 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 1 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	Repetitorij matematike za studente elektrotehnike - dodatak
--	---	--

- 1. Amplituda i fazni pomak superpozicije** dviju harmonijskih funkcija (vidjeti str. 24) određuju se iz izraza:

$$\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \\ \sin \varphi = \frac{A_1 \cdot \sin \varphi_1 + A_2 \cdot \sin \varphi_2}{A}, \\ \cos \varphi = \frac{A_1 \cdot \cos \varphi_1 + A_2 \cdot \cos \varphi_2}{A}. \end{cases}$$

- 2.** Neka su f analitička funkcija i F njezina standardna antiderivacija. Tada vrijedi:

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}, \quad F(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot x \cdot \sqrt{x};$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{2 \cdot x \cdot \sqrt{x}}, \quad F(x) = 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \sqrt{x}.$$

- 3.** Neka su f integrabilna realna funkcija, F njezina standardna antiderivacija i p polinom 1. stupnja čiji je vodeći koeficijent a . Tada vrijedi:

$$\int f(a \cdot x + b) \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot F(a \cdot x + b) + C, \quad \forall a, b, C \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$


- 4.** Neka su f i g realne funkcije integrabilne na segmentu $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

a) Vrijedi:

$$\int_b^a f(x) \cdot dx = - \int_a^b f(x) \cdot dx.$$

b) Ako vrijedi

$$f(x) \geq g(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 1 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	Repetitorij matematike za studente elektrotehnike - dodatak
--	---	--

onda je površina P ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ i $x = b$ jednaka:

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x)) \cdot dx.$$

5. Neka su $T > 0$ i $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna T -periodična funkcija. Tada vrijedi:

$$\int_a^{a+T} f(x) \cdot dx = \int_0^T f(x) \cdot dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

6. Neka su $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz kompleksnih brojeva, $r \in \mathbb{N}$ i $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$. **Linearna homogena rekurzija s konstantnim koeficijentima reda r** je relacija oblika

$$a_n = \sum_{i=1}^r \alpha_i \cdot a_{n-i} = \alpha_1 \cdot a_{n-1} + \alpha_2 \cdot a_{n-2} + \dots + \alpha_r \cdot a_{n-r}, \quad \text{za } n \geq r.$$

Njezina *karakteristična jednadžba* je:

$$k^r - \alpha_1 \cdot k^{r-1} - \dots - \alpha_r = 0.$$

Pretpostavimo da ta jednadžba ima ukupno l međusobno različitih rješenja k_1, \dots, k_l , pri čemu je $l \in \{1, 2, \dots, r\}$. Za svaki $i = 1, \dots, l$ neka je m_i kratnost rješenja k_i , pri čemu je $\sum_{i=1}^l m_i = r$.

Tada je *opće rješenje* zadane rekurzije dano formulom:

$$a_n = \sum_{i=1}^l \left(P_{m_i-1}(n) \right)_i \cdot k_i^n,$$

gdje je P_{m_i-1} polinom stupnja $m_i - 1$.