700. *Ako se polumjer neke kugle poveća za* 1 cm, *njezino se oplošje uveća za* 44%. *Za koliko se postotaka pritom uveća njezin obujam*?

Rješenje: Označimo s R polumjer kugle prije povećanja. Njezino je oplošje

$$O = 4R^2\pi,$$

a obujam

$$V = \frac{4}{3}R^3\pi .$$

Nakon povećanja za 1 cm, polumjer kugle iznosi

$$R_1 = R + 1,$$

a njezino oplošje

$$O_1 = 4\,R_1^2\,\pi.$$

Prema podacima u zadatku, oplošje O_1 je za 44% veće od oplošja O, što znači da vrijedi jednakost:

$$O_1 = O + \frac{44}{100}\cdot O$$
$$O_1 = O\cdot\left(1+\frac{44}{100}\right)$$
$$O_1 = 1.44\cdot O$$
$$O_1 = 1.44\cdot(4R^2\pi)$$

Tu jednakost zajedno s jednakošću

$$R_1 = R + 1$$

uvrstimo u izraz

$$O_1 = 4\,R_1^2\,\pi$$

pa dobivamo:

$$1.44\cdot 4R^2\pi = 4(R + 1)^2\pi,$$

odnosno

$$(R + 1)^2 = 1.44\cdot R^2.$$

Budući da je R polumjer kugle, njegova je vrijednost nužno strogo pozitivan realan broj, pa posljednju jednakost smijemo korjenovati. Tako dobivamo:

$$R + 1 = 1.2\cdot R,$$

odnosno

$$0.2\cdot R = 1,$$

a odavde je R = 5 cm. Povećanje obujma kugle iznosi

$$P = V_1 - V$$
$$P = \frac{4}{3} R_1^3 \pi - \frac{4}{3} R^3 \pi$$
$$P = \frac{4}{3} \pi \cdot (R_1^3 - R^3)$$
$$P = \frac{4}{3} \pi \cdot \left[(R+1)^3 - R^3\right]$$
$$P = \frac{4}{3} \pi \cdot (3R^2 + 3R)$$

pa je traženi postotak jednak

$$p = \frac{100P}{V}$$
$$p = \frac{100 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (3R^2 + 3R)}{\frac{4}{3} R^3 \pi}$$
$$p = \frac{300(R+3)}{R^2}$$

U tu jednakost uvrstimo R = 5 cm pa konačno dobijemo:

$$p = 96.$$

Dakle, obujam kugle se povećao za 96%.

701. *Radionica* "*Sunce*" *prozvodi dječje lutke odjevene u disko odjeću ili odjeću za jahanje. Cijena lutke u disko odjeći je* 20 kn, *a lutke u odjeći za jahanje* 18 kn. *Jučer je radionica proizvela* 2072 *lutke i to tako da je broj lutaka u disko odjeći i odjeći za jahanje bio u omjeru* 7:1. *Kolika je vrijednost proizvedenih lutaka*?

Rješenje: Izračunajmo najprije ukupan broj svake vrste proizvedenih lutaka. Označimo s D ukupan broj prozivedenih lutaka u disko odjeći, a s J ukupan broj proizvedenih lutaka u odjeći za jahanje. To što se brojevi lutaka u disko odjeći i u odjeći za jahanje odnose kao 7 : 1 znači da postoji strogo pozitivan realan broj $k \in \mathbf{R}$ takav da vrijedi jednakost:

$$D = 7 \cdot k,$$
$$J = 1 \cdot k.$$

Zbroj $D + J$ mora biti jednak ukupnom broju proizvedenih lutaka:

$$D + J = 2072,$$

pa uvrštavanjem

$$D = 7 \cdot k,$$
$$J = 1 \cdot k.$$

u tu jednakost dobivamo:

$$7 \cdot k + 1 \cdot k = 2072,$$

odnosno

$$8 \cdot k = 2072,$$

a odavde je $k = 259$. Tako slijedi da je proizvedeno ukupno

$$D = 7 \cdot k = 7 \cdot 259 = 1813 \text{ lutaka u disko odjeći}$$
$$J = 1 \cdot k = 1 \cdot 259 = 259 \text{ lutaka u odjeći za jahanje}$$

Ukupna vrijednost V_D svih proizvedenih lutaka u disko odjeći iznosi

$$V_D = 20 \cdot D = 20 \cdot 1813 = 36\,260 \text{ kn},$$

a ukupna vrijednost V_J svih proizvedenih lutaka u odjeći za jahanje iznosi

$$V_J = 18 \cdot J = 18 \cdot 259 = 4\,662 \text{ kn}.$$

Prema tome, ukupna vrijednost svih proizvedenih lutaka iznosi

$$V = V_D + V_J$$
$$V = 36\,260 + 4\,662$$
$$V = 40\,922 \text{ kn}.$$

702. *Tri partnera – Mirko, Slavko i Janko – uložili su novac u mali posao i dogovorili su se da moguću zaradu dijele u omjerima jednakima uloženom kapitalu. Mirko je uložio* 10 000 €, *Slavko* 12 000 €, *a Janko* 6 000 €. *Na kraju godine posao je ostvario dobit od* 14 350 €. *Izračunajte Slavkovu zaradu.*

Rješenje: Označimo s M, S i J redom zaradu Mirka, Slavka i Janka. Prema njihovu dogovoru, dobit se dijeli u omjerima jednakima uloženomu kapitalu, a to znači u omjeru 10 000 : 12 000 : 6 000, odnosno (nakon skraćivanja omjera s 2 000) u omjeru 5 : 6 : 3. Prema tome, svotu od 14 350 kn dijelimo u omjeru 5 : 6 : 3. Pripadni omjerni koeficijent k jednak je

$$k = \frac{14350}{5+6+3}$$
$$k = 1025$$

Prema tome, Slavko je zaradio

$$S = 6 \cdot k$$
$$S = 6 \cdot 1025$$
$$S = 6\,150 \text{ €}.$$

703. *Cijena brončanoga kruga određuje se na sljedeći način: na cijenu materijala doda se još* 40% *za uloženi trud radnika. Bronca je mješavina bakra i cinka u omjeru* 17:3. *Cijena bakra je* 50 €/kg, *a cinka* 80 €/kg. *Nađite cijenu brončanog kruga mase* 6 kg.

Rješenje: Izračunajmo najprije masu svakog sastojka toga kruga. Neka je b masa bakra, a c masa cinka. Budući da je bronca mješavina bakra i cinka u omjeru 17 : 3, vrijedi razmjer:

$$b : c = 17 : 3.$$

Odavde slijedi da postoji strogo pozitivan realan broj $k \in \mathbf{R}$ (jer mase ne mogu biti negativni realni brojevi) takav da je

$$b = 17 \cdot k$$
$$c = 3 \cdot k$$

Nadalje, zbroj mase bakra i mase cinka mora biti jednak masi cijeloga kruga:

$$b + c = 6 \text{ kg}.$$

U tu jednakost uvrstimo

$$\begin{aligned} b &= 17 \cdot k \\ c &= 3 \cdot k \end{aligned}$$

pa dobijemo:

$$17 \cdot k + 3 \cdot k = 6,$$

odnosno

$$20 \cdot k = 6,$$

a odavde je $k = 0.3$. Stoga je

$$\begin{aligned} b &= 17 \cdot 0.3 = 5.1 \text{ kg} \\ c &= 3 \cdot 0.3 = 0.9 \text{ kg} \end{aligned}$$

Cijena bakra potrebnoga za izradu toga brončanoga kruga iznosi

$$B = 50 \cdot b = 255 \text{ €},$$

a cijena cinka

$$C = 80 \cdot c = 72 \text{ €}.$$

Prema tome, cijena materijala potrebnoga za izradu kruga iznosi

$$\begin{aligned} M &= B + C \\ M &= 255 \text{ €} + 72 \text{ €} \\ M &= 327 \text{ €}. \end{aligned}$$

Ukupna cijena kruga je za 40% veća od cijene materijala:

$$\begin{aligned} K &= M + \frac{40}{100} \cdot M \\ K &= 327 + \frac{40}{100} \cdot 327 \\ K &= 327 + 130.8 \\ K &= 457.8 \text{ €}. \end{aligned}$$

704. *Marica je šetala gradom i u izlogu trgovine ugledala prekrasan pulover čija je cijena* 320 kn, *ali joj se tada učinio preskupim. Nakon pet dana ponovo je prošla pored istoga dućana i primijetila da je cijena snižena za* 25%. *S osmjehom na licu, ušla je u trgovinu i kupila pulover. Koliko ga je platila*?

Rješenje: Cijena pulovera je za 25% manja od 320 kn:

$$\begin{aligned} P &= 320 - \frac{25}{100} \cdot 320 \\ P &= 320 - 80 \\ P &= 240 \text{ kn}. \end{aligned}$$

705. *Slavko je kupio cipele na sniženju i platio ih* 467.5 kn. *Koliko je novaca uštedio ako sniženje iznosi* 15%?

Rješenje: Neka je S cijena cipela prije sniženja. Tada primjenom postotnoga računa niže sto slijedi:

$$S - P = 467.5$$
$$p = 15,$$

pa je

$$S = \frac{100 \cdot (S - P)}{100 - p}$$
$$S = \frac{100 \cdot 467.5}{100 - 15}$$
$$S = \frac{46750}{85}$$
$$S = 550\,\text{kn}$$

Traženi iznos uštede jednak je

$$U = S - (S - P)$$
$$U = 550 - 467.5$$
$$U = 82.5\ \text{kn}$$

706. *Trgovina "Bing" kupuje bilježnice od veletrgovaca za* 6 kn/kom., *a prodaje po cijeni* 8 kn 20 lp/kom. *Izračunajte maržu* (*u postotcima*).

Rješenje: Iznos marže jednak je razlici prodajne cijene (PC) i nabavne cijene (NC):

$$M = PC - NC$$

$$M = 8.2\ \text{kn} - 6\ \text{kn}$$
$$M = 2.2\ \text{kn}$$

Stoga je traženi postotak jednak

$$p = \frac{100M}{NC}$$
$$p = \frac{100 \cdot 2.2}{6}$$
$$p \approx 36.67\%$$

707. *Kilogram krušaka stoji* 6 kn *više od kilograma jabuka. Ivica je kupio* 3 kg *jabuka i* 2 kg *krušaka i platio* 52 kn. *Izračunajte cijenu kilograma krušaka.*

Rješenje: Neka je j cijena kilograma jabuka, a k cijena kilograma krušaka. Budući da je kilogram krušaka za 6 kn skuplji od kilograma jabuka, vrijedi jednakost:

$$j = k - 6$$

Nadalje, ukupna cijena 3 kg jabuka i 2 kg krušaka iznosi

$$C = 3 \cdot j + 2 \cdot k,$$

pa zbog $C = 52$ kn mora vrijediti jednakost

$$3j + 2k = 52.$$

Tako smo dobili sustav od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$j = k - 6$$
$$3j + 2k = 52$$

Uvrštavanjem prve jednadžbe u drugu dobivamo:

$$3(k - 6) + 2k = 52,$$

odnosno

$$3k - 18 + 2k = 52,$$

odnosno

$$5k = 70,$$

odnosno $k = 14$ kn.

708. *Duljine kateta pravokutnoga trokuta odnose se kao* 3 : 5, *a njegova površina je* 120 cm². *Izračunajte opseg toga trokuta.*

<u>Rješenje:</u> Neka su a i b duljine kateta toga trokuta, a c duljina njegove hipotenuze. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a \leq b$. Iz podatka da se duljine kateta odnose kao 3 : 5 slijedi da postoji strogo pozitivan realan broj $k \in \mathbf{R}$ (jer duljine kateta ne mogu biti negativni realni brojevi) takav da vrijedi:

$$a = 3 \cdot k$$
$$b = 5 \cdot k$$

Površinu pravokutnoga trokuta računamo prema formuli

$$P = \frac{1}{2} ab.$$

U tu formulu uvrstimo

$$P = 120$$
$$a = 3 \cdot k$$
$$b = 5 \cdot k$$

pa dobivamo:

$$120 = \frac{1}{2} \cdot (3k) \cdot (5k),$$

odnosno

$$15k^2 = 240,$$

odnosno

$$k^2 = 16,$$

pa je $k = 4$. Prema tome, duljine kateta su

$$a = 3 \cdot k = 3 \cdot 4 = 12 \text{ cm}$$
$$b = 5 \cdot k = 5 \cdot 4 = 20 \text{ cm}$$

Prema Pitagorinu poučku, duljina hipotenuze c jednaka je

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$c = \sqrt{12^2 + 20^2}$$
$$c = \sqrt{544}$$
$$c \approx 23.32 \text{ cm}$$

Stoga je traženi opseg trokuta jednak

$$O = a + b + c$$
$$O = 12 \text{ cm} + 20 \text{ cm} + 23.32 \text{ cm}$$
$$O = 55.32 \text{ cm}$$

709. *Duljine dviju stranica šiljastokutna trokuta su* 5 *i* 6, *a površina* 12. *Nađite duljinu treće stranice.*

Rješenje: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je

$$a = 5,\ b = 6.$$

Uz standardne oznake u trokutu, vrijedi formula:

$$P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma,$$

otkuda je

$$\sin \gamma = \frac{2P}{ab}$$

Uvrštavanjem $P = 12$, $a = 5$ i $b = 6$ u tu formulu dobivamo:

$$\sin \gamma = \frac{2P}{ab}$$
$$\sin \gamma = \frac{2 \cdot 12}{5 \cdot 6}$$
$$\sin \gamma = \frac{4}{5}$$

Budući da je trokut šiljastokutan, vrijednosti svih četiriju trigonometrijskih funkcija svakoga od kutova su strogo pozitivni realni brojevi. Tako prema osnovnom trigonometrijskom identitetu slijedi

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma}$$
$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}$$
$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \frac{16}{25}}$$
$$\cos \gamma = \sqrt{\frac{9}{25}}$$
$$\cos \gamma = \frac{3}{5}$$

Traženu duljinu treće stranice c zadanoga trokuta izračunat ćemo rabeći kosinusov poučak:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

$$c^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{3}{5}$$
$$c^2 = 25 + 36 - 36$$
$$c^2 = 25,$$

te konačno

$$c = 5.$$

710. *Za koju vrijednost realnoga parametra* $m \in \mathbf{R}$ *je jedno rješenje jednadžbe*

$$8x^2 - (m-1)x + m - 7 = 0$$

jednako nuli?

Rješenje: Uvrstimo $x = 0$ u zadanu jednadžbu pa dobijemo:

$$8 \cdot 0^2 - (m-1) \cdot 0 + m - 7 = 0,$$

odnosno

$$m - 7 = 0,$$

pa je $m = 7$.

711. *Izračunajte* 20% *od* $\dfrac{72^{-\frac{1}{3}}}{0.25^{-\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[3]{81}}$.

Rješenje: Najprije pojednostavnimo zadani razlomak na sljedeći način:

$$\frac{72^{-\frac{1}{3}}}{0.25^{-\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[3]{81}} = \frac{(8 \cdot 9)^{-\frac{1}{3}}}{(0.5^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[3]{3^4}} = \frac{(2^3 \cdot 3^2)^{-\frac{1}{3}}}{0.5^{-3} \cdot 3^{\frac{4}{3}}} = \frac{2^{-1} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{(2^{-1})^{-3} \cdot 3^{\frac{4}{3}}} = \frac{2^{-1} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{2^3 \cdot 3^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{2^{3+1} \cdot 3^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2^4 \cdot 3^2} = \frac{1}{16 \cdot 9} = \frac{1}{144}$$

Tako je traženi broj jednak

$$\frac{20}{100} \cdot \frac{1}{144} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{144} = \frac{1}{720}$$

712. *Pojednostavnite izraz*:

$$\left[\frac{(a+b)^3}{3ab} - a - b\right] : \left[\frac{(a-b)^2}{ab} + 1\right]$$

Rješenje: Imamo redom:

$$\left[\frac{(a+b)^3}{3ab} - a - b\right] : \left[\frac{(a-b)^2}{ab} + 1\right] = \left[\frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}{3ab} - a - b\right] : \left[\frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab} + 1\right] =$$
$$\frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3ab(a-b)}{3ab} : \frac{a^2 - 2ab + b^2 + ab}{ab} = \frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2b - 3ab^2}{3ab} : \frac{a^2 - ab + b^2}{ab} =$$
$$= \frac{a^3 + b^3}{3ab} : \frac{a^2 - ab + b^2}{ab} = \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{3ab} \cdot \frac{ab}{a^2 - ab + b^2} = \frac{a+b}{3}$$

713. *Odredite vrijednost realnoga broja* $a \in \mathbf{R}$ *tako da broj* $z = \dfrac{1-ai}{1+i}$ *bude čisto realan.*

Rješenje: Zadani kompleksan broj najprije zapišimo u sljedećemu obliku:

$$z = \frac{1-ai}{1+i} = \frac{(1-ai)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-ai-i+ai^2}{1^2-i^2} = \frac{1-a-ai-i}{1+1} = \frac{1-a}{2} + \frac{(-1-a)}{2}i$$

Da bi taj kompleksan broj bio čisto realan, njegov imaginarni dio mora biti jednak nuli. Kako je

$$\operatorname{Im} z = \frac{-1-a}{2},$$

izjednačavanjem toga razlomka s nulom dobivamo jednadžbu:

$$-1 - a = 0,$$

iz koje je $a = -1$.

714. *Zadan je polinom* $p(x) = 5x^2 - 2x + 1$. *Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma* $p_1(x) = f(x + 1)$ *polinomom* $q(x) = f(x - 1) - 5x^2$.

Rješenje: Odredimo najprije kanonske zapise polinoma $p_1(x)$ i $q(x)$. Imamo redom:

$p_1(x) = f(x + 1) = 5 \cdot (x + 1)^2 - 2 \cdot (x + 1) + 1 = 5 \cdot (x^2 + 2x + 1) - 2x - 2 + 1 = 5x^2 + 8x + 4,$
$q(x) = f(x - 1) - 5x^2 = 5 \cdot (x - 1)^2 - 2 \cdot (x - 1) + 1 - 5x^2 = 5 \cdot (x^2 - 2x + 1) - 2x + 2 + 1 - 5x^2 = -12x + 8.$

Preostaje nam podijeliti polinome p_1 i q:

$$(5x^2 + 8x + 4) : (-12x + 8) = -\frac{5}{12}x - \frac{17}{18}$$
$$\underline{5x^2 - \frac{10}{3}x}$$
$$\frac{34}{3}x + 4$$
$$\underline{\frac{34}{3}x - \frac{68}{9}}$$
$$\frac{104}{9}$$

Prema tome, traženi je ostatak jednak $\dfrac{104}{9}$.

715. *Odredite prirodno područje definicije (domenu) funkcije*

$$f(x) = \frac{1}{1-\sqrt{2x+3}} + \sqrt{-x}\,.$$

Rješenje: Uvjeti na vrijednost nepoznanice x su:

1.) $2x + 3 \geq 0$ (da bi izraz $\sqrt{2x+3}$ bio definiran)
2.) $1 - \sqrt{2x+3} \neq 0$ (nazivnik razlomka ne smije biti jednak 0)
3.) $-x \geq 0$ (da bi izraz $\sqrt{-x}$ bio definiran)

Iz prvoga se uvjeta odmah dobiva

$$x \geq -\frac{3}{2},$$

a iz trećega

$$x \leq 0.$$

Iz drugoga uvjeta slijedi

$$\sqrt{2x+3} \neq 1,$$

odnosno kvadriranjem

$$2x + 3 \neq 1,$$

odnosno

$$x \neq -1.$$

Tako smo dobili sljedeće uvjete na x:

$$x \geq -\frac{3}{2}$$
$$x \leq 0$$
$$x \neq 1$$

Odavde lagano slijedi da je traženo prirodno područje definicije skup

$$D_f = \left[-\frac{3}{2}, -1\right\rangle \cup \left\langle -1, 0\right]$$

716. *Ako je* $x^{-1} + y^{-1} = 1$ *i* $xy = 2$, *izračunajte* $x + y$.

Rješenje: Pomnožimo dvije zadane jednakosti, pa odmah dobivamo:

$$y + x = 2,$$

odnosno

$$x + y = 2.$$

717. *Odredite skup svih rješenja nejednadžbe* $2x < |x + 1|$.

Rješenje: Razlikovat ćemo dva slučaja:

1.) $x + 1 \geq 0$

U ovome je slučaju $|x + 1| = x + 1$ pa zadana nejednadžba prelazi u

$$2x < x + 1,$$

odnosno u

$$x < 1.$$

Kako iz uvjeta

$$x + 1 \geq 0$$

slijedi

$$x \geq -1,$$

u ovome je slučaju skup rješenja polazne nejednadžbe poluzatvoreni interval $[-1, 1\rangle$.

2.) $x + 1 \leq 0$

U ovome je slučaju $|x + 1| = -(x + 1) = -x - 1$ pa zadana nejednadžba prelazi u

$$2x < -x - 1,$$

odnosno u

$$x < -\frac{1}{3}.$$

Kako iz uvjeta

$$x + 1 \leq 0$$

slijedi

$$x \leq -1,$$

u ovome je slučaju skup rješenja polazne nejednadžbe poluotvoreni interval $\langle -\infty, -1]$.

Tako je skup svih rješenja polazne nejednadžbe unija skupova $[-1, 1\rangle$ i $\langle -\infty, -1]$, a to je skup $\langle -\infty, 1\rangle$.

718. *Odredite najveću vrijednost realnoga parametra $a \in$ **R** za koju jednadžba*

$$2 \sin x - \cos^2 x + a + 1 = 0$$

ima barem jedno realno rješenje.

Rješenje: Zadanu jednadžbu transformirajmo na sljedeći način:

$$2 \sin x - (1 - \sin^2 x) + a + 1 = 0$$
$$\sin^2 x + 2 \sin x + 1 + a - 1 = 0$$
$$(\sin x + 1)^2 = 1 - a$$

Zbog nejednakosti

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \text{ za svaki } x \in \mathbf{R},$$

vrijedi nejednakost

$$0 \leq \sin x + 1 \leq 2, \text{ za svaki } x \in \mathbf{R},$$

a odavde kvadriranjem slijedi

$$0 \leq (\sin x + 1)^2 \leq 4,$$

što zbog

$$(\sin x + 1)^2 = 1 - a$$

prelazi u

$$0 \leq 1 - a \leq 4,$$

a odavde je

$$-3 \leq a \leq 1.$$

Tako sada izravno slijedi da je tražena vrijednost jednaka $a_{max} = 1$.

719. *Riješite jednadžbu*

$$\log(\cos x) - \log(\sin x) = 0$$

na intervalu $[0, 2\pi\rangle$.

Rješenje: Budući da je logaritamska funkcija definirana isključivo za strogo pozitivne realne brojeve, oba logaritmanda moraju biti strogo pozitivna:

$$\cos x > 0$$
$$\sin x > 0$$

Ove nejednakosti karakteriziraju kutove u prvom kvadrantu, pa zadanu jednadžbu zapravo rješavamo na otvorenom intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Zapišimo je u obliku:

$$\log(\cos x) = \log(\sin x),$$

pa izjednačavanjem logaritmanada dobivamo

$$\cos x = \sin x.$$

Budući da je $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, tu jednadžbu smijemo podijeliti s $\cos x$, pa dobivamo:

$$\operatorname{tg} x = 1.$$

Jedino rješenje ove jednadžbe u intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ jest $x = \frac{\pi}{4}$.

