)$ , tada je funkcija  $f$  **strogo padajuća**.

Svaka strogo rastuća (strogo padajuća) funkcija je injekcija. (Obratna tvrdnja nije točna.)

Funkcija  $f : X \rightarrow Y$  je **parna** ako za svaki  $x \in X$  vrijedi  $-x \in X$  i  $f(-x) = f(x)$ . Graf svake parne funkcije je osno simetričan s obzirom na os ordinata.

Funkcija  $f : X \rightarrow Y$  je **neparna** ako za svaki  $x \in X$  vrijedi  $-x \in X$  i  $f(-x) = -f(x)$ . Graf svake neparne realne funkcije je centralno simetričan s obzirom na ishodište koordinatnog sustava.

Neka je  $X \subset \mathbb{R}$ . Funkcija  $f : X \rightarrow Y$  je **periodična** ako postoji  $P \in \mathbb{R}$  takav da za sve  $x \in X$  za koje je  $x + P \in X$  vrijedi  $f(x + P) = f(x)$ .

Broj  $P$  naziva se **period** funkcije  $f$ . Najmanji strogo pozitivan period  $T$  (ako postoji) funkcije  $f$  naziva se **temeljni period**.

## 5.2 Polinomi i racionalne funkcije

Neka su  $n \in \mathbb{N}$  i  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ . **Polinom stupnja  $n$**  je funkcija  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definirana s

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0.$$

Broj  $a_n$  naziva se **vodeći koeficijent**, a broj  $a_0$  **slobodni član** polinoma  $p$ . Stupanj polinoma  $p$  označava se s  $\text{st}(p)$  ili  $\text{deg}(p)$ . Monom  $a_n x^n$  naziva se **vodeći član** polinoma  $p$ .

Za  $n = 0$  dobiva se **konstantna funkcija**, za  $n = 1$  **linearna funkcija**, za  $n = 2$  **kvadratna funkcija**, a za  $n = 3$  **kubna funkcija**.

Polinom  $p$  takav da za svaki  $x \in \mathbb{R}$  vrijedi  $p(x) = 0$  nazivamo **nulpolinom**. Njegov se stupanj obično ne definira.

Polinomi  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$  i  $q(x) = b_m x^m + \dots + b_0$  su **jednaki** ako i samo ako vrijedi  $m = n$  i ako je  $a_k = b_k$  za svaki  $k = 0, 1, \dots, n$ .

Svaki polinom neparnog stupnja ima barem jednu nultočku. Odavde slijedi da je svaki polinom neparnog stupnja surjeksija na skup  $\mathbb{R}$ . Polinom stupnja  $n$  koji ima barem  $n + 1$  nultočaka nužno je nulpolinom.

**Korijen** polinoma  $p$  je svako kompleksno rješenje jednadžbe  $p(x) = 0$ .

**Poučak 5.2.1** (Osnovni poučak algebre). *Neka je  $p$  polinom stupnja  $n \geq 1$  s kompleksnim koeficijentima. Tada jednadžba  $p(x) = 0$  ima barem jedno rješenje koje pripada skupu  $\mathbb{C}$ .*

**Poučak 5.2.2** (Drugi osnovni poučak algebre). *Svaki polinom  $p$  stupnja  $n \geq 1$  s kompleksnim koeficijentima ima točno  $n$  ne nužno međusobno različitih kompleksnih korijena  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . Pritom vrijedi*

$$p(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n),$$

gdje je  $a_n$  vodeći koeficijent polinoma  $p$ .

**Kratnost** korijena  $x_k$  polinoma  $p$  je ukupan broj svih korijena polinoma  $p$  koji su jednaki  $x_k$ .

Ako su koeficijenti polinoma  $p$  realni brojevi, tada je  $z \in \mathbb{C}$  korijen polinoma  $p$  ako i samo ako je  $\bar{z}$  također korijen polinoma  $p$ .

**Poučak 5.2.3** (Bézout). *Neka je  $p$  polinom s cjelobrojnim koeficijentima kojemu je vodeći koeficijent jednak 1. Ako jednadžba  $p(z) = 0$  ima rješenje  $z_0 \in \mathbb{Z}$ , onda je  $a_0$  djeljiv s  $z_0$ . Drugim riječima, svi kandidati za cjelobrojne nultočke polinoma s cjelobrojnim koeficijentima i vodećim koeficijentom 1 su nužno djelitelji slobodnog člana tog polinoma.*

Algebarske operacije s polinomima svode se na algebarske operacije s potencijama.

Polinom  $p$  je **djeljiv** polinomom  $q$  ako postoji polinom  $h$  takav da vrijedi  $p = qh$ . U tom je slučaju  $\text{st } p = \text{st } q + \text{st } h$ . Kažemo još da  $q$  **dijeli**  $p$  i pišemo  $q \mid p$ .

**Algoritam za dijeljenje polinoma:** Neka su  $p$  i  $q$  polinomi takvi da je  $\text{st } q \leq \text{st } p$ . Polinom  $p$  možemo podijeliti polinomom  $q$ , pri čemu polinom  $p$  nazivamo djeljenik, a polinom  $q$  djelitelj. Postupak je sljedeći:

**Korak 1.** Označiti  $p_1 = p$  i staviti  $k = 1$ .

**Korak 2.** Podijeliti vodeći član polinoma  $p_k$  vodećim članom djelitelja  $q$ . Time se dobiva monom  $m_k$ .

**Korak 3.** Odrediti polinom  $p_{k+1} = p_k - q m_k$ .

**Korak 4.** Ukoliko je  $\text{st } p_{k+1} < \text{st } q$ , algoritam je završen i vrijedi:

$$h = m_1 + \cdots + m_k, \quad r = p_{k+1}.$$

Inače, uvećati  $k$  za 1 i ići na korak 2.

Rezultat ovog algoritma su jedinstveni polinomi  $h$  i  $r$  takvi da vrijedi:

$$p = qh + r \quad \text{i} \quad \text{st } r < \text{st } q.$$

Polinom  $h$  nazivamo **količnik**, a polinom  $r$  **ostatak** pri dijeljenju polinoma  $p$  i  $q$ .

**Napomena:** Polinom  $p$  je djeljiv polinomom  $q$  ako i samo ako je  $r$  nulpolinom.

Polinom  $d$  je **zajednička mjera** polinoma  $p$  i  $q$  ako su  $p$  i  $q$  djeljivi s  $d$ .

Polinom  $h$  je **najveća zajednička mjera** polinoma  $p$  i  $q$  (oznaka:  $\text{NZM}(p, q)$ ) ako je njegov vodeći koeficijent jednak 1 i ako je djeljiv sa svakom zajedničkom mjerom polinoma  $p$  i  $q$ .

**Euklidov algoritam** za određivanje najveće zajedničke mjere polinoma  $p$  i  $q$ ,  $\text{st } q \leq \text{st } p$ :

**Korak 1.** Označiti  $p_1 = p$  i  $q_1 = q$ , te staviti  $k = 1$ .

**Korak 2.** Podijeliti polinome  $p_k$  i  $q_k$  koristeći algoritam za dijeljenje polinoma (vidjeti str. 21). Dobiju se količnik  $h_k$  i ostatak  $r_k$ .

**Korak 3.** Ukoliko je  $r_k = 0$ , odnosno ukoliko  $q_k$  dijeli  $p_k$ , tada vrijedi  $\text{NZM}(p, q) = q_k$  i algoritam je završen. Inače, ići na Korak 4.

**Korak 4.** Označiti  $p_{k+1} = q_k$  i  $q_{k+1} = r_k$ , uvećati  $k$  za 1 te ići na Korak 2.

Ako je  $\text{NZM}(p, q) = 1$ , tada kažemo su polinomi  $p$  i  $q$  **relativno prosti**. Za takve polinome vrijedi  $N(p) \cap N(q) = \emptyset$ , odnosno oni nemaju zajedničkih nultočaka.

Neka su  $p$  i  $q$  relativno prosti polinomi takvi da vrijedi  $\text{st } p < \text{st } q$ . **Prava racionalna funkcija** je realna funkcija  $f$  definirana pravilom

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \tag{5.1}$$

za sve  $x$  takve da je  $q(x) \neq 0$ . Domena funkcije  $f$  je skup  $R \setminus N(q)$ . Skup svih nultočaka funkcije  $f$  je skup  $N(p)$ .

**Pol** racionalne funkcije  $f$  je svaki element skupa  $N(q)$ . Svaki pol je, dakle, korijen polinoma  $q$  pa ima svoju kratnost, koja se naziva **red pola**.

**Neprava racionalna funkcija** je funkcija  $f$  definirana formulom (5.1) pri čemu je  $\text{st } p \geq \text{st } q$ . Takva se funkcija uvijek može napisati kao zbroj polinoma (stupnja  $\text{st } p - \text{st } q$ ) i prave racionalne funkcije. Prirodno područje definicije, nultočke i polovi pritom se određuju kao i kod prave racionalne funkcije.

### 5.3 Trigonometrijske i ciklometrijske funkcije

Ako se u točki  $T = (1, 0)$  povuče tangenta na jediničnu kružnicu i ta tangenta shvati kao brojevni pravac kojemu je ishodište u točki  $T$ , onda se tzv. **namatanjem pravca na kružnicu** svakoj točki pravca, a time i svakom realnom broju  $x$ , može pridružiti jedinstvena točka  $T' = (x', y')$  na jediničnoj kružnici.

Funkcija koja broju  $x$  pridružuje broj  $x'$  naziva se **kosinus** (oznaka:  $\cos$ ).

Funkcija koja broju  $x$  pridružuje broj  $y'$  naziva se **sinus** (oznaka:  $\sin$ ).

Funkcija koja realnom broju  $x$  pridružuje ordinatu sjecišta pravca kroz točke  $O$  i  $T'$  i tangente na jediničnu kružnicu u točki  $T$  naziva se **tangens** (oznaka:  $\text{tg}$ ). Vrijedi  $\text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x}$ .

Funkcija koja realnom broju  $x$  pridružuje apscisu sjecišta pravca kroz točke  $O$  i  $T'$  i tangente na jediničnu kružnicu u točki  $(0, 1)$  naziva se **kotangens** (oznaka:  $\text{ctg}$ ). Vrijedi  $\text{ctg } x = \frac{\cos x}{\sin x}$ .

Osnovna svojstva navedenih funkcija navedena su u tablici 5.1 na stranici 26.

**Napomena:** Funkcije  $\text{ctg } x$  i  $\frac{1}{\text{tg } x}$  nisu jednake jer nemaju jednake domene. Identitet  $\text{ctg } x = \frac{1}{\text{tg } x}$  vrijedi ako i samo ako je  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Nijedna od četiri osnovne trigonometrijske funkcije nije bijekcija svoje domene na svoju sliku jer nijedna periodična realna funkcija nije injekcija. Međutim, njihova suženja (restrikcije) na određene intervale jesu injekcije, stoga i bijekcije na slike tih intervala, pa na tim intervalima postoje pripadni inverzi. Ti inverzi nazivaju se **ciklometrijske** ili **arkus funkcije**. Njihov naziv vezan je uz promatranje duljine pripadnog luka jedinične kružnice.

Sve arkus funkcije su omeđene i neperiodične. Pregled arkus funkcija i njihovih osnovnih svojstava naveden je u tablici 5.2 na stranici 26.

Neki osnovni identiteti vezani uz trigonometrijske i ciklometrijske funkcije navedeni su u točki 13.3.

## 5.4 Harmonijske funkcije

Neka su  $A$ ,  $\omega$  i  $\varphi$  realne konstante takve da su  $A, \omega > 0$  i  $\varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle$ . **Harmonijska funkcija** je funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow [-A, A]$  definirana pravilom

$$f(x) = A \sin(\omega x + \varphi).$$

Vrijednost  $A$  naziva se **amplituda**, vrijednost  $\omega$  **kružna frekvencija**, a vrijednost  $\varphi$  **fazni pomak** funkcije  $f$ .

U daljnjem tekstu pretpostavlja se da su  $f, f_1, f_2, \dots$  harmonijske funkcije.

**Napomene:**

1. Pretpostavka  $A, \omega > 0$  uzima se bez smanjenja općenitosti. Naime, ako vrijedi  $A < 0$  i/ili  $\omega < 0$ , onda se pripadna harmonijska funkcija svodi na razmatrani oblik primjenom identiteta

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x, \\ \sin(\pi - x) &= \sin x. \end{aligned}$$

2. I funkcija  $g(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$  može se razmatrati kao harmonijska funkcija. Da bi se dobio uobičajeni zapis harmonijske funkcije, primjenjuje se identitet  $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ .

Temeljni period funkcije  $f$  jednak je  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

Skup svih nultočaka funkcije  $f$  je  $N_f = \left\{ \frac{k\pi - \varphi}{\omega} : k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Ako su  $x_i$  i  $x_j$  dvije uzastopne (susjedne) nultočke funkcije  $f$ , onda je

$$|x_i - x_j| = \frac{1}{2} T.$$

Segment  $I = [-\frac{\varphi}{\omega}, T - \frac{\varphi}{\omega}]$  naziva se **osnovni ili temeljni segment** funkcije  $f$ . Karakteristične točke grafa funkcije  $f$  na njezinom osnovnom segmentu su:

$$T_0 = \left(-\frac{\varphi}{\omega}, 0\right), T_1 = \left(-\frac{\varphi}{\omega} + \frac{T}{4}, A\right), T_2 = \left(-\frac{\varphi}{\omega} + \frac{T}{2}, 0\right), \\ T_3 = \left(-\frac{\varphi}{\omega} + \frac{3T}{4}, -A\right) \text{ i } T_4 = \left(-\frac{\varphi}{\omega} + T, 0\right).$$

Funkcija  $g(x) = A_1 \sin(\omega x) + A_2 \cos(\omega x)$  može se zapisati u obliku harmonijske funkcije  $f_1(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ , pri čemu se veličine  $A$  i  $\varphi$  određuju iz jednadžbi:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \\ \cos \varphi = \frac{A_1}{A}, \quad \sin \varphi = \frac{A_2}{A}.$$

**Superpozicija** funkcija  $f_1(x) = A_1 \sin(\omega x + \varphi_1)$  i  $f_2(x) = A_2 \sin(\omega x + \varphi_2)$  je funkcija  $g(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ , pri čemu se veličine  $A$  i  $\varphi$  određuju iz izraza:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

## 5.5 Eksponencijalna funkcija

Neka je  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , realna konstanta. **Eksponencijalna funkcija s bazom  $a$**  je proširenje po neprekidnosti<sup>1</sup>  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcije  $f_Q: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  definirane formulom

$$f_Q(r) = a^r := \sqrt[n]{a^m}, \quad \text{za sve } r = \frac{m}{n}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pišemo  $f(x) = a^x$ .

Eksponencijalna funkcija je bijekcija skupa  $\mathbb{R}$  na skup  $\mathbb{R}^+ := \langle 0, +\infty \rangle$ , te je stoga omeđena odozdo i nema nultočaka. Ta funkcija nije ni parna ni neparna ni periodička. Vodoravna asimptota<sup>2</sup> na njezin graf je pravac  $y = 0$  (os apscisa).

Za  $0 < a < 1$  eksponencijalna funkcija je strogo padajuća. Za  $a > 1$  eksponencijalna funkcija je strogo rastuća.

U primjenama najčešće korištena eksponencijalna funkcija je  $\exp(x) = e^x$ , gdje je  $e$  baza prirodnog logaritma. Broj  $e$  je iracionalan broj i približno je jednak  $2.7182818\dots$ , a definira se kao granična vrijednost niza<sup>3</sup>  $(a_n)_n \in \mathbb{N}$  čiji je opći član jednak  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

Pri računanju vrijednosti eksponencijalne funkcije vrlo često se primjenjuju svojstva potencija navedena u točki 13.1.

<sup>1</sup>Definiciju neprekidne funkcije vidjeti u točki 5.10, stranica 29.

<sup>2</sup>Vidi točku 6.8.

<sup>3</sup>Vidi točku 5.8.



## 5.6 Logaritamska funkcija

Inverz eksponencijalne funkcije s bazom  $a$  naziva se **logaritamska funkcija s bazom  $a$**  i označava s  $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ . Za svaki realan broj  $x \in \mathbb{R}^+$  vrijedi  $a^{\log_a x} = x$ .