720. *Odredite ukupan broj elemenata skupa svih neparnih rješenja nejednadžbe*

$$-2 \leq \log_2(2x + 1) < 4.$$

Rješenje: Budući da je je funkcija $f(x) = \log_2(2x + 1)$ kompozicija dviju strogo rastućih funkcija $f_1(x) = \log_2 x$ i $f_2(x) = 2x + 1$, ta je funkcija i sama strogo rastuća. Stoga zadanu nejednakost smijemo antilogaritmirati ne mijenjajući znakove nejednakosti:

$$2^{-2} \leq 2x + 1 \leq 4^2,$$

otkuda je

$$\frac{1}{4} \leq 2x + 1 \leq 16,$$

odnosno

$$-\frac{3}{8} \le x \le \frac{15}{2}.$$

Svi neparni cijeli brojevi koji zadovoljavaju ovu nejednakost su: 1, 3, 5 i 7. Prema tome, traženi je broj jednak 4.

721. *Pojednostavnite izraz:* $\log_a\left(\frac{1}{x}\right)+\log_{\frac{1}{a}} x$.

Rješenje: Imamo redom:

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right)+\log_{\frac{1}{a}} x = \log_a 1 - \log_a x + \log_{a^{-1}} x = 0 - \log_a x - \log_a x = -2\log_a x = -\log_a (x^2) = \log_{a^{-1}} (x^2) =$$
$$\log_{\frac{1}{a}} x^2$$

722. *Riješite jednadžbu*: $(2^{-3}\sqrt{2})^x = 4^{3-2x}$.

Rješenje: Prelaskom na bazu 2 dobivamo:

$$(2^{-3}\cdot 2^{\frac{1}{2}})^x = (2^2)^{3-2x}$$
$$(2^{-\frac{5}{2}})^x = 2^{6-4x}$$
$$2^{-\frac{5}{2}x} = 2^{6-4x}$$

Odavde usporedbom eksponenata dobivamo jednadžbu:

$$-\frac{5}{2}x = 6-4x,$$

odnosno (množenjem s 2 i sređivanjem)

$$3x = 12,$$

te $x = 4$.

723. *Izračunajte udaljenost pravaca* $p_1 \ldots\ 3x - 4y - 10 = 0$ *i* $p_2 \ldots\ 6x - 8y + 5 = 0$.

Rješenje: Jednadžbu pravca p_1 smijemo pomnožiti s 2 (pravac se pritom neće promijeniti):

$$p_1 \ldots\ 6x - 8y - 20 = 0.$$

Tako je tražena udaljenost jednaka

$$d = \frac{|-20-5|}{\sqrt{6^2+(-8)^2}}$$
$$d = \frac{|-25|}{\sqrt{36+64}}$$
$$d = \frac{25}{10}$$
$$d = \frac{5}{2}$$

724. *Odredite jednadžbu kružnice čiji je promjer dužina* $\overline{AB}$ *s krajevima* $A(-3, 7)$, $B(5, -1)$.

Rješenje: Središte S tražene kružnice je u polovištu zadane dužine, a njezin je polumjer r jednak polovici udaljenosti između točaka A i B. Tako najprije imamo

$$S\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{7+(-1)}{2}\right)$$
$$S(1, 3)$$

Nadalje, iz

$$r = \frac{1}{2}\,|AB|$$

kvadriranjem slijedi

$$r^2 = \frac{1}{4}\,|AB|^2,$$

pa je

$$r^2 = \frac{1}{4}\cdot\{[5-(-3)]^2 + [(-1)-7]^2\}$$
$$r^2 = \frac{1}{4}\cdot[8^2 + (-8)^2]$$
$$r^2 = \frac{1}{4}\cdot 128$$
$$r^2 = 32$$

Stoga je tražena jednadžba kružnice

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 32.$$

725. *Izračunajte duljina tetive krivulje* $y^2 = 8x$ *koja prolazi točkom* $A(2, -4)$ *usporedno s pravcem* $p\ldots 2x - y - 3 = 0$.

Rješenje: Odredimo najprije jednadžbu pravca q na kojemu leži ta tetiva. Taj je pravac usporedan s pravcem p pa mora imati isti koeficijent smjera kao i pravac p. Zapišimo jednadžbu pravca p u eksplicitnom obliku:

$$p\ldots\ y = 2x - 3,$$

pa očitajmo njegov koeficijent smjera:

$$k_p = 2.$$

Stoga je i koeficijent smjera pravca q jednak

$$k_q = 2$$

pa je jednadžba toga pravca

$$q\ldots\ y + 4 = 2\cdot(x-2),$$

odnosno

$$q \ldots\ y = 2x - 8.$$

Presijecimo zadanu krivulju dobivenim pravcem. U tu svrhu riješimo sustav:

$$y = 2x - 8$$
$$y^2 = 8x$$

Uvrštavanjem prve jednadžbe u drugu dobivamo:

$$(2x - 8)^2 = 8x,$$

odnosno kvadriranjem i reduciranjem

$$x^2 - 10x + 16 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1 = 2$ i $x_2 = 8$, pa su pripadne vrijednosti y

$$y_1 = 2 \cdot x_1 - 8 = 2 \cdot 2 - 8 = -4,$$
$$y_2 = 2 \cdot x_2 - 8 = 2 \cdot 8 - 8 = \ \ 8.$$

Dakle, krajevi tetive su točke $T_1(2, -4)$ i $T_2(8, 8)$. Tražena duljina tetive jednaka je udaljenosti tih točaka:

$$d = \sqrt{(8-2)^2 + (8+4)^2}$$
$$d = \sqrt{36 + 144}$$
$$d = \sqrt{180}$$
$$d = \sqrt{36 \cdot 5}$$
$$d = 6\sqrt{5}$$

726. *Odredite osnu jednadžbu hiperbole koja prolazi točkom $T(1,\ 3\sqrt{3})$ i ima pravce $y = \pm 6x$ za asimptote.*

Rješenje: Pretpostavimo da je jednadžba te hiperbole oblika

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Mi želimo odrediti vrijednosti parametara a i b. Budući da tražena hiperbola prolazi točkom T, koordinate te točke moraju zadovoljavati jednadžbu hiperbole:

$$b^2 \cdot 1^2 - a^2 \cdot (3\sqrt{3})^2 = a^2b^2,$$

otkuda je

$$b^2 - 27a^2 = a^2b^2.$$

Nadalje, to što su pravci $y = \pm 6x$ asimptote tražene hiperbole znači da vrijedi jednakost

$$\left|\frac{b}{a}\right| = 6\,.$$

Iz te jednakosti kvadriranjem dobijemo:

$$b^2 = 36a^2,$$

pa uvrštavanjem te jednakosti u jednadžbu

$$b^2 - 27a^2 = a^2b^2$$

dobivamo:

$$36a^2 - 27a^2 = 36a^4,$$

odnosno nakon dijeljenja s $36a^2$ (taj je broj uvijek strogo veći od nule jer u suprotnom ne bismo imali hiperbolu)

$$a^2 = \frac{1}{4}.$$

Sada lako slijedi

$$b^2 = 36a^2 = 36 \cdot \frac{1}{4} = 9,$$

pa je tražena jednadžba:

$$9x^2 - \frac{1}{4}y^2 = \frac{9}{4}$$

ili (množenjem s 4)

$$36x^2 - y^2 = 9.$$

727. *Omjer duljina kateta pravokutnoga trokuta je* 3 : 2. *Visina na hipotenuzu dijeli hipotenuzu na dijelove čije se duljine razlikuju za* 2. *Izračunajte duljinu hipotenuze.*

Rješenje: Označimo s a i b duljine kateta, s c duljinu hipotenuze, a s v duljinu visine na hipotenuzu. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a \le b$. Iz podatka da je omjer duljina kateta pravokutnoga trokuta jednak 3 : 2 i pretpostavke $a \le b$ slijedi razmjer

$$a : b = 2 : 3.$$

Odsječci na koje visina na hipotenuzu dijeli hipotenuzu su ortogonalne projekcije kateta. Neka je p ortogonalna projekcija katete a, a q ortogonalna projekcija katete b. Zbog pretpostavke $a \le b$ je $p \le q$. Duljine tih odsječaka računamo prema formulama:

$$p = \frac{a^2}{c}$$
$$q = \frac{b^2}{c}$$

Dijeljenjem tih formula dobivamo:

$$\frac{p}{q} = \frac{a^2}{b^2}$$
$$\frac{p}{q} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

a tu jednakost možemo zapisati u obliku razmjera

$$p : q = (a : b)^2.$$

Kako je

$$a : b = 2 : 3,$$

uvrštavanjem dobivamo:

$$p : q = (2 : 3)^2,$$

odnosno

$$p : q = 4 : 9.$$

Sada standardno slijedi da postoji strogo pozitivan realan broj $k \in \mathbf{R}$ takav da je

$$p = 4k,$$
$$q = 9k.$$

Kako je razlika duljina odsječaka jednaka 2, zbog nejednakosti $p \le q$ slijedi:

$$q - p = 2,$$

pa uvrštavanjem jednakosti

$$p = 4k$$
$$q = 9k$$

dobivamo:

$$9k - 4k = 2,$$

odnosno

$$5k = 2,$$

a odavde je $k = \dfrac{2}{5}$. Tražena duljina hipotenuze c jednaka je zbroju duljina odsječaka p i q:

$$\begin{aligned} c &= p + q \\ c &= 4k + 9k \\ c &= 13k \\ c &= 13 \cdot \frac{2}{5} \\ c &= 5.2. \end{aligned}$$

728. *Stranice trokuta imaju duljine* 3, 5 *i* 7. *Ako je* α *kut nasuprot najvećoj stranici, izračunajte* $\cos 2\alpha$.

Rješenje: Označimo stranice zadanoga trokuta ovako: $b = 3$, $c = 5$, $a = 7$. Prema formulama za trigonometrijske funkcije dvostrukoga kuta je

$$\cos 2\alpha = 2 \cdot \cos^2\alpha - 1,$$

a prema kosinusovu poučku

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Uvrštavanjem $b = 3$, $c = 5$, $a = 7$ u posljednju formulu dobiva se

$$\cos \alpha = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 3 \cdot 5}$$

$$\cos\alpha = \frac{9+25-49}{30}$$
$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}$$

pa konačno imamo:

$$\cos 2\alpha = 2\cdot\cos^2\alpha - 1$$
$$\cos 2\alpha = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1$$
$$\cos 2\alpha = \frac{1}{2} - 1$$
$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}$$

729. *Duljine osnovica jednakokračnoga trapeza su* $a = 6$ *i* $c = 2$, *a površina* $8\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. *Ako je* α *kut uz osnovicu trapeza, izračunajte* $\sin^2\alpha$.

Rješenje: Označimo s v duljinu visine toga trapeza. Iz

$$P = \frac{a+c}{2}\cdot v$$

slijedi

$$v = \frac{2P}{a+c}$$

pa uvrštavanjem $a = 6$, $c = 2$ i $P = 8\sqrt{3}$ dobivamo

$$v = \frac{2P}{a+c}$$
$$v = \frac{2\cdot 8\cdot\sqrt{3}}{6+2}$$
$$v = 2\sqrt{3}$$

Tako je tangens kuta α jednak

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2v}{a-c}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\cdot 2\sqrt{3}}{6-2}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$$

pa je traženi kvadrat njegova sinusa jednak

$$\sin^2\alpha = \frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$$
$$\sin^2\alpha = \frac{(\sqrt{3})^2}{1+(\sqrt{3})^2}$$
$$\sin^2\alpha = \frac{3}{1+3}$$
$$\sin^2\alpha = \frac{3}{4}$$

730. *U jednakostraničan trokut visine* 1.5 cm *upisana je kružnica, a u nju kvadrat. Izračunajte površinu toga kvadrata.*

Rješenje: Polumjer ρ kružnice upisane u jednakostraničan trokut jednak je trećini duljine visine:

$$\rho = \frac{1}{3}v\,.$$

Stranica kvadrata upisanoga u krug polumjera ρ iznosi

$$a = \rho\cdot\sqrt{2}$$

(jer je promjer 2ρ jednak duljini dijagonale kvadrata), pa je površina toga kvadrata

$$P = a^2$$
$$P = (\rho\cdot\sqrt{2}\,)^2$$
$$P = 2\rho^2$$
$$P = 2\cdot\left(\frac{1}{3}v\right)^2$$
$$P = \frac{2v^2}{9}$$

Uvrštavanjem v = 1.5 cm konačno dobivamo:

$$P = 0.5\ \mathrm{cm}^2.$$

731. *Kroz brid osnovke kocke prolazi ravnina koja s osnovkom zatvara kut od* 30°. *Ako je površina dijela ravnine koji se nalazi unutar kocke* $54\sqrt{3}$ cm², *izračunajte duljinu osnovnoga brida te kocke.*

Rješenje: Označimo traženu duljinu osnovnoga brida s a. Radi određenosti, neka je $ABCDA_1B_1C_1D_1$ zadana kocka. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da navedena ravnina prolazi bridom AB. Tada ona siječe brid CC_1 u točki P, a brid DD_1 u točki R. Četverokut $ABPR$ je pravokutnik. Odredimo njegove stranice. Duljina stranice AB jednaka je duljini brida kocke, dakle, $|AB| = a$. Duljinu stranice BP odredit ćemo pomoću pravokutnoga trokuta BCP kojemu je duljina katete $|BC| = a$, kut kod vrha B jednak 30°, a dužina BP hipotenuza. Tako je

$$|BP| = \frac{|BC|}{\cos 30°}$$
$$|BP| = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

Kako je površina pravokutnika $ABPR$ jednaka

$$P = |AB| \cdot |BP|,$$

uvrštavanjem

$$P = 54\sqrt{3},$$
$$|AB| = a,$$
$$|BP| = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

u tu formulu dobivamo:

$$54 \cdot 3 = 2a^2,$$

odnosno

$$a^2 = 81.$$

Otuda je $a = 9$ cm.

732. *Površina osnovke uspravne piramide iznosi* 180 cm^2. *Na udaljenosti* 9 cm *od vrha piramide piramida je presječena ravninom usporednom s osnovkom. Ako je površina toga presjeka* 108 cm^2, *izračunajte visinu piramide.*

Rješenje: Označimo s v traženu visinu piramide. Prema Cavalierijevu načelu, omjer površine osnovke i površine presjeka jednak je kvadratu omjera visine piramide i udaljenosti presječne ravnine od vrha piramide. Dakle, vrijedi razmjer:

$$180 : 108 = (v : 9)^2.$$

Odavde slijedi

$$v^2 = 135,$$

odnosno $v = 3\sqrt{15}$ cm.

733. *Površina plašta uspravnoga kružnoga stošca je* 60π cm^2, *a duljine polumjera osnovke i visine stošca su u omjeru* 3 : 4. *Izračunajte oplošje toga stošca.*

Rješenje: Označimo s r polumjer osnovke stošca, a s v visinu stošca. Da bismo odredili traženo oplošje stošca, nedostaje nam samo podatak o vrijednosti površine njegove osnovke. Iz podatka da se duljine polumjera osnovke i visine stošca odnose kao 3 : 4 slijedi da postoji strogo pozitivan realan broj $k \in \mathbf{R}$ takav da je

$$r = 3 \cdot k,$$
$$v = 4 \cdot k.$$

Tada je duljina izvodnice toga stošca jednaka

$$s = \sqrt{r^2 + v^2}$$
$$s = \sqrt{(3k)^2 + (4k)^2}$$
$$s = \sqrt{9k^2 + 16k^2}$$
$$s = \sqrt{25k^2}$$
$$s = 5k$$

Budući da je površina plašta stošca dana formulom

$$P = r\pi s,$$

u tu formulu uvrstimo $P = 60\pi$, $r = 3k$ i $s = 5k$, pa dobijemo:

$$60\pi = 3k \cdot \pi \cdot 5k,$$

odnosno

$$15k^2 = 60,$$

odnosno

$$k^2 = 4,$$

a odavde je $k = 2$. Tako je duljina polumjera osnovke stošca jednaka

$$r = 3k = 3 \cdot 2 = 6 \text{ cm},$$

pa je površina osnovke stošca

$$B = r^2\pi,$$
$$B = 6^2 \cdot \pi,$$
$$B = 36\pi \text{ cm}^2,$$

te je konačno traženo oplošje stošca jednako

$$O = B + P$$
$$O = 36\pi + 60\pi$$
$$O = 96\pi \text{ cm}^2.$$

734. *Kugla K_1 dira kuglu K_2 iznutra tako da središte kugle K_2 leži na kugli K_1. Ako obujam kugle K_1 iznosi $36\,\pi\text{ cm}^3$, izračunajte oplošje kugle K_2.*

Rješenje: Označimo s r_1 polumjer kugle K_1, a s r_2 polumjer kugle K_2. Izračunajmo najprije r_1 iz zadanoga obujma kugle K_1. Iz formule

$$V_1 = \frac{4}{3} r_1^3 \pi$$

slijedi

$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{3V_1}{4\pi}}$$
$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 36\pi}{4\pi}}$$
$$r_1 = \sqrt[3]{27}$$
$$r_1 = 3 \text{ cm}$$

Iz činjenice da kugla K_1 dira kuglu K_2 iznutra tako da središte kugle K_2 leži na kugli K_1 izravno slijedi da je polumjer kugle K_2 jednak promjeru kugle K_1, tj.

$$r_2 = 2r_1,$$

pa uvrštavanjem $r_1 = 3$ cm dobivamo

$$r_2 = 6 \text{ cm}.$$

Tako je traženo oplošje kugle K_2 jednako

$$O_2 = 4r_2^2\pi$$
$$O_2 = 4\cdot 6^2\cdot\pi$$
$$O_2 = 144\pi \text{ cm}^2$$

735. *Izračunajte* 15% od $\frac{25}{2\sqrt{6}-5}:\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

Rješenje: Uočimo najprije da je

$$2\sqrt{6}-5=-(5-2\sqrt{6})=-(3-2\sqrt{6}+2)=-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 .$$

Tako sada imamo:

$$\frac{25}{2\sqrt{6}-5}:\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{25}{-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=-\frac{25}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}\cdot\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=$$
$$=-\frac{25}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}\cdot\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}{2-3}=-\frac{25}{-1}=25$$

Tako je traženi broj jednak

$$\frac{15}{100}\cdot 25=\frac{15}{4}=3.75 .$$

736. *Pojednostavnite izraz:* $a^{-1}-\frac{a^{-1}-b^{-1}}{1+a^{-1}b}:(a^{-1}+b^{-1})^{-1}$.

Rješenje: Imamo redom:

$$a^{-1}-\frac{a^{-1}-b^{-1}}{1+a^{-1}b}:(a^{-1}+b^{-1})^{-1}=\frac{1}{a}-\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{1+\frac{1}{a}\cdot b}:(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})^{-1}=\frac{1}{a}-\frac{\frac{b-a}{ab}}{1+\frac{b}{a}}:(\frac{b+a}{ab})^{-1}=\frac{1}{a}-\frac{\frac{b-a}{ab}}{\frac{a+b}{a}}:\frac{ab}{a+b}=$$
$$\frac{1}{a}-\frac{\frac{b-a}{ab}}{\frac{a+b}{a}}:\frac{ab}{a+b}=\frac{1}{a}-\frac{b-a}{b(a+b)}\cdot\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a}-\frac{b-a}{b}\cdot\frac{1}{ab}=\frac{1}{a}-\frac{b-a}{ab^2}=\frac{b^2-b+a}{ab^2}$$

737. *Realni brojevi a i b zadovoljavaju jednakost*

$$(a+2bi^3)(2a+bi)=3i-4i^6.$$

Odredite vrijednost zbroja a + b.

Rješenje: Najprije uzmimo u obzir da je

$$i^3=-i,$$
$$i^6=(i^3)^2=(-i)^2=i^2=-1.$$

Tako zadanu jednakost možemo napisati u obliku

$$(a - 2bi)(2a + bi) = 3i + 4,$$

pa množenjem faktora na lijevoj strani dobivamo:

$$(2a^2 + 2b^2) + (-3ab) \cdot i = 4 + 3i.$$

Izjednačavanjem realnih i imaginarnih dijelova dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 2a^2 + 2b^2 &= 4 \\ -3ab &= 3 \end{aligned}$$

kojega možemo zapisati u ekvivalentnom obliku

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 2 \\ ab &= -1 \end{aligned}$$

Pomnožimo drugu jednadžbu s 2 i pribrojimo je prvoj. Dobivamo:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 0,$$

odnosno

$$(a + b)^2 = 0.$$

Iz te jednakosti izravno slijedi da je tražena vrijednost zbroja

$$a + b = 0.$$

738. *Odredite skup svih strogo negativnih rješenja nejednadžbe* $\frac{3}{|x+1|} \geq 1$.

Rješenje: Budući da nazivnik razlomka ne smije biti jednak nuli, postavljamo uvjet:

$$|x + 1| \neq 0$$

iz kojega se dobiva $x \neq -1$. Uvažavajući tu nejednakost, zadanu nejednadžbu smijemo pomnožiti s $|x + 1|$ jer je taj broj strogo pozitivan za svaki $x \neq -1$. Tako ćemo dobiti:

$$|x + 1| \leq 3,$$

što možemo zapisati u ekvivalentnom obliku

$$-3 \leq x + 1 \leq 3,$$

a odavde je

$$-4 \leq x \leq 2.$$

Kako tražimo samo strogo negativna rješenja, bit će:

$$-4 \leq x < 0,$$

pa zbog uvjeta $x \neq -1$ konačno dobivamo da je traženi skup jednak $[-4, 0\rangle \setminus \{-1\}$.

739. *Odredite sve vrijednosti realnoga parametra* $k \in \mathbf{R}$ *za koje je umnožak svih rješenja jednadžbe* $(x + 2)^2 = k \cdot (2x + 1)$ *jednak* 2.

Rješenje: Zadanu jednadžbu najprije transformirajmo na sljedeći način:

$$(x+2)^2 = k \cdot (2x+1)$$
$$x^2 + 4x + 4 = 2kx + k$$
$$x^2 + (4 - 2k)x + 4 - k = 0.$$

Iz Vièteovih formula slijedi da je umnožak svih rješenja posljednje jednadžbe jednak $4 - k$. Kako vrijednost toga umnoška treba biti jednaka 2, dobivamo novu jednadžbu:

$$4 - k = 2,$$

iz koje je $k = 2$.

740. *Odredite sve vrijednosti realnoga parametra* $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ *za koje jednadžbe* $x^2 - 8x + 5a = 0$ *i* $2x^2 + x - 7a = 0$ *imaju barem jedno zajedničko rješenje.*

Rješenje: Označimo s x_1 zajedničko rješenje obiju jednadžbi. Tada vrijede jednakosti:

$$x_1^2 - 8x_1 + 5a = 0$$
$$2x_1^2 + x_1 - 7a = 0$$

Pomnožimo prvu jednakost s (–2) i pribrojimo je drugoj. Dobivamo:

$$17x_1 - 17a = 0,$$

a odavde je

$$x_1 = a.$$

Tako $x_1 = a$ uvrstimo u jednakost

$$x_1^2 - 8x_1 + 5a = 0$$

pa dobivamo:

$$a^2 - 8a + 5a = 0,$$

odnosno

$$a^2 - 3a = 0.$$

Budući da zahtijevamo da bude $a \neq 0$, posljednju jednakost smijemo podijeliti s a. Tako ćemo dobiti:

$$a - 3 = 0,$$

a odatle je $a = 3$.