Logaritamska funkcija je bijekcija skupa  $\mathbb{R}^+$  na skup  $\mathbb{R}$ , te je stoga neomeđena i ima točno jednu nultočku  $x = 1$ . Ta funkcija nije ni parna ni neparna ni periodička. Uspravna asimptota<sup>4</sup> na njezin graf je pravac  $x = 0$  (os ordinata).

Za  $0 < a < 1$  logaritamska funkcija je strogo padajuća. Za  $a > 1$  logaritamska funkcija je strogo rastuća.

Za  $a = 10$  dobiva se funkcija **dekadskog logaritma** (oznaka:  $\log x$ ). Za  $a = e$  dobiva se funkcija **prirodnog logaritma** (oznaka:  $\ln x$ ).

Pri računanju vrijednosti logaritamske funkcije vrlo često se primjenjuju svojstva logaritama navedena u točki 13.1.

## 5.7 Hiperbolne i area funkcije

Koristeći eksponencijalnu funkciju  $\exp(x) = e^x$  definiraju se osnovne **hiperbolne funkcije**. One predstavljaju svojevrsan analogon trigonometrijskih funkcija, pri čemu se umjesto jedinične kružnice promatra jednakostranična hiperbola čija je jednadžba  $x^2 - y^2 = 1$ . Njihov je pregled naveden u tablici 5.3 na stranici 26.

Graf funkcije  $\operatorname{ch}$  naziva se još i **lančanica**.

Funkcije  $\operatorname{sh}$ ,  $\operatorname{th}$  i  $\operatorname{cth}$ , te suženje funkcije  $\operatorname{ch}$  na interval  $[0, +\infty)$  su injektorije, stoga i bijektorije na slike tih funkcija. Pripadni inverzi nazivaju se **area funkcije**. One predstavljaju svojevrsan analogon ciklotometrijskih funkcija, pri čemu se umjesto duljine luka kružnice promatra površina ravninskih likova određenih gore navedenom jednakostraničnom hiperbolom. Njihov je pregled dan u tablici 5.4 na stranici 26.

**Osnovni hiperbolni identiteti:** Za sve dopustive<sup>5</sup>  $x, y \in \mathbb{R}$  vrijede sljedeće jednakosti:

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x = e^{\pm x}$ ,  | 9. $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$ ,                     |
| 2. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ ,  | 10. $\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$ ,      |
| 3. $\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x}$ ,   | 11. $\operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{1 \pm \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y}$ , |
| 4. $\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$ ,  | 12. $\operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2} (\operatorname{ch}(2x) - 1)$ ,   |
| 5. $\operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$ ,  | 13. $\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2} (\operatorname{ch}(2x) + 1)$ ,   |
| 6. $\operatorname{th}(2x) = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$ ,                                  | 14. $\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{2} (\operatorname{ch}(x + y) + \operatorname{ch}(x - y))$ ,                         |
| 7. $\operatorname{cth}(2x) = \frac{\operatorname{cth}^2 x + 1}{2 \operatorname{cth} x}$ ,                               | 15. $\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{2} (\operatorname{sh}(x + y) + \operatorname{sh}(x - y))$ ,                         |
| 8. $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$ , | 16. $\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{1}{2} (\operatorname{ch}(x + y) - \operatorname{ch}(x - y))$ .                         |

<sup>4</sup>Definiciju (uspravne) asimptote vidjeti na stranici 38.

<sup>5</sup>Vrijednosti  $x$  i  $y$  **dopustive** su za izraz  $I$  ako je svaki član tog izraza definiran za dotične vrijednosti.

Tablica 5.1: Trigonometrijske funkcije

<i>naziv funkcije</i>	<i>domena</i>	<i>slika</i>	<i>temeljni period</i>	<i>parnost</i>
sinus	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	$2\pi$	neparna
kosinus	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	$2\pi$	parna
tangens	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	$\pi$	neparna
kotangens	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	$\pi$	neparna

Tablica 5.2: Arkus funkcije

<i>naziv funkcije</i>	<i>oznaka</i>	<i>domena</i>	<i>slika</i>	<i>neka svojstva</i>
arkus sinus	arcsin	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	neparna, strogo rastuća
arkus kosinus	arccos	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	parna, strogo padajuća
arkus tangens	arctg	$\mathbb{R}$	$\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$	neparna, strogo rastuća
arkus kotangens	arcctg	$\mathbb{R}$	$\langle 0, \pi \rangle$	neparna, strogo padajuća

Tablica 5.3: Hiperbolne funkcije

<i>naziv funkcije</i>	<i>oznaka</i>	<i>domena</i>	<i>slika</i>	<i>formula</i>
kosinus hiperbolni	ch	$\mathbb{R}$	$[1, +\infty)$	$\frac{e^x + e^{-x}}{2}$
sinus hiperbolni	sh	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$
tangens hiperbolni	th	$\mathbb{R}$	$\langle -1, 1 \rangle$	$\frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}$ ili $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
kotangens hiperbolni	cth	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$	$\frac{\text{ch } x}{\text{sh } x}$ ili $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Tablica 5.4: Area funkcije

<i>naziv funkcije</i>	<i>oznaka</i>	<i>domena</i>	<i>slika</i>	<i>formula</i>
area kosinus hiperbolni	arch	$[1, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
area sinus hiperbolni	arsh	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
area tangens hiperbolni	arth	$\langle -1, 1 \rangle$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$
area kotangens hiperbolni	arth	$\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$

## 5.8 Nizovi i granične vrijednosti (limesi) nizova

**Niz realnih brojeva** je svaka funkcija  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Izraz  $a_n := a(n)$  naziva se **opći član** niza. Grafički prikaz niza je skup točaka na brojevnom pravcu.

Niz  $(a_n)$  je **aritmetički** ako postoji  $d \in \mathbb{R}$  takav za svaki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi  $a_{n+1} - a_n = d$ . Broj  $d$  naziva se **razlika** aritmetičkog niza. Opći član tog niza računa se prema formuli

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Zbroj prvih  $n$  članova toga niza (oznaka:  $S_n$ ) računa se prema formuli

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Niz  $(g_n)$  je **geometrijski** ako postoji  $q \in \mathbb{R}$  takav za svaki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi  $\frac{g_{n+1}}{g_n} = q$ . Broj  $q$  naziva se **količnik (kvocijent)** geometrijskog niza. Opći član tog niza računa se prema formuli

$$g_n = a_1 q^{n-1}.$$

Zbroj prvih  $n$  članova toga niza (oznaka:  $S_n$ ) računa se prema formuli

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Realan broj  $L$  je **granična vrijednost (limes)** niza  $(a_n)$  ako za svaki  $\varepsilon > 0$  postoji  $N \in \mathbb{N}$  takav da za sve  $n \geq N$  vrijedi  $|a_n - L| < \varepsilon$ . U tom slučaju pišemo:  $L = \lim_n a_n$ .

Niz koji ima graničnu vrijednost nazivamo **konvergentnim**.

Svaki konvergentan niz je omeđen. Svaki omeđeni rastući/padajući niz je konvergentan.<sup>6</sup>

Za niz koji nije konvergentan kažemo da je **divergentan**, odnosno da ne konvergira.

Kažemo da niz  $(a_n)$  *divergira*  $k + \infty$  i pišemo  $\lim a_n = +\infty$  ako za svaki broj  $E > 0$  postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$  takav da za sve  $n \geq n_0$  vrijedi  $a_n > E$ .

Kažemo da niz  $(a_n)$  *divergira*  $k - \infty$  i pišemo  $\lim a_n = -\infty$  ako niz  $(-a_n)$  divergira  $k + \infty$ .

**Poučak 5.8.1** (o sendviču). *Neka su  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  i  $(c_n)$  nizovi takvi da za svaki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi nejednakost  $a_n \leq b_n \leq c_n$ . Ako su nizovi  $(a_n)$  i  $(c_n)$  konvergentni i imaju istu graničnu vrijednost  $L \in \mathbb{R}$ , onda je i niz  $(b_n)$  konvergentan i ima graničnu vrijednost  $L$ .*

**Osnovna svojstva konvergentnih nizova:** Neka su  $(a_n)$  i  $(b_n)$  konvergentni nizovi čije su granične vrijednosti redom jednake  $L_1$  i  $L_2$ , pri čemu su  $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ . Neka su  $\alpha \in \mathbb{R}$  i  $\beta > 0$  konstante. Tada su nizovi  $(a_n \pm b_n)$ ,  $(a_n b_n)$  i  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  (za  $L_2 \neq 0$ ), kao i nizovi  $(a_n^\alpha)$  (ako je  $a_n > 0$  za sve  $n \in \mathbb{N}$  i  $L_1 > 0$ ) i  $(\beta^{a_n})$ , konvergentni i vrijedi:

1.  $\lim_n (a_n \pm b_n) = L_1 \pm L_2$ ,
2.  $\lim_n (a_n b_n) = L_1 L_2$ ,
3.  $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \frac{L_1}{L_2}$ ,
4.  $\lim_n (a_n^\alpha) = L_1^\alpha$ ,

<sup>6</sup>Definicije svojstava omeđenosti, (strogoga) rasta i (strogoga) pada niza analogne su definicijama istih svojstava za realnu funkciju jedne realne varijable.

$$5. \lim (\beta^{a_n}) = \beta^{L_1}.$$

**Granične vrijednosti nekih karakterističnih nizova:**

$$1. \lim_n \frac{a}{n^k} = 0, \text{ za svaki } a \in \mathbb{R} \text{ i } k \in \mathbb{N},$$

$$2. \text{ ako je } b_m \neq 0, \text{ tada vrijedi } \lim_n \frac{\sum_{k=0}^m a_k n^k}{\sum_{k=0}^m b_k n^k} = \frac{a_m}{b_m},$$

$$3. \lim_n (\alpha a^n) = \begin{cases} 0, & \text{za } \alpha = 0 \text{ ili } 0 < a < 1, \\ \alpha, & \text{za } a = 1, \\ -\infty, & \text{za } \alpha < 0 \text{ i } a > 1, \\ +\infty, & \text{za } \alpha > 0 \text{ i } a > 1, \end{cases}$$

$$4. \lim_n \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a, \text{ za } a \in \mathbb{R},$$

$$5. \lim_n \sqrt[n]{a} = 1, a > 0,$$

$$6. \lim_n \sqrt[n]{n} = 1.$$

## 5.9 Granične vrijednosti (limesi) funkcije

Neka je  $f$  realna funkcija definirana na intervalu  $I = \langle a, b \rangle$  osim možda u točki  $c \in I$ . Ako za svaki rastući niz  $(x_n)$  u  $I$  takav da je  $\lim_n x_n = c$  niz  $(f(x_n))$  ima graničnu vrijednost  $L_1 \in \mathbb{R}$ , kaže se da je  $L_1$  **granična vrijednost (limes) slijeva funkcije**  $f$  u točki  $c$ . Piše se:  $L_1 = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ .

Ako za svaki padajući niz  $(x_n)$  u  $I$  takav da je  $\lim_n x_n = c$  niz  $(f(x_n))$  ima graničnu vrijednost  $L_2 \in \mathbb{R}$ , kaže se da je  $L_2$  **granična vrijednost (limes) zdesna funkcije**  $f$  u točki  $c$ . Piše se:  $L_2 = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ .

Ako vrijedi jednakost  $L_1 = L_2 =: L$ , kaže se da **funkcija  $f$  ima (obostranu) graničnu vrijednost** odnosno **(obostrani) limes  $L$  u točki  $c$** . Piše se:  $L = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$ .

Ako je za svaki rastući niz  $(x_n)$  u  $I$  takav da je  $\lim_n x_n = c$  niz  $(f(x_n))$  divergentan, dogovorno pišemo  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$  ako je  $(f(x_n))$  padajući niz, odnosno  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = +\infty$  ako je  $(f(x_n))$  rastući niz. Analogne se oznake definiraju za limese zdesna i za obostrane limese.

Ako za svaki rastući divergentni niz  $(x_n)$  niz  $(f(x_n))$  ima graničnu vrijednost  $M_1 \in \mathbb{R}$ , tada pišemo:  $M_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . U analognom slučaju kada je  $(x_n)$  padajući divergentni niz, a  $(f(x_n))$  ima graničnu vrijednost  $M_2 \in \mathbb{R}$  pišemo:  $M_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

Pri određivanju graničnih vrijednosti funkcije primjenjuju se ista pravila kao i kod određivanja granične vrijednosti niza. Neka su  $f$  i  $g$  funkcije čije su granične vrijednosti (slijeva, zdesna ili obostrane) u točki  $c$  redom jednake  $L_1$  i  $L_2$ , pri čemu su  $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ . Neka su  $\alpha \in \mathbb{R}$  i  $\beta > 0$  konstante. Tada funkcije  $f \pm g$ ,  $f g$  i  $\frac{f}{g}$  (za  $L_2 \neq 0$ ), kao i funkcije  $(f(x))^\alpha$  (ako je  $f(x) > 0$  za sve  $x$ ),  $\beta^{f(x)}$  ( $\beta > 0$ ) i  $f(x)^{g(x)}$  (za  $L_1 > 0$ ) imaju granične vrijednosti u točki  $c$  i vrijedi:

$$1. \lim_{x \rightarrow c} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2,$$

$$2. \lim_{x \rightarrow c} (f(x) g(x)) = L_1 L_2,$$

$$3. \lim_{x \rightarrow c} (a f(x)) = a L_1, a \in \mathbb{R},$$

4.  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ , za  $L_2 \neq 0$ ,
5.  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x))^\alpha = L_1^\alpha$ , ako je  $L_1 > 0$  i  $f(x) > 0$  za svaki  $x \in I \setminus \{c\}$ ,
6.  $\lim_{x \rightarrow c} \beta^{f(x)} = \beta^{L_1}$ ,  $\beta > 0$ ,
7.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)^{g(x)} = L_1^{L_2}$ .

**Neke karakteristične jednostrane i obostrane granične vrijednosti funkcija:**

Kad god nije drugačije navedeno,  $a$  je realna konstanta.

1.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^a} = 0$ ,  $a > 0$ ,
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^a} = +\infty$ ,  $a < 0$ ,
3.  $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty$ ,
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$ ,
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ ,  $a > 0$ ,
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{x} = a$ ,
7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$ ,
8.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin(ax)}{x} = 0$ ,
9.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$ ,
10.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{ctg} x = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{ctg} x = +\infty$ ,
11.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ ,
12.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = \pi$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = 0$ ,
13.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{za svaki } a \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 1, & \text{za } a = 1, \\ +\infty, & \text{za svaki } a > 1, \end{cases}$
14.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{za svaki } a > 1, \\ 1, & \text{za } a = 1, \\ +\infty, & \text{za svaki } a \in \langle 0, 1 \rangle, \end{cases}$
15.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ ,
16.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{th} x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{cth} x = -1$ ,
17.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{th} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{cth} x = 1$ ,
18.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{arcth} x = 0$ .

## 5.10 Neprekidne funkcije

Neka je  $I \subset \mathbb{R}$  otvoreni interval. Funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  je **neprekidna u točki**  $c \in I$  ako granična vrijednost  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  postoji i jednaka je  $f(c)$ .

**Napomena:** Funkcija može biti neprekidna isključivo u onim točkama u kojima je definirana.

Funkcija  $f$  je **neprekidna na skupu**  $S \subset \mathbb{R}$  ako je neprekidna u svakoj točki tog skupa.

Ako je  $S = [a, b)$ , onda je  $f$  neprekidna na  $S$  ako vrijedi sljedeće:

1.  $f$  je neprekidna na  $\langle a, b \rangle$ ,
2. postoji limes zdesna funkcije  $f$  u točki  $a$  i jednak je  $f(a)$ .

Ako je  $S = \langle a, b]$ , onda je  $f$  neprekidna na  $S$  ako vrijedi sljedeće:

1.  $f$  je neprekidna na  $\langle a, b \rangle$ ,
2. postoji limes slijeva funkcije  $f$  u točki  $b$  i jednak je  $f(b)$ .

Funkcija  $f$  je neprekidna na segmentu  $[a, b]$  ako i samo ako je  $f$  neprekidna na intervalima  $[a, b)$  i  $\langle a, b]$ .

Sve elementarne funkcije (polinomi, (ne)prava racionalna funkcija, eksponencijalna i logaritamska funkcija, trigonometrijske i ciklometrijske funkcije, hiperbolne i area funkcije itd.) neprekidne su na svojim područjima definicije (domenama).

**Neka svojstva neprekidnih funkcija:**

1. Neka su  $f$  i  $g$  funkcije neprekidne u točki  $c$  i neka je  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Tada su i funkcije  $f \pm g$ ,  $f g$  i  $\alpha f$  neprekidne u točki  $c$ .
2. Neka su  $f$  i  $g$  funkcije takve da je  $g$  neprekidna u točki  $c$ , a  $f$  neprekidna u točki  $g(c)$ . Tada je i funkcija  $f \circ g$  neprekidna u točki  $c$ .

**Neka svojstva funkcija neprekidnih na segmentu:** Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija. Tada vrijedi sljedeće:

1. Slika funkcije  $f$  je neki segment  $[c, d] \subset \mathbb{R}$ . Odavde slijedi da funkcija postiže najmanju vrijednost  $c$  i najveću vrijednost  $d$ .
2. Za svaki  $y \in [c, d]$  postoji barem jedan  $x \in [a, b]$  takav da je  $y = f(x)$ .
3. Ako je  $f(a)f(b) < 0$ , tada postoji barem jedan  $c \in \langle a, b \rangle$  takav da je  $f(c) = 0$ . Drugim riječima, ako vrijednosti funkcije  $f$  na krajevima segmenta  $[a, b]$  imaju različite predznake, onda  $f$  ima nultočku u intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

## 5.11 Vrste prekida funkcije

Neka je  $I \subset \mathbb{R}$  otvoreni interval. Funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ima **prekid u točki**  $c \in I$  ako nije neprekidna u točki  $c$ .

**Napomena:** Funkcija može imati prekid isključivo u onim točkama u kojima je definirana.

Razlikujemo sljedeće vrste prekida funkcije u točki.

- Ako jednostrani limesi  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$  i  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$  postoje i jednaki su  $a \in \mathbb{R}$ , te ako je  $f(c) \neq a$ , kažemo da  $f$  ima **uklonjivi prekid** u točki  $c$ . Prekid se ukloni tako da se u točki  $c$  promijeni vrijednost funkcije definirajući  $f(c) := a$ .
- Ako gore navedeni jednostrani limesi postoje i različiti su, tada funkcija  $f$  u točki  $c$  ima prekid **prve vrste**.
- Ako barem jedan od gore navedenih jednostranih limesa ne postoji, tada  $f$  ima u točki  $c$  prekid **druge vrste**.

## Poglavlje 6

# Osnove diferencijalnog računa

### 6.1 Derivacija funkcije

Neka su  $I \subset \mathbb{R}$  otvoreni interval i  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija. Ako za  $x_0 \in I$  postoji granična vrijednost

$$L := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

kažemo da  $f$  ima **derivaciju u točki**  $x_0$  jednaku  $L$  i pišemo  $f'(x_0) := L$ .

Vrijednost derivacije funkcije u točki  $x_0$  geometrijski se interpretira kao koeficijent smjera tangente povučene na graf funkcije  $f$  u točki  $T = (x_0, f(x_0))$ . Kaže se da je funkcija  $f$  **derivabilna** na  $I$  ako  $f$  ima derivaciju u svakoj točki. **Derivacija funkcije**  $f$  je funkcija koja svakom realnom broju  $x \in I$  pridružuje realan broj  $f'(x)$ . Derivacija funkcije može se definirati i izrazom

$$f'(x) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Domena funkcije  $f'$  je uvijek podskup domene funkcije  $f$ .

**Napomena:** U poglavlju 7 promatrat ćemo funkcije čija je domena neki segment  $[a, b]$ . U takvim slučajevima potrebno je definirati derivacije funkcije i u rubnim točkama toga segmenta. Te derivacije su tzv. **jednostrane derivacije** definirane izrazima

$$f'(a) := \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad f'(b) := \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

**Derivacije elementarnih funkcija** navedene su u tablici 6.1. Pritom su  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  konstante i  $\alpha \neq 0$ .

Tablica 6.1: Derivacije elementarnih funkcija

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$c \in \mathbb{R}$	0	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x$	1	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$x^\alpha$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$e^x$	$e^x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\alpha^x$ ( $\alpha > 0$ i $\alpha \neq 1$ )	$\alpha^x \ln \alpha$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\log_\alpha x$ ( $\alpha > 0$ i $\alpha \neq 1$ )	$\frac{1}{x \ln \alpha}$	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{arsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{arch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{arth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{arth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(\alpha x + \beta)$	$\alpha f'(\alpha x + \beta)$

**Osnovna pravila deriviranja:** Neka su  $f$  i  $g$  funkcije derivabilne na intervalu  $I$  i  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Tada za svaki  $x \in I$  vrijedi sljedeće:

1.  $(\alpha f(x))' = \alpha f'(x)$ ,
2.  $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ ,
3.  $(f(x) g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$ ,
4.  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$  i posebno  $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$ ,
5.  $(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) g'(x)$  tj.  $(f(g(x)))' = f'(g(x)) g'(x)$ ,
6. Ako je funkcija  $f$  injekcija, dakle bijekcija na sliku  $f(I)$ , i inverzna funkcija  $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$  je derivabilna u točki  $x \in f(I)$ , onda je  $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(x)}$ , tj.  $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ .

**Deriviranje implicitno zadane funkcije  $f(x, y) = 0$ :**

1. Članovi koji sadrže samo varijablu  $x$  deriviraju se po toj varijabli na uobičajen način (tj. kao funkcije varijable  $x$ ).
2. Članovi koji sadrže varijablu  $y$  deriviraju se prema osnovnim pravilima deriviranja smatrajući da je  $y = y(x)$  funkcija varijable  $x$ . Iz tako dobivenog izraza treba izraziti  $y'$ .

**Logaritamsko deriviranje:** Za funkciju  $y(x) = (f(x))^{g(x)}$  vrijedi:

$$y'(x) = (f(x))^{g(x)} \left( g'(x) \ln(f(x)) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)} \right).$$

**Jednadžba tangente** na ravninsku krivulju zadanu jednadžbom  $y = f(x)$  u točki  $T = (x_0, f(x_0))$  glasi:

$$t \dots y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$



Jednadžba tangente na ravninsku krivulju zadanu parametarski izrazom

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases} \quad t \in S \subset \mathbb{R}$$

u točki  $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$  za neki  $t_0 \in S$ , dana je formulom

$$t \dots y = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)} (x - x_0) + y_0.$$

**Jednadžba normale** na ravninsku krivulju zadanu jednadžbom  $y = f(x)$  u točki  $T = (x_0, f(x_0))$  glasi:

$$t \dots y = -\frac{1}{f'(x_0)} (x - x_0) + f(x_0).$$

## 6.2 Lokalni i globalni ekstremi

Neka je  $f$  realna funkcija neprekidna na intervalu  $I = \langle a, b \rangle$ <sup>1</sup>. Ako za točku  $c \in I$  postoji otvoreni interval  $I_c = \langle \alpha, \beta \rangle \subset I$  takav da je  $c \in I_c$  i da za svaki  $x \in I_c \setminus \{c\}$  vrijedi

1.  $f(x) \geq f(c)$ , tada  $f$  ima **lokalni minimum u točki  $c$** .
2.  $f(x) > f(c)$ , tada  $f$  ima **strogi lokalni minimum u točki  $c$** .
3.  $f(x) \leq f(c)$ , tada  $f$  ima **lokalni maksimum u točki  $c$** .
4.  $f(x) < f(c)$ , tada  $f$  ima **strogi lokalni maksimum u točki  $c$** .

(Strogi) lokalni minimum i (strogi) lokalni maksimum jednim se imenom nazivaju **(strogi) lokalni ekstremi**.

Neka su  $f : X \rightarrow Y$  realna funkcija i  $c \in X$ . Ako za svaki  $x \in X \setminus \{c\}$  vrijedi

1.  $f(x) \geq f(c)$ , tada  $f$  ima **globalni minimum u točki  $c$** .
2.  $f(x) > f(c)$ , tada  $f$  ima **strogi globalni minimum u točki  $c$** .
3.  $f(x) \leq f(c)$ , tada  $f$  ima **globalni maksimum u točki  $c$** .
4.  $f(x) < f(c)$ , tada  $f$  ima **strogi globalni maksimum u točki  $c$** .

(Strogi) globalni minimum i (strogi) globalni maksimum jednim se imenom nazivaju **(strogi) globalni ekstremi**.

**Stacionarna točka** derivabilne funkcije  $f$  je svaka nultočka funkcije  $f'$ . Svaki lokalni ekstrem derivabilne funkcije je stacionarna točka, ali neka stacionarna točka ne mora biti lokalni ekstrem.

**$f''$ -test za određivanje strogih lokalnih ekstrema:** Neka je realna funkcija  $f$  dvaput derivabilna na intervalu  $I$ .

**Korak 1.** Odrediti prvu derivaciju  $f'$ .

**Korak 2.** Ako  $f'$  nema na intervalu  $I$  niti jedne nultočke, onda funkcija  $f$  na intervalu  $I$  nema niti lokalnih niti globalnih ekstrema. U protivnom, odrediti sve nultočke funkcije  $f'$  koje pripadaju intervalu  $I$ .

<sup>1</sup>U obzir dolaze slučajevi kada je  $f$  neprekidna na  $\mathbb{R}$  ili na intervalu  $\langle a, +\infty \rangle$  ili na intervalu  $\langle -\infty, b \rangle$ .

**Korak 3.** Odrediti drugu derivaciju  $f'' = (f')'$ .

**Korak 4.** Za svaku nultočku  $x_0$  dobivenu u prethodnom koraku odrediti predznak vrijednosti  $f''(x_0)$ .

**Korak 5.** Ako je  $f''(x_0) > 0$ , onda  $f$  u točki  $x_0$  ima strogi lokalni minimum. Ako je  $f''(x_0) < 0$ , onda  $f$  u točki  $x_0$  ima strogi lokalni maksimum. Ako je  $f''(x_0) = 0$ , tada treba računati, ako postoje, vrijednosti derivacija viših redova<sup>2</sup> u točki  $x_0$ , tj. brojeve  $f'''(x_0)$ ,  $f^{iv}(x_0)$ ,  $f^v(x_0)$  itd. Ako su sve te vrijednosti jednake nuli,  $f''$ -test ne daje odluku, pa treba primijeniti algoritam za određivanje lokalnih ekstrema naveden niže. U suprotnom, neka je  $n$  najmanji prirodan broj takav da je  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ . Ako je  $n$  neparan, tada  $f$  nema strogi lokalni ekstrem u točki  $x_0$ . Ako je  $n$  paran, tada  $f$  u točki  $x_0$  ima strogi lokalni maksimum ako je  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , odnosno strogi lokalni minimum ako je  $f^{(n)}(x_0) > 0$ .

**Određivanje globalnih ekstrema derivabilne funkcije definirane na segmentu  $I = [a, b]$ :**

**Korak 1.** Odrediti prvu derivaciju  $f'$ .

**Korak 2.** Odrediti sve nultočke funkcije  $f'$  koje pripadaju intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

**Korak 3.** Za svaku nultočku  $x_0$  dobivenu u prethodnom koraku izračunati  $f(x_0)$ .

**Korak 4.** Izračunati  $f(a)$  i  $f(b)$ .

**Korak 5.** Među svim vrijednostima izračunatim u prethodna dva koraka odrediti najmanju, odnosno najveću. Najmanja vrijednost je globalni minimum, a najveća globalni maksimum.

**Određivanje intervala monotonosti i strogih lokalnih ekstrema funkcije  $f$ :** Neka je  $f$  realna funkcija derivabilna na intervalu  $I = \langle a, b \rangle$ <sup>3</sup>.

**Korak 1.** Odrediti prvu derivaciju  $f'$ .

**Korak 2.** Odrediti sve nultočke funkcije  $f'$  koje pripadaju intervalu  $I$ <sup>4</sup>.

**Korak 3.** Neka su  $x_1, \dots, x_n$  sve nultočke dobivene u prethodnom koraku označene tako da vrijede nejednakosti  $a =: x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} := b$ . Skup  $I \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$  može se prikazati kao unija točno  $n+1$  otvorenih intervala  $I_1, I_2, \dots, I_{n+1}$ , pri čemu je  $I_k = \langle x_{k-1}, x_k \rangle$ ,  $k = 1, 2, \dots, n+1$ .

**Korak 4.** Za svaki  $k = 1, 2, \dots, n+1$  odabrati točku  $t_k \in I_k$ .

**Korak 5.** Za svaki  $k = 1, 2, \dots, n+1$  odrediti predznak broja  $f'(t_k)$ . Ako je  $f'(t_k) > 0$ , onda  $f$  strogo raste na intervalu  $I_k$ . Ako je  $f'(t_k) < 0$ , onda  $f$  strogo pada na intervalu  $I_k$ .

**Korak 6.** Za svaki  $k = 1, 2, \dots, n$  vrijede sljedeće tvrdnje:

1. ako je  $f'(t_k) < 0$  i  $f'(t_{k+1}) > 0$ , tada  $f$  ima strogi lokalni minimum u točki  $x_k$ ,
2. ako je  $f'(t_k) > 0$  i  $f'(t_{k+1}) < 0$ , tada  $f$  ima strogi lokalni maksimum u točki  $x_k$ ,
3. ako su brojevi  $f'(t_k)$  i  $f'(t_{k+1})$  istog predznaka, tada  $f$  nema strogi lokalni ekstrem u točki  $x_k$ .

<sup>2</sup>O derivacijama višeg reda vidjeti točku 6.5 na stranici 35.

<sup>3</sup>Dozvoljavaju se slučajevi  $a = -\infty$  ili  $b = +\infty$ ,  $I = \mathbb{R}$ , te slučaj kada je  $I$  unija konačno mnogo otvorenih intervala.

<sup>4</sup>Na ovaj korak treba naročito pripaziti ako su  $f$  i  $f'$  suženja funkcija koje su inače derivabilne na nadskupu intervala  $I$ .

### 6.3 Neki osnovni poučci diferencijalnog računa

**Poučak 6.3.1** (Fermat). *Neka je  $f$  realna funkcija definirana na intervalu  $I \subset \mathbb{R}$ . Ako  $f$  ima u točki  $c \in I$  lokalni minimum ili lokalni maksimum, te ako postoji  $f'(c)$ , tada je  $f'(c) = 0$ . Drugim riječima, ako funkcija  $f$  postiže lokalni ekstrem u točki  $c$ , onda ili vrijedi  $f'(c) = 0$  ili  $f$  nema derivaciju u točki  $c$ .*

**Poučak 6.3.2** (Rolle). *Neka je  $f$  realna funkcija neprekidna na segmentu  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Ako je  $f$  derivabilna na intervalu  $\langle a, b \rangle$  i ako je  $f(a) = f(b)$ , tada postoji barem jedan  $c \in \langle a, b \rangle$  takav da je  $f'(c) = 0$ .*

**Poučak 6.3.3** (Lagrangeov poučak o srednjoj vrijednosti). *Neka je  $f$  realna funkcija neprekidna na segmentu  $[a, b]$  i derivabilna na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Tada postoji barem jedan  $c \in \langle a, b \rangle$  takav da vrijedi*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

*Geometrijski, postoji barem jedan  $c \in \langle a, b \rangle$  takav da je tangenta povučena na graf funkcije  $f$  u točki  $C = (c, f(c))$  usporedna s pravcem kroz točke  $A = (a, f(a))$  i  $B = (b, f(b))$ .*

**Poučak 6.3.4** (Cauchyev poučak o srednjoj vrijednosti). *Neka su  $f$  i  $g$  realne funkcije neprekidne na segmentu  $[a, b]$  i derivabilne na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Ako za svaki  $x \in \langle a, b \rangle$  vrijedi  $g'(x) \neq 0$ , tada postoji barem jedan  $c \in \langle a, b \rangle$  takav da vrijedi*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

### 6.4 L'Hôpital-Bernoullijevo pravilo

Neka su funkcije  $f$  i  $g$  derivabilne na intervalu  $I = \langle a, b \rangle$ , osim eventualno u točki  $c \in I$ . Pretpostavimo da je  $g(x) \neq 0$  i  $g'(x) \neq 0$  za sve  $x \in I \setminus \{c\}$ . Ako je  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty$  i  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm\infty$  ili  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$  te ako postoji limes  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: L$ , onda postoji i limes  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$  i jednak je  $L$ .