741. *Odredite skup svih rješenja nejednadžbe* $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2} < 1$.

Rješenje: Zadanu nejednadžbu najprije transformirajmo na sljedeći način:

$$\frac{x^2-2x}{x^2-x-2}<1$$
$$\frac{x^2-2x}{x^2-x-2}-1<0$$
$$\frac{x^2-2x-(x^2-x-2)}{x^2-x-2}<0$$
$$\frac{2-x}{x^2-x-2}<0$$

Kako je $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$, posljednju nejednakost možemo zapisati u obliku

$$-\frac{x-2}{(x-2)(x+1)}<0\,.$$

Za $x \neq 2$ skratimo razlomak na lijevoj strani te nejednakosti:

$$\frac{1}{x+1}>0,$$

što će biti ispunjeno ako i samo ako je

$$x + 1 > 0,$$

odnosno

$$x > -1.$$

Tako smo dobili:

$$x > -1$$
$$x \neq 2,$$

pa je traženi skup $\langle -1, +\infty\rangle \setminus \{2\}$ (ili, ekvivalentno, $\langle -1, 2\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$).

742. *Funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ poprima svoju najmanju vrijednost $-\frac{9}{8}$ za $x = \frac{1}{4}$. Ako je vrijednost funkcije u točki $x = 0$ jednaka -1, izračunajte umnožak abc.*

Rješenje: Primijetimo da je zadana funkcija kvadratna funkcija. Iz podatka da ta kvadratna funkcija ima najmanju vrijednost slijedi $a > 0$. Nadalje, funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ općenito ima ekstremnu vrijednost $\frac{4ac-b^2}{4a}$ koju poprima za $x = -\frac{b}{2a}$. U ovom slučaju to znači da moraju vrijediti jednakosti:

$$\frac{4ac-b^2}{4a}=-\frac{9}{8}$$
$$-\frac{b}{2a}=\frac{1}{4}$$

Iz podatka da je vrijednosti funkcije u točki $x = 0$ jednaka -1 slijedi da je $f(0) = -1$, odnosno

$$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -1,$$

odnosno

$$c = -1.$$

Tako smo dobili sljedeći sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} \frac{4ac-b^2}{4a} &= -\frac{9}{8} \\ -\frac{b}{2a} &= \frac{1}{4} \\ c &= -1 \end{aligned}$$

Iz druge jednadžbe toga sustava je

$$b = -\frac{1}{2}a\ .$$

Budući da prvu jednadžbu (množenjem s 16a) možemo zapisati u obliku

$$16ac - 4b^2 = -18a,$$

uvrštavanjem $b = -\frac{1}{2}a$ i $c = -1$ u tu jednakost dobijemo:

$$-16a - a^2 = -18a,$$

odnosno

$$a^2 - 2a = 0.$$

Već smo utvrdili da je $a > 0$ pa dijeljenjem posljednje jednadžbe s a dobivamo:

$$a - 2 = 0,$$

a odavde je $a = 2$. Sada je lako izračunati

$$b = -\frac{1}{2}a = -\frac{1}{2}\cdot 2 = -1,$$

pa je traženi umnožak jednak

$$abc = 2 \cdot (-1) \cdot (-1) = 2.$$

743. *Riješite jednadžbu*: $\log_{81}x + \log_9 x + \log_3 x = 14$.

Rješenje: Prelaskom na bazu 3 redom dobivamo:

$$\frac{\log_3 x}{\log_3 81}+\frac{\log_3 x}{\log_3 9}+\log_3 x=14$$
$$\frac{\log_3 x}{\log_3(3^4)}+\frac{\log_3 x}{\log_3(3^2)}+\log_3 x=14$$
$$\frac{\log_3 x}{4\log_3 3}+\frac{\log_3 x}{2\log_3 3}+\log_3 x=14$$
$$\frac{\log_3 x}{4}+\frac{\log_3 x}{2}+\log_3 x=14$$
$$\log_3 x\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1\right)=14$$
$$\log_3 x\cdot\left(\frac{1+2+4}{4}\right)=14$$
$$\log_3 x\cdot\frac{7}{4}=14 \qquad /:\frac{7}{4}$$
$$\log_3 x=8$$
$$x=3^8=6561$$

744. *Odredite skup svih realnih rješenja nejednadžbe* $\log\frac{x+2}{x}>1$.

Rješenje: Prvi uvjet na vrijednost nepoznanice x jest $x \neq 0$ jer nazivnik logaritmanda ne smije biti jednak nuli. Drugi uvjet na vrijednost nepoznanice x jest

$$\frac{x+2}{x}>0$$

jer vrijednost logaritmanda mora biti strogo veća od nule. Uvažavajući ta dva uvjeta, antilogaritmiranjem polazne nejednadžbe dobivamo:

$$\frac{x+2}{x}>10^1,$$

odnosno

$$\frac{x+2}{x}>10.$$

Uočimo da iz nejednakosti $\frac{x+2}{x}>10$ slijedi nejednakost $\frac{x+2}{x}>0$, pa potonju nejednakost zanemarujemo u daljnjemu rješavanju zadatka. Sada riješimo nejednadžbu

$$\frac{x+2}{x}>10.$$

Kako je

$$\frac{x+2}{x}=1+\frac{2}{x},$$

to nejednadžbu

$$\frac{x+2}{x}>10$$

možemo zapisati u obliku

$$1 + \frac{2}{x} > 10,$$

a odatle je

$$\frac{2}{x} > 9.$$

Tu nejednakost pomnožimo s x^2 pa dobijemo:

$$2x > 9x^2,$$

odnosno

$$9x^2 - 2x < 0,$$

a odatle je

$$x \in \langle 0, \frac{2}{9} \rangle.$$

Tako smo dobili ukupno dva uvjeta na x:

$$x \neq 0$$
$$x \in \langle 0, \frac{2}{9} \rangle$$

Lako se vidi da drugi uvjet povlači prvi, pa je traženi skup rješenja otvoreni interval $\langle 0, \frac{2}{9} \rangle$.

745. *Odredite zbroj svih realnih rješenja jednadžbe* $(0.5)^{x^2} \cdot 2^{5x+2} = 16^{-1}$.

Rješenje: Prelaskom na bazu 2 dobivamo:

$$(0.5)^{x^2} \cdot 2^{5x+2} = 16^{-1}$$
$$(2^{-1})^{x^2} \cdot 2^{5x+2} = (2^4)^{-1}$$
$$2^{-x^2} \cdot 2^{5x+2} = 2^{-4}$$
$$2^{-x^2+5x+2} = 2^{-4}$$

Odavde usporedbom eksponenata dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$-x^2 + 5x + 2 = -4$$

koju možemo zapisati u ekvivalentnom obliku

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Budući da nema nikakvih uvjeta na vrijednost nepoznanice x, sva rješenja ove kvadratne jednadžbe su ujedno i sva rješenja polazne jednadžbe. Tako iz Vièteovih formula slijedi da je traženi zbroj jednak 5.

746. *Ako je* $\cos t = \frac{5}{13}$ *i* $t \in \left\langle \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\rangle$, *izračunajte* $\frac{1 - \operatorname{ctg} t}{1 + \operatorname{ctg} t}$.

Rješenje: Budući da je t kut u četvrtomu kvadrantu, vrijednost njegova sinusa je strogo negativna. Zbog toga je

$$\sin t = -\sqrt{1-\cos^2 t}$$
$$\sin t = -\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}$$
$$\sin t = -\sqrt{1-\frac{25}{169}}$$
$$\sin t = -\sqrt{\frac{144}{169}}$$
$$\sin t = -\frac{12}{13},$$

pa je

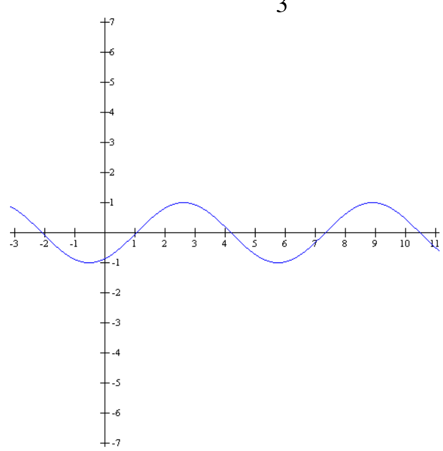
$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{-\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}.$$

Konačno je

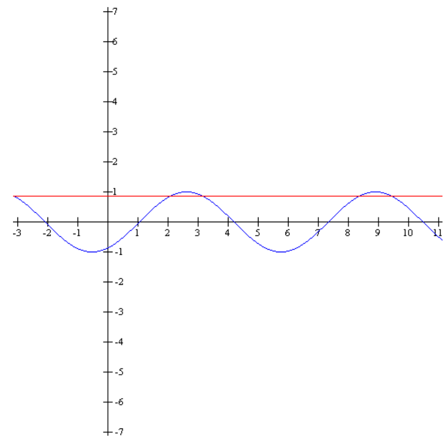
$$\frac{1-\operatorname{ctg} t}{1+\operatorname{ctg} t} = \frac{1+\frac{5}{12}}{1-\frac{5}{12}} = \frac{\frac{17}{12}}{\frac{7}{12}} = \frac{17}{7}.$$

747. *Odredite skup svih rješenja nejednadžbe* $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$ *na intervalu* $\langle \pi, 3\pi \rangle$.

Rješenje: Ovakvu je nejednadžbu najlakše i najbrže riješiti grafički. Nacrtajmo najprije graf funkcije $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. To je "klasična" sinusoida pomaknuta za $\frac{\pi}{3}$ udesno:



Presijecimo dobiveni graf pravcem $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$:



Odredimo sjecišta tih dviju krivulja u zadanom intervalu. U tu svrhu, riješimo jednadžbu

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

na zadanom intervalu. Uvedimo zamjenu

$$t = x - \frac{\pi}{3}$$

pa dobivamo jednadžbu

$$\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Njezina rješenja su $(t_1)_k = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ i $(t_2)_k = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Vraćanjem zamijenjenoga izraza umjesto t_1 dobivamo:

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi,$$

pa je $(x_1)_k = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Analogno, vraćanjem zamijenjenoga izraza umjesto t_2 dobivamo:

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi,$$

pa je $(x_2)_k = \pi + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Sada odredimo sva rješenja koja ujedno pripadaju i otvorenom intervalu $\langle \pi, 3\pi \rangle$. Iz nejednadžbe

$$\pi < \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi < 3\pi$$

množenjem s 3 i dijeljenjem s π slijedi

$$3 < 2 + 6k < 9,$$

odnosno

$$\frac{1}{6} < k < \frac{7}{6}.$$

Budući da k mora biti cijeli broj, jedino je rješenje ove nejednadžbe $k = 1$. Prema tome, intervalu $\langle\pi, 3\pi\rangle$ pripada

$$(x_1)_1 = \frac{2\pi}{3} + 1 \cdot 2\pi = \frac{8\pi}{3}.$$

Analogno, iz

$$\pi < \pi + k \cdot 2\pi < 3\pi$$

slijedi

$$0 < k < 1,$$

a tu nejednakost ne zadovoljava niti jedan cijeli broj k. Prema tome, jedino sjecište krivulja $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ i $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ u intervalu $\langle\pi, 3\pi\rangle$ jest $x = \frac{8\pi}{3}$. S dobivene slike vidimo da se na intervalu $\langle\pi, 3\pi\rangle$ sinusoida $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ nalazi ispod pravca $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ na dijelu $\langle\pi, \frac{8\pi}{3}\rangle$ (od početka intervala pa do sjecišta). Stoga je traženi skup rješenja $\langle\pi, \frac{8\pi}{3}\rangle$.

748. *Izračunajte zbroj svih rješenja jednadžbe*

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$$

na intervalu $[0, \pi]$.

<u>Rješenje:</u> Lijevu stranu polazne jednadžbe transformiramo u umnožak trigonometrijskih funkcija na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
&(\sin x + \sin 4x) + (\sin 2x + \sin 3x) = 0\\
&2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2} + 2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0\\
&\sin\frac{5x}{2}\cdot\left(\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) = 0\\
&\sin\frac{5x}{2}\cdot 2\cdot\cos x\cdot\cos\frac{x}{2} = 0\\
&\sin\frac{5x}{2}\cdot\cos x\cdot\cos\frac{x}{2} = 0
\end{aligned}$$

Kako je umnožak triju realnih brojeva jednak 0 ako i samo ako je barem jedan od njih jednak 0, razlikujemo ukupno 3 slučaja:

1.) $\sin\frac{5x}{2} = 0$

Odavde je $\frac{5x}{2} = k \cdot \pi$, $k \in \mathbf{Z}$, odnosno

$$(x_1)_k = \frac{2}{5} \cdot k \cdot \pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Odredimo koja od ovih rješenja pripadaju segmentu $[0, \pi]$. Iz nejednadžbe

$$0 \leq \frac{2}{5} \cdot k \cdot \pi \leq \pi$$

slijedi

$$0 \leq k \leq \frac{5}{2}.$$

Svi cijeli brojevi koji zadovoljavaju tu nejednakost su $k = 0$, $k = 1$ i $k = 2$. Stoga segmentu $[0, \pi]$ pripadaju rješenja:

$$(x_1)_0 = \frac{2}{5} \cdot 0 \cdot \pi = 0$$
$$(x_1)_1 = \frac{2}{5} \cdot 1 \cdot \pi = \frac{2}{5}\pi$$
$$(x_1)_2 = \frac{2}{5} \cdot 2 \cdot \pi = \frac{4}{5}\pi$$

2.) $\cos x = 0$

Iz ove jednadžbe odmah slijedi

$$(x_2)_l = \frac{\pi}{2} + l \cdot \pi,\ l \in \mathbf{Z}.$$

Odredimo koja od ovih rješenja pripadaju segmentu $[0, \pi]$. Iz nejednadžbe

$$0 \leq \frac{\pi}{2} + l \cdot \pi \leq \pi$$

slijedi

$$-\frac{1}{2} \leq l \leq \frac{1}{2}.$$

Jedini cijeli broj koji zadovoljava ovu nejednakost jest $l = 0$. Stoga segmentu $[0, \pi]$ pripada rješenje:

$$(x_2)_0 = \frac{\pi}{2} + 0 \cdot \pi = \frac{\pi}{2}.$$

3.) $\cos \frac{x}{2} = 0$

Iz ove jednadžbe odmah slijedi

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + m \cdot \pi,\ m \in \mathbf{Z},$$

odnosno

$$(x_3)_m = \pi + m \cdot 2\pi,\ m \in \mathbf{Z}.$$

Odredimo koja od ovih rješenja pripadaju segmentu $[0, \pi]$. Iz nejednadžbe

$$0 \leq \pi + m \cdot 2\pi \leq \pi$$

slijedi

$$-\frac{1}{2} \le m \le \frac{1}{2}.$$

Jedini cijeli broj koji zadovoljava ovu nejednakost jest $m = 0$. Stoga segmentu $[0, \pi]$ pripada rješenje:

$$(x_3)_0 = \pi + 0 \cdot 2\pi = \pi.$$

Tako je zbroj svih rješenja polazne jednadžbe koja pripadaju zadanom segmentu jednak

$$(x_1)_0 + (x_1)_1 + (x_1)_2 + (x_2)_0 + (x_3)_0 = 0 + \frac{2}{5}\pi + \frac{4}{5}\pi + \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{27}{10}\pi.$$

749. *Dva vrha pravokutnika su sjecišta pravca p… $x - y - 2 = 0$ s koordinatnim osima. Ako jedna dijagonala toga pravokutnika leži na osi Oy, izračunajte njegov opseg.*

Rješenje: Odredimo najprije koordinate dvaju vrhova pravokutnika. Rješavajući sustave

$$\begin{aligned} x - y - 2 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} x - y - 2 &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

dobivamo da su ti vrhovi $S_1(0, -2)$ i $S_2(2, 0)$. Njihova međusobna udaljenost jednaka je duljini jedne stranice pravokutnika:

$$\begin{aligned} a = |S_1S_2| &= \sqrt{(2-0)^2 + (0-(-2))^2} \\ a &= \sqrt{4+4} \\ a &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Nadalje, udaljenost vrha S_2 do osi Oy jednaka je polovici duljine dijagonale pravokutnika. Dakle,

$$d = 2d(S, Oy) = 2 \cdot 2 = 4.$$

Stoga je duljina druge stranice toga pravokutnika

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{d^2 - a^2} \\ b &= \sqrt{4^2 - (2\sqrt{2})^2} \\ b &= \sqrt{16-8} \\ b &= \sqrt{8} \\ b &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Tako smo zaključili da je zaddani pravokutnik ustvari kvadrat stranice $a = 2\sqrt{2}$. Njegov je opseg jednak

$$\begin{aligned} O &= 4a \\ O &= 4 \cdot 2\sqrt{2} \\ O &= 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

750. *Odredite razvijeni oblik jednadžbe kružnice čije je središte točka* S(3, 1), *a koja dira pravac p… $x - y = 0$.*

Rješenje: Kvadrat polumjera te kružnice jednak je kvadratu udaljenosti točke S od pravca p:

$$r^2 = d^2(S, p)$$

$$r^2 = \left(\frac{3-1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\right)^2$$

$$r^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{1+1}}\right)^2$$

$$r^2 = \frac{4}{2}$$

$$r^2 = 2.$$

Stoga je jednadžba te kružnice

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 2,$$

odnosno

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 12 = 0.$$

751. *Izračunajte numerički ekscentricitet elipse koja ima svojstvo da se odsječak između žarišta elipse vidi iz njezina tjemena pod pravim kutom.*

Rješenje: Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je osna jednadžba elipse oblika $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, pri čemu je a duljina velike, a b duljina male poluosi. Tada su koordinate jednoga tjemena elipse $T_1(0, b)$, a koordinate žarišta elipse $F_1(-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ i $F_2(\sqrt{a^2-b^2}, 0)$. Budući da se odsječak F_1F_2, prema pretpostavci, iz točke T_1 vidi pod pravim kutom, primjenom Pitagorina poučka slijedi da mora vrijediti jednakost:

$$|F_1F_2|^2 = |T_1F_1|^2 + |T_1F_2|^2.$$

Kako je

$$|F_1F_2| = 2\sqrt{a^2-b^2},$$

$$|T_1F_1| = \sqrt{(0+\sqrt{a^2-b^2})^2+b^2} = \sqrt{a^2-b^2+b^2} = \sqrt{a^2} = a,$$

$$|T_1F_1| = \sqrt{(0-\sqrt{a^2-b^2})^2+b^2} = \sqrt{a^2-b^2+b^2} = \sqrt{a^2} = a,$$

uvrštavanjem u jednakost

$$|F_1F_2|^2 = |T_1F_1|^2 + |T_1F_2|^2$$

dobivamo:

$$4(a^2 - b^2) = a^2 + a^2,$$

a odavde slijedi

$$2a^2 = 4b^2,$$

odnosno

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2}.$$

S druge je strane traženi numerički ekscentricitet ε jednak

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

pa uvrštavanjem jednakosti $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2}$ konačno dobivamo:

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

752. *Opseg trokuta ABC iznosi* 18 cm. *Simetrala jednoga kuta dijeli nasuprotnu stranicu na odsječke duljina* 2.5 cm *i* 3.5 cm. *Izračunajte duljinu najmanje stranice trokuta.*

Rješenje: Primijenit ćemo poučak o simetrali unutarnjega kuta trokuta koji kaže da simetrala unutrašnjega kuta trokuta dijeli stranicu nasuprot tom kutu na odsječke omjer duljina kojih je jednak omjeru preostalih dviju stranica trokuta. Bez smanjenja općenitosti (i uz standardne oznake u trokutu) možemo pretpostaviti da je povučena simetrala kuta α. Prema navedenom poučku slijedi da ta simetrala dijeli stranicu a u omjeru $b : c$. Budući da su pripadni odsječci dugi 2.5 cm i 3.5 cm, mora vrijediti razmjer

$$b : c = 2.5 : 3.5,$$

otkuda (skraćivanjem desne strane s 0.5) dobivamo

$$b : c = 5 : 7.$$

To znači da postoji strogo pozitivan realan broj $k \in \mathbf{R}$ takav da vrijede jednakosti:

$$b = 5 \cdot k$$
$$c = 7 \cdot k$$

Nadalje, zbroj duljina odsječaka na koje simetrala kuta α dijeli stranicu a jednak je duljini stranice a, pa je

$$a = 2.5 \text{ cm} + 3.5 \text{ cm} = 6 \text{ cm}.$$

Tako u formulu za opseg trokuta ABC

$$O = a + b + c$$

uvrstimo $O = 18$, $a = 6$, $b = 5 \cdot k$ i $c = 7 \cdot k$, pa dobivamo:

$$18 = 6 + 5k + 7k,$$

odnosno

$$12k = 12,$$

a odavde je $k = 1$. Stoga je

$$b = 5 \cdot k = 5 \cdot 1 = 5 \text{ cm},$$
$$c = 7 \cdot k = 7 \cdot 1 = 7 \text{ cm}.$$

Očito vrijedi nejednakost $b < a < c$, pa je najmanja stranica trokuta b. Njezina je duljina 5 cm.

753. *Izračunajte duljinu tetive nasuprotne obodnom kutu od* 45° *s vrhom na kružnici polumjera* 4 cm.

Rješenje: Prema poučku o obodnom i središnjem kutu nad istom tetivom, obodni je kut β dvostruko manji od središnjega kuta α. U ovome je zadatku $\beta = 45°$, pa je pripadni središnji kut

$$\alpha = 2\beta = 2 \cdot 45° = 90°.$$

Označimo li sa S središte kružnice, a s A i B krajnje točke tetive čiju duljinu tražimo, onda je trokut ABS pravokutan s pravim kutom pri vrhu S. Taj je trokut i jednakokračan jer je $|SA| = |SB| = r = 4$ cm. Stoga je tražena duljina tetive AB jednaka

$$|AB| = \sqrt{|SA|^2 + |SB|^2}$$
$$|AB| = \sqrt{4^2 + 4^2}$$
$$|AB| = \sqrt{2 \cdot 4^2}$$
$$|AB| = 4\sqrt{2} \text{ cm}.$$

754. *Omjer duljina visina usporednika ABCD je* 2 : 3. *Njegov opseg iznosi* 20 cm, *a šiljasti kut* 30°. *Izračunajte površinu toga usporednika.*

Rješenje: Označimo s a i b stranice usporednika, pri čemu bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a > b$ (ne može biti $a = b$ jer bi tada usporednik $ABCD$ bio romb čije su sve visine jednako duge, što znači da su njihove duljine u omjeru 1 : 1, a ne 2 : 3 kao što zahtijeva zadatak). Površinu toga usporednika možemo izračunati na dva načina:

$$P = av_a$$

i

$$P = bv_b.$$

Kako se u oba slučaja radi o istoj veličini, izjednačavanjem desnih strana dobivamo:

$$av_a = bv_b,$$

a odavde je

$$b : a = v_a : v_b.$$

Zbog pretpostavke $a > b$ je $v_a < v_b$, pa iz podatka da je omjer duljina visina 2 : 3 slijedi da vrijedi razmjer

$$v_a : v_b = 2 : 3.$$

Zbog toga je i

$$b : a = 2 : 3,$$

pa postoji strogo pozitivan realan broj $k \in \mathbf{R}$ takav da je

$$b = 2 \cdot k,$$
$$a = 3 \cdot k.$$

Tako u formulu za opseg usporednika

$$O = 2a + 2b$$

uvrstimo gornje izraze za b i a, te $O = 20$. Dobivamo:

$$20 = 2 \cdot 2k + 2 \cdot 3k,$$

odnosno

$$10k = 20,$$

a odavde je $k = 2$. Prema tome, duljine stranica usporednika su

$$b = 2 \cdot k = 2 \cdot 2 = 4 \text{ cm},$$
$$a = 2 \cdot k = 2 \cdot 3 = 6 \text{ cm}.$$

Traženu površinu usporednika možemo izračunati i prema formuli

$$P = ab \sin \alpha,$$

gdje je α bilo koji kut usporednika. U tu formulu uvrstimo $a = 6$, $b = 4$ i $\alpha = 30°$, pa dobivamo:

$$P = 6 \cdot 4 \cdot \sin 30°,$$
$$P = 12 \text{ cm}^2.$$

755. *Odredite kut kojega zatvaraju ravnina trokuta ABC i ravnina kvadrata ABEF ako je* $|AB| = 6$, $|BC| = |CE| = 8$ *i* $|AC| = 10$.