Brojevi  $a$ ,  $b$  i  $c$  mogu biti i  $\pm\infty$ . U slučaju kada je  $c = \pm\infty$ , umjesto pretpostavke  $g(x), g'(x) \neq 0$  za sve  $x \in I \setminus \{c\}$ , treba pretpostaviti da postoji  $M > 0$  tako da vrijedi  $g(x), g'(x) \neq 0$  kada je  $|x| > M$ .

Pomoću ovog pravila, a uz primjenu odgovarajućih algebarskih transformacija, ponekad je moguće odrediti i granične vrijednosti oblika  $0 \cdot \pm\infty$ ,  $0^{\pm\infty}$ ,  $1^{\pm\infty}$  itd.

U određenim slučajevima ovo je pravilo moguće primijeniti i višekratno, ali uvijek provjeravajući jesu li ispunjene pretpostavke uz koje je moguće primijeniti pravilo.

### 6.5 Derivacije višeg reda

**Derivacija reda  $n$**  induktivno se definira s

$$f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)', \quad \text{za svaki } n \in \mathbb{N},$$

pri čemu je dogovorno  $f^{(0)} := f$ . Praktično se derivacija reda  $n$  dobije  $n$ -strukim deriviranjem polazne funkcije  $f$ .

U općem je slučaju derivaciju reda  $n$  nemoguće odrediti eksplicitnim pravilom.

U nekim je slučajevima podesno primijeniti **Leibnizovu formulu**:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

U gornjoj su formuli za prirodne brojeve  $n$  i  $k$  s

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

označeni **binomni koeficijenti**, gdje je  $k! := 1 \cdot 2 \cdots k$  umnožak prvih  $k$  prirodnih brojeva.<sup>5</sup> Dogovorno vrijedi  $0! := 1$ .

**Neke karakteristične derivacije višeg reda** navedene su u Tablici 6.2. Pritom je  $f$   $n$ -puta derivabilna funkcija, a  $\alpha, \beta, m \in \mathbb{R}$  i  $n \in \mathbb{N}$  su konstante.

Tablica 6.2: Više derivacije nekih funkcija

$f(x)$	$f^{(n)}(x)$
$x^m$	$\begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, & \text{za } m \in \mathbb{N} \text{ i } m \geq n, \\ 0, & \text{za } m \in \mathbb{N} \text{ i } m < n, \\ x^{m-n} \prod_{k=0}^{n-1} (m-k), & \text{za } m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$
$\alpha^x, \alpha > 0$	$\alpha^x (\ln \alpha)^n$
$\ln x$	$\frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}$
$\sin x$	$\sin(x + n \frac{\pi}{2})$
$\cos x$	$\cos(x + n \frac{\pi}{2})$
$\operatorname{sh} x$	$\begin{cases} \operatorname{sh} x, & \text{za parne } n \in \mathbb{N}, \\ \operatorname{ch} x, & \text{za neparne } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
$\operatorname{ch} x$	$\begin{cases} \operatorname{ch} x, & \text{za parne } n \in \mathbb{N}, \\ \operatorname{sh} x, & \text{za neparne } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
$f(\alpha x + \beta)$	$\alpha^n f^{(n)}(\alpha x + \beta)$

## 6.6 Diferencijal funkcije

**Diferencijal derivabilne funkcije**  $y$  (oznaka:  $dy$ ) je linearna aproksimacija prirasta te funkcije u okolini neke njezine točke. Definiran je formulom:

$$dy = y'(x) \Delta x \quad \text{ili ekvivalentno} \quad dy = y'(x) dx.$$

<sup>5</sup> Oznaku  $\binom{n}{k}$  čitati „en povrh ka”, a oznaku  $n!$  „en faktorijela”.

Pritom je  $\Delta x$  **prirast** varijable  $x$ , a  $dx$  diferencijal funkcije  $y(x) = x$ . Može se pokazati da vrijedi jednakost  $dx = \Delta x$ , pa se  $dx$  uobičajeno naziva **diferencijalom varijable  $x$** .

Za derivabilnu funkciju kaže se i da je **diferencijabilna**.

**Neka svojstva diferencijala:** Neka su  $f$  i  $g$  diferencijabilne funkcije. Tada vrijedi sljedeće:

1. diferencijal svake konstantne funkcije jednak je nuli,
2.  $d(f \pm g) = df \pm dg$ ,
3.  $d(fg) = df \cdot g + f \cdot dg$ ,
4.  $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}$ , uz uvjet  $g(x) \neq 0$ .

## 6.7 Konveksnost i konkavnost funkcije

Neka je  $I \subset \mathbb{R}$  otvoreni interval i neka je  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija.  $f$  je **strogo konveksna** na intervalu  $I$  ako za sve  $x_1, x_2 \in I$  vrijedi

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Ako je  $f$  derivabilna i strogo konveksna na  $I$ , te ako je  $c \in I$ , onda se tangenta povučena na graf funkcije  $f$  u točki  $T = (c, f(c))$  nalazi ispod toga grafa.

Neka je  $f$  derivabilna na  $I$ . Tada je  $f$  strogo konveksna na  $I$  ako i samo ako je  $f'$  strogo rastuća funkcija na  $I$ .

Neprekidna funkcija  $f$  je **strogo konkavna** na intervalu  $I$  ako za sve  $x_1, x_2 \in I$  vrijedi

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Ako je  $f$  derivabilna i strogo konkavna na  $I$ , te ako je  $c \in I$ , onda se tangenta povučena na graf funkcije  $f$  u točki  $T = (c, f(c))$  nalazi iznad toga grafa.

Neka je  $f$  derivabilna na  $I$ . Tada je  $f$  strogo konkavna na  $I$  ako i samo ako je  $f'$  strogo padajuća funkcija na  $I$ .

Točka  $T = (c, f(c))$  je **prijevojna točka (točka infleksije)** grafa funkcije  $f$  ako postoji  $\varepsilon > 0$  takav da je funkcija  $f$  konveksna/konkavna na intervalu  $\langle c - \varepsilon, c \rangle$ , a konkavna/konveksna na intervalu  $\langle c, c + \varepsilon \rangle$ .

**Postupak određivanja prijevornih točaka i intervala konveksnosti i konkavnosti:** Neka je funkcija  $f$  dvaput derivabilna na intervalu  $I$ .

**Korak 1.** Odrediti drugu derivaciju  $f''$  funkcije  $f$ .

**Korak 2.** Odrediti sve nultočke funkcije  $f''$  koje pripadaju intervalu  $I$ .<sup>6</sup>

**Korak 3.** Neka su  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sve nultočke dobivene u prethodnom koraku označene redom tako da je  $a =: x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} := b$ . Navedenim točkama podijeliti interval  $I$  na točno  $n + 1$  dijelova.

<sup>6</sup>Na ovaj korak treba naročito pripaziti ako su  $f$  i  $f''$  suženja funkcija koje su inače derivabilne na nadskupu intervala  $I$ .

**Korak 4.** Iz svakog dijela dobivenog u prethodnom koraku odabrati po jednu točku. Neka su te točke redom  $t_1, t_2, \dots, t_{n+1}$ .

**Korak 5.** Za svaki  $k = 1, 2, \dots, n + 1$  odrediti predznak broja  $f''(t_k)$ . Ako je

1.  $f''(t_k) > 0$ , funkcija  $f$  je konveksna na intervalu  $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ .
2.  $f''(t_k) < 0$ , funkcija  $f$  je konkavna na intervalu  $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ .

**Korak 6.** Za svaki  $k = 1, 2, \dots, n$  utvrditi ima li  $f''$  različite predznake na intervalima  $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$  i  $\langle x_k, x_{k+1} \rangle$ . Ako ima, tada je  $T_k = (x_k, f(x_k))$  prijevojna točka grafa funkcije  $f$ . Ako nema, tada  $T_k$  nije prijevojna točka toga grafa.

## 6.8 Asimptote na graf realne funkcije

Neka je  $f$  realna funkcija. Pravac  $p$  je **asimptota** na graf  $\Gamma$  funkcije  $f$  (kraće: asimptota funkcije  $f$ ) ako udaljenost između  $p$  i točke  $T \in \Gamma$  teži prema nuli čim se točka  $T$  beskonačno udaljava od ishodišta koordinatnog sustava. Razlikujemo dvije vrste asimptota: **uspravne (vertikalne)** i **kose** (što uključuje i **vodoravne**).

Pravac čija je jednadžba  $x = c$  je **uspravna asimptota** funkcije  $f$  ako vrijedi  $\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = \pm\infty$  ili  $\lim_{x \rightarrow c-} f(x) = \pm\infty$ .

Tipičan primjer uspravne asimptote je asimptota koja prolazi polom racionalne funkcije.

Kose asimptote mogu biti **lijeve** i **desne**. To su pravci čije jednadžbe imaju oblik  $y = kx + l$ , gdje su  $k$  i  $l$  realni brojevi određeni izrazima:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x},$$

$$l = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx),$$

pri čemu se u oba gornja limesa uzima  $x \rightarrow +\infty$  za desnu, a  $x \rightarrow -\infty$  za lijevu kosu asimptotu.

Ako je  $k = 0$ , tada govorimo o lijevoj, odnosno desnoj **vodoravnoj** (ili **horizontalnoj**) asimptoti.

Ako se lijeva kosa asimptota podudara s desnom kosom asimptotom, govori se o (**obostranoj**) **kosoj asimptoti**. Posebno, ako se lijeva vodoravna asimptota podudara s desnom vodoravnom asimptotom, govori se o (**obostranoj**) **vodoravnoj asimptoti**.

## 6.9 Ispitivanje tijeka funkcije

Ispitivanje tijeka funkcije obuhvaća određivanje sljedećih podataka:

- |  |   |
|--|---|
| 1. prirodno područje definicije,           | 7. intervali monotonosti,                                     |
| 2. nultočke,                               | 8. lokalni (eventualno globalni) ekstremi,                    |
| 3. sjecište grafa funkcije s osi ordinata, | 9. intervali konveksnosti i konkavnosti,                      |
| 4. točke prekida,                          | 10. prijevorne točke,   |
| 5. polovi funkcije i njihovi redovi,       | 11. asimptote,  |
| 6. parnost i periodičnost funkcije,        | 12. skiciranje grafa funkcije na temelju prethodnih podataka. |

## Poglavlje 7

# Osnove integralnog računa

### 7.1 Primitivna funkcija i neodređeni integral

Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija. **Primitivna funkcija** funkcije  $f$  je svaka funkcija  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sa svojstvom  $F'(x) = f(x)$  za svaki  $x \in [a, b]$ . Pritom se u rubnim točkama  $a$  i  $b$  zapravo radi o jednostranim derivacijama (vidi napomenu na stranici 31).

Svaka funkcija neprekidna na segmentu ima primitivnu funkciju.

Ako funkcija  $f$  ima barem jednu primitivnu funkciju, kaže se da je  $f$  **integrabilna**. Skup svih primitivnih funkcija funkcije  $f$  naziva se **neodređeni integral** funkcije  $f$  i označava

$$\int f(x) dx.$$

U gornjem zapisu funkciju  $f$  nazivamo **podintegralna funkcija**, dok je  $dx$  diferencijal nezavisne varijable.

Vežu između dviju različitih primitivnih funkcija iskazuje sljedeći poučak.

**Poučak 7.1.1.** *Neka je  $f$  integrabilna funkcija, te  $F_1$  i  $F_2$  dvije njezine različite primitivne funkcije. Tada postoji jedinstveni  $C \in \mathbb{R}$  takav da za svaki dopustivi  $x$  vrijedi:  $F_1(x) = F_2(x) + C$ . Stoga je*

$$\int f(x) dx = \{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\},$$

gdje je  $F$  bilo koja primitivna funkcija za  $f$ .

Primitivnu funkciju čiji je slobodni član (sumand koji ne sadrži nezavisnu varijablu) jednak 0 nazivamo **standardna antiderivacija**. U daljnjem tekstu pod pojmom **antiderivacija** podrazumijevamo standardnu antiderivaciju.

**Napomena:** Prema Poučku 7.1.1, svaka primitivna funkcija funkcije  $f$  može se dobiti tako da se standardnoj antiderivaciji  $F$  funkcije  $f$  doda neka realna konstanta  $C$ . Zbog toga se obično piše:

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

**Neka osnovna pravila za integriranje:** Neka su  $f$  i  $g$  integrabilne realne funkcije, te  $\alpha \in \mathbb{R}$  konstanta. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

1.  $\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx,$

$$2. \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

**Napomena:** Općenito,  $\int f(x) g(x) dx$  **nije** jednako  $\int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$ .

Tablica 7.1 sadrži osnovne (elementarne) antiderivacije. Pritom je  $\alpha \neq 0$  realna konstanta.

Tablica 7.1: Osnovne antiderivacije

$f(x)$	$\int f(x) dx$	$f(x)$	$\int f(x) dx$
1	$x$	$\operatorname{tg} x$	$-\ln  \cos x $
$\frac{1}{x}$	$\ln  x $	$\operatorname{ctg} x$	$\ln  \sin x $
$x^\alpha$ ( $\alpha \neq -1$ )	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$	$\frac{1}{\sin x}$	$\ln \left  \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} \right) \right $
$\alpha^x$ ( $\alpha > 0$ i $\alpha \neq 1$ )	$\frac{1}{\ln \alpha} \alpha^x$	$\frac{1}{\cos x}$	$\ln \left  \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right $
$e^x$	$e^x$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
$\ln x$	$x \ln x - x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$\frac{1}{x^2 + \alpha^2}$	$\frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{\alpha} \right)$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\frac{1}{x^2 - \alpha^2}$	$\frac{1}{2\alpha} \ln \left  \frac{x-\alpha}{x+\alpha} \right $	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\sqrt{x^2 + \alpha}$	$\frac{x}{2} \sqrt{x^2 + \alpha} + \frac{\alpha}{2} \ln \left( x + \sqrt{x^2 + \alpha} \right)$	$\operatorname{th} x$	$\ln  \operatorname{ch} x $
$\sqrt{\alpha^2 - x^2}$	$\frac{x}{2} \sqrt{\alpha^2 - x^2} + \frac{\alpha^2}{2} \arcsin \frac{x}{ \alpha }$	$\operatorname{cth} x$	$\ln  \operatorname{sh} x $
$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm \alpha^2}}$	$\ln \left  x + \sqrt{x^2 \pm \alpha^2} \right $	$\frac{1}{\operatorname{sh} x}$	$\ln \left  \operatorname{th} \left( \frac{x}{2} \right) \right $
$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{ \alpha }$	$\frac{1}{\operatorname{ch} x}$	$2 \operatorname{arctg} \left[ \operatorname{th} \left( \frac{x}{2} \right) \right]$
$\sin x$	$-\cos x$	$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\operatorname{cth} x$
$\cos x$	$\sin x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x$

## 7.2 Metoda zamjene (supstitucije) varijable

Neodređeni integral  $\int f(x) dx$  u nekim se slučajevima može svesti na tablični integral koristeći sljedeći algoritam:

**Korak 1.** Zamijeniti

$$\begin{cases} t = g(x) \text{ i/ili } x = g^{-1}(t), \\ dx = \frac{1}{g'(x)} dt, \end{cases}$$

gdje je  $g$  „nova” integrabilna funkcija.

**Korak 2.** Zapisati polaznu podintegralnu funkciju kao funkciju varijable  $t$ , pri čemu treba uvažiti obje gornje zamjene.

**Korak 3.** Odrediti neodređeni integral funkcije dobivene u prethodnom koraku.



**Korak 4.** U izrazu dobivenom u prethodnom koraku zamijeniti  $t$  s  $g(x)$  i pojednostavniti dobiveni izraz. Dobiveno rješenje je traženi neodređeni integral.

## 7.3 Metoda djelomične (parcijalne) integracije

Primjenjuje se u slučajevima kad je polazni integral oblika  $\int f(x)g(x) dx$ , gdje je  $f$  funkcija koju je jednostavno *derivirati*, a  $g$  funkcija koju je jednostavno *integrirati*.

**Korak 1.** Odrediti  $u$  i  $v$  iz sljedeće sheme:

$$\begin{aligned} u &= f(x) & v &= \int g(x) dx \\ du &= f'(x) dx & dv &= g(x) dx. \end{aligned}$$

**Korak 2.** Polazni integral jednak je  $uv - \int v du$ .

Za funkciju  $u$  obično se izabiru logaritamska funkcija, ciklotometrijske funkcije itd. Funkcija  $v$  je antiderivacija funkcije  $g$ .

## 7.4 Integriranje racionalnih funkcija

### 7.4.1 Integriranje pravih racionalnih funkcija

Integriranje pravih racionalnih funkcija može se podijeliti u nekoliko tipova. Izdvajaju se dva najčešća.

**Tip 1.**  $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ ,  $a \neq 0$ .

Integriranje se provodi zamjenom  $t = x + \frac{b}{2a}$ . Dobiva se tablični integral  $\int \frac{dt}{at^2 + c - \frac{b^2}{4a}}$ .

**Tip 2.**  $\int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c}$ ,  $a \neq 0$ .

U ovom se slučaju najprije odrede realni brojevi  $A$  i  $B$  iz jednakosti  $mx + n = A(2ax + b) + B$ . Polazni integral se time svodi na

$$A \ln(ax^2 + bx + c) + B \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c},$$

što je integral tipa 1 pa se određuje gore opisanom zamjenom.

Integriranje ostalih pravih racionalnih funkcija provodi se pomoću metode neodređenih koeficijenata (vidjeti točku 7.4.2), pogodnim zamjenama, djelomičnom integracijom itd.

### 7.4.2 Metoda neodređenih koeficijenata

U nekim posebnim slučajevima racionalne funkcije kojima su nazivnici polinomi stupnja barem 3 možemo rastaviti na **parcijalne razlomke**, pa njihovo integriranje svesti ili na tablično integriranje ili na integriranje racionalnih funkcija kojima su u nazivniku polinomi 2. stupnja.

Neka je  $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  prava racionalna funkcija i neka je

$$g(x) = p_1(x)^{m_1} p_2(x)^{m_2} \cdots p_n(x)^{m_n} = \prod_{k=1}^n p_k(x)^{m_k},$$

gdje su  $p_k$  polinom 1. stupnja ili polinom 2. stupnja koji nema realnih korijena i  $m_k \in \mathbb{N}$  za svaki  $k = 1, 2, \dots, n$ . Tada funkciju  $R$  možemo zapisati u sljedećem obliku, koji nazivamo **rastav na parcijalne razlomke**:

$$R(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{ij}}{p_i(x)^j}, \quad \text{gdje je } a_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij}, & \text{ako je st } p_i = 1, \\ \alpha_{ij}x + \beta_{ij}, & \text{ako je st } p_i = 2. \end{cases}$$

Vrijednosti realnih koeficijenata  $\alpha_{ij}$  i  $\beta_{ij}$  određuju se pomoću definicije jednakosti dva polinoma (vidi stranicu 21).

Ukupan broj međusobno različitih razlomaka koji se pojavljuju u rastavu polazne racionalne funkcije na parcijalne razlomke jednak je  $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ .

### 7.4.3 Integriranje nepravih racionalnih funkcija

Integriranje neprave racionalne funkcije  $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  provodi se na sljedeći način:

**Korak 1.** Odrediti količnik  $q$  i ostatak  $r$  pri dijeljenju polinoma  $f$  polinomom  $g$ .

**Korak 2.** Sada je

$$\int R(x) dx = \int q(x) dx + \int \frac{r(x)}{g(x)} dx.$$

Prvi integral na desnoj strani jednakosti je integral polinoma koji se svodi na zbroj tabličnih integrala, dok je drugi integral prave racionalne funkcije i određuje se nekom od ranije opisanih metoda.

## 7.5 Integriranje iracionalnih funkcija

Integriranje iracionalnih funkcija može se podijeliti u nekoliko tipova. Izdvajaju se tri najčešća tipa.

**Tip 1.**  $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$  ili  $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ,  $a \neq 0$ .

Integriranje se provodi zamjenom  $t = x + \frac{b}{2a}$ . Time radikand<sup>1</sup> prelazi u oblik  $at^2 + c - \frac{b^2}{4a}$ , a zadani integral svodi se na tablični.

**Tip 2.**  $\int \frac{mx + n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ ,  $a \neq 0$ .

Najprije treba odrediti realne brojeve  $A$  i  $B$  tako da vrijedi  $mx + n = A(2ax + b) + B$ . Zatim se polazni integral može zapisati u obliku

$$2A \sqrt{ax^2 + bx + c} + B \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

što je integral tipa 1, pa se određuje na gore opisan način.

<sup>1</sup>Radikand je izraz ispod korijena, tj. ono što se korjenjuje.

**Tip 3.**  $\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ , gdje su  $a \neq 0$  i  $P$  polinom stupnja  $n$ .

Deriviranjem objiju strana jednakosti

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

i izjednačavanjem koeficijenata uz iste potencije varijable  $x$  treba odrediti polinom  $Q$  stupnja  $n - 1$  i konstantu  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Preostaje integral tipa 1, koji se određuje na gore opisan način.

## 7.6 Integriranje trigonometrijskih i hiperbolnih funkcija

Integriranje trigonometrijskih i hiperbolnih funkcija provodi se koristeći trigonometrijske, odnosno hiperbolne identitete. Izdvajaju se najčešći tipovi.

**Tip 1.**  $\int \sin^m x \cos^n x dx$  ili  $\int \operatorname{sh}^m x \operatorname{ch}^n x dx$ , gdje su  $m$  i  $n$  nenegativni cijeli brojevi.

Ako je  $m$  neparan, tj. oblika  $m = 2k + 1$ , onda integral treba zapisati u obliku

$$\int \sin x \sin^{2k} x \cos^n x dx, \quad \text{odnosno} \quad \int \operatorname{sh} x \operatorname{sh}^{2k} x \operatorname{ch}^n x dx,$$

pa uvesti zamjenu  $t = \cos x$ , odnosno  $t = \operatorname{ch} x$ , uz korištenje identiteta  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ , odnosno  $\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1$ .

Ako je  $n$  neparan, tj. oblika  $n = 2k + 1$ , onda integral treba zapisati u obliku

$$\int \cos x \cos^{2k} x \sin^m x dx, \quad \text{odnosno} \quad \int \operatorname{ch} x \operatorname{ch}^{2k} x \operatorname{sh}^m x dx,$$

pa uvesti zamjenu  $t = \sin x$ , odnosno  $t = \operatorname{sh} x$ , uz korištenje identiteta  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ , odnosno  $\operatorname{ch}^2 x = \operatorname{sh}^2 x + 1$ .

Ako su  $m$  i  $n$  parni brojevi, treba primijeniti formule za trigonometrijske, odnosno hiperbolne funkcije dvostrukog argumenta, navedene u točkama 5.7 i 13.3.

**Tip 2.**  $\int \cos(mx) \cos(nx) dx$ ,  $\int \cos(mx) \sin(nx) dx$ ,  $\int \sin(mx) \sin(nx) dx$ ,  $\int \operatorname{ch}(mx) \operatorname{ch}(nx) dx$ ,  
 $\int \operatorname{ch}(mx) \operatorname{sh}(nx) dx$ ,  $\int \operatorname{sh}(mx) \operatorname{sh}(nx) dx$ .

Pri integriranju se koriste formule pretvorbe umnoška trigonometrijskih, odnosno hiperbolnih funkcija u odgovarajući zbroj tih funkcija, navedene u točkama 5.7 i 13.3.

**Tip 3.**  $\int R(\sin x, \cos x) dx$ , gdje je  $R$  racionalna funkcija (dviju varijabli).

Pri integriranju se uvodi zamjena  $t = \operatorname{tg}(\frac{x}{2})$ , koja ima sljedeće posljedice:

$$\begin{aligned} \sin x & \text{ prelazi u } \frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x & \text{ prelazi u } \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ dx & \text{ prelazi u } \frac{2}{1+t^2} dt. \end{aligned}$$

**Napomena:** Ako vrijedi  $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ , pogodnije je primijeniti zamjenu  $x = \arctg t$ , pri čemu

$$\begin{aligned} \sin x & \text{ prelazi u } \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ \cos x & \text{ prelazi u } \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ dx & \text{ prelazi u } \frac{1}{1+t^2} dt. \end{aligned}$$

### 7.6.1 Integriranje iracionalnih funkcija pomoću trigonometrijskih i hiperbolnih zamjena

Osnovne zamjene navedene su u Tablici 7.2. Pritom su  $R$  racionalna funkcija dviju varijabli i  $a > 0$  realna konstanta.

Tablica 7.2: Osnovne trigonometrijske i hiperbolne zamjene

<i>podintegralna funkcija</i>	<i>trigonometrijska zamjena</i>	<i>hiperbolna zamjena</i>
$R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$	$x = a \sin t$	$x = a \operatorname{th} t$
$R(x, \sqrt{x^2 + a^2})$	$x = a \operatorname{tg} t$	$x = a \operatorname{sh} t$
$R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$	$x = \frac{a}{\cos t}$	$x = a \operatorname{ch} t$

## 7.7 Određeni integral

Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija. Određeni integral funkcije  $f$  na segmentu  $[a, b]$  (oznaka:  $\int_a^b f(x) dx$ ) je realan broj čija točna definicija izlazi iz okvira ovog Repetitorija. Neke moguće interpretacije tog broja navedene su u točki 7.7.2.

Određeni integral se efektivno izračunava pomoću **Newton-Leibnizove formule**:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

pri čemu je  $F$  antiderivacija funkcije  $f$ .

*Napomena:* Gornja formula vrijedi i ako je  $F$  bilo koja primitivna funkcija za  $f$ .

### 7.7.1 Neka osnovna svojstva određenog integrala

- $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$ , za svaki  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$ .
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ , za svaki  $c \in [a, b]$ .

4. Ako je  $f$  neparna funkcija integrabilna na  $[-a, a]$ , onda je

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

5. Ako je  $f$  parna funkcija integrabilna na  $[-a, a]$ , onda je

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

### 7.7.2 Neke primjene određenog integrala

**Prosječna vrijednost funkcije  $f$  neprekidne na segmentu  $[a, b]$ :**

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

**Površina ravninskog lika** omeđenog pravcima  $y = 0$ ,  $x = a$  i  $y = b$  te grafom neprekidne funkcije  $f$ :

$$P = \int_a^b |f(x)| dx.$$

**Duljina lûka** grafa funkcije  $f$  između točkaka  $(a, f(a))$  i  $(b, f(b))$ :

$$d = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

**Obujam rotacijskog tijela** nastalog rotacijom ravninskog lika omeđenog pravcima  $y = 0$ ,  $x = a$  i  $x = b$ , te grafom neprekidne funkcije  $f$ , oko osi apscisa jednak je

$$V_x = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Za rotaciju oko osi ordinata taj je obujam jednak

$$V_y = 2\pi \int_a^b x |f(x)| dx,$$

uz uvjet da su  $a$  i  $b$  istog predznaka.

**Površina plašta rotacijskog tijela** nastalog rotacijom ravninskog lika omeđenog pravcima  $y = 0$ ,  $x = a$  i  $x = b$ , te grafom neprekidne funkcije  $f$ :

$$P = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

**Težište  $T$  ravne homogene ploče** omeđene pravcima  $x = a$  i  $x = b$ , te grafovima funkcijâ  $f$  i  $g$  neprekidnih na segmentu  $[a, b]$ , uz uvjet da za svaki  $x \in [a, b]$  vrijedi nejednakost  $g(x) \leq f(x)$ :

$$T = \left( \frac{\int_a^b x (f(x) - g(x)) dx}{\int_a^b (f(x) - g(x)) dx}, \frac{\int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) dx}{2 \int_a^b (f(x) - g(x)) dx} \right).$$



## Poglavlje 8

# Nepravi integrali

Nepravi integrali su određeni integrali kod kojih podintegralna funkcija nije omeđena na intervalu integracije ili kod kojih je barem jedna granica „beskonačna”. Njihovo izračunavanje, osim izračunavanja određenih integrala pomoću Newton-Leibnizove formule, podrazumijeva i određivanje graničnih vrijednosti (limesa).

### 8.1 Integrali s beskonačnim granicama

Uz pretpostavke da su  $a, b \in \mathbb{R}$  i da je funkcija  $f$  integrabilna na promatranim intervalima, razlikuju se tri osnovna tipa integrala s beskonačnim granicama.

**Tip 1.**  $\int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$ , ako integral na desnoj strani postoji za svaki  $a < b$ , te ako postoji navedeni limes.

**Tip 2.**  $\int_a^{+\infty} f(x) dx := \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ , ako integral na desnoj strani postoji za svaki  $b > a$ , te ako postoji navedeni limes.

**Tip 3.**  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx := \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$ , za bilo koji  $c \in \mathbb{R}$  (obično je pogodno odabrati  $c = 0$ ), te ako postoje oba nepravna integrala na desnoj strani.

Ako svaka od navedenih graničnih vrijednosti postoji, kaže se da pripadni nepravi integral *konvergira*. Ako vrijednost integrala teži ka  $+\infty$  ili  $-\infty$ , kažemo da nepravi integral **divergira**.

### 8.2 Integrali neomeđenih funkcija

Ako za neprekidnu neomeđenu funkciju  $f : [a, b] \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$  vrijedi

1.  $c = a$ , tada je  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$ , ako limes s desne strane postoji.
2.  $c = b$ , tada je  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ , ako limes s desne strane postoji.

3.  $c \in \langle a, b \rangle$ , tada je  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx$ , ako oba limesa s desne strane postoje.

Ako svaka od navedenih graničnih vrijednosti postoji, kažemo da pripadni nepravi integral konvergira. Inače, taj integral divergira.

### 8.3 Kriteriji usporedbe za nepravne integrale

Pomoću sljedećih kriterija moguće je ispitati konvergenciju nekog nepravog integrala bez efektivnog izračunavanja njegove vrijednosti. Navode se tri osnovna kriterija usporedbe.

**Prvi kriterij usporedbe.** Neka su  $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidne funkcije takve da za svaki  $x \geq a$  vrijedi  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ . Tada vrijede sljedeće tvrdnje.

1. Ako  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  konvergira, tada i  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  konvergira.
2. Ako  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  divergira, tada i  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  divergira.

Analogne tvrdnje vrijede i ako se pretpostavka  $x \geq a$  zamijeni pretpostavkom  $x \leq a$ , a podintegralne funkcije promatramo na intervalu  $\langle -\infty, a \rangle$ .

**Drugi kriterij usporedbe.** Neka su  $f, g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidne funkcije takve da vrijedi  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  za sve  $x \in \langle a, b \rangle$ . Tada vrijede sljedeće tvrdnje.

1. Ako  $\int_a^b g(x) dx$  konvergira, tada i  $\int_a^b f(x) dx$  konvergira.
2. Ako  $\int_a^b f(x) dx$  divergira, tada i  $\int_a^b g(x) dx$  divergira.

**Granični kriterij.** Neka su  $f$  i  $g$  pozitivne funkcije neprekidne na  $[a, +\infty)$  i neka postoji konačan limes

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} > 0.$$

Tada integrali  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  i  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

Prigodom primjene navedenih kriterija često se koriste sljedeći rezultati:

1. Integrali  $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^n}$  i  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$  konvergiraju ako je  $n > 1$ , a inače divergiraju.
2. Za  $b \geq a$ , integral  $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$  konvergira ako je  $n < 1$ , a inače divergira.



## Poglavlje 9

# Redovi realnih brojeva

Neka je  $(a_n)$  zadani niz realnih brojeva. Niz  $(s_n)$  čiji je  $n$ -ti član definiran pravilom  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$  naziva se **niz djelomičnih zbrojeva** (ili **niz parcijalnih suma**) zadanog niza. Uređeni par  $((a_n), (s_n))$  naziva se **red**. Umjesto  $((a_n), (s_n))$  koriste se oznake  $\sum a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  i druge.

Red  $\sum a_n$  je **konvergentan** ukoliko niz  $(s_n)$  ima graničnu vrijednost  $S \in \mathbb{R}$ . U tom se slučaju  $S$  naziva **zbrojem reda** i piše:  $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Red  $\sum a_n$  je **apsolutno konvergentan** ukoliko je red  $\sum |a_n|$  konvergentan.

Red  $\sum a_n$  je **divergentan** ako je niz  $(s_n)$  divergentan.