Rješenje: Uočimo najprije da je zbog $6^2 + 8^2 = 10^2$, odnosno $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$, trokut ABC pravokutan trokut s pravim kutom pri vrhu B (nasuprot stranici AC). Stoga je traženi kut jednak kutu između pravaca BE i BC. Označimo taj kut s α. Promotrimo trokut BCE. Znamo duljine svih triju njegovih stranica: $|BC| = |CE| = 8$, $|BE| = |AB| = 6$ (jer je četverokut $ABEF$ kvadrat), pa primjenom kosinusova poučka dobivamo:

$$\cos\alpha = \frac{|BE|^2 + |BC|^2 - |CE|^2}{2 \cdot |BE| \cdot |BC|},$$

što zbog $|BC| = |CE|$ prelazi u

$$\cos\alpha = \frac{|BE|^2}{2 \cdot |BE| \cdot |BC|},$$

odnosno u

$$\cos\alpha = \frac{|BE|}{2 \cdot BC|}.$$

Preostaje nam uvrstiti $|BE| = 6$ i $|BC| = 8$, te konačno dobiti:

$$\alpha = 67.975687162957837438703224797367 3°,$$

odnosno

$$\alpha \approx 67°57'32''.$$

756. *Izračunajte obujam uspravne deseterostrane jednakobridne prizme čija je osnovka upisana u krug promjera* 20.

Rješenje: Osnovka uspravne deseterostrane jednakobridne prizme jest pravilan deseterokut upisan u krug promjera $d = 20$ cm. Broj njegovih stranica jednak je $n = 10$, a središnji kut α

$$\alpha = \frac{360°}{n}$$

$$\alpha = \frac{360°}{10} = 36°.$$

Tako je duljina stranice toga deseterokuta jednaka

$$a = d \sin \frac{\alpha}{2},$$

odnosno

$$a = 20 \sin 18°,$$

pa je površina toga deseterokuta jednaka

$$B = \frac{1}{2} \cdot n \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \sin \alpha$$
$$B = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \left(\frac{20}{2}\right)^2 \cdot \sin 36°,$$
$$B = 500 \cdot \sin 36°.$$

Budući da je prizma jednakobridna, duljina njezine visine jednaka je duljini njezina osnovnoga brida, pa je

$$v = a = 20 \cdot \sin 18°.$$

Prema tome, traženi obujam prizme jednak je

$$V = B \cdot v$$
$$V = 500 \cdot \sin 36° \cdot 20 \cdot \sin 18°,$$
$$V = 1816.3563200134022147386668937015 5$$

ili približno

$$V = 1816.36.$$

757. *Zadan je uspravan kružni stožac čija je visina duga* 12 cm, *a obujam* 324π cm^3. *Izračunajte središnji kut kružnoga isječka koji nastane razvijanjem plašta toga stošca u ravninu.*

Rješenje: Izračunajmo najprije duljinu polumjera osnovke toga stošca. Iz formule za obujam stošca

$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot v$$

slijedi

$$r = \sqrt{\frac{3V}{\pi \cdot v}}$$

pa uvrštavanjem $V = 324\pi$ i $v = 12$ dobivamo

$$r = 9 \text{ cm}.$$

Nadalje, duljina izvodnice stošca s jednaka je

$$s = \sqrt{r^2 + v^2},$$

pa uvrštavanjem $r = 9$ i $v = 12$ dobivamo:

$$s = 15 \text{ cm.}$$

Razvijanjem plašta zadanoga stošca u ravninu dobiva se kružni isječak čiji je polumjer jednak s, a duljina luka $2r\pi$. Središnji kut α toga isječka upravo je traženi kut. Tako iz

$$2r\pi = \frac{s\pi\alpha}{180}$$

izravno slijedi

$$\alpha = \frac{360r}{s}$$

pa uvrštavanjem $r = 9$ i $s = 15$ konačno dobijemo:

$$\alpha = 216°.$$

758. *Kuglu polumjera $R = 10$ presiječemo ravninom tako da površina presjeka iznosi $S = 64\,\pi$. Izračunajte udaljenost središta kugle od te ravnine.*

Rješenje: Presjek kugle ravninom je krug. Označimo polumjer toga kruga s r, pa je njegova površina

$$S = r^2\pi,$$

otkuda je

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}\,.$$

U tu formulu uvrstimo $S = 64\pi$ pa dobijemo

$$r = 8.$$

Tražena je udaljenost d jednaka visini na osnovicu jednakokračnoga trokuta kojemu je duljina osnovice $2r$, a duljina kraka R. Zbog toga je

$$d = \sqrt{R^2 - r^2}$$

pa uvrštavanjem $R = 10$ i $r = 8$ konačno dobivamo

$$r = 6.$$

759. *Izračunajte zbroj svih realnih rješenja jednadžbe*

$$(\log x - 2)(\log x - 3) = 2.$$

Rješenje: Jedini uvjet na vrijednost nepoznanice x jest $x > 0$ (da bi $\log x$ bio definiran). Stavimo li $t = \log x$, dobivamo jednadžbu

$$(t - 2)(t - 3) = 2$$

koja nakon množenja i sređivanja prelazi u ekvivalentnu kvadratnu jednadžbu

$$t^2 - 5t + 4 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su $t_1 = 1$ i $t_2 = 4$. Iz $t_1 = 1$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo logaritamsku jednadžbu

$$\log x = 1$$

iz koje je $x = 10^1 = 10$. Iz $t_2 = 4$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo logaritamsku jednadžbu

$$\log x = 4$$

iz koje je $x = 10^4 = 10\ 000$. Budući da brojevi 10 i 10 000 zadovoljavaju uvjet $x > 0$, polazna jednadžba ima točno dva realna rješenja: $x_1 = 10$ i $x_2 = 10\ 000$. Njihov je zbroj jednak 10 010.

760. *Riješite jednadžbu*:

$$5^{2x+2} + 15 \cdot 5^{x-1} = 28.$$

Rješenje: Polaznu jednadžbu najprije transformirajmo na sljedeći način:

$$5^{2x} \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 \cdot 5^x \cdot 5^{-1} - 28 = 0$$
$$25 \cdot (5^x)^2 + 3 \cdot 5^x - 28 = 0$$

Stavimo $t = 5^x$ pa dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$25t^2 + 3t - 28 = 0$$

čija su rješenja $t_1 = -\frac{28}{25}$ i $t_2 = 1$. Budući da za svaki realan broj x vrijedi nejednakost $5^x > 0$, rješenje t_1 ne dolazi u obzir pa je jedino moguće $t_2 = 1 = 5^0$. Vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo eksponencijalnu jednadžbu

$$5^x = 5^0$$

iz koje usporedbom eksponenata odmah slijedi $x = 0$, i to je jedino rješenje polazne jednadžbe.

761. *Izračunajte površinu lika omeđenoga krivuljama* $y = |x + 6|$ *i* $y = |2x + 6|$.

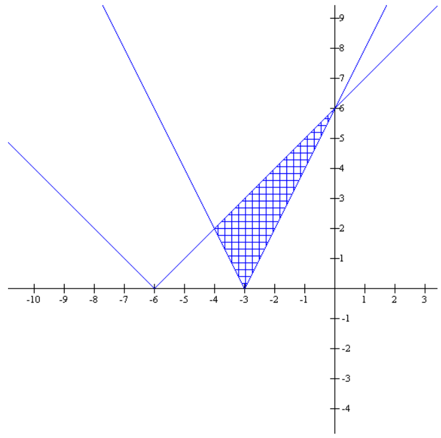
Rješenje: Kritičnu točku funkcije $f(x) = |x + 6|$ dobivamo iz jednadžbe $x + 6 = 0$, otkuda je $x = -6$. Zbog toga je

$$f(x) = \begin{cases} x+6, & \text{za } x \geq -6 \\ -(x+6), & \text{za } x \leq -6 \end{cases}$$

Slično, kritičnu točku funkcije $g(x) = |2x + 6|$ dobivamo iz jednadžbe $2x + 6 = 0$, otkuda je $x = -3$. Zbog toga je

$$g(x) = \begin{cases} 2x+6, & \text{za } x \geq -3 \\ -(2x+6), & \text{za } x \leq -3 \end{cases}$$

Sada možemo nacrtati grafove funkcija $f(x)$ i $g(x)$.



Lik omeđen grafovima funkcija $f(x)$ i $g(x)$ (odnosno, zadanim krivuljama) išrafiran je na gornjoj slici. Vidimo da je riječ o trokutu s vrhovima $A(-4, 2)$, $B(-3, 0)$ i $C(0, 6)$. Njegovu površinu izračunat ćemo pomoću izraza

$$P = \frac{1}{2} | x_A (y_B - y_C) + x_B (y_C - y_A) + x_C (y_A - y_B) | .$$

U tu formulu uvrstimo $x_A = -4$, $y_A = 2$, $x_B = -3$, $y_B = x_C = 0$, $y_C = 6$, pa konačno dobivamo:

$$P = 6 \text{ kv. jed.}$$

762. *Kružnica prolazi točkom* $A(0, 8)$ *i dira pravac* $p \ldots\ y = -x$ *u ishodištu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. Odredite jednadžbu te kružnice.*

Rješenje: Pravac p je tangenta tražene kružnice. Njegov je koeficijent smjera jednak $k_p = -1$. Stoga je koeficijent smjera normale (pravca okomitoga na tangentu kružnice u njezinu diralištu) jednak $k_n = -\frac{1}{k_p} = 1$ pa je jednadžba normale (u ovom je slučaju to pravac koji prolazi ishodištem i ima koeficijent smjera jednak 1)

$$n \ldots\ y = x.$$

Taj pravac (n) prolazi središtem S tražene kružnice. Da bismo odredili koordinate toga središta, moramo odrediti jednadžbu još jednoga pravca koji prolazi njime. U tu svrhu promotrimo tetivu OA (O je ishodište koordinatnoga sustava: $O(0, 0)$). Njezina jednadžba je $OA \ldots\ x = 0$ (jer oba vrha leže na osi Oy), a polovište $P(0, 4)$. Pravac koji prolazi polovištem P okomito na pravac OA također prolazi središtem S jer je trokut SOA jednakokračan (duljine krakova su jednake duljini polumjera r tražene kružnice), pa je pravac SP zapravo visina na osnovicu OA toga trokuta. Pravac koji prolazi točkom P okomito na pravac $OA \ldots\ x = 0$ ima jednadžbu

$$p_1 \ldots\ y = 4.$$

Sjecište pravaca p_1 i n dobivamo iz sustava

$$\begin{aligned} y &= x \\ y &= 4 \end{aligned}$$

čije je rješenje $x = y = 4$. Dakle, $S(4, 4)$. Kvadrat polumjera r tražene kružnice jednak je kvadratu udaljenosti $|OS|$:

$$r^2 = (0 - 4)^2 + (0 - 4)^2.$$
$$r^2 = 32.$$

Prema tome, tražena jednadžba kružnice glasi:

$$(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 32.$$

763. *Pojednostavnite izraz*:

$$\left[a(1-a)^{-\frac{2}{3}}+\frac{a^2}{(1-a)^{\frac{5}{3}}}\right]:\left[(1-a)^{\frac{1}{3}}\cdot(1-a)^{-2}\right].$$

Rješenje: Imamo redom:

$$\left[a(1-a)^{-\frac{2}{3}}+\frac{a^2}{(1-a)^{\frac{5}{3}}}\right]:\left[(1-a)^{\frac{1}{3}}\cdot(1-a)^{-2}\right]=\left[\frac{a(1-a)^{-\frac{2}{3}}\cdot(1-a)^{\frac{5}{3}}+a^2}{(1-a)^{\frac{5}{3}}}\right]:\left[(1-a)^{\frac{1}{3}-2}\right]=$$

$$\left[\frac{a(1-a)^{-\frac{2}{3}+\frac{5}{3}}+a^2}{(1-a)^{\frac{5}{3}}}\right]:\left[(1-a)^{\frac{1-6}{3}}\right]=\left[\frac{a(1-a)^{1}+a^2}{(1-a)^{\frac{5}{3}}}\right]:\left[(1-a)^{\frac{-5}{3}}\right]=\left[\frac{a(1-a)+a^2}{(1-a)^{\frac{5}{3}}}\right]\cdot\frac{1}{(1-a)^{\frac{-5}{3}}}=$$

$$\frac{a-a^2+a^2}{(1-a)^{\frac{5}{3}}\cdot(1-a)^{\frac{-5}{3}}}=\frac{a}{(1-a)^{\frac{5}{3}-\frac{5}{3}}}=\frac{a}{(1-a)^0}=\frac{a}{1}=a$$

764. *Odredite sve vrijednosti realnoga parametra $a \in \mathbf{R}$ za koje jednadžba*

$$x^2+x+1=a$$

ima barem jedno realno rješenje.

Rješenje: Zadanu jednadžbu najprije zapišimo u ekvivalentnom obliku

$$x^2+x+1-a=0.$$

Ta će kvadratna jednadžba imati barem jedno realno rješenje ako i samo ako njezina diskriminanta D bude nenegativan realan broj. Kako je

$$D=1-4\cdot1\cdot(1-a)=4a-3,$$

dobivamo nejednadžbu

$$4a-3\geq 0$$

čiji je skup svih realnih rješenja $[\frac{3}{4}, +\infty\rangle$, i to je skup svih traženih vrijednosti.

765. *U parabolu $y^2 = 4x$ upisan je jednakokračan pravokutan trokut s vrhom pravoga kuta u ishodištu koordinatnoga sustava. Izračunajte površinu toga trokuta.*

Rješenje: Označimo standardno s O ishodište koordinatnoga sustava, a s A i B vrhove na osnovici (zapravo, hipotenuzi) upisanoga jednakokračnoga pravokutnoga trokuta. Odmah primijetimo da vrijedi jednakost $|OA| = |OB|$ jer su OA i OB krakovi jednakokračnoga trokuta OAB. Budući da je zadana parabola osnosimetrična s obzirom na os Ox (takva je, zapravo, svaka parabola oblika $y^2 = 2px$), a udaljenosti $|OA|$ i $|OB|$ su jednake, slijedi da su točke A i B međusobno osnosimetrične s obzirom na os Ox. Stoga njihova spojnica mora biti okomita na os Ox (na os simetrije). Odatle slijedi da os Ox prolazi vrhom O nasuprot osnovici AB okomito na osnovicu AB, pa je os Ox visina na osnovicu AB. U jednakokračnom je trokutu visina na osnovicu ujedno i simetrala kuta nasuprot osnovici. U ovome je zadatku kut nasuprot osnovici AB pravi kut, pa slijedi da pravac OA s osi x zatvara kut $\beta = 45°$. Njegov je koeficijent smjera jednak

$$k_{OA} = \text{tg}\,\beta = \text{tg}\,45° = 1,$$

a budući da prolazi ishodištem, njegova je jednadžba

$$OA\ldots\ y = x.$$

Presijecimo zadanu parabolu dobivenim pravcem, pa dobivamo sustav:

$$\begin{aligned} y^2 &= 4x \\ y &= x \end{aligned}$$

Uvrštavanjem druge jednadžbe u prvu dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2 = 4x$$

čija su rješenja $x_1 = 0$ i $x_2 = 4$. Pripadne vrijednosti nepoznanice y su $y_1 = 0$ i $y_2 = 4$ pa su sjecišta točke $O(0, 0)$ i $A(4, 4)$. Tako je tražena površina jednaka

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}|OA|^2 \\ P &= \frac{1}{2}\left[(4-0)^2 + (4-0)^2\right] \\ P &= 16 \end{aligned}$$

766. *Izračunajte* 25% *od* $\dfrac{3+4.2:0.1}{(1:0.3-\frac{7}{3})\cdot 0.3125}$.

<u>Rješenje:</u> Izračunajmo najprije vrijednost osnovne veličine. Imamo redom:

$$\frac{3+4.2:0.1}{(1:0.3-\frac{7}{3})\cdot 0.3125} = \frac{3+42:1}{(10:3-\frac{7}{3})\cdot\frac{3125}{10000}} = \frac{3+42}{(\frac{10}{3}-\frac{7}{3})\cdot\frac{5}{16}} = \frac{45}{1\cdot\frac{5}{16}} = 16\cdot 9 = 144$$

Tako je traženi postotni iznos jednak

$$\frac{25}{100}\cdot 144 = \frac{1}{4}\cdot 144 = 36\,.$$

767. *Ako je* $\log_4\log_2\log_3 x = \log_3\log_2\log_4 y = 0$, *izračunajte* $x + y$.

<u>Rješenje:</u> Iz $\log_4\log_2\log_3 x = 0$ antilogaritmiranjem redom slijedi:

$$\begin{aligned} &\log_2\log_3 x = 4^0 \\ &\log_2\log_3 x = 1 \\ &\log_3 x = 2^1 \\ &\log_3 x = 2 \\ &x = 3^2 \\ &x = 9. \end{aligned}$$

Analogno, iz $\log_3\log_2\log_4 y = 0$ antilogaritmiranjem redom slijedi:

$$\begin{aligned} &\log_2\log_4 y = 3^0 \\ &\log_2\log_4 y = 1 \\ &\log_4 y = 2^1 \\ &\log_4 y = 2 \\ &y = 4^2 \end{aligned}$$

$$y = 16.$$

Prema tome je $x + y = 9 + 16 = 25$.

768. *Izračunajte zbroj svih rješenja jednadžbe* $\frac{2\sin^2 x+1}{\sin x}=3$ *u intervalu* $\langle 0, 2\pi\rangle$.

Rješenje: Pomnožimo zadanu jednadžbu sa $\sin x$, pa nakon sređivanja dobijemo:

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0.$$

Uz zamjenu $t = \sin x$ ta jednadžba prelazi u kvadratnu jednadžbu

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

čija su rješenja $t_1 = \frac{1}{2}$ i $t_2 = 1$. Iz $t_1 = \frac{1}{2}$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo trigonometrijsku jednadžbu

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

koja u intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ ima točno dva rješenja: $x_1 = \frac{\pi}{6}$ i $x_2 = \frac{5\pi}{6}$. Nadalje, iz $t_2 = 1$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo trigonometrijsku jednadžbu

$$\sin x = 1$$

koja u intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ ima točno jedno rješenje: $x_3 = \frac{\pi}{2}$. Tako je traženi zbroj jednak

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}.$$

769. *Odredite vrijednost realnoga parametra* $a \in \mathbf{R}$ *tako da polinom* $p(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x + a$ *bude djeljiv polinomom* $q(x) = x^2 + x - 1$.

Rješenje: Podijelimo zadane polinome prema pravilu za dijeljenje polinoma:

$$\begin{array}{l}
(x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x + a) : (x^2 + x - 1) = x^2 + 2x + 3 \\
\underline{x^4 + x^3 - x^2} \\
\quad 2x^3 + 5x^2 + x \\
\quad \underline{2x^3 + 2x^2 - 2x} \\
\qquad 3x^2 + 3x + a \\
\qquad \underline{3x^2 + 3x - 3} \\
\qquad\qquad a + 3
\end{array}$$

Da bi polinom $p(x)$ bio djeljiv polinomom $q(x)$, vrijednost ostatka mora biti jednaka nuli. Tako iz

$$a + 3 = 0$$

slijedi $a = -3$.

770. *Izračunajte površinu peterokuta ABCDE ako su koordinate njegovih vrhova* $A(1, 0)$, $B(5, 0)$, $C(6, 4)$, $D(3, 7)$ *i* $E(0,4)$.

Rješenje: Tražena je površina jednaka zbroju površina trapeza *ABCE* i trokuta *CDE*. Duljine osnovica trapeza su

$$|AB| = 5 - 1 = 4$$

$$|CE| = 6 - 0 = 6,$$

dok je visina trapeza v jednaka 4 (ordinati točke C, odnosno E). Stoga je

$$P_{ABCE} = \frac{1}{2}(|AB| + |CE|) \cdot v$$
$$P_{ABCE} = \frac{1}{2}(4 + 6) \cdot 4$$
$$P_{ABCE} = 20$$

Nadalje, površina trokuta CDE jednaka je poluumnošku duljine stranice CE i visine v_1 na nju. Duljina visine v_1 jednaka je razlici ordinate točke D i ordinate točke C (ili točke E):

$$v_1 = 7 - 4 = 3,$$

pa je površina trokuta CDE jednaka

$$P_{CDE} = \frac{1}{2}|CE| \cdot v_1$$
$$P_{CDE} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3$$
$$P_{CDE} = 9$$

Tako je tražena površina peterokuta $ABCDE$ jednaka

$$P_{ABCDE} = P_{ABCE} + P_{CDE}$$
$$P_{ABCDE} = 20 + 9$$
$$P_{ABCDE} = 29 \text{ kv. jed.}$$

771. *Opseg osnovke pravilne uspravne četverostrane piramide iznosi* 24 cm, *a površina njezina dijagonalnoga presjeka* $3\sqrt{14}$ cm^2. *Izračunajte oplošje te piramide.*

Rješenje: Neka je a duljina osnovnoga brida, v visina, a v_b visina bilo koje pobočke te piramide. Budući da je osnovka piramide kvadrat stranice a, njezin je opseg jednak $4a$. Tako iz jednadžbe

$$4a = 24$$

slijedi a = 6 cm. Dijagonalni presjek te piramide je jednakokračan trokut kojemu je osnovica dijagonala d osnovke piramide, a visina na osnovicu upravo visina piramide v. Duljina dijagonale osnovke jest

$$d = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}\ ,$$

pa iz

$$P = \frac{1}{2}dv$$

slijedi

$$v = \frac{2P}{d}$$
$$v = \frac{6\sqrt{14}}{6\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{14}{2}} = \sqrt{7}$$

Stoga je duljina v_b visine bilo koje od pobočki

$$v_b = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + v^2}$$
$$v_b = \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + (\sqrt{7})^2}$$
$$v_b = \sqrt{9+7}$$
$$v_b = 4$$

Konačno, traženo je oplošje piramide jednako

$$O = a^2 + 2av_b$$
$$O = 6^2 + 2 \cdot 6 \cdot 4$$
$$O = 84 \text{ cm}^2.$$

772. *Odredite vrijednost realnoga parametra* $a \in \mathbf{R}$ *tako da najmanja vrijednost polinoma* $p(x) = 0.5x^2 - 4x + a$ *bude jednaka* -8.

Rješenje: Primijetimo da je zadani polinom zapravo kvadratna funkcija. Budući da je koeficijent uz x^2 strogo pozitivan, ta kvadratna funkcija ima minimum (najmanju vrijednost). Vrijednost varijable x za koju se postiže taj minimum jest

$$x_{\min} = \frac{4}{2 \cdot 0.5} = 4\,.$$

Kako tražimo da minimum mora biti jednak –8, to mora biti

$$p(4) = -8.$$

Uvrštavanjem $x = 4$ u izraz za $p(x)$ dobivamo:

$$p(8) = 0.5 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 + a,$$

odnosno

$$p(4) = a - 8.$$

No, s druge je strane $p(4) = -8$ pa izjednačavanjem desnih strana tih dviju jednakosti dobivamo jednadžbu

$$a - 8 = -8$$

čije je rješenje $a = 0$.

773. *Izračunajte* $\frac{3\sin t - \cos t}{\sin t + \cos t}$ *ako je* $\operatorname{tg} t = \frac{1}{2}$.

Rješenje: Iz $\operatorname{tg} t = \frac{1}{2}$ slijedi

$$\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{1}{2},$$

a odavde je

$$\cos t = 2 \sin t.$$

Tako je

$$\frac{3\sin t-\cos t}{\sin t+\cos t}=\frac{3\sin t-2\sin t}{\sin t+2\sin t}=\frac{\sin t}{3\sin t}=\frac{1}{3}.$$

774. *Odredite skup svih realnih rješenja jednadžbe*

$$\frac{x+1}{x+2}>\frac{x+3}{x+4}.$$

Rješenje: Zadanu nejednadžbu najprije transformirajmo ovako:

$$\frac{x+1}{x+2}-\frac{x+3}{x+4}>0$$
$$\frac{(x+1)(x+4)-(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+4)}>0$$
$$\frac{(x^2+5x+4)-(x^2+5x+6)}{(x+2)(x+4)}>0$$
$$\frac{-2}{(x+2)(x+4)}>0$$

Razlomak na lijevoj strani posljednje nejednakosti će biti strogo veći od nule ako i samo ako njegov nazivnik bude strogo manji od nule. Odatle dobivamo nejednadžbu:

$$(x+2)(x+4)<0$$

ekvivalentnu kvadratnoj nejednadžbi

$$x^2+6x+8<0.$$

Skup svih rješenja ove nejednadžbe jest $\langle -4, -2\rangle$, i to je ujedno i skup svih rješenja polazne nejednadžbe.

775. *U trokutu ABC je* $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}$ *i* $\beta=135°$. *Izračunajte* $\operatorname{tg}\gamma$.

Rješenje: Rabeći adicijsku formulu za tangens zbroja, odnosno razlike imamo:

$$\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}[180°-(\alpha+\beta)]=\frac{\operatorname{tg}180°-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{1+\operatorname{tg}180°\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}=\frac{-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{1}=-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=-\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=$$
$$=-\frac{\frac{2}{3}+\operatorname{tg}135°}{1-\frac{2}{3}\cdot\operatorname{tg}135°}=-\frac{\frac{2}{3}-1}{1-\frac{2}{3}\cdot(-1)}=\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}}=\frac{1}{5}.$$

776. *Pojednostavnite izraz*:

$$2+\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Rješenje: Imamo redom:

$$2+\frac{\sqrt{2}}{2}-(1-\frac{1}{\sqrt{2}})-\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=2+\frac{\sqrt{2}}{2}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}+1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=$$

$$=\frac{2-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=-\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=-1$$

777. *Odredite vrijednost realnoga parametra* $k \in \mathbf{R}$, $k \neq 1$, *tako da površina trokuta kojega omeđuju pravci* $p_1 \ldots\, y = x$, $p_2 \ldots\, y = kx$ *i* $p_3 \ldots\, y = 6$ *bude jednaka* 3.

Rješenje: Izračunajmo najprije koordinate vrhova toga trokuta. Sjecište pravaca p_1 i p_2 dobivamo iz sustava

$$\begin{aligned} y &= x \\ y &= kx \end{aligned}$$

rješenje kojega je $x = y = 0$, pa je $A(0, 0)$. Sjecište pravaca p_2 i p_3 dobivamo iz sustava

$$\begin{aligned} y &= kx \\ y &= 6 \end{aligned}$$

rješenje kojega je $x = \frac{6}{k}$, $y = 6$, pa je $B(\frac{6}{k}, 6)$. Napokon, sjecište pravaca p_1 i p_3 dobivamo iz sustava

$$\begin{aligned} y &= x \\ y &= 6 \end{aligned}$$

rješenje kojega je $x = y = 6$, pa je $C(6, 6)$. Površinu trokuta ABC možemo izračunati kao poluumnožak duljine stranice BC i visine na tu stranicu. Duljina stranice BC jednaka je

$$|BC| = 6 - \frac{6}{k},$$

dok je visina na tu stranicu jednaka udaljenosti točke A (tj. ishodišta) od pravca $y = 6$ (na kojemu leži stranica BC). Ta je udaljenost očito jednaka 6, pa je

$$P = \frac{1}{2} \cdot (6 - \frac{6}{k}) \cdot 6 = 18 - \frac{18}{k}.$$

Iz zahtjeva da ta površina mora biti jednaka 3 dobivamo jednadžbu

$$18 - \frac{18}{k} = 3$$

ekvivalentnu jednadžbi

$$18k - 18 = 3k,$$

odnosno jednadžbi

$$15k = 18.$$

Odavde je $k = \frac{18}{15} = \frac{6}{5}$.

778. *Zadan je pravokutan trapez ABCD s pravim kutom pri vrhu A. Kut pri vrhu B iznosi* 45°, *duljina osnovice CD* 1 cm, *a duljina dijagonale BD* 5 cm. *Izračunajte površinu toga trapeza.*

Rješenje: Označimo $a = |AC|$, $c = |CD|$ i $v = |AD|$ (zbog činjenice da je kut pri vrhu A pravi kut, dužina AD je ujedno i visina trapeza). Povucimo najprije vrhom C usporednicu sa stranicom AD i neka ta stranica siječe osnovicu AB u točki E. Trokut EBC je pravokutan (jer je kut kod vrha A pravi kut) i jednakokračan (jer iz činjenice da je kut pri vrhu B jednak 45° slijedi da je kut $\angle BCE$ jednak 180° – (90° + 45°) = 45°, što znači da su dva kuta trokuta EBC jednaka, pa je taj trokut jednakokračan). Odatle slijedi da je $|EB| = |EC|$, a kako je

$$|EB| = |AB| - |AE| = |AB| - |CD| = a - c$$

i

$$|EC| = |AD| = v,$$

proizlazi da je

$$v = a - c,$$

što zbog $c = |CD| = 1$ cm prelazi u

$$v = a - 1.$$

Promotrimo sada pravokutan trokut ABD. Duljine njegovih kateta su $|AB| = a$ i $|AD| = v = a - 1$, a duljina njegove hipotenuze $|BD| = 5$. Primjenom Pitagorina poučka dobivamo:

$$5^2 = a^2 + (a - 1)^2,$$

a odavde se kvadriranjem i sređivanjem dobije kvadratna jednadžba

$$a^2 - a - 12 = 0.$$

Njezina su rješenja $a_1 = -3$ i $a_2 = 4$. Budući da duljina osnovice trapeza ne može biti strogo negativan realan broj, rješenje a_1 ne dolazi u obzir, pa je jedino moguće $a = 4$ cm. Zbog toga je

$$v = a - 1 = 4 - 1 = 3 \text{ cm},$$

pa je tražena površina jednaka

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v$$
$$P = \frac{4+1}{2} \cdot 3$$
$$P = \frac{15}{2} \text{ cm}^2$$

ili

$$P = 7.5 \text{ cm}^2.$$

779. *Koji realan broj treba dodati svakom članu niza* 3, 7, 13 *tako da dobiveni niz bude geometrijski*?

Rješenje: Označimo traženi broj s x. Dodamo li broj x svakom članu zadanoga niza, dobit ćemo niz $3 + x$, $7 + x$, $13 + x$. Taj niz treba biti geometrijski niz, što znači da kvadrat drugoga člana toga niza mora biti jednak umnošku prvoga i trećega člana:

$$(7 + x)^2 = (3 + x) \cdot (13 + x).$$

Odavde se kvadriranjem i množenjem dobiva

$$49 + 14x + x^2 = 39 + 13x + 3x + x^2,$$

odnosno

$$2x = 10,$$

otkuda je $x = 5$. Dakle, svakom članu toga niza treba dodati broj 5.

780. *Odredite sve vrijednosti realnoga parametra $a \in \mathbf{R}$ tako da rješenje sustava*

$$\begin{aligned} ax - 2y &= 3 \\ 3x + ay &= 4 \end{aligned}$$

pripada pravcu $p \ldots\ y = x$.

Rješenje: Riješimo najprije zadani sustav. Pomnožimo njegovu prvu jednadžbu s a, a drugu s 2. Tako dobivamo:

$$\begin{aligned} a^2x - 2ay &= 3a \\ 6x + 2ay &= 8 \end{aligned}$$

Zbrajanjem dobivenih jednadžbi dobivamo:

$$(a^2 + 6) \cdot x = 3a + 8.$$

Budući da je za svaku vrijednost realnoga parametra $a \in \mathbf{R}$ vrijednost izraza $a^2 + 6$ strogo pozitivna, posljednju jednadžbu smijemo podijeliti s $a^2 + 6$. Tako se dobije:

$$x = \frac{3a+8}{a^2+6}.$$

Dobiveni izraz za x uvrstimo u prvu jednadžbu polaznoga sustava:

$$\begin{aligned} a \cdot \frac{3a+8}{a^2+6} - 2y &= 3 \\ 2y &= \frac{3a^2+8a}{a^2+6} - 3 \\ 2y &= \frac{3a^2+8a-3(a^2+6)}{a^2+6} \\ 2y &= \frac{8a-18}{a^2+6} \\ y &= \frac{4a-9}{a^2+6} \end{aligned}$$

Stoga je rješenje polaznoga sustava uređeni par $\left(\frac{3a+8}{a^2+6}, \frac{4a-9}{a^2+6}\right)$. Ta točka mora pripadati pravcu p, što znači da mora vrijediti jednakost:

$$\frac{3a+8}{a^2+6} = \frac{4a-9}{a^2+6}$$

Odavde množenjem s $a^2 + 6$ dobivamo jednadžbu:

$$3a + 8 = 4a - 9$$

iz koje je izravno $a = 17$.

781. *Odredite skup svih realnih rješenja nejednadžbe*

$$\frac{(x+1)^2}{x-1} \le 2 .$$

Rješenje: Polaznu nejednadžbu najprije transformiramo na sljedeći način:

$$\frac{(x+1)^2}{x-1} \le 2$$
$$\frac{(x+1)^2}{x-1} - 2 \le 0$$
$$\frac{x^2+2x+1-2(x-1)}{x-1} \le 0$$
$$\frac{x^2+2x+1-2x+2}{x-1} \le 0$$
$$\frac{x^2+3}{x-1} \le 0$$

Budući da za sve realne brojeve $x \in \mathbf{R}$ vrijedi nejednakost $x^2 + 3 > 0$, vrijednost razlomka na lijevoj strani posljednje nejednakosti će biti nepozitivna ako i samo ako nazivnik toga razlomka bude strogo negativan. To znači da mora vrijediti nejednakost:

$$x - 1 < 0,$$

a odavde je $x \in \langle -\infty, 1\rangle$. Prema tome, traženi je skup otvoreni interval $\langle -\infty, 1\rangle$.

782. *Opseg pravokutnoga trokuta iznosi* 15, *a jedan njegov kut* 45°. *Odredite vrijednost izraza* $\frac{ac}{b}$. (*Sve oznake u pravokutnom trokutu su standardne.*)

Rješenje: Ako je jedan šiljasti kut pravokutnoga trokuta jednak 45°, onda je i drugi šiljasti kut jednak 45° (jer je zbroj dvaju šiljastih kutova pravokutnoga trokuta uvijek jednak 90°). Stoga je riječ o jednakokračnom pravokutnom trokutu. Taj trokut ima katete jednakih duljina, pa vrijedi jednakost

$$a = b$$

zbog koje je

$$\frac{ac}{b} = c .$$

Dakle, vrijednost zadanoga izraza jednaka je duljini hipotenuze c. Izrazimo duljine kateta a i b pomoću duljine hipotenuze c i neke trigonometrijske funkcije jednoga od šiljastih kutova trokuta:

$$a = c \cdot \sin 45°,$$
$$b = c \cdot \cos 45°.$$

Uvrstimo te izraze u formulu za opseg pravokutnoga trokuta

$$O = a + b + c,$$

pa dobivamo:

$$O = c \cdot \sin 45° + c \cdot \cos 45° + c.$$

U zadatku je navedeno da je $O = 15$, pa je

$$15 = c \cdot (1 + \sin 45° + \cos 45°),$$

a odatle je

$$c = \frac{15}{1 + \sin 45° + \cos 45°}$$
$$c = \frac{15}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$c = \frac{15}{1 + \sqrt{2}}$$
$$c = \frac{15(\sqrt{2} - 1)}{(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)},$$
$$c = \frac{15(\sqrt{2} - 1)}{2 - 1}$$
$$c = 15(\sqrt{2} - 1)$$

Prema tome, tražena vrijednost izraza jednaka je $15(\sqrt{2} - 1)$.

783. *Izračunajte vrijednost izraza*

$$\left(\frac{\sqrt[4]{x^3 y} - \sqrt[4]{x y^3}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} + \frac{1 + \sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2} \cdot \left(1 + 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

za $x = 9$, $y = 0.04$.

<u>Rješenje:</u> Najprije pojednostavnimo zadani izraz. Imamo redom:

$$\left(\frac{\sqrt[4]{x^3 y} - \sqrt[4]{x y^3}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} + \frac{1 + \sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2} \cdot \left(1 + 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\sqrt[4]{xy} \cdot (\sqrt[4]{x^2} - \sqrt[4]{y^2})}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} + \frac{1 + \sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2} \cdot \left[1 + 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left(\frac{\sqrt[4]{xy} \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y})}{-(\sqrt{x} - \sqrt{y})} + \frac{1 + \sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2} \cdot \left[\left(1 + \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left(-\sqrt[4]{xy} + \frac{1 + \sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{y}{x}}\right) =$$

$$= \left(\frac{-\sqrt[4]{x^2 y^2} + 1 + \sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right) = \left(\frac{-\sqrt{xy} + 1 + \sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{(xy)^{-2}}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{(xy)^{-1}}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{xy}}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \sqrt{xy} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x}} =$$

$$= \sqrt{y} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y}) = \sqrt{xy} + y$$

Preostaje nam uvrstiti $x = 9$ i $y = 0.04$ u posljednji izraz:

$$\sqrt{9 \cdot 0.04} + 0.04 = \sqrt{0.36} + 0.04 = 0.6 + 0.04 = 0.64\,.$$

784. *Izračunajte umnožak svih realnih rješenja jednadžbe*

$$\log_{\frac{1}{3}} \log_4 (x^2 - 5) = -1 .$$

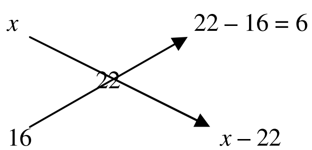
Rješenje: Antilogaritmiranjem polazne jednadžbe dobit ćemo:

$$\log_4 (x^2 - 5) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$
$$\log_4 (x^2 - 5) = 3$$
$$x^2 - 5 = 4^3$$
$$x^2 - 5 = 64$$
$$x^2 = 69$$

Ova kvadratna jednadžba ima točno dva realna rješenja: $x_1 = -\sqrt{69}$ i $x_2 = \sqrt{69}$. Izravnim uvrštavanjem svakoga od njih u polaznu jednadžbu utvrđujemo da su ta dva rješenja ujedno i sva realna rješenja polazne jednadžbe. Njihov je umnožak jednak –69.

785. *Otopina soli A miješa se s* 16%*–tnom otopinom soli B u omjeru* 3 : 4 *i dobije se* 22% *–tna otopina. Odredite postotak soli u otopini A.*

Rješenje: Označimo traženi postotak s x. Primijenit ćemo jednostavan račun smjese i pravilo zvijezde:



što znači da otopine A i B treba pomiješati u omjeru 6 : (x – 22) da se dobije 22%–tna otopina.

$$6 : (x - 22) = 3 : 4$$

koji primjenom osnovnoga pravila za računanje s razmjerima (umnožak dvaju vanjskih članova razmjera jednak je umnošku dvaju unutrašnjih članova toga razmjera) prelazi u jednadžbu

$$3(x - 22) = 24,$$

odnosno u jednadžbu

$$3x = 90.$$

Njezino je rješenje $x = 30$. Dakle, traženi je postotak jednak 30%.

786. *Odredite* $\log x$ *ako je* $x = \dfrac{0.002 : 0.1^3}{0.04^{\frac{1}{2}} \cdot 0.01^2}$.

Rješenje: Izračunajmo najprije vrijednost izraza x. Imamo redom:

$$x = \frac{0.002 : 0.1^3}{0.04^{\frac{1}{2}} \cdot 0.01^2} = \frac{(0.001 \cdot 2) : 0.1^3}{(0.01 \cdot 4)^{\frac{1}{2}} \cdot 0.01^2} = \frac{10^{-3} \cdot 2 : (10^{-1})^3}{(10^{-2} \cdot 2^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (10^{-2})^2} = \frac{10^{-3} \cdot 2 : 10^{-3}}{10^{-1} \cdot 2^1 \cdot 10^{-4}} = \frac{2}{2 \cdot 10^{-5}} = \frac{1}{10^{-5}} = 10^5$$

Stoga je

$$\log x = \log(10^5) = 5.$$

787. *Ako je* $y^{\frac{1}{x}} = 0.1$ *i* $y^x = 0.0001$, *izračunajte* $|x| + |\log y|$.

Rješenje: Potencirajmo lijevu i desnu stranu prve jednakosti na potenciju x^2:

$$\left(y^{\frac{1}{x}}\right)^{x^2} = 0.1^{x^2}$$
$$y^x = 0.1^{x^2}$$

Ovamo uvrstimo drugu jednakost:

$$0.1^{x^2} = 0.0001$$
$$(10^{-1})^{x^2} = 10^{-4}$$
$$10^{-x^2} = 10^{-4}$$

iz koje usporedbom eksponenata dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$x^2 = 4$$

iz koje uzimanjem drugoga korijena slijedi

$$|x| = 2.$$

Logaritmiranjem druge polazne jednakosti po bazi 10 dobivamo:

$$\log(y^x) = \log 0.0001,$$

odnosno

$$x \cdot \log y = \log(10^{-4}),$$

a odavde uzimanjem apsolutnih vrijednosti slijedi:

$$|x| \cdot |\log y| = |\log(10^{-4})|.$$

Kako je $|x| = 2$ i $\log(10^{-4}) = -4$, dalje je:

$$2 \cdot |\log y| = |-4|,$$

odnosno

$$2 \cdot |\log y| = 4,$$

te

$$|\log y| = 2.$$

Tako je konačno

$$|x| + |\log y| = 2 + 2 = 4.$$

788. *Odredite koordinate točke* T *jednako udaljene od ishodišta, točke* $A(6, 0)$ *i točke* $B(6, 8)$.

Rješenje: Standardno označimo ishodište pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini s O. Trokut OAB je pravokutan trokut (s pravim kutom pri vrhu A), a tražena je točka središte tom trokutu opisane kružnice (jer je – prema definiciji trokutu opisane kružnice – njezino središte uvijek točka jednako udaljena od svih triju vrhova trokuta). No, središte pravokutnom trokutu opisane kružnice jest polovište njegove hipotenuze, a u ovom slučaju to je stranica OB. Polovište te stranice je

$$P\left(\frac{0+6}{2},\ \frac{0+8}{2}\right),$$

tj. $P(3, 4)$. Dakle, tražena je točka $P(3, 4)$.

789. *Ako je* $f(x) = (x^{-1} + 1)^{-1} + (x + 1)^{-1}$, *izračunajte* $f(2005 - \sqrt{2006})$.

Rješenje: Transformirajmo analitički oblik funkcije $f(x)$ na sljedeći način:

$$f(x) = \frac{1}{x^{-1}+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{\frac{1}{x}+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{x}{1+x} + \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} = 1$$

Stoga je $f(2005 - \sqrt{2006}) = 1$.

790. *Dva rješenja jednadžbe* $x^3 + ax^2 - 5x + b = 0$ *su* $x_1 = -1$ *i* $x_2 = 2$. *Izračunajte* $a^2 + b^2$.

Rješenje: U zadanu jednadžbu uvrstimo najprije $x_1 = -1$:

$$(-1)^3 + a \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + b = 0,$$

otkuda je

$$a + b = -4.$$

Uvrštavanjem $x_2 = 2$ dobivamo:

$$2^3 + a \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + b = 0,$$

otkuda je

$$4a + b = 2.$$

Tako smo dobili sustav od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} a + b &= -4 \\ 4a + b &= 2 \end{aligned}$$

Oduzimanjem tih jednadžbi dobivamo:

$$-3a = -6,$$

otkuda je $a = 2$. Uvrstimo li tu vrijednost u prvu jednadžbui sustava, odmah ćemo dobiti $b = -6$. Tako je konačno

$$a^2 + b^2 = 2^2 + (-6)^2 = 4 + 36 = 40.$$

791. *Duljine stranica trokuta su* $a = x^2 + x + 1$, $b = x^2 + 2x$ *i* $c = 2x + 1$, *pri čemu je* $x > 0$. *Izračunajte veličinu kuta* α. (*Sve oznake u trokutu su standardne.*)

Rješenje: Primjenom kosinusova poučka dobivamo:

$$\cos\alpha=\frac{(x^2+2x)^2+(2x+1)^2-(x^2+x+1)^2}{2\cdot(x^2+2x)\cdot(2x+1)}$$

$$\cos\alpha=\frac{[x\cdot(x+2)]^2+[(2x+1)-(x^2+x+1)]\cdot[(2x+1)+(x^2+x+1)]}{2\cdot x\cdot(x+2)\cdot(2x+1)}$$

$$\cos\alpha=\frac{x^2\cdot(x+2)^2+[2x+1-x^2-x-1]\cdot[2x+1+x^2+x+1]}{2\cdot x\cdot(x+2)\cdot(2x+1)}$$

$$\cos\alpha=\frac{x^2\cdot(x+2)^2+(-x^2+x)\cdot(x^2+3x+2)}{2\cdot x\cdot(x+2)\cdot(2x+1)}$$

$$\cos\alpha=\frac{x^2\cdot(x+2)^2+x\cdot(1-x)\cdot(x+2)(x+1)}{2\cdot x\cdot(x+2)\cdot(2x+1)}$$

$$\cos\alpha=\frac{x\cdot(x+2)\cdot[x\cdot(x+2)+(1-x)\cdot(x+1)]}{2\cdot x\cdot(x+2)\cdot(2x+1)}$$

$$\cos\alpha=\frac{x\cdot(x+2)+(1-x)\cdot(x+1)}{2\cdot(2x+1)}$$

$$\cos\alpha=\frac{x^2+2x+1-x^2}{2\cdot(2x+1)}$$

$$\cos\alpha=\frac{2x+1}{2\cdot(2x+1)}$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{2}$$

Iz posljednje trigonometrijske jednadžbe izravno slijedi $\alpha = 60°$ (rješenje $\alpha = 300°$ ne dolazi u obzir jer kut trokuta ne može biti veći ili jednak 180°).