### 9.1 Pravila za ispitivanje konvergencije reda

**Pravilo 1.** Ako vrijedi  $\lim a_n \neq 0$ , red  $\sum a_n$  je divergentan.

**Napomena:** Ako je niz  $(s_n)$  konvergentan, onda je i niz  $(a_n)$  konvergentan i vrijedi  $\lim_n a_n = 0$ .

**Pravilo 2.** Ako red  $\sum |a_n|$  konvergira, tada i red  $\sum a_n$  konvergira. Drugim riječima, svaki apsolutno konvergentan red je konvergentan.

**Pravilo 3 (Cauchyev kriterij).** Ako je

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = r \in \mathbb{R},$$

tada je red  $\sum |a_n|$

1. konvergentan ako je  $r < 1$ ,
2. divergentan ako je  $r > 1$ .

Ako je  $r = 1$ , ovaj kriterij ne daje odluku.

**Pravilo 4 (D'Alembertov kriterij).** Ako je

$$\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r \in \mathbb{R},$$

tada je red  $\sum |a_n|$

1. konvergentan ako je  $r < 1$ ,
2. divergentan ako je  $r > 1$ .

Ako je  $r = 1$ , ovaj kriterij ne daje odluku.

**Pravilo 5 (Raabeov kriterij).** Ako je  $\lim_n \left( n \left( 1 - \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) \right) = r \in \mathbb{R}$ , tada je red  $\sum |a_n|$

1. divergentan ako je  $r < 1$ ,
2. konvergentan ako je  $r > 1$ .

Ako je  $r = 1$ , ovaj kriterij ne daje odluku.

**Pravilo 6 (Leibnizov kriterij).** **Alternirajući red**  $\sum (-1)^n a_n$ , gdje je  $a_n > 0$  za svaki  $n \in \mathbb{N}$ , konvergira ako je niz  $(a_n)$  padajući i ima graničnu vrijednost jednaku 0.

**Pravilo 7 (kriterij usporedbe).** Neka su  $(a_n)$  i  $(b_n)$  nizovi takvi da za svaki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi nejednakost  $0 \leq a_n \leq b_n$ . Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

1. Ako je red  $\sum b_n$  konvergentan, tada je i red  $\sum a_n$  konvergentan.
2. Ako je red  $\sum a_n$  divergentan, tada je i red  $\sum b_n$  divergentan.

**Pravilo 8 (drugi kriterij usporedbe).** Neka su  $\sum a_n$  i  $\sum b_n$  redovi takvi da je  $\lim_n \frac{a_n}{b_n} > 0$ . Ako jedan od tih redova konvergira, onda konvergira i drugi. Analogna tvrdnja vrijedi ako se riječ *konvergira* zamijeni riječju *divergira*.

**Pravilo 9 (Cauchyev integralni kriterij).** Ako je  $f$  nenegativna, neprekidna i monotono padajuća funkcija na intervalu  $[1, +\infty)$ , tada red  $\sum f(n)$  i nepravi integral  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  istodobno ili konvergiraju ili divergiraju.

## 9.2 Algebarske operacije s redovima

Redovi brojeva se zbrajaju, oduzimaju i množe realnim brojem različitim od nule prema načelu „član po član”. Točnije, vrijede sljedeće jednakosti:

1.  $\sum a_n \pm \sum b_n := \sum (a_n \pm b_n)$ ,
2.  $c \sum a_n := \sum (c a_n)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

**Cauchyovo množenje redova.** Umnožak apsolutno konvergentnih redova  $\sum a_n$  i  $\sum b_n$  definira se formulom

$$\sum a_n \cdot \sum b_n := \sum \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right).$$

## 9.3 Neki posebni redovi realnih brojeva

**Harmonijski red**  $\sum \frac{1}{n}$  je divergentan (iako vrijedi  $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ ).

**Dirichletov ili hiperharmonijski red**  $\sum \frac{1}{n^p}$  je konvergentan za  $p > 1$ , a divergentan za  $0 < p \leq 1$ . (za  $p = 1$  dobiva se harmonijski red.)

Neka je  $a \in \mathbb{R}$ . **Geometrijski red**  $\sum_{n \geq 0} a x^n$  konvergira za  $|x| < 1$  i u tom je slučaju njegov zbroj jednak  $S = \frac{a}{1-x}$ . Za  $|x| \geq 1$  red je divergentan.

## Poglavlje 10

# Taylorov i MacLaurinov red

Ako se neka funkcija želi aproksimirati polinomom na otvorenom intervalu oko neke točke iz njezine domene, korisno je promatrati **redove potencija**. To su redovi oblika

$$\sum a_n (x - c)^n.$$

Iz ove klase redova najčešće se promatra *Taylorov red*.

Najveći otvoreni interval  $\langle a, b \rangle$  oko točke  $c$  na kojemu je red potencija konvergentan naziva se **interval konvergencije**. Točke  $a$  i  $b$  vrlo se često određuju korištenjem Pravila 3-6 iz točke 9.1 na stranici 49 (Cauchyjev, D'Alembertov, Raabeov i Leibnizov kriterij). Pritom je  $-\infty$  odnosno  $+\infty$  dopuštena vrijednost ruba  $a$  odnosno  $b$ .

**Taylorov red** funkcije  $f$  oko točke  $c$  takve da je  $f$  beskonačno puta derivabilna u točki  $c$  je red

$$\sum \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2} (x - c)^2 + \frac{f'''(c)}{6} (x - c)^3 + \dots$$

Uz određene uvjete na funkciju  $f$ , za svaki  $x$  iz intervala konvergencije vrijedi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n.$$

Takva se funkcija  $f$  naziva **analitička funkcija**. Sve su elementarne funkcije, tj. funkcije koje se pojavljuju u ovom Repetitoriju, analitičke.

Prvih  $m + 1$  članova reda tvore **Taylorov polinom stupnja  $m$**  (oznaka:  $T_m(x)$ ).

Posebno, za  $c = 0$  i za funkciju  $f$  beskonačno puta derivabilnu u točki 0 dobiva se **MacLaurinov razvoj** funkcije  $f$  u red potencija, tj. vrijedi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + \frac{f'''(0)}{6} x^3 + \dots$$

Prvih  $m + 1$  članova reda tvore **MacLaurinov polinom stupnja  $m$**  (oznaka:  $M_m(x)$ ).

## 10.1 Neki osnovni razvoji u MacLaurinov red

$$1. e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$2. \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$3. \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$4. (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}, x \in \langle -1, 1 \rangle,$$

$$5. \frac{1}{1-x^m} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{mn}, \quad m \in \mathbb{N}, x \in \langle -1, 1 \rangle,$$

$$6. \frac{1}{1+x^m} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{mn}, \quad m \in \mathbb{N}, x \in \langle -1, 1 \rangle,$$

$$7. \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle,$$

$$8. \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

**Napomena:** Pri određivanju Taylorovog razvoja funkcije  $f$  u red potencija oko neke točke  $c \neq 0$  treba koristiti definicijsku formulu za opći član Taylorovog razvoja u red ili eventualno „gotovu” formulu za  $n$ -tu derivaciju funkcije  $f$  (vidjeti stranicu 35).

## Poglavlje 11

# Osnove harmonijske analize

Ako se promatra aproksimacija periodičnih realnih funkcija, onda se umjesto Taylorovog, odnosno MacLaurinovog reda, koristi **trigonometrijski red**. Trigonometrijski red je red oblika

$$\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Prvih  $n + 1$  članova reda tvore trigonometrijski polinom. Preciznije, **trigonometrijski polinom stupnja  $n$**  je funkcija  $p$  definirana pravilom:

$$p(x) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Od spomenutih redova za praksu je najznačajniji **Fourierov red**.

Periodičnu realnu funkciju  $f$  definiranu na osnovnom segmentu  $S$  moguće je razviti u Fourierov red ako su ispunjeni sljedeći uvjeti (tzv. **Dirichletovi uvjeti**):

1. Funkcija  $f$  na segmentu  $S$  ima konačno mnogo točaka prekida i ti prekidi su prve vrste<sup>1</sup>.
2. Funkcija  $f$  na segmentu  $S$  ima konačno mnogo strogih ekstrema.

Ako je  $S = [-\pi, \pi]$ , onda se pripadni koeficijenti razvoja funkcije u Fourierov red (tzv. **Fourierovi koeficijenti**) računaju prema sljedećim formulama:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \geq 1, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

U tom slučaju razvoj funkcije  $f$  u Fourierov red glasi:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Prvih  $m + 1$  članova ovog reda tvore **Fourierov polinom stupnja  $m$**  (oznaka:  $F_m(x)$ ):

$$F_m(x) = a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + \dots + a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx).$$

---

<sup>1</sup>Vidi točku 5.11.

U općem slučaju, tj. ako je  $f$  definirana na segmentu  $[x_0, x_0 + T]$ , gdje je  $T$  temeljni period funkcije  $f$ , Fourierovi koeficijenti računaju se prema sljedećim formulama:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{T} x\right) dx, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{T} x\right) dx. \end{aligned}$$

U tom slučaju razvoj funkcije  $f$  u Fourierov red glasi:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T} x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T} x\right) \right).$$

### 11.1 Fourierov red (ne)parne funkcije

Ako je funkcija  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  parna, onda za svaki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi  $b_n = 0$ . Tada se Fourierovi koeficijenti  $a_n$  mogu računati prema sljedećim pojednostavljenim formulama.

1. Ako je  $L = \pi$ , vrijedi  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$  i  $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$ .
2. Općenito, za  $L > 0$  vrijedi  $a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$  i  $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$ .

Pripadni razvoj funkcije u Fourierov red jednak je:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx), \quad \text{za } L = \pi, \\ f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad \text{za } L > 0. \end{aligned}$$

Pripadni Fourierovi polinomi stupnja  $m$  glase:

$$\begin{aligned} F_m(x) &= a_0 + a_1 \cos x + \cdots + a_m \cos(mx), \quad \text{za } L = \pi, \\ F_m(x) &= a_0 + a_1 \cos\left(\frac{\pi}{L} x\right) + \cdots + a_m \cos\left(\frac{m\pi}{L} x\right), \quad \text{za } L > 0. \end{aligned}$$

Ako je funkcija  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  neparna, onda za svaki  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  vrijedi  $a_n = 0$ . U tom slučaju Fourierovi koeficijenti  $b_n$  mogu se računati prema sljedećim pojednostavljenim formulama.

1. Ako je  $L = \pi$ , tada vrijedi  $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$ .
2. Općenito, za  $L > 0$  vrijedi  $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$ .

Pripadni razvoj funkcije u Fourierov red jednak je:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \quad \text{za } L = \pi, \\ f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad \text{za } L > 0. \end{aligned}$$

Pripadni Fourierovi polinomi stupnja  $m$  glase:

$$F_m(x) = b_1 \sin x + \cdots + b_m \sin(mx), \quad \text{za } L = \pi,$$

$$F_m(x) = b_1 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) + \cdots + b_m \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right), \quad \text{za } L > 0.$$

U nastavku se navode neki često korišteni identiteti pri izračunu Fourierovih koeficijenata. Radi jednostavnosti, umjesto neodređenih integrala navedene su antiderivacije. Ne istakne li se drugačije,  $a, b, c \in \mathbb{R}$  su konstante, pri čemu je  $a \neq 0$ .

1. Neka je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  neparna periodična funkcija s temeljnim periodom  $T > 0$ . Tada za svaki  $k \in \mathbb{Z}$  vrijedi  $f\left(k\frac{T}{2}\right) = 0$ .
2.  $\cos(n\pi) = (-1)^n = \begin{cases} -1, & \text{za neparne } n \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{za parne } n \in \mathbb{N} \end{cases}$ .
3.  $\sin(n\pi) = 0$ , za sve  $n \in \mathbb{N}$ .
4.  $\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} -1, & \text{za } n = 4k - 2, \\ 0, & \text{za } n = 2k - 1, \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}. \\ 1, & \text{za } n = 4k, \end{cases}$
5.  $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} -1, & \text{za } n = 4k - 1, \\ 0, & \text{za } n = 2k, \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}. \\ 1, & \text{za } n = 4k - 3, \end{cases}$
6.  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx = 0$ , za sve  $m, n \in \mathbb{N}$ .
7.  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ \pi, & \text{za } m = n. \end{cases}$
8.  $\int (ax + b) \sin(nx) dx = \frac{1}{n^2} (a \sin(nx) - (anx + bn) \cos(nx))$ .
9.  $\int (ax + b) \cos(nx) dx = \frac{1}{n^2} (a \cos(nx) + (anx + bn) \sin(nx))$ .
10.  $\int e^{ax+b} \sin(nx) dx = \frac{1}{n^2+a^2} e^{ax+b} (a \sin(nx) - n \cos(nx))$ .
11.  $\int e^{ax+b} \cos(nx) dx = \frac{1}{n^2+a^2} e^{ax+b} (n \sin(nx) + a \cos(nx))$ .
12.  $\int (ax^2 + bx + c) \sin(nx) dx = \frac{1}{n^3} ((2a - an^2x^2 - bn^2x - cn^2) \cos(nx) + (2anx + bn) \sin(nx))$ .
13.  $\int (ax^2 + bx + c) \cos(nx) dx = \frac{1}{n^3} ((2anx + bn) \cos(nx) + (an^2x^2 + bn^2x + cn^2 - 2a) \sin(nx))$ .





## Poglavlje 12

# Obične diferencijalne jednađbe

Neka su  $x$  nezavisna varijabla, a  $y$  realna funkcija jedne realne varijable. **Obična diferencijalna jednađba reda  $n$**  je jednađba oblika

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

gdje je  $F$  neka realna funkcija  $n + 1$  varijabli. Za razliku od algebarskih jednađbi, obična diferencijalna jednađba kao nepoznanicu ima realnu funkciju jedne realne varijable.

Svaka funkcija  $y$  koja uvrštena u običnu diferencijalnu jednađbu daje identitet koji vrijedi za svaki  $x$  iz domene funkcije  $y$  naziva se **partikularno rješenje** obične diferencijalne jednađbe. Pritom se standardno pretpostavlja da funkcija  $y$  ima neprekidnu  $n$ -tu derivaciju, što automatski znači da postoje i sve derivacije nižih redova, te da su i one neprekidne. (Kaže se i da je funkcija  $y$  klase  $C^n$  na svojoj domeni.)

**Opće rješenje** diferencijalne jednađbe  $n$ -tog reda može se zapisati u obliku  $G(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$ , gdje su  $C_1, \dots, C_n$  neke realne konstante.

Ravninska krivulja koja predstavlja graf nekog partikularnog rješenja obične diferencijalne jednađbe naziva se **integralna krivulja**.

**Cauchyjev problem** sastoji se od obične diferencijalne jednađbe reda  $n$  i ukupno  $n$  različitih početnih uvjeta. Početni uvjeti mogu biti vrijednosti nepoznate funkcije u  $n$  različitih točaka iz njezine domene, vrijednosti nepoznate funkcije i svih njezinih derivacija do uključivo derivacije reda  $n - 1$  u nekoj točki itd. Za razliku od obične diferencijalne jednađbe koja ima beskonačno mnogo međusobno različitih rješenja, Cauchyjev problem ima jedinstveno rješenje.

U nastavku se navodi pregled nekih standardnih tipova običnih diferencijalnih jednađbi. Ako se ne istakne drugačije,  $a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, C, C_1$  i  $C_2$  su realne konstante.

U nastavku ovog poglavlja pod pojmom „diferencijalna jednađba” podrazumijevat ćemo običnu diferencijalnu jednađbu.

## 12.1 Diferencijalna jednađba 1. reda sa separiranim varijablama

**Opći oblik:**  $y' = f(x)g(y)$  ili  $F_1(x)G_1(y)dx + F_2(x)G_2(y)dy = 0$ .

**Opće rješenje:** Ovisno o obliku u kojemu je jednađba zapisana, rješenje je dano izrazom:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C \quad \text{ili} \quad \int \frac{G_2(y)}{G_1(y)} dy + \int \frac{F_1(x)}{F_2(x)} dx = C.$$

## 12.2 Homogena diferencijalna jednađba 1. reda

**Opći oblik:**  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ , odnosno  $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ .

Prvi oblik rješava se zamjenom  $u = \frac{y}{x}$ , pri čemu je  $u(x)$  nova nepoznata funkcija. Pritom treba koristiti jednakosti  $y = ux$  i  $y' = u'x + u$ .