792. *Ako je* $\cos x=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, *izračunajte* $\cos 2x$.

Rješenje: Primijenit ćemo formulu za kosinus dvostrukoga kuta:

$$\cos 2x = 2\cdot\cos^2 x - 1.$$

Tako redom imamo:

$$\cos 2x=2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2-1=2\cdot\left(\frac{2-2\sqrt{12}+6}{16}\right)-1=2\cdot\left(\frac{8-2\cdot2\sqrt{3}}{16}\right)-1=2\cdot\left(\frac{8-4\sqrt{3}}{16}\right)-1=\frac{16-8\sqrt{3}}{16}-1=$$
$$=\frac{16-8\sqrt{3}-16}{16}=\frac{-8\sqrt{3}}{16}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

793. *U krivulju* $x^2+9y^2=36$ *upisan je jednakostraničan trokut čiji se jedan vrh podudara sa sjecištem zadane krivulje s pozitivnim dijelom osi Ox. Izračunajte površinu toga trokuta.*

Rješenje: Odredimo najprije koordinate jednoga vrha toga trokuta. Presijecimo zadanu krivulju s osi Ox, tj. riješimo sustav:

$$x^2+9y^2=36$$
$$y=0$$

Uvrštavanjem druge jednadžbe u prvu dobije se kvadratna jednadžba

$$x^2=36$$

čije je strogo pozitivno rješenje $x = 6$. Dakle, jedan vrh trokuta je $A(6, 0)$. Neka su $B(x_B, y_B)$ i $C(x_C, y_C)$ preostala dva vrha toga trokuta. Njihove udaljenosti od točke A moraju biti jednake (jer je trokut ABC jednakostraničan), što je ekvivalentno činjenici da kvadrati udaljenosti tih točaka od točke A moraju biti jednaki. Tako dobivamo:

$$(x_B - 6)^2 + (y_B - 0)^2 = (x_C - 6)^2 + (y_C - 0)^2,$$

a odavde je

$$x_B^2 - 12x_B + y_B^2 = x_C^2 - 12x_C + y_C^2.$$

Budući da obje točke leže na zadanoj krivulji, vrijede jednakosti:

$$x_B^2 + 9y_B^2 = 36$$
$$x_C^2 + 9y_C^2 = 36$$

iz kojih je

$$y_B^2 = 4 - \frac{1}{9}x_B^2$$
$$y_C^2 = 4 - \frac{1}{9}x_C^2$$

Uvrštavanjem tih jednakosti u jednakost

$$x_B^2 - 12x_B + y_B^2 = x_C^2 - 12x_C + y_C^2$$

dobivamo:

$$x_B^2 - 12x_B + 4 - \frac{1}{9}x_B^2 = x_C^2 - 12x_C + 4 - \frac{1}{9}x_C^2$$
$$\frac{8}{9}x_B^2 - 12x_B = \frac{8}{9}x_C^2 - 12x_C$$
$$\frac{8}{9}x_B^2 - \frac{8}{9}x_C^2 - 12x_B + 12x_C = 0 \qquad / \cdot \frac{9}{8}$$
$$x_B^2 - x_C^2 - \frac{27}{2}x_B + \frac{27}{2}x_C = 0$$
$$(x_B - x_C)(x_B + x_C) - \frac{27}{2}(x_B - x_C) = 0$$
$$(x_B - x_C)(x_B + x_C - \frac{27}{2}) = 0$$

Moguća su točno dva slučaja:

1.) $x_B - x_C = 0$

Iz te jednakosti slijedi $x_B = x_C$, pa se ordinate tih točaka razlikuju samo u predznaku. Odatle izravno slijedi da je točka C osnosimetrična slika točke B s obzirom na os Ox (i obrnuto), što znači da je os Ox os simetrije stranice BC trokuta ABC. U jednakostraničnom se trokutu ta os podudara s simetralom kuta pri vrhu A. Kako taj kut iznosi 60°, to pravac AB s pozitivnim dijelom osi Ox zatvara kut od $180° - \frac{60°}{2} = 150°$, pa je njegov koeficijent smjera

$$k_{AB} = \operatorname{tg} 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

što znači da je njegova jednadžba (jednadžba pravca kroz točku A sa zadanim koeficijentom smjera)

$$AB..\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-6).$$

Presijecimo taj pravac sa zadanom krivuljom. U tu svrhu riješimo sustav:

$$x^2 + 9y^2 = 36$$
$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-6)$$

Kvadrirajmo drugu jednadžbu:

$$y^2 = \frac{1}{3}(x-6)^2$$

pa uvrštavanjem toga izraza u prvu jednadžbu dobivamo:

$$x^2 + 3(x-6)^2 - 36 = 0,$$

odnosno

$$x^2 - 9x + 18 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su $x_1 = 3$ i $x_2 = 6$. Pripadne vrijednosti y su $y_1 = \sqrt{3}$ i $y_2 = 0$, pa su sjecišta točke $B(3, \sqrt{3})$ i $A(6, 0)$. Kvadrat udaljenosti tih točaka jednak je kvadratu duljine stranice a jednakostraničnoga trokuta ABC:

$$a^2 = |AB|^2 = (3-6)^2 + (\sqrt{3} - 0)^2 = 9 + 3 = 12,$$

pa je tražena površina jednaka

$$P = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$$
$$P = \frac{12}{4} \cdot \sqrt{3}$$
$$P = 3\sqrt{3}$$

2.) $x_B + x_C - \frac{27}{2} = 0$

Pokazat ćemo da je ovaj slučaj nemoguć. U tu svrhu uočimo da je zadana krivulja elipsa. Najveća moguća vrijednost apscise bilo koje točke elipse postiže se upravo u sjecištu elipse s osi Ox (tj. tjemenu elipse na pozitivnom dijelu osi Ox). Već smo izračunali da je ta vrijednost jednaka 6, što znači da mora vrijediti nejednakost

$$x_B \leq 6$$
$$x_C \leq 6$$

Zbrajanjem tih nejednakosti dobivamo:

$$x_B + x_C \leq 12.$$

Međutim, iz

$$x_B + x_C - \frac{27}{2} = 0$$

slijedi

$$x_B + x_C = \frac{27}{2} > 12,$$

pa smo dobili proturječje, odnosno pokazali da je ovaj slučaj nemoguć.

Dakle, tražena je površina jednaka $P = 3\sqrt{3}$ kv.jed.

794. *Dijagonala AC trapeza ABCD raspolavlja kut pri vrhu A i okomita je na krak BC. Ako je duljina dulje osnovice AB jednaka* 4, *a kut pri vrhu B jednak* 60°, *izračunajte opseg toga trapeza.*

Rješenje: Standardno označimo $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$ i $d = |DA|$. Promotrimo pravokutan trokut ABC. Kut pri vrhu A toga trokuta jednak je $90° - 60° = 30°$, pa je kut pri vrhu A trapeza $ABCD$ jednak $2 \cdot 30° = 60°$. Stoga su kutovi pri vrhovima A i B trapeza $ABCD$ jednaki, pa je taj trapez jednakokračan. Zbog toga su kutovi kod vrhova C i D toga trapeza jednaki $180° - 60° = 120°$. Izrazimo sada duljinu dijagonale AC na dva načina: kao duljinu stranice trokuta ACD i kao duljinu stranice trokuta ABC. Imamo:

$$|AC|^2 = a^2 - b^2,$$

dok je s druge strane

$$|AC|^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 120°,$$

odnosno

$$|AC|^2 = b^2 + c^2 + bc,$$

pa usporedbom desnih strana jednakosti

$$\begin{aligned} |AC|^2 &= a^2 - b^2 \\ |AC|^2 &= b^2 + c^2 + bc \end{aligned}$$

dobivamo:

$$a^2 - b^2 = b^2 + bc + c^2,$$

odnosno

$$a^2 = 2b^2 + bc + c^2.$$

Povučemo li okomicu iz vrha C na osnovicu AB i označimo s E njezino nožište, onda iz pravokutnoga trokuta EBC slijedi

$$\cos 60° = \frac{\frac{a-c}{2}}{b}$$

odnosno

$$\frac{1}{2} = \frac{a-c}{2b},$$

a odavde je

$$b = a - c.$$

Tu jednakost uvrstimo u jednakost

$$a^2 = 2b^2 + bc + c^2$$

pa dobivamo:

$$a^2 = 2(a - c)^2 + (a - c)c + c^2,$$

odnosno

$$a^2 - 3ac + 2c^2 = 0,$$

odnosno

$$(a - 2c)(a - c) = 0.$$

Ukoliko bi bilo $a - c = 0$, slijedilo bi

$$b = a - c = 0$$

pa ne bismo imali trapez. Zato mora vrijediti

$$a - 2c = 0,$$

odnosno

$$c = \frac{a}{2}.$$

Tako je i

$$b = a - c$$
$$b = a - \frac{a}{2}$$
$$b = \frac{a}{2},$$

pa je opseg trapeza jednak

$$O = a + 2b + c$$
$$O = a + 2 \cdot \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$$
$$O = \frac{5a}{2}$$

Preostaje nam uvrstiti $a = 4$ u tu formulu i konačno dobiti

$$O = 10.$$

795. *Odredite ukupan broj svih realnih rješenja jednadžbe*

$$\cos\frac{x}{2}\cos(2x) - \sin\frac{x}{2}\sin(2x) = -1$$

koja pripadaju intervalu $\left\langle -\frac{3\pi}{2},\ 2\pi \right\rangle$.

Rješenje: Rabeći adicijsku poučak za kosinus zbroja dvaju kutova, lijevu stranu polazne jednadžbe možemo zapisati u obliku

$$\cos\left(\frac{x}{2}+2x\right)=-1,$$

odnosno

$$\cos\frac{5x}{2}=-1.$$

Odavde je

$$\frac{5x}{2}=\pi+k\cdot 2\pi,\ k\in\mathbf{Z},$$

odnosno

$$x=(2k+1)\cdot\frac{2}{5}\cdot\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Želimo li da ta rješenja pripadaju zadanom intervalu, mora vrijediti nejednakost

$$-\frac{3\pi}{2}<(2k+1)\cdot\frac{2}{5}\cdot\pi<3\pi,\ k\in\mathbf{Z},$$

koja množenjem s $\frac{5}{2\cdot\pi}$ prelazi u ekvivalentnu nejednakost

$$-\frac{15}{4}<2k+1<\frac{15}{2},\ k\in\mathbf{Z}$$

a odavde je

$$-\frac{19}{8}<k<\frac{13}{4},\ k\in\mathbf{Z}$$

Tu nejednakost zadovoljava točno 6 cijelih brojeva: –2, –1, 0, 1, 2 i 3. Prema tome, ukupan broj svih realnih rješenja polazne jednadžbe koji pripadaju zadanom intervalu jednak je 6.

796. *Odredite sve vrijednosti realnoga parametra $k \in \mathbf{R}$ tako da funkcija $f(x) = x^2 - (k-1)x + 1$ za svaku vrijednost varijable x iz svojega područja definicije poprima strogo pozitivnu vrijednost.*

Rješenje: Vodeći koeficijent funkcije $f(x)$ jednak je 1, pa će njezin graf sigurno biti parabola tipa $\cup$. Da bi funkcija poprimala isključivo strogo pozitivne vrijednosti, ta parabola ne smije sjeći os Ox, odnosno jednadžba $f(x) = 0$ ne smije imati niti jedno realno rješenje. Taj je uvjet ekvivalentan uvjetu da diskriminanta D te jednadžbe bude strogo manja od nule. Kako je

$$D=(k-1)^2-4\cdot 1\cdot 1=k^2-2k-3,$$

dobivamo kvadratnu nejednadžbu

$$k^2-2k-3<0$$

čiji je skup svih realnih rješenja otvoreni interval $\langle -1, 3\rangle$. Stoga je skup točno svih traženih vrijednosti realnoga parametra $k \in \mathbf{R}$ otvoreni interval $\langle -1, 3\rangle$.

797. *Odredite sve vrijednosti realnoga parametra $k \in \mathbf{R}$ tako da prirodno područje definicije funkcije*

$$f(x) = \left[\log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2 + (k-3)x + 1}{2x^2 - 5x + 5}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

bude cijeli skup realnih brojeva **R**.

Rješenje: Zadanu funkciju najprije zapišimo u sljedećemu obliku:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2 + (k-3)x + 1}{2x^2 - 5x + 5}}}.$$

Ta će funkcija biti definirana za svaki realan broj $x \in \mathbf{R}$ ako i samo ako istovremeno budu zadovoljeni sljedeći uvjeti:

1.) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2 + (k-3)x + 1}{2x^2 - 5x + 5} > 0$ (jer izraz pod drugim korijenom mora biti nenegativan, a ne smije biti jednak nuli jer tada razlomak $\frac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2 + (k-3)x + 1}{2x^2 - 5x + 5}}}$ nije definiran)

2.) $\frac{x^2 + (k-3)x + 1}{2x^2 - 5x + 5} > 0$ (izraz pod logaritmom mora biti strogo pozitivan)

3.) $2x^2 - 5x + 5 \neq 0$ (nazivnik razlomka $\frac{x^2 + (k-3)x + 1}{2x^2 - 5x + 5}$ ne smije biti jednak nuli).

Lako se vidi da uvjet 2.) povlači uvjet 3.), pa u daljnjem razmatranju uvjet 3.) zanemarujemo. Nadalje, uočimo da je

$$2x^2 - 5x + 5 = 2(x - \frac{5}{4})^2 + \frac{55}{16} > 0,$$

pa se uvjet 2.) svodi na

$$x^2 + (k-3)x + 1 > 0.$$

Nadalje, iz uvjeta 1.) antilogaritmiranjem slijedi:

$$\frac{x^2 + (k-3)x + 1}{2x^2 - 5x + 5} < 1,$$

odnosno

$$\frac{x^2 + (k-3)x + 1}{2x^2 - 5x + 5} - 1 < 0$$

$$\frac{x^2 + (k-3)x + 1 - 2x^2 + 5x - 5}{2x^2 - 5x + 5} < 0$$

$$\frac{-x^2 + (k+2)x - 4}{2x^2 - 5x + 5} < 0$$

pa ponovno zbog $2x^2 - 5x + 5 > 0$ slijedi

$$-x^2 + (k+2)x - 4 < 0,$$

odnosno

$$x^2 - (k + 2)x + 4 > 0$$

Tako smo dobili sustav nejednadžbi

$$\begin{gathered} x^2 + (k - 3)x + 1 > 0 \\ x^2 - (k + 2)x + 4 > 0 \end{gathered}$$

koji za skup rješenja mora imati cijeli skup **R**. Taj će zahtjev biti zadovoljen (vidjeti rješenje prethodnoga zadatka) ako i samo ako istovremeno vrijede nejednakosti

$$\begin{gathered} (k - 3)^2 - 4 \cdot 1 < 0 \\ (k + 2)^2 - 4 \cdot 4 < 0 \end{gathered}$$

Iz prve od njih se dobiva:

$$k^2 - 6k + 5 < 0,$$

odnosno $k \in \langle 1, 5\rangle$, a iz druge

$$k^2 + 4k - 12 < 0,$$

odnosno $k \in \langle -6, 2\rangle$. Stoga je traženi skup svih vrijednosti realnoga parametra $k \in \mathbf{R}$ jednak

$$\langle 1, 5\rangle \cap \langle -6, 2\rangle = \langle 1, 2\rangle.$$

799. *Odredite sve vrijednosti realnoga parametra $m \in \mathbf{R}$ tako da jednadžba*

$$x^4 + 2x^3 + mx^2 + 2x + 1 = 0$$

ima točno četiri realna i različita rješenja.

Rješenje: Budući da $x = 0$ očito nije rješenje polazne jednadžbe, tu jednadžbu smijemo podijeliti s x^2. Tako ćemo dobiti:

$$x^2 + 2x + m + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Članove na lijevoj strani te jednadžbe grupirajmo ovako:

$$(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 2(x + \frac{1}{x}) + m = 0.$$

Stavimo li $t = x + \dfrac{1}{x}$, onda je

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

pa provođenjem zamjene dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$t^2 + 2t + m - 2 = 0.$$

Njezina rješenja su

$$t_1 = -1 - \sqrt{3 - m} \ \text{ i } \ t_2 = -1 + \sqrt{3 - m}.$$

Stoga je prvi uvjet na vrijednost parametra m

$$3 - m > 0,$$

odnosno $m < 3$. Sada iz $t_1 = -1 - \sqrt{3-m}$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2 + (1 + \sqrt{3-m})\,x + 1 = 0$$

koja mora imati točno dva realna i različita rješenja. Taj će uvjet biti zadovoljen ako i samo ako vrijedi nejednakost

$$(1 + \sqrt{3-m})^2 - 4 > 0,$$

odnosno

$$1 + 2\sqrt{3-m} + 3 - m - 4 > 0,$$

odnosno

$$2\sqrt{3-m} > m.$$

Za $m \leq 0$ za nejednakost je očito valjana, a za $0 \leq m < 3$ kvadriranjem dobivamo:

$$4(3 - m) > m^2,$$

odnosno

$$m^2 + 4m - 12 < 0.$$

Rješenje te nejednadžbe je $-6 < m < 2$, pa iz sustava nejednadžbi

$$\begin{gathered} 0 \leq m < 3 \\ -6 < m < 2 \end{gathered}$$

slijedi

$$0 \leq m < 2,$$

odnosno $m \in [0, 2\rangle$. Stoga je u ovom slučaju skup rješenja $\langle -\infty, 2\rangle$. Preostaje još razmotriti slučaj $t_2 = -1 + \sqrt{3-m}$. Vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2 + (1 - \sqrt{3-m})\,x + 1 = 0$$

koja mora imati točno dva realna i različita rješenja. Taj će uvjet biti zadovoljen ako i samo ako vrijedi nejednakost

$$(1 - \sqrt{3-m})^2 - 4 > 0,$$

odnosno

$$1 - 2\sqrt{3-m} + 3 - m - 4 > 0,$$

odnosno

$$2\sqrt{3-m} < -m.$$

Za $0 \le m < 3$ ta nejednakost nije valjana, a za $m \le 0$ kvadriranjem dobivamo:

$$4(3 - m) < m^2,$$

odnosno

$$m^2 + 4m - 12 > 0.$$

Rješenje te nejednadžbe je $m \in \mathbf{R} \setminus [-6, 2]$, pa zbog uvjeta $m \le 0$ slijedi

$$m < -6,$$

odnosno

$$m \in \langle -\infty, -6 \rangle.$$

Tako konačno zaključujemo da će polazna nejednadžba imati točno četiri realna i različita rješenja ako i samo ako vrijednost realnoga parametra $m \in \mathbf{R}$ bude element skupa $\langle -\infty, 2 \rangle \cap \langle -\infty, -6 \rangle = \langle -\infty, -6 \rangle$.

800. *Površina trokuta ABC iznosi* $P = \frac{15\sqrt{3}}{4}$, *polumjer tome trokutu opisane kružnice* $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$, *a duljina najmanje stranice* $a = 3$. *Izračunajte duljinu najveće stranice toga trokuta.*

Rješenje: Prema sinusovu poučku je

$$2R = \frac{a}{\sin\alpha},$$

a odatle je

$$\sin\alpha = \frac{a}{2R}$$
$$\sin\alpha = \frac{3}{2 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{3}} = \frac{9}{14\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$$

Budući da je a najmanja stranica, kut nasuprot njoj mora biti šiljast, što znači da je $\cos\alpha > 0$. Tako iz

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$$

slijedi

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{14}\right)^2}$$
$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{27}{196}}$$
$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{169}{196}}$$
$$\cos\alpha = \frac{13}{14}$$

Nadalje, iz

$$P = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$

slijedi

$$bc = \frac{2P}{\sin \alpha}$$
$$bc = \frac{2 \cdot \frac{15}{4}\sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{14}} = 35$$

Tako u kosinusov poučak

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

uvrstimo $a = 3$, $bc = 35$ i $\cos \alpha = \frac{13}{14}$ pa dobijemo:

$$9 = b^2 + c^2 - 65,$$

odnosno

$$b^2 + c^2 = 74.$$

Tako smo dobili sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= 74 \\ bc &= 35 \end{aligned}$$

Pomnožimo drugu njegovu jednadžbu s 2, pa je najprije pribrojimo prvoj:

$$\begin{aligned} b^2 + 2bc + c^2 &= 144, \\ (b + c)^2 &= 12^2, \\ b + c &= 12, \end{aligned}$$

a potom oduzmimo od prve:

$$\begin{aligned} b^2 - 2bc + c^2 &= 4, \\ (b - c)^2 &= 2^2, \\ b - c &= 2. \end{aligned}$$

Tako napokon iz sustava

$$\begin{aligned} b + c &= 12 \\ b - c &= 2 \end{aligned}$$

slijedi $b = 7$, $c = 5$. Budući da vrijedi nejednakost

$$3 < 5 < 7,$$

duljina najveće stranice toga trokuta jednaka je 7.

801. *Izračunajte površinu jednakokračnoga trapeza ako su duljine njegovih osnovica* 19 *i* 9, *a duljina njegova kraka* 13.

Rješenje: Označimo standardno $a = 19$, $c = 9$ i $b = 13$. Duljina v visine trapeza jednaka je

$$v=\sqrt{b^2-\left(\frac{a-c}{2}\right)^2}$$
$$v=\sqrt{13^2-\left(\frac{19-9}{2}\right)^2}$$
$$v=\sqrt{169-25}$$
$$v=12$$

pa je tražena površina jednaka

$$P=\frac{a+c}{2}\cdot v$$
$$P=\frac{19+9}{2}\cdot 12$$
$$P=156$$

802. *Izračunajte vrijednost izraza*

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right):\left(\frac{a-b}{4a}+\frac{b}{a-b}\right)$$

za $a=0.75$ *i* $b=\frac{4}{3}$.

Rješenje: Najprije pojednostavnimo zadani izraz. Imamo redom:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right):\left(\frac{a-b}{4a}+\frac{b}{a-b}\right)=\frac{a^2+b^2+2ab}{ab}:\frac{(a-b)^2+4ab}{4a(a-b)}=\frac{a^2+b^2+2ab}{ab}:\frac{a^2-2ab+b^2+4ab}{4a(a-b)}=$$
$$=\frac{a^2+2ab+b^2}{ab}:\frac{a^2+2ab+b^2}{4a(a-b)}=\frac{a^2+2ab+b^2}{ab}\cdot\frac{4a(a-b)}{a^2+2ab+b^2}=\frac{4(a-b)}{b}$$

Uvrštavanjem $a=0.75=\frac{3}{4}$ i $b=\frac{4}{3}$ dobivamo:

$$\frac{4\cdot(\frac{3}{4}-\frac{4}{3})}{\frac{4}{3}}=3\cdot\frac{9-16}{12}=-\frac{7}{4}$$

803. *Izračunajte vrijednost izraza*

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2000},$$

pri čemu je i imaginarna jedinica.

Rješenje: Budući da je

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{(1-i)^2}{1^2-i^2}=\frac{1-2i+i^2}{1-(-1)}=\frac{1-2i+(-1)}{2}=\frac{-2i}{2}=-i,$$

to je tražena vrijednost izraza jednaka

$$(-i)^{2000} = (-1)^{2000} \cdot i^{2000} = 1 \cdot (i^4)^{500} = 1 \cdot 1^{500} = 1.$$

804. *Odredite zbroj svih realnih rješenja jednadžbe*

$$\frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}{\log_{\frac{1}{2}}(\frac{x}{3}-1)} = 0 .$$

Rješenje: Vrijednost razlomka na lijevoj strani zadane jednadžbe bit će jednaka nuli ako i samo ako istodobno vrijednost njegova brojnika bude jednaka nuli, a vrijednost njegova nazivnika bude različita od nule. Brojnik toga razlomka bit će jednak nuli ako i samo ako barem jedan od faktora bude jednak nuli. Odavde dobivamo pet linearnih jednadžbi

$$x - 2 = 0$$
$$x - 3 = 0$$
$$x - 4 = 0$$
$$x - 5 = 0$$
$$x - 6 = 0$$

čija su rješenja $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$ i $x_5 = 6$. No, za $x = 2$ i $x = 3$ ne postoji $\log_{\frac{1}{2}}(\frac{x}{3}-1)$ jer su logaritmandi nepozitivni realni brojevi, a za $x = 6$ vrijednost izraza $\log_{\frac{1}{2}}(\frac{x}{3}-1)$ jednaka je nuli, pa razlomak na lijevoj strani polazne jednadžbe nije definiran. Stoga su rješenja polazne jednadžbe $x_1 = 4$ i $x_2 = 5$. Zbroj tih rješenja jednak je 9.

805. *Pojednostavnite izraz* $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + 2\sqrt{11+6\sqrt{2}}$.

Rješenje: Najprije uočimo da je

$$11 + 6\sqrt{2} = 9 + 6\sqrt{2} + 2 = (3 + \sqrt{2})^2$$

pa je

$$\sqrt{11+6\sqrt{2}} = \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} = 3+\sqrt{2} .$$

Tako je zadani izraz jednak

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + 2\sqrt{11+6\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + 2(3+\sqrt{2}) = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1} + 6 + 2\sqrt{2} = 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 6 + 2\sqrt{2} = 9 .$$

806. *Ako je* $f\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = 2x+5$, *izračunajte* $f(2)$.

Rješenje: Najprije ćemo odrediti $x \in \mathbf{R}$ takav da je

$$\frac{x+2}{x-1} = 2 .$$

Množenjem te jednadžbe s $x - 1$ dobivamo:

$$x + 2 = 2x - 2,$$

a odavde je izravno $x = 4$. Tako u jednakost

$$f\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = 2x+5$$

stavimo $x = 4$ pa konačno dobivamo:

$$f(2) = 2 \cdot 4 + 5 = 13.$$

807. *Izračunajte zbroj kvadrata svih realnih rješenja jednadžbe*

$$x^2 + 3|x| - 4 = 0.$$

Rješenje: Razlikujemo točno dva slučaja:

1.) $x \geq 0$

U ovom je slučaju $|x| = x$ pa dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

čija su rješenja $x_1 = -4$ i $x_2 = 1$. Zbog uvjeta $x \geq 0$ rješenje x_1 ne dolazi u obzir, pa je u ovom slučaju $x = 1$ rješenje polazne jednadžbe.

2.) $x \leq 0$

U ovom je slučaju $|x| = -x$ pa dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

čija su rješenja $x_1 = -1$ i $x_2 = 4$. Zbog uvjeta $x \leq 0$ rješenje x_2 ne dolazi u obzir, pa je u ovom slučaju $x = -1$ rješenje polazne jednadžbe.

Stoga su sva rješenja polazne jednadžbe $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$. Zbroj njihovih kvadrata jednak je 2.

808. *Odredite ukupan broj svih realnih rješenja jednadžbe*

$$\sqrt{x+6} = \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}\ .$$

Rješenje: Zadanu jednadžbu najprije zapišimo u ekvivalentnom obliku

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} = \sqrt{2x-5}\ .$$

Ova jednadžba ima smisla ako i samo ako istodobno vrijede nejednakosti $x + 6 \geq 0$, $x + 1 \geq 0$ i $2x - 5 \geq 0$. Rješenje ovoga sustava nejednadžbi jest $x \in \langle \frac{5}{2}, +\infty\rangle$. Uz uvažavanje te relacije, kvadriramo gornju jednakost, pa dobivamo:

$$x + 6 - 2\sqrt{(x+6)(x+1)} + x + 1 = 2x - 5,$$

odnosno

$$\sqrt{(x+6)(x+1)} = 6.$$

Ponovnim kvadriranjem i množenjem dobivamo:

$$x^2 + 7x - 30 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su $x_1 = -10$, $x_2 = 3$. No, zbog uvjeta $x \in \langle \frac{5}{2}, +\infty\rangle$ rješenje x_1 ne dolazi u obzir, pa polazna jednadžba ima točno jedno realno rješenje: $x = 3$.

809. *Izračunajte vrijednost izraza* $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}$ *ako su* x_1 *i* x_2 *rješenja jednadžbe*

$$x^2 - 2\sqrt{3} \cdot x - 8 = 0.$$

Rješenje: Iz zadane jednadžbe primjenom Vièteovih formula slijedi:

$$x_1 + x_2 = 2\sqrt{3}$$
$$x_1 \cdot x_2 = -8$$

Budući da je

$$\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3 \cdot (x_1 \cdot x_2) \cdot (x_1 + x_2)}{(x_1 \cdot x_2)^2},$$

uvrštavanjem dobivamo:

$$\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2} = \frac{(2\sqrt{3})^3 - 3 \cdot (-8) \cdot (2\sqrt{3})}{(-8)^2} = \frac{24\sqrt{3} + 48\sqrt{3}}{64} = \frac{72\sqrt{3}}{64} = \frac{9\sqrt{3}}{8}.$$

810. *Odredite skup svih realnih rješenja jednadžbe*

$$\log_{2x}(2 - x) < 1.$$

Rješenje: Razlikujemo točno dva slučaja:

1.) $0 < 2x < 1$
$2 - x > 0$

Iz tih je uvjeta

$$0 < x < \frac{1}{2}$$
$$x < 2$$

pa se iz toga sustava dobije $x \in \langle 0, \frac{1}{2}\rangle$. Uz uvažavanje te relacije antilogaritmiranjem dobivamo:

$$2 - x > (2x)^1,$$

odnosno

$$2 - x > 2x,$$

a odavde je

$$x < \frac{2}{3}.$$

Zbog $x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$, u ovom je slučaju skup rješenja polazne nejednadžbe $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$.

2.) $2x > 1$
$2 - x > 0$

Iz tih je uvjeta

$$x > \frac{1}{2}$$
$$x < 2$$

pa se iz toga sustava dobije $x \in \langle \frac{1}{2}, 2 \rangle$. Uz uvažavanje te relacije antilogaritmiranjem dobivamo:

$$2 - x < (2x)^1,$$

odnosno

$$2 - x < 2x,$$

a odavde je

$$x > \frac{2}{3}.$$

Zbog $x \in \langle \frac{1}{2}, 2 \rangle$, u ovom je slučaju skup rješenja polazne nejednadžbe $\langle \frac{2}{3}, 2 \rangle$.

Tako je skup svih rješenja polazne nejednadžbe jednak $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle \cup \langle \frac{2}{3}, 2 \rangle$.

811. *Izračunajte vrijednost izraza*

$$4 \cos 2000° - (\sin 1990°)^{-1}.$$

Rješenje: Kako je 2000 : 360 = 5 i ostatak 200, te 1990 : 360 = 5 i ostatak 190, to je cos 2000° = cos 200°, te sin 1990° = sin 190°. Nadalje je

$$\cos 200° = \cos (180° + 20°) = \cos 180° \cos 20° - \sin 180° \sin 20° = -\cos 20°$$
$$\sin 190° = \sin (180° + 10°) = \sin 180° \cos 20° + \cos 180° \sin 10° = -\sin 10°$$

pa rabeći formulu za pretvobu umnoška u zbroj, te neparnost funkcije sinus imamo:

$$4 \cos 2000° - (\sin 1990°)^{-1} = -4 \cos 20° + (\sin 10)^{-1} = \frac{1}{\sin 10°} - 4\cos 20° = \frac{1 - 4\sin 10° \cos 20°}{\sin 10°} =$$

$$= \frac{1 - 2[\sin 30° + \sin(-10°)]}{\sin 10°} = \frac{1 - 2(\frac{1}{2} - \sin 10°)}{\sin 10°} = \frac{1 - 1 + 2\sin 10°}{\sin 10°} = \frac{2\sin 10°}{\sin 10°} = 2$$

812. *Zbroj prva četiri člana nekoga aritmetičkoga niza je za* 8 *manji od dvostrukoga zbroja prva tri člana toga istoga niza. Odredite četvrti član toga niza ako je peti član niza jednak* 24.

Rješenje: Označimo s a_1 prvi član toga aritmetičkoga niza, a s d njegovu razliku. Iz podatka da je zbroj prva četiri člana toga niza za 8 manji od dvostrukoga zbroja prva tri člana toga niza slijedi:

$$S_4 + 8 = 2 \cdot S_3,$$

odnosno

$$\frac{4}{2}\left[2a_1+(4-1)\cdot d\right]+8=2\cdot\frac{3}{2}\cdot\left[2a_1+(3-1)\cdot d\right],$$

a odatle je

$$4a_1 + 6d + 8 = 6a_1 + 6d,$$

odnosno

$$a_1 = 4.$$

Iz podatka da je peti član niza jednak 24 slijedi

$$24 = 4 + (5 - 1) \cdot d,$$

a odavde je $d = 5$. Stoga je četvrti član toga niza jednak

$$a_4 = 4 + (4 - 1) \cdot 5 = 19.$$

813. *Na pravcu p…* $2x + y - 6 = 0$ *odredite točku M jednako udaljenu od točaka* $A(3, 5)$ *i* $B(2, 6)$.

Rješenje: Tražena je točka sjecište pravca p i simetrale dužine AB. Koeficijent smjera pravca AB jednak je

$$k_{AB}=\frac{6-5}{2-3}=-1,$$

pa je koeficijent smjera simetrale s dužine AB (kao pravca okomitoga na pravac AB) jednak

$$k_s=-\frac{1}{k_{AB}}=1.$$

Koordinate polovišta dužine AB su

$$P(\frac{3+2}{2},\ \frac{5+6}{2})=P(\frac{5}{2},\ \frac{11}{2}),$$

pa je jednadžba simetrale s (jednadžba pravca kroz točku P s koeficijentom smjera k_s)

$$s\ldots\ y-\frac{11}{2}=x-\frac{5}{2},$$

odnosno

$$s\ldots\ y = x + 3.$$

Sjecište pravaca p i s određujemo rješavajući sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} 2x + y - 6 &= 0 \\ y &= x + 3 \end{aligned}$$

Odavde je $x = 1$, $y = 4$, pa je tražena točka $M(1, 4)$.

814. *Odredite zbroj svih rješenja jednadžbe*

$$2\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+2\cos(\pi+x)+\sin 2x=2$$

koja pripadaju segmentu $[0, 2\pi]$.

Rješenje: Kako je

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) = \cos\frac{3}{2}\pi\cos x - \sin\frac{3}{2}\pi\sin x = \sin x,$$
$$\cos(\pi + x) = \cos\pi\cos x - \sin\pi\sin x = -\cos x,$$
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x,$$

to je polazna jednadžba ekvivalentna jednadžbi

$$2\sin x - 2\cos x + 2\sin x\cos x = 2,$$

odnosno

$$\sin x - \cos x + \sin x\cos x = 1.$$

Razlikovat ćemo dva slučaja:

1.) $x_k = (2k + 1)\cdot\pi$

Za te vrijednosti x vrijedi

$$\sin x = \sin(\pi + k\cdot 2\pi) = \sin\pi = 0,$$
$$\cos x = \cos(\pi + k\cdot 2\pi) = \cos\pi = -1,$$

pa izravnim uvrštavanjem u gornju jednadžbu dobivamo identitet

$$1 \equiv 1.$$

Stoga su $x_k = (2k + 1)\cdot\pi$ rješenja polazne jednadžbe. Lako se vidi da segmentu $[0, 2\pi]$ pripada samo rješenje $x_0 = (2\cdot 0 + 1)\cdot\pi = \pi$.

2.) $x \neq (2k + 1)\cdot\pi$

U ovom slučaju smijemo primijeniti zamjenu $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ pa je

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

pa zamjenom dobivamo jednadžbu:

$$\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}\cdot\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) = 1,$$

odnosno (nakon množenja s $(1 + t^2)^2$) jednadžbu

$$2t(1 + t^2) - (1 - t^2)(1 + t^2) + 2t(1 - t^2) = (1 + t^2)^2,$$

odnosno

$$2t + 2t^3 - 1 + t^4 + 2t - 2t^3 = 1 + 2t^2 + t^4,$$

a odavde je

$$t^2 - 2t + 1 = 0.$$

Jedino realno rješenje ove kvadratne jednadžbe jest $t = 1$. Tako iz $t = 1$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo trigonometrijsku jednadžbu

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$$

iz koje je

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi, \ k \in \mathbf{Z},$$

odnosno

$$x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbf{Z}.$$

Lako se vidi da segmentu $[0, 2\pi]$ pripada samo jedno rješenje: $x_0 = \frac{\pi}{2} + 0 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$.

Tako smo utvrdili da polazna jednadžba u segmentu $[0, 2\pi]$ ima točno dva rješenja: $x_1 = \frac{\pi}{2}$ i $x_2 = \pi$. Njihov je zbroj jednak $\frac{3\pi}{2}$.

815. *Polinom* $p(x) = x^4 - x^3 + ax^2 + bx + c$ *pri dijeljenju s polinomom* $q(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ *daje ostatak* $r(x) = 3x^2 - 2x + 1$. *Izračunajte* $(a + b) \cdot c$.

Rješenje: Podijelimo polinome $p(x)$ i $q(x)$ prema pravilu za dijeljenje polinoma:

$$\begin{array}{l}
(x^4 - x^3 + ax^2 + bx + c) : (x^3 + 2x^2 - 3x + 1) = x - 3 \\
\underline{x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x} \\
\quad -3x^3 + (a + 3)x^2 + (b - 1)x + c \\
\quad \underline{-3x^3 - \quad 6x^2 + \quad 9x - 3} \\
\qquad\qquad (a + 9)x^2 + (b - 10)x + (c + 3)
\end{array}$$

Tako smo dobili da je ostatak pri ovom dijeljenju jednak $(a - 3)x^2 + (b - 10)x + (c + 3)$, a s druge strane znamo da je taj ostatak jednak $3x^2 - 2x + 1$. Zbog toga, prema poučku o jednakosti dvaju polinoma, moraju vrijediti sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} a + 9 &= 3 \\ b - 10 &= -2 \\ c + 3 &= 1 \end{aligned}$$

Odavde je $a = -6$, $b = 8$ i $c = -2$, pa je $(a + b) \cdot c = 2 \cdot (-2) = -4$.

816. *Odredite ukupan broj svih četveroznamenkastih prirodnih brojeva koji imaju svojstvo da se sastoje od četiriju različitih znamenki takvih da je zbroj posljednjih dviju (na mjestima desetica i jedinica) jednak* 5.

Rješenje: Broj 5 možemo zapisati kao zbroj dvaju različitih nenegativnih cijelih brojeva na sljedeće načine:

$$5 = 0 + 5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 3 + 2 = 4 + 1 = 5 + 0.$$

Zbog toga je pretposljednja znamenka jednoznačno određena odabirom posljednje znamenke (ili obrnuto). Razlikovat ćemo sljedeće slučajeve:

1.) Posljednja znamenka jednaka je 0.

Tada pretposljednja znamenka mora biti jednaka 5, pa znamenku na mjestu stotice možemo izabrati na ukupno 8 načina (između 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 i 9), a znamenku na mjestu tisućice potom na 7 načina (jer sve znamenke moraju biti različite). Prema načelu umnoška, u ovom je slučaju ukupan broj traženih brojeva jednak 8 · 7 = 56.

2.) Posljednja znamenka jednaka je 5.

Ovaj je slučaj istovjetan slučaju 1., pa dobivamo još 56 takvih četveroznamenkastih prirodnih brojeva.

3.) Posljednja znamenka je jednaka 1, 2, 3 ili 4.

Izbor posljednje znamenke očito možemo izvršiti na 4 različita načina. Time je jednoznačno određena i pretposljednja znamenka (tj. možemo je izabrati na točno 1 način). Nakon izbora posljednje i pretposljednje znamenke, preostalo nam je još 8 znamenaka. Imamo sljedeće podslučajeve:

a) Izabrana znamenka stotica je jednaka nuli.

Tada znamenku na mjestu tisućica možemo izabrati na točno 7 različitih načina.

b) Izabrana znamenka stotica je različita od nule.

Budući da nula ne može biti na mjestu znamenke tisućica (tj. na mjestu prve znamenke), u ovom slučaju na mjesto stotica i tisućica smještamo točno 7 različitih znamenaka. To možemo učiniti na 7 · 6 = 42 načina.

Sada prema načelima zbroja i umnoška slijedi da je traženi ukupan broj tih četveroznamenkastih prirodnih brojeva jednak 56 + 56 + 4 · 1 · (7 + 42) = 308.

817. *Odredite umnožak svih različitih realnih rješenja jednadžbe*

$$(5-2\sqrt{6})^{x^2-4x+4}+(5+2\sqrt{6})^{x^2-4x+4}=10.$$

<u>Rješenje:</u> Najprije uočimo da vrijedi jednakost

$$5-2\sqrt{6}=\frac{1}{5+2\sqrt{6}}=(5+2\sqrt{6})^{-1}$$

jer je $(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})=25-4\cdot 6=1$. Tako polaznu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$\left(\frac{1}{5+2\sqrt{6}}\right)^{x^2-4x+4}+(5+2\sqrt{6})^{x^2-4x+4}=10,$$

odnosno u obliku

$$\frac{1}{(5+2\sqrt{6})^{x^2-4x+4}}+(5+2\sqrt{6})^{x^2-4x+4}=10.$$

Uvedimo zamjenu $t=(5+2\sqrt{6})^{x^2-4x+4}$ pa dobivamo:

$$\frac{1}{t}+t=10,$$

otkuda je

$$t^2 - 10t + 1 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $t_1 = 5 - 2\sqrt{6}$ i $t_2 = 5 + 2\sqrt{6}$, tj. $t_1 = (5 + 2\sqrt{6})^{-1}$ i $t_2 = 5 + 2\sqrt{6}$. Tako iz $t_1 = (5 + 2\sqrt{6})^{-1}$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo eksponencijalnu jednadžbu:

$$(5+2\sqrt{6})^{x^2-4x+4} = (5 + 2\sqrt{6})^{-1}$$

iz koje usporedbom eksponenata dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - 4x + 4 = -1,$$

odnosno

$$x^2 - 4x + 5 = 0,$$

a ta jednadžba nema realnih rješenja. Nadalje, iz $t_2 = 5 + 2\sqrt{6} = (5 + 2\sqrt{6})^1$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo eksponencijalnu jednadžbu:

$$(5+2\sqrt{6})^{x^2-4x+4} = (5 + 2\sqrt{6})^{1}$$

iz koje usporedbom eksponenata dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - 4x + 4 = 1,$$

odnosno

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1 = 1$ i $x_2 = 3$. To su ujedno i sva realna rješenja polazne jednadžbe. Njihov je umnožak jednak 3.

818. *Zbroj prvih n članova nekoga aritmetičkoga niza jednak je $n^2 + 2n$, i to za svaki $n \in \mathbf{N}$. Ako je a_1 prvi član niza, a d njegova razlika, izračunajte umnožak $a_1 \cdot d$.*

Rješenje: Označimo:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Budući da, prema podatku iz zadatka, za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi formula

$$S_n = n^2 + 2n,$$

to posebno za $n = 1$ imamo:

$$S_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3.$$

No, $S_1 = a_1$ (zbroj se sastoji od točno jednoga člana i taj je jednak a_1), pa je $a_1 = 3$. Nadalje, za $n = 2$ je

$$S_2 = 2^2 + 2 \cdot 2 = 8.$$

S druge je strane

$$S_2 = a_1 + a_2,$$

pa uvrštavanjem $S_2 = 8$ i $a_1 = 3$ slijedi $a_2 = 5$. Tako je razlika d toga niza jednaka

$$d = a_2 - a_1 = 5 - 3 = 2,$$

pa je umnožak $a_1 \cdot d$ jednak $3 \cdot 2 = 6$.

819. *Dva vrha pravokutnika ABCD leže na asimptotama hiperbole* $x^2 - y^2 = 16$, *a njima zajednički susjedni vrh na samoj hiperboli. Izračunajte površinu toga pravokutnika.*

Rješenje: Zapišimo najprije jednadžbu hiperbole u obliku

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$$

pa očitajmo: $a^2 = b^2 = 16$, odnosno $a = b = 4$. Stoga su asimptote te hiperbole pravci $y = \pm\frac{4}{4}x$, odnosno pravci $p_1 \ldots\ y = -x$ i $p_2 \ldots\ y = x$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je vrhovi B i D leže redom na pravcima p_1 i p_2, te da je A njima zajednički susjedni vrh pravokutnika koji leži na hiperboli. Površina pravokutnika jednaka je umnošku udaljenosti $|AB|$ i $|AD|$. Budući da je $AB \perp AD$, te su udaljenosti zapravo udaljenosti točke A od pravaca p_1 i p_2. Označimo li $A(x_A, y_A)$, onda je

$$|AB| = d(A, p_1) = \frac{x_A + y_A}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{x_A + y_A}{\sqrt{2}}$$

$$|AD| = d(A, p_2) = \frac{x_A - y_A}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{x_A - y_A}{\sqrt{2}}$$

Množenjem tih jednakosti dobivamo:

$$|AB| \cdot |AD| = \frac{x_A + y_A}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{x_A - y_A}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x_A^2 - y_A^2}{2}$$

Budući da točka A pripada zadanoj hiperboli, njezine koordinate moraju zadovoljavati jednadžbu te hiperbole, odnosno mora vrijediti jednakost

$$x_A^2 - y_A^2 = 16\,.$$

Uz uvažavanje te jednakosti slijedi da je tražena površina jednaka:

$$P = |AB| \cdot |AD| = \frac{x_A^2 - y_A^2}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ kv. jed.}$$

820. *Duljine stranica trokuta zadovoljavaju jednakost*

$$s \cdot (s - a) = \frac{1}{4}bc,$$

pri čemu je s poluopseg trokuta. Izračunajte veličinu kuta α. (*Sve oznake u trokutu su standardne.*)

Rješenje: Budući da je

$$s \cdot (s - a) = \frac{a+b+c}{2} \cdot \left(\frac{a+b+c}{2} - a\right) = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4} = \frac{b^2 + 2bc + c^2 - a^2}{4},$$

to iz zadane jednakosti slijedi:

$$b^2 + c^2 + 2bc - a^2 = bc,$$

odnosno

$$a^2 = b^2 + c^2 + bc.$$

Od ove jednakosti oduzmimo kosinusov poučak:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

pa dobivamo

$$b \cdot c \cdot (2 \cos \alpha + 1) = 0,$$

otkuda je

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}.$$

Jedino rješenje ove trigonometrijske jednadžbe u intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ jest $\alpha = \frac{2}{3}\pi = 120°$, i to je traženi kut.