Drugi se oblik rješava tako da se najprije izračuna  $D = a_1b_2 - a_2b_1$ . Ako je  $D = 0$ , uvodi se zamjena  $u = a_1x + b_1y + c_1$ , pri čemu je  $u(x)$  nova nepoznata funkcija. Pritom treba izraziti  $a_2x + b_2y + c_2$  kao linearnu funkciju argumenta  $u$ , te koristiti jednakost  $y' = \frac{1}{b_1}(u' - a_1)$ . Tako se dobije jednađba oblika  $u' = g\left(\frac{u}{x}\right)$  koja se riješi ranije opisanim postupkom.

Ako je  $D \neq 0$ , treba izračunati  $\alpha = \frac{1}{D}(b_1c_2 - b_2c_1)$  i  $\beta = \frac{1}{D}(a_2c_1 - a_1c_2)$ . Potom se uvode zamjene  $x = u + \alpha$ ,  $y = v + \beta$  i  $y' = v'$ . Tako se dobije diferencijalna jednađba 1. reda oblika  $v' = g\left(\frac{v}{u}\right)$  kojoj je nepoznanica funkcija  $v(u)$ , a koja se rješava ranije opisanim postupkom. Nakon određivanja rješenja, treba provesti zamjene  $u = x - \alpha$  i  $v = y - \beta$ , te tako dobiti rješenje polazne jednađbe.

## 12.3 Nehomogena linearna diferencijalna jednađba 1. reda

**Opći oblik:**  $y' + P(x)y = Q(x)$ .

**Opće rješenje:**  $y = e^{-\int P(x) dx} \left( \int e^{\int P(x) dx} Q(x) dx + C \right)$ .

**Napomena:** Ako je  $Q \equiv 0$ , dobiva se homogena linearna diferencijalna jednađba 1. reda. Ona je poseban slučaj diferencijalne jednađbe 1. reda sa separiranim varijablama, pa se njezino opće rješenje može dobiti i primjenom formule iz točke 12.1.

## 12.4 Bernoullijeva diferencijalna jednađba

**Opći oblik:**  $y' + P(x)y = Q(x)y^k$ , gdje je  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ .

**Napomena:** Za  $k = 0$  dobiva se nehomogena linearna diferencijalna jednađba 1. reda koja se rješava primjenom formule iz točke 12.3. Za  $k = 1$  dobiva se diferencijalna jednađba 1. reda sa separiranim varijablama čije se opće rješenje dobiva primjenom formule iz točke 12.1.

**Opće rješenje:** Neka je  $g(x) = e^{(1-k) \int P(x) dx}$ . Tada je opće rješenje u implicitnom obliku dano izrazom

$$y^{k-1}(x) = \frac{g(x)}{(1-k) \int g(x) Q(x) dx + C}.$$

## 12.5 Homogena linearna diferencijalna jednadžba 2. reda s konstantnim koeficijentima

**Opći oblik:**

$$a y'' + b y' + c y = 0. \quad (12.1)$$

**Postupak rješavanja:**

**Korak 1.** Napisati i riješiti pripadnu **karakterističnu jednadžbu**

$$a \lambda^2 + b \lambda + c = 0. \quad (**)$$

**Korak 2.** Ako s  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  označimo rješenja karakteristične jednadžbe, opće rješenje polazne diferencijalne jednadžbe dobiva se pomoću sljedeće tablice.

<i>tip rješenja jednadžbe (**)</i>	<i>opće rješenje</i>
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$	$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 = \lambda_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x}$
$\lambda_1 = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}, \beta > 0$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$

## 12.6 Nehomogena linearna diferencijalna jednadžba 2. reda s konstantnim koeficijentima

**Opći oblik:**

$$a y'' + b y' + c y = R, \quad (12.2)$$

pri čemu je  $R$  realna funkcija jedne varijable.

**Postupak rješavanja:**

**Korak 1.** Napisati i riješiti pripadnu homogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu 2. reda s konstantnim koeficijentima:

$$a y'' + b y' + c y = 0$$

postupkom iz točke 12.5. Neka je  $y_h$  opće rješenje te jednadžbe.

**Korak 2.** Odrediti *bilo koje* partikularno rješenje  $y_p$  polazne jednadžbe.

**Korak 3.** Opće rješenje polazne jednadžbe je  $y = y_h + y_p$ .

Oblici partikularnog rješenja u nekim posebnim slučajevima navedeni su u tablici 12.1 na stranici 60.

Tablica 12.1: Oblici partikularnog rješenja jednadžbe 12.1

oblik funkcije $R$	oblik rješenja $y_p$	istaknuta vrijednost
polinom $P(x)$ stupnja $n$	$x^s (A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n)$	0
$E e^{\alpha x}$	$x^s A e^{\alpha x}$	$\alpha$
$P(x) e^{\alpha x}$ , gdje je $P(x)$ polinom stupnja $n$	$x^s (A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n) e^{\alpha x}$	$\alpha$
$E_1 \cos \beta x + E_2 \sin \beta x$	$x^s (A_0 \cos \beta x + B_0 \sin \beta x)$	$\beta i$
$P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x$ , gdje su $P$ i $Q$ polinomi stupnjeva $m$ i $n$	$x^s (A_0 + A_1 x + \dots + A_k x^k) \cos \beta x + x^s (B_0 + B_1 x + \dots + B_k x^k) \sin \beta x$ , gdje je $k = \max\{m, n\}$	$\beta i$
$E_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + E_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$	$x^s e^{\alpha x} (A_0 \cos \beta x + B_0 \sin \beta x)$	$\alpha + \beta i$

**Napomena:** Vrijednost parametra  $s$  jednaka je

- 0, ako istaknuta vrijednost navedena u trećem stupcu tablice 12.1 nije korijen jednadžbe (\*\*),
- kratnosti istaknute vrijednosti, inače.

## 12.7 Princip superpozicije rješenja diferencijalne jednadžbe 2. reda

Za svaki  $i = 1, 2, \dots, n$  neka je  $y_i$  opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$a y'' + b y' + c y = R_i.$$

Tada je  $y = \sum_{i=1}^n y_i$  opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$a y'' + b y' + c y = \sum_{i=1}^n R_i.$$

## 12.8 Metoda varijacije konstanti za rješavanje nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe 2. reda

Osnovna ideja metode varijacije konstanti za rješavanje diferencijalne jednadžbe (12.2) jest interpretirati konstante  $C_1$  i  $C_2$  koje se pojavljuju u rješenju pripadne homogene diferencijalne jednadžbe kao realne funkcije varijable  $x$ . Derivacije tih funkcija potom se određuju rješavanjem sustava funkcionalnih jednadžbi

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = R(x), \end{cases}$$

gdje su  $y_1$  i  $y_2$  **bazična rješenja** pripadne homogene diferencijalne jednadžbe. Tada je jedno partikularno rješenje  $y_p$  jednadžbe (12.2) dano izrazom:

$$y_p = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2,$$

gdje su  $C_1(x)$  i  $C_2(x)$  antiderivacije dobivenih izraza  $C_1'(x)$  i  $C_2'(x)$ . Može se pokazati da je to partikularno rješenje dano izrazom:

$$y_p = -y_1 \int y_2 \frac{R}{W} dx + y_2 \int y_1 \frac{R}{W} dx, \quad W = y_1 y_2' - y_2 y_1'.$$

Alternativno, stavimo li  $u = \frac{y_2}{y_1}$  i  $v = \frac{R}{y_1}$ , partikularno rješenje jednadžbe (12.2) može se odrediti prema formuli

$$y_p = y_1 \int u' \left( \int \frac{v}{u'} dx \right) dx.$$

U oba slučaja opće rješenje jednadžbe (12.2) jednako je  $y = y_h + y_p$ .

## 12.9 Laplaceovi transformati

**Laplaceov transformat** funkcije  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  je funkcija  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definirana s

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Pišemo:  $F = \mathcal{L}(f)$ .

Pridruživanje  $f \xrightarrow{\mathcal{L}} F$  naziva se **Laplaceova transformacija**. Ona ima svojstvo *linearnosti*, tj. za svake dvije funkcije  $f, g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  te za sve  $a, b \in \mathbb{R}$  vrijedi  $\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g)$ .

**Osnovna svojstva Laplaceovih transformata:** Neka je  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  i neka je  $F$  njezin Laplaceov transformat. Tada vrijede sljedeće jednakosti:

1.  $\mathcal{L}(f') = sF(s) - f(0)$ ,
2.  $\mathcal{L}(f'') = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$ ,
3.  $\mathcal{L}(f(ax)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$ ,
4.  $\mathcal{L}\left(\frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right)\right) = F(as)$ ,
5.  $\mathcal{L}(e^{at} f(x)) = F(s - a)$ ,
6.  $\mathcal{L}\left(\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau\right) = \frac{F(s)}{s}$ .

U Tablici 12.2 navedeni su Laplaceovi transformati nekih realnih funkcija. Pritom su  $a, b \in \mathbb{R}$  konstante.

Tablica 12.2: Laplaceovi transformati nekih funkcija

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(s)$	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$a$	$\frac{a}{s}$	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$	$t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
$t^2$	$\frac{2}{s^3}$	$t \cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{-at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at} \cos(bt)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$
$t e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\operatorname{ch}(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\operatorname{sh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$



# Poglavlje 13

## Dodatak

### 13.1 Formule iz algebre

Osnovni algebarski identiteti:

1.  $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$ ,
2.  $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$ ,
3.  $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$ ,
4.  $x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$ .

Potencije imaginarne jedinice: Za svaki  $k \in \mathbb{Z}$  vrijedi

1.  $i^{4k} = 1$ ,
2.  $i^{4k+1} = i$ ,
3.  $i^{4k+2} = -1$ ,
4.  $i^{4k+3} = -i$ .

Osnovna svojstva eksponencijalne i logaritamske funkcije:

1.  $a^0 = 1$ ,
2.  $a^m a^n = a^{m+n}$ ,
3.  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ,
4.  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ,
5.  $(a^m)^n = a^{mn}$ ,
6.  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ ,
7.  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ ,
8.  $\log_a 1 = 0$ ,
9.  $\log_a a = 1$ ,
10.  $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ ,
11.  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ ,
12.  $\log_a(x^y) = y \log_a x$ ,
13.  $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$ ,
14.  $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ .

Formula za rješenja kvadratne jednadžbe  $ax^2 + bx + c = 0$ :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Pritom vrijede Vièteove formule:  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ,  $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ .

## 13.2 Formule iz analitičke geometrije u ravnini

Udaljenost točkaka  $A = (x_A, y_A)$  i  $B = (x_B, y_B)$ :

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

Oblici jednadžbe pravca:

1. **eksplicitni**:  $y = kx + l$ , pri čemu su  $k$  koeficijent smjera, a  $l$  odsječak na osi ordinata,
2. **implicitni**:  $Ax + By + C = 0$ ,
3. **segmentni**:  $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ , pri čemu su  $m$  odsječak na osi apscisa,  $n$  odsječak na osi ordinata.

Jednadžba pravca s koeficijentom smjera  $k$  kroz točku  $T = (x_0, y_0)$ :

$$y = k(x - x_0) + y_0.$$

Jednadžba pravca kroz točke  $T_1 = (x_1, y_1)$  i  $T_2 = (x_2, y_2)$ :

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1.$$

Pravci  $p \dots y = k_1x + l_1$  i  $q \dots y = k_2x + l_2$  su **usporedni** ako i samo ako vrijedi  $k_1 = k_2$ .

Neka su  $p \dots y = k_1x + l_1$  i  $q \dots y = k_2x + l_2$  pravci takvi da je  $k_1, k_2 \neq 0$ . Pravci  $p$  i  $q$  su **okomiti** ako i samo ako vrijedi  $k_1 k_2 = -1$ .

Udaljenost točke  $T = (x_0, y_0)$  od pravca  $p \dots Ax + By + C = 0$ :

$$d(T, p) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Kut  $\varphi$  između pravaca  $p \dots y = k_1x + l_1$  i  $q \dots y = k_2x + l_2$ :

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

Jednadžbe nekih krivulja 2. reda:

1. **kružnica** sa središtem u točki  $S = (x_0, y_0)$  i polumjerom  $r$ :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

2. **elipsa** s poluosima  $a$  i  $b$ , te središtem u točki  $S = (x_0, y_0)$ :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

3. **hiperbola** s poluosima  $a$  i  $b$ , te središtem u točki  $S = (x_0, y_0)$ :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$



### 13.3 Formule iz trigonometrije

Osnovni trigonometrijski identitet:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Adicijske formule:

1.  $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$
2.  $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$
3.  $\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},$
4.  $\operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}.$

Formule redukcije:

1.  $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x,$
2.  $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin x,$
3.  $\sin(\pi \pm x) = \mp \sin x,$
4.  $\cos(\pi \pm x) = -\cos x,$
5.  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \operatorname{ctg} x,$
6.  $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \operatorname{tg} x,$
7.  $\operatorname{tg}(\pi \pm x) = \pm \operatorname{ctg} x,$
8.  $\operatorname{ctg}(\pi \pm x) = \pm \operatorname{tg} x.$

Formule za trigonometrijske funkcije dvostrukog argumenta:

1.  $\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x),$
2.  $\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x),$
3.  $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x},$
4.  $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x},$
5.  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x},$
6.  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x},$
7.  $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},$
8.  $\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2 \operatorname{tg} x}.$

Formule pretvorbe umnoška trigonometrijskih funkcija u zbroj:

1.  $\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x + y) + \sin(x - y)),$
2.  $\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x + y) + \cos(x - y)),$
3.  $\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y)).$

Formule pretvorbe zbroja trigonometrijskih funkcija u umnožak:

1.  $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$
2.  $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2},$
3.  $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$
4.  $\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2},$
5.  $\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y},$
6.  $\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}.$

Osnovne ciklometrijske relacije:

1.  $\arcsin x + \arccos x = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2},$
2.  $\arcsin x = \arccos \sqrt{1 - x^2},$
3.  $\arcsin x \pm \arcsin y = \arcsin \left( x \sqrt{1 - y^2} \pm y \sqrt{1 - x^2} \right),$
4.  $\arccos x \pm \arccos y = \arcsin \left( x y \mp \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - y^2} \right),$

$$5. \operatorname{arctg} x \pm \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x \pm y}{1 \mp xy},$$

$$6. \operatorname{arcctg} x \pm \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arcctg} \frac{xy \mp 1}{y \pm x}.$$

**Vrijednosti trigonometrijskih funkcija nekih posebnih kutova:**

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg} x$	/	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	/

**Neke posebne vrijednosti ciklometrijskih funkcija:**

$x$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
-1	$-\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$-\infty$	$-\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	-1	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$
0	0	$\frac{\pi}{2}$	0	0	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	1	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{\pi}{2}$	0	$+\infty$	$\frac{\pi}{2}$	0

**Pretvorba stupnjeva u radijane:**  $x^\circ = \frac{\pi}{180} x \text{ rad}$ .

**Pretvorba radijana u stupnjeve:**  $x \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi} x\right)^\circ$ .

**Trigonometrijske funkcije u pravokutnom trokutu:**

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \cos \beta = \frac{a}{c}, & \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b}, \\ \cos \alpha &= \sin \beta = \frac{b}{c}, & \operatorname{ctg} \alpha &= \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

**Površina trokuta:**

$$P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} ac \sin \beta = \frac{1}{2} bc \sin \alpha.$$

**Sinusov poučak:**

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

pri čemu je  $R$  polumjer trokutu opisane kružnice.

**Kosinusov poučak:**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

**Tangensov poučak:**

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}, \quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta-\gamma}{2}}, \quad \frac{c+a}{c-a} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma+\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\gamma-\alpha}{2}}.$$

## 13.4 Formule iz planimetrije

**Heronova formula** za površinu trokuta sa stranicama  $a$ ,  $b$  i  $c$ :

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

**Opseg i površina trokuta:**

$$O = a + b + c, \quad P = \frac{a v_a}{2} = \frac{b v_b}{2} = \frac{c v_c}{2}.$$

**Opseg i površina paralelograma:**

$$O = 2(a+b), \quad P = ab \sin \varphi,$$

pri čemu je  $\varphi$  kut između stranica  $a$  i  $b$ .

**Opseg i površina kruga** polumjera  $r$ :

$$O = 2r\pi, \quad P = r^2\pi.$$

**Površina elipse** s poluosima  $a$  i  $b$ :

$$P = ab\pi.$$

## 13.5 Formule iz stereometrije

**Oplošje i obujam kocke** stranice  $a$ :

$$O = 6a^2, \quad V = a^3.$$

**Oplošje i obujam kugle** polumjera  $r$ :

$$O = 4r^2\pi, \quad V = \frac{4}{3}r^3\pi.$$

**Oplošje i obujam uspravne prizme:**

$$O = 2B + P, \quad V = Bh,$$

pri čemu je  $B$  površina osnovke,  $P$  površina pobočja, a  $h$  visina prizme.

**Oplošje i obujam uspravne piramide:**

$$O = B + P, \quad V = \frac{1}{3} B h,$$

pri čemu je  $B$  površina osnovke,  $P$  površina pobočja, a  $h$  visina piramide.

**Oplošje i obujam uspravnog kružnog valjka:**

$$O = 2 r \pi (r + h), \quad V = r^2 \pi h,$$

pri čemu je  $r$  polumjer osnovke, a  $h$  visina valjka.

**Oplošje i obujam uspravnog kružnog stošca:**

$$O = r \pi (r + s), \quad V = \frac{1}{3} r^2 \pi h,$$

pri čemu je  $r$  polumjer osnovke,  $s$  duljina izvodnice stošca, a  $h$  visina stošca.

## 13.6 Neke korisne antiderivacije

Za sve  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  vrijedi:

1.  $\int x e^{a x} dx = \frac{a x - 1}{a^2} e^{a x},$
2.  $\int x^2 e^{a x} dx = \frac{a^2 x^2 - 2 a x + 2}{a^3} e^{a x},$
3.  $\int e^{a x} \sin(b x) dx = \frac{a \sin(b x) - b \cos(b x)}{a^2 + b^2} e^{a x},$
4.  $\int e^{a x} \cos(b x) dx = \frac{a \cos(b x) + b \sin(b x)}{a^2 + b^2} e^{a x}.$

# Kazalo

- Adjunkta matrice, 11
- Algebarski oblik kompleksnog broja, 2
- Algoritam rješavanja homogene linearne obične diferencijalne jednačbe 2. reda s konstantnim koeficijentima, 59
- Algoritam rješavanja nehomogene linearne obične diferencijalne jednačbe 2. reda s konstantnim koeficijentima, 59
- Algoritam za određivanje inverza matrice, 11
- Alternirajući red, 50
- Amplituda harmonijske funkcije, 23
- Analitička funkcija, 51
- Antiderivacija, 39
- Antisimetrična matrica, 8
- Apsolutna vrijednost (modul) kompleksnog broja, 3
- Apsolutno konvergentan red, 49
- Area funkcije, 25
- Argument kompleksnog broja, 3
- Aritmetički niz, 27
- Asimptota na graf realne funkcije, 38
- Bèzoutov poučak, 21
- Baza vektorskoga prostora  $V^3(O)$ , 17
- Bazična rješenja obične diferencijalne jednačbe 2. reda, 60
- Bernoullijeva obična diferencijalna jednačba, 58
- Bijekcija, 19
- Binet-Cauchyjev poučak, 10
- Binomni koeficijent, 36
- Cauchyjev integralni kriterij, 50
- Cauchyjev kriterij, 49
- Cauchyjev poučak o srednjoj vrijednosti, 35
- Cauchyjev problem, 57
- Cauchyjevo množenje redova, 50
- Ciklometrijske (arkus) funkcije, 23
- Cramerovo pravilo, 14
- D'Alembertov kriterij, 49
- De Moivreova formula za potenciranje kompleksnog broja, 4
- Dekadski logaritam, 25
- Derivacija funkcije, 31
- Derivacija funkcije u točki, 31
- Derivacija reda  $n$ , 35
- Deriviranje implicitno zadane funkcije, 32
- Desna kosa asimptota, 38
- Desni sustav vektora, 16
- Determinanta linearnog sustava, 13
- Determinanta matrice, 9
- Diferencijabilna funkcija, 37
- Diferencijal derivabilne funkcije, 36
- Dijagonalna matrica, 8
- Dirichletov (hipergeometrijski) red, 50
- Dirichletovi uvjeti, 53
- Divergencija nepravog integrala, 48
- Djeljivost polinoma, 21
- Domena (prirodno područje definicije) funkcije, 19
- Donja trokutasta matrica, 8
- Drugi kriterij usporedbe za ispitivanje konvergencije reda, 50
- Drugi osnovni poučak algebre, 21
- Duljina luka grafa funkcije, 45
- Duljina vektora, 15
- Eksponecijalna funkcija, 24
- Eksponecijalni oblik zapisa kompleksnog broja, 5
- Elementarne transformacije nad recima matrice, 10
- $f''$ -test, 33
- Fazni pomak harmonijske funkcije, 23
- Fermatov poučak, 35
- Fourierov polinom stupnja  $m$ , 53
- Fourierov red, 53
- Fourierov red neparne funkcije, 54
- Fourierov red parne funkcije, 54
- Fourierovi koeficijenti, 53
- Gaussova (kompleksna) ravnina, 2
- Geometrijski niz, 27

- Geometrijski red, 50  
 Glavna dijagonala kvadratne matrice, 7  
 Glavni argument kompleksnog broja, 3  
 Globalni ekstremi, 33  
 Globalni ekstremi derivabilne funkcije definirane na segmentu, 34  
 Globalni maksimum funkcije, 33  
 Globalni minimum funkcije, 33  
 Gornja trokutasta matrica, 8  
 Graf funkcije, 20  
 Granična vrijednost niza, 27  
 Granična vrijednost slijeva funkcije, 28  
 Granična vrijednost zdesna funkcije, 28  
  
 Harmonijska funkcija, 23  
 Harmonijski red, 50  
 Hiperbolne funkcije, 25  
 Homogena linearna obična diferencijalna jednadžba 1. reda, 58  
 Homogena linearna obična diferencijalna jednadžba 2. reda s konstantnim koeficijentima, 59  
 Homogena obična diferencijalna jednadžba 1. reda, 58  
 Homogeni linearni sustav, 14  
 Horizontalna asimptota, 38  
  
 Imaginarna os, 2  
 Imaginarni dio kompleksnog broja, 2  
 Injekcija, 19  
 Integrabilna funkcija, 39  
 Integralna krivulja, 57  
 Interval konvergencije reda potencija, 51  
 Intervali monotonosti, 34  
 Inverz bijekcije, 19  
 Inverz matrice, 10  
  
 Jedinična matrica reda  $n$ , 8  
 Jednadžba normale na graf funkcije u točki grafa, 33  
 Jednadžba tangente na graf funkcije u točki grafa, 32  
 Jednakost funkcija, 19  
 Jednakost kompleksnih brojeva, 2  
 Jednostrane derivacije, 31  
  
 Kodomena (područje vrijednosti) funkcije, 19  
 Količnik geometrijskog niza, 27  
 Kolinearni vektori, 15  
 Kompozicija funkcija, 19  
 Konjugat kompleksnog broja, 2  
 Konstantna funkcija, 21  
 Konvergenција nepravog integrala, 48  
 Konvergentan niz, 27  
 Konvergentan red, 49  
 Korijen jednadžbe, 21  
 Korjenovanje kompleksnog broja, 4  
 Kosa asimptota, 38  
 Kosinus, 22  
 Kotangens, 23  
 Kratnost korijena jednadžbe, 21  
 Kriterij usporedbe za ispitivanje konvergencije reda, 50  
 Kružna frekvencija harmonijske funkcije, 23  
 Kubna funkcija, 21  
 Kvadratna funkcija, 21  
 Kvadratna matrica, 7  
  
 L'Hôpital - Bernoullijevo pravilo, 35  
 Lagrangeov poučak o srednjoj vrijednosti, 35  
 Lančanica, 25  
 Laplaceov razvoj determinante, 9  
 Laplaceov transformat, 61  
 Laplaceova transformacija, 61  
 Leibnizov kriterij, 50  
 Leibnizova formula, 36  
 Lijeva kosa asimptota, 38  
 Limes niza, 27  
 Limes slijeva funkcije, 28  
 Limes zdesna funkcije, 28  
 Linearna funkcija, 21  
 Linearna kombinacija vektora, 17  
 Linearni sustav reda  $n$ , 13  
 Linearno nezavisan skup vektora, 17  
 Linearno zavisani skup vektora, 17  
 Logaritamska funkcija, 25  
 Logaritamsko deriviranje, 32  
 Lokalni ekstremi, 33  
 Lokalni maksimum funkcije, 33  
 Lokalni minimum funkcije, 33  
  
 MacLaurinov polinom stupnja  $m$ , 51  
 MacLaurinov razvoj funkcije u red, 51  
 Matrica linearnog sustava, 13  
 Matrica nepoznanica linearnog sustava, 13  
 Matrica slobodnih članova linearnog sustava, 13  
 Metoda djelomične (parcijalne) integracije, 41  
 Metoda varijacije konstanti, 60  
 Metoda zamjene (supstitucije) varijabli, 40  
 Mješoviti umnožak vektora, 17  
 Mjera kuta između vektora, 16  
 Množenje matrica, 7  
 Množenje matrica skalarom, 7

- Najveća zajednička mjera dvaju polinoma, 22
- Namatanje pravca na kružnicu, 22
- Nehomogena linearna obična diferencijalna jednadžba 1. reda, 58
- Nehomogena linearna obična diferencijalna jednadžba 2. reda s konstantnim koeficijentima, 59
- Neodređeni integral, 39
- Neparna funkcija, 20
- Neprava racionalna funkcija, 22
- Neprekidnost funkcije na skupu, 29
- Neprekidnost funkcije u točki, 29
- Newton-Leibnizova formula, 44
- Niz djelomičnih zbrojeva, 49
- Niz parcijalnih suma, 49
- Niz realnih brojeva, 27
- Nulmatrica, 8
- Nulpolinom, 21
- Nultočka funkcije, 20
- Obična diferencijalna jednadžba, 57
- Obična diferencijalna jednadžba 1. reda sa separiranim varijablama, 58
- Obostrana granična vrijednost (obostrani limes) funkcije, 28
- Obostrana kosa asimptota, 38
- Obostrana vodoravna asimptota, 38
- Obujam rotacijskog tijela, 45
- Određeni integral, 44
- Određivanje intervala konveksnosti i konkavnosti neprekidne funkcije, 37
- Određivanje intervala monotonosti, 34
- Određivanje prijevornih točaka grafa neprekidne funkcije, 37
- Određivanje strogih lokalnih ekstrema, 33
- Oduzimanje matrica, 7
- Okomiti vektori, 16
- Omeđenost funkcije, 20
- Opće rješenje obične diferencijalne jednadžbe, 57
- Opće rješenje obične diferencijalne jednadžbe 1. reda sa separiranim varijablama, 58
- Operacije s kompleksnim brojevima u algebarskom obliku, 2
- Operacije s kompleksnim brojevima u eksponencijalnom obliku, 5
- Operacije s kompleksnim brojevima u trigonometrijskom obliku, 4
- Operacije s matricama, 7
- Operacije s vektorima, 15
- Orijentacija vektora, 15
- Osnovna pravila deriviranja, 32
- Osnovna pravila za integriranje, 39
- Osnovni (temeljni) segment harmonijske funkcije, 24
- Osnovni poučak algebre, 21
- Padajuća funkcija, 20
- Parcijalni razlomci, 41
- Parna funkcija, 20
- Partikularno rješenje obične diferencijalne jednadžbe, 57
- Period funkcije, 20
- Periodična funkcija, 20
- Podintegralna funkcija, 39
- Pol racionalne funkcije, 22
- Polinom, 21
- Pomoćna determinanta linearnog sustava, 13
- Pomoćna matrica linearnog sustava, 13
- Potenciranje kompleksnog broja, 4
- Poučak o sendviču, 27
- Površina plašta rotacijskog tijela, 45
- Površina ravninskog lika, 45
- Prava racionalna funkcija, 22
- Prekid druge vrste, 30
- Prekid funkcije u točki, 30
- Prekid prve vrste, 30
- Pretvorba oblika zapisa kompleksnog broja, 4
- Prijevojna točka grafa neprekidne funkcije, 37
- Primitivna funkcija, 39
- Princip superpozicije rješenja obične diferencijalne jednadžbe 2. reda, 60
- Prirodni logaritam, 25
- Prosječna vrijednost funkcije neprekidne na segmentu, 45
- Raabeov kriterij, 50
- Radijvektor, 15
- Rastav na parcijalne razlomke, 42
- Rastuća funkcija, 20
- Razlika aritmetičkog niza, 27
- Realna funkcija jedne realne varijable, 19
- Realna matrica, 7
- Realna os, 2
- Realni dio kompleksnog broja, 2
- Red pola racionalne funkcije, 22
- Red realnih brojeva, 49
- Regularna matrica, 10
- Relativno prosti polinomi, 22
- Rolleov poučak, 35

- Sarrusovo pravilo, 9
- Simetrična matrica, 8
- Singularna matrica, 10
- Sinus, 23
- Skalarni umnožak vektora, 16
- Slika funkcije, 19
- Slobodni član polinoma, 21
- Sporedna dijagonala kvadratne matrice, 7
- Stacionarna točka, 33
- Strogi globalni ekstremi, 33
- Strogi globalni maksimum, 33
- Strogi globalni minimum, 33
- Strogi lokalni ekstremi, 33
- Strogi lokalni maksimum, 33
- Strogi lokalni minimum, 33
- Strogo konkavna neprekidna funkcija, 37
- Strogo konveksna neprekidna funkcija, 37
- Strogo padajuća funkcija, 20
- Strogo rastuća funkcija, 20
- Superpozicija harmonijskih funkcija, 24
- Surjekcija, 19
- Svojstva determinante, 10
- Svojstva diferencijala, 37
  
- Tangens, 23
- Taylorov polinom stupnja  $m$ , 51
- Taylorov red, 51
- Težište ravne ploče, 45
- Temeljni period funkcije, 20
- Točka infleksije grafa neprekidne funkcije, 37
- Transponirana matrica, 8
- Trigonometrijski oblik kompleksnog broja, 4
- Trigonometrijski polinom stupnja  $n$ , 53
- Trigonometrijski red, 53
  
- Uklonjivi prekid, 30
- Ulančane matrice, 7
- Uspravna asimptota, 38
  
- Vektorski umnožak, 16
- Vertikalna asimptota, 38
- Vodeći član polinoma, 21
- Vodeći koeficijent polinoma, 21
- Vodoravna asimptota, 38
  
- Zajednička mjera dvaju polinoma, 22
- Zbrajanje matrica, 7
- Zbroj reda, 49



# Popis tablica

5.1	Trigonometrijske funkcije . . . . .	26
5.2	Arkus funkcije . . . . .	26
5.3	Hiperbolne funkcije . . . . .	26
5.4	Area funkcije . . . . .	26
6.1	Derivacije elementarnih funkcija . . . . .	32
6.2	Više derivacije nekih funkcija . . . . .	36
7.1	Osnovne antiderivacije . . . . .	40
7.2	Osnovne trigonometrijske i hiperbolne zamjene . . . . .	44
12.1	Oblici partikularnog rješenja jednadžbe 12.1 . . . . .	60
12.2	Laplaceovi transformati nekih funkcija . . . . .	61



# Bibliografija

- [1] S. Kurepa: *Matematička analiza 1 – Diferenciranje i integriranje*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.
- [2] S. Kurepa: *Matematička analiza 2 – Funkcije jedne varijable*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.
- [3] B. Guljaš: *Matematička analiza 1 i 2*, skripta, PMF – Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu, 2013. (javno dostupno na internetskoj adresi: <http://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/MATANALuR.pdf>)
- [4] K. Horvatić: *Linearna algebra*, Golden marketing – Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.
- [5] D. Bakić: *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.
- [6] B. Pavković, D. Veljan: *Elementarna matematika 1*, Školska knjiga, Zagreb, 2003.
- [7] B. Pavković, D. Veljan: *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.
- [8] D. Veljan: *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.
- [9] B. P. Demidovič: *Zadaci i riješeni primjeri iz matematičke analize za tehničke fakultete*, Golden marketing – Tehnička knjiga, Zagreb, 2003.
- [10] V. P. Minorski: *Zbirka zadataka iz više matematike*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1972.
- [11] Earl D. Rainville, Phillip E. Bedient: *Elementary Differential Equations*, The Macmillan Company, New York, 1969.