821. *Izračunajte vrijednost brojevnoga izraza*

$$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}} + \sqrt{12} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{50} \cdot \sqrt{2}.$$

Rješenje: Imamo redom:

$$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}} + \sqrt{12} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{50} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\frac{32}{8}} + \sqrt{12 \cdot 3} - \sqrt{50 \cdot 2} = \sqrt{4} + \sqrt{36} - \sqrt{100} = 2 + 6 - 10 = -2.$$

822. *Ako je* $f(x) = x^2 + x + 1$, *izračunajte* $f(x + 2) - 2 \cdot f(x + 1) + f(x)$ *za svaki* $x \in \mathbf{R}$.

Rješenje: Kako je

$$f(x + 2) = (x + 2)^2 + (x + 2) + 1 = x^2 + 4x + 4 + x + 2 + 1 = x^2 + 5x + 7,$$
$$f(x + 1) = (x + 1)^2 + (x + 1) + 1 = x^2 + 2x + 1 + x + 1 + 1 = x^2 + 3x + 3,$$

to je

$$f(x + 2) - 2 \cdot f(x + 1) + f(x) = x^2 + 5x + 7 - 2 \cdot (x^2 + 3x + 3) + x^2 + x + 1 = x^2 + 5x + 7 - 2x^2 - 6x - 6 + x^2 + x + 1 = 2.$$

823. *Strogo pozitivni realni brojevi x i y su takvi da je x% od broja y jednako x. Izračunajte vrijednost broja y.*

Rješenje: Iz

$$\frac{x}{100} \cdot y = x$$

slijedi

$$xy = 100 \cdot x,$$

odnosno

$$x \cdot (y - 100) = 0.$$

Budući da je x strogo pozitivan realan broj, ne može biti $x = 0$, što znači da mora vrijediti jednakost

$$y - 100 = 0.$$

Odatle izravno slijedi $y = 100$.

824. *Kompleksan broj z zadovoljava jednakost*

$$z + 2\bar{z} = 12 + 3i.$$

Izračunajte $|z|$.

Rješenje: Pretpostavimo da je $z = a + b \cdot i$. Tada je $\bar{z} = a - b \cdot i$, pa uvrštavanjem tih dviju jednakosti u zadanu jednakost dobivamo:

$$a + bi + 2(a - bi) = 12 + 3i,$$

odnosno

$$3a - bi = 12 + 3i.$$

Usporedbom realnih i imaginarnih dijelova dobivamo:

$$3a = 12$$
$$-b = 3,$$

otkuda je $a = 4$ i $b = -3$. Stoga je

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5.$$

825. *Neka su* x_1 *i* x_2 *rješenja jednadžbe* $x^2 + x - 2005 = 0$. *Izračunajte vrijednost izraza*

$$2x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_1 - 2005.$$

Rješenje: Iz zadane jednadžbe primjenom Vièteovih formula slijedi:

$$x_1 + x_2 = -1$$
$$x_1 \cdot x_2 = -2005$$

Budući da je

$$2x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_1 - 2005 = (x_1 + x_2 + 1) \cdot x_1 + (x_1^2 + x_2^2) - 2005 = (x_1 + x_2 + 1) \cdot x_1 + \left[(x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot (x_1 \cdot x_2)\right] - 2005$$

uvrštavanjem gornjih dviju jednakosti dobivamo:

$$2x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_1 - 2005 = (-1 + 1) \cdot x_1 + \left[(-1)^2 - 2 \cdot (-2005)\right] - 2005 = 1 + 2 \cdot 2005 - 2005 = 2005 + 1 = 2006.$$

826. *Ako je* $\operatorname{tg} \alpha = -7$ *i* $\alpha \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$, *izračunajte* $\dfrac{3\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha}$.

Rješenje: Podijelimo brojnik i nazivnik razlomka čiju vrijednost želimo izračunati s $\cos \alpha$ (to smijemo jer iz $\operatorname{tg} \alpha = -7$ slijedi da je $\cos \alpha \neq 0$). Dobivamo:

$$\frac{3\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+1}{1-3\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}},$$

što je, zbog tg α = $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, ekvivalentno s $\frac{3\,\mathrm{tg}\alpha+1}{1-3\,\mathrm{tg}\alpha}$. U taj izraz uvrstimo tg α = –7 pa konačno dobivamo:

$$\frac{3\,\mathrm{tg}\alpha+1}{1-3\,\mathrm{tg}\alpha}=\frac{3\cdot(-7)+1}{1-3\cdot(-7)}=-\frac{20}{22}=-\frac{10}{11}.$$

827. *Količnik geometrijskoga niza jednak je* 2, *a zbroj prvih* 7 *njegovih članova* 635. *Izračunajte sedmi član toga niza.*

Rješenje: Označimo s a_1 prvi član niza. U formulu za zbroj prvih 7 članova niza

$$S_7=a_1\cdot\frac{q^7-1}{q-1}$$

uvrstimo $S_7 = 635$ i $q = 2$, pa dobivamo:

$$635=a_1\cdot\frac{2^7-1}{2-1},$$

odnosno

$$127\cdot a_1=635.$$

Odavde je $a_1 = 5$. Tako je 7. član niza jednak

$$a_7=a_1\cdot q^6=5\cdot 2^6=320.$$

828. *Ako je* $\log_a b=\sqrt{2}$, *izračunajte* $\log_{\frac{b}{a}}(ab)$.

Rješenje: Kako je

$$\log_{\frac{b}{a}}(ab)=\frac{\log_a(ab)}{\log_a\frac{b}{a}}=\frac{\log_a a+\log_a b}{\log_a b-\log_a a}=\frac{1+\log_a b}{\log_a b-1},$$

uvrštavanjem $\log_a b=\sqrt{2}$ dobivamo:

$$\log_{\frac{b}{a}}(ab)==\frac{1+\log_a b}{\log_a b-1}=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1}=\frac{2+2\sqrt{2}+1}{1}=3+2\sqrt{2}.$$

829. *Izračunajte zbroj koeficijenata tangenata na krivulju* $x^2+y^2=2$ *koje prolaze sjecištem pravaca* $p_1\ldots\ x-y-1=0$ *i* $p_2\ \ldots\ x+y-3=0$.

Rješenje: Izračunajmo najprije koordinate sjecišta pravaca p_1 i p_2. U tu svrhu riješimo sustav:

$$\begin{aligned}x-y-1&=0\\x+y-3&=0\end{aligned}$$

Njegovo je rješenje $x = 2$, $y = 1$, pa je $S(2, 1)$. Neka je $t \ldots y = kx + l$ tangenta na zadanu krivulju kroz točku S. Budući da je zadana krivulja kružnica sa središtem u ishodištu i polumjerom $r = \sqrt{2}$, primijenimo uvjet tangencijalnosti za nju:

$$r^2(1 + k^2) = l^2,$$

pa uvrštavanjem $r^2 = 2$ dobivamo

$$2 + 2k^2 = l^2.$$

S druge strane, budući da točka S leži na tangenti t, njezine koordinate moraju zadovoljavati jednadžbu tangente:

$$1 = 2k + l.$$

Tako smo dobili sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} 2k + l &= 1 \\ 2k^2 + 2 &= l^2 \end{aligned}$$

Iz prve njegove jednadžbe je

$$l = 1 - 2k,$$

pa uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobivamo:

$$2k^2 + 2 = (1 - 2k)^2,$$

odnosno

$$2k^2 + 2 = 1 - 4k + 4k^2,$$

odnosno

$$2k^2 - 4k - 1 = 0.$$

Preostaje nam primijeniti Vièteove formule i izravno izračunati traženi zbroj koeficijenata:

$$k_1 + k_2 = -\frac{-4}{2} = \frac{4}{2} = 2\,.$$

830. *Duljine stranica trokuta su a, b i c, a njima nasuprotni kutovi α, β i γ. Izrazite omjer* $\sin(\alpha - \beta) : \sin(\alpha + \beta)$ *pomoću varijabli a, b* i *c.*

Rješenje: Primjenom sinusova i kosinusova poučka dobivamo:

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}-1}{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}+1} = \frac{\frac{a}{b}\cdot\frac{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}-1}{\frac{a}{b}\cdot\frac{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}+1} = \frac{\frac{a}{b}\cdot\frac{b(a^2+c^2-b^2)}{a(b^2+c^2-a^2)}-1}{\frac{a}{b}\cdot\frac{b(a^2+c^2-b^2)}{a(b^2+c^2-a^2)}+1} =$$

$$= \frac{\frac{a^2+c^2-b^2}{b^2+c^2-a^2}-1}{\frac{a^2+c^2-b^2}{b^2+c^2-a^2}+1} = \frac{\frac{a^2+c^2-b^2-b^2-c^2+a^2}{b^2+c^2-a^2}}{\frac{a^2+c^2-b^2+b^2+c^2-a^2}{b^2+c^2-a^2}} = \frac{2a^2-2b^2}{2c^2} = \frac{a^2-b^2}{c^2}$$

831. *Zadane su funkcije* $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{x^2}{x}$, $f_3(x) = \sqrt{x^2}$ *i* $f_4(x) = (\sqrt{x})^2$. *Ima li među njima jednakih funkcija*?

Rješenje: Nema. Prva funkcija ima i prirodno područje definicije i sliku jednaku skupu **R**. Druga funkcija nije definirana u točki $x = 0$. Treća funkcija ima sliku jednaku skupu $\mathbf{R}^+$ (to je, zapravo, funkcija $f_3(x) = |x|$), a četvrta funkcija za prirodno područje definicije ima skup $\mathbf{R}^+$. Stoga među ovim funkcijama nema jednakih. (Podsjetimo, dvije funkcije su jednake ako imaju isto prirodno područje definicije, istu sliku i isti propis zadavanja.)

832. *Opseg jednakokračnoga trapeza iznosi* 32 cm, *a opseg tom trapezu upisane kružnice* 4π cm. *Izračunajte razliku duljina veće i manje osnovice toga trapeza.*

Rješenje: Standardno označimo duljinu veće osnovice s a, duljinu manje osnovice s c, duljinu kraka s b, a duljinu visine trapeza s v. Iz podatka da je opseg trapeza jednak 32 cm zaključujemo da vrijedi jednakost:

$$a + 2b + c = 32.$$

Iz podatka da je opseg trapezu upisane kružnice 4π cm slijedi da je

$$2r\pi = 4\pi,$$

gdje je r polumjer te kružnice. Odatle je $2r = 4$ cm. No, u jednakokračnome je trapezu promjer upisane kružnice jednak visini trapeza, pa je

$$v = 2r = 4 \text{ cm}.$$

Iz činjenice da se trapezu može upisati kružnica (tj. da je taj trapez tangencijalni četverokut) slijedi da mora vrijediti jednakost

$$2b = a + c.$$

Uvrstimo li tu jednakost u formulu za opseg trapeza, dobivamo:

$$2a + 2c = 32,$$

a odavde je

$$a + c = 16.$$

S druge je strane

$$v^2 = b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2,$$

pa zbog

$$2b = a + c,$$

tj.

$$b = \frac{a+c}{2}$$

slijedi:

$$v^2 = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2,$$

odnosno

$$v^2 = ac.$$

Uvrštavanjem $v = 4$ dobivamo:

$$ac = 16.$$

Tako smo dobili sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} a + c &= 16 \\ ac &= 16 \end{aligned}$$

Kvadriramo prvu jednadžbu i oduzmemo drugu jednadžbu pomnoženu s 4:

$$\begin{aligned} (a + c)^2 - 4ac &= 16^2 - 4 \cdot 16, \\ a^2 + 2ac + c^2 - 4ac &= 192, \\ a^2 - 2ac + c^2 &= 192, \\ (a - c)^2 &= 192 \end{aligned}$$

i konačno

$$a - c = \sqrt{192} = 8\sqrt{3} \text{ cm}.$$

833. *Odredite ukupan broj realnih rješenja sustava jednadžbi*

$$\begin{aligned} \log_{|x-y|} \frac{xy}{2} &= 2 \\ x + y &= xy + 1 \end{aligned}$$

Rješenje: Antilogaritmiranjem prve jednadžbe dobivamo:

$$|x - y|^2 = \frac{xy}{2},$$

odnosno

$$2(x - y)^2 = xy,$$

odnosno

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0.$$

Ako bi bilo $y = 0$, onda bi iz gornje jednakosti slijedilo $x = 0$, a par $(0, 0)$ ne zadovoljava drugu jednadžbu polaznoga sustava. Zato je $y \neq 0$ pa dijeljenjem posljednje jednakosti s y^2 i uvođenjem zamjene $t = \frac{x}{y}$ dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$2t^2 - 5t + 2 = 0.$$

Njezina su rješenja $t_1 = \frac{1}{2}$ i $t_2 = 2$. Tako razlikujemo ukupno dva slučaja:

1.) $t_1 = \frac{1}{2}$

Vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo:

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2},$$

a odavde je $y = 2x$. Tu jednakost uvrstimo u drugu jednadžbu polaznoga sustava, pa dobijemo:

$$x + 2x = 2x^2 + 1,$$

što je ekvivalentno kvadratnoj jednadžbi

$$2x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Njezina su rješenja $x_1 = \frac{1}{2}$ i $x_2 = 1$. Pripadne vrijednosti nepoznanice y su $y_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ i $y_2 = 2 \cdot 1 = 2$. Izravno uvrštavanje u prvu jednadžbu polaznoga sustava pokazuje da je par $(\frac{1}{2}, 1)$ rješenje polaznoga sustava, a da par $(1, 2)$ to nije (tada prva jednadžba prelazi u jednakost $\log_1 1 = 2$ koja nije istinita jer baza logaritma ne može biti jednaka 1).

2.) $t_2 = 2$

Vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo:

$$\frac{x}{y} = 2,$$

a odavde je $x = 2y$. Tu jednakost uvrstimo u drugu jednadžbu polaznoga sustava, pa dobijemo:

$$2y + y = 2y^2 + 1,$$

što je ekvivalentno kvadratnoj jednadžbi

$$2y^2 - 3y + 1 = 0.$$

Njezina su rješenja $y_1 = \frac{1}{2}$ i $y_2 = 1$. Pripadne vrijednosti nepoznanice y su $x_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ i $x_2 = 2 \cdot 1 = 2$. Izravno uvrštavanje u prvu jednadžbu polaznoga sustava pokazuje da par $(1, \frac{1}{2})$ jest rješenje polaznoga sustava, a da par $(2, 1)$ to nije (tada prva jednadžba prelazi u jednakost $\log_1 1 = 2$ koja nije istinita jer baza logaritma ne može biti jednaka 1).

Zaključimo: Polazni sustav ima točno dva realna rješenja: $(\frac{1}{2}, 1)$ i $(1, \frac{1}{2})$.

834. *Odredite ukupan broj svih rješenja jednadžbe*

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$$

koja pripadaju intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Rješenje: Zadanu jednadžbu najprije zapišimo u ekvivalentnom obliku

$$\sin^2 x = 1 - \sin^2 2x,$$

odnosno

$$\sin^2 x = \cos^2 2x,$$

odnosno

$$\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1+\cos 4x}{2},$$

a odavde je

$$\cos 4x + \cos 2x = 0,$$

odnosno

$$2 \cos 3x \cos x = 0.$$

Sada razlikujemo dva slučaja:

1.) $\cos 3x = 0$

Iz te je jednadžbe $3x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbf{Z}$, odnosno $x_k = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$. Sada iz nejednakosti

$$0 < x_k < 2\pi,$$

tj.

$$0 < \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3} < 2\pi$$

množenjem sa $\frac{6}{\pi}$ slijedi

$$0 < 1 + 2k < 12,$$

odnosno

$$-\frac{1}{2} < k < \frac{11}{2}.$$

Tu nejednakost zadovoljava ukupno 6 cijelih brojeva: 0, 1, 2, 3, 4 i 5, pa imamo ukupno 6 različitih realnih rješenja.

2.) $\cos x = 0$

Zbog identiteta

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

jednakost $\cos x = 0$ povlači jednakost $\cos 3x = 0$. To zapravo znači da je svako rješenje jednadžbe $\cos x = 0$ ujedno i rješenje jednadžbe $\cos 3x = 0$ (ali ne i obrnuto). Stoga je skup svih rješenja jednadžbe $\cos x = 0$ pravi podskup skupa svih rješenja jednadžbe $\cos 3x = 0$, pa u ovom slučaju nećemo dobiti niti jedno novo rješenje.

Prema tome, zadana jednadžba na zadanom intervalu ima točno 6 različitih rješenja.

835. *Riješite sustav nejednadžbi*:

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &\le 0 \\ 1 - 2x + x^2 &> 0 \\ x^2 - (3 + \sqrt{3})x + 2 + \sqrt{3} &> 0 \end{aligned}$$

Rješenje: Iz prve nejednadžbe se dobiva $x \in$ [-2, 2], iz druge $x \in \langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$, a iz treće $x \in \langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 2 + \sqrt{3}, +\infty\rangle$. Presjek skupova [-2, 2], $\langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$ i $\langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 2 + \sqrt{3}, +\infty\rangle$ je skup $[-2, 1\rangle$, i to je skup svih rješenja polaznoga sustava.

836. *Odredite koeficijent uz a^8 u binomnom razvoju*

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}} - a\right)^{12}.$$

Rješenje: U binomni poučak

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

uvrstimo $x = \frac{1}{\sqrt[3]{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{-\frac{1}{3}}$, $y = -a$ i $n = 12$, pa dobijemo:

$$(\frac{1}{\sqrt[3]{a}} - a)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (a^{-\frac{1}{3}})^k (-a)^{12-k} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} a^{-\frac{1}{3}k} \cdot (-1)^{12-k} \cdot a^{12-k} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} \cdot (-1)^{12-k} a^{-\frac{1}{3}k+12-k} =$$
$$\sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} \cdot (-1)^{12-k} a^{12-\frac{4}{3}k}$$

Prirodan broj k takav da eksponent potencije s bazom a bude jednak 8 dobije se iz jednadžbe

$$12 - \frac{4}{3}k = 8,$$

a odavde je $k = 3$. Prema tome, traženi je koeficijent jednak

$$\binom{12}{3} \cdot (-1)^{12-3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (-1)^9 = -220.$$

837. *Riješite jednadžbu*:

$$4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6.$$

Rješenje: Zadanu jednadžbu najprije zapišimo u obliku

$$4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{-1} \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$$
$$(2^2)^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 6$$
$$(2^{x+\sqrt{x^2-2}})^2 - 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 6$$

Stavimo $t = 2^{x+\sqrt{x^2-2}}$, pa dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$t^2 - \frac{5}{2}t - 6 = 0$$

čija su rješenja $t_1 = -\frac{3}{2}$ i $t_2 = 4$. Budući da je $t = 2^{x+\sqrt{x^2-2}} > 0$, rješenje t_1 ne dolazi u obzir, pa je jedino moguće $t_2 = 4$. Vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo eksponencijalnu jednadžbu

$$2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 4,$$

odnosno

$$2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 2^2$$

iz koje usporedbom eksponenata dobivamo iracionalnu jednadžbu

$$x + \sqrt{x^2-2} = 2$$

koja je ekvivalentna jednadžbi

$$\sqrt{x^2-2} = 2 - x.$$

Budući da je lijeva strana te jednadžbe nenegativan realan broj, takva mora biti i njezina desna strana, što znači da mora vrijediti nejednakost

$$2 - x \geq 0$$

iz koje je $x \leq 2$. Uvažavajući tu nejednakost kvadriranjem dobivamo:

$$x^2 - 2 = (2 - x)^2,$$

odnosno

$$x^2 - 2 = 4 - 4x + x^2,$$

odnosno

$$4x = 6,$$

pa je $x = \frac{3}{2}$. Taj x zadovoljava uvjet $x \leq 2$, pa je to ujedno i jedino rješenje polazne jednadžbe.

838. *Izračunajte kut* $\alpha \in \langle 0, 90°\rangle$ *iz jednakosti*

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{(1+\mathrm{tg}\,1°)(1+\mathrm{tg}\,2°)-2}{(1-\mathrm{tg}\,1°)(1-\mathrm{tg}\,2°)-2}.$$

Rješenje: Iskoristit ćemo jednakost

$$\mathrm{tg}\,3° = \mathrm{tg}(2° + 1°) = \frac{\mathrm{tg}\,2° + \mathrm{tg}\,1°}{1 - \mathrm{tg}\,2° \cdot \mathrm{tg}\,1°}$$

zbog koje je

$(1 + \mathrm{tg}\,1°)(1 + \mathrm{tg}\,2°) - 2 = \mathrm{tg}\,1° + \mathrm{tg}\,2° + \mathrm{tg}\,1° \cdot \mathrm{tg}\,2° - 1 = \mathrm{tg}\,1° + \mathrm{tg}\,2° - (1 - \mathrm{tg}\,1° \cdot \mathrm{tg}\,2°) = \mathrm{tg}\,1° + \mathrm{tg}\,2° - \frac{\mathrm{tg}\,2° + \mathrm{tg}\,1°}{\mathrm{tg}\,3°} = (\mathrm{tg}\,1° + \mathrm{tg}\,2°)(1 - \frac{1}{\mathrm{tg}\,3°}) = (\mathrm{tg}\,1° + \mathrm{tg}\,2°) \cdot \frac{\mathrm{tg}\,3° - 1}{\mathrm{tg}\,3°}$

i

$(1 - \text{tg } 1°)(1 - \text{tg } 2°) - 2 = -\text{ tg } 1° - \text{tg } 2° + \text{tg } 1° \cdot \text{tg } 2° - 1 = -(\text{tg } 1° + \text{tg } 2°) - (1 - \text{tg } 1° \cdot \text{tg } 2°) = -(\text{tg } 1° + $
$+ \text{ tg } 2°) - (\frac{\text{tg } 2° + \text{tg } 1°}{\text{tg } 3°}) = (\text{tg } 1° + \text{tg } 2°)(-1 - \frac{1}{\text{tg } 3°}) = -(\text{tg } 1° + \text{tg } 2°) \cdot \frac{\text{tg } 3° + 1}{\text{tg } 3°}$.

Tako je

$$\text{tg}\alpha = \frac{(1+\text{tg } 1°)(1+\text{tg } 2°)-2}{(1-\text{tg } 1°)(1-\text{tg } 2°)-2} = \frac{(\text{tg } 1° + \text{tg } 2°) \cdot \frac{\text{tg } 3° - 1}{\text{tg } 3°}}{-(\text{tg } 1° + \text{tg } 2°) \cdot \frac{\text{tg } 3° + 1}{\text{tg } 3°}} = \frac{1 - \text{tg } 3°}{1 + \text{tg } 3°} = \frac{\text{tg } 45° - \text{tg } 3°}{1 + \text{tg } 3° \cdot \text{tg } 45°} = \text{tg } (45° - 3°) = \text{tg } 42° .$$

Odatle sada izravno slijedi $\alpha = 42°$.

839. *Nađite vezu između varijabli x i y ako je poznato da x i y zadovoljavaju nejednakost*:

$$2\log\frac{x+y}{\sqrt{5}} = \log(x+y) + \log(x-y) .$$

Rješenje: Zadanu jednakost najprije transformirajmo ovako:

$$2\log\frac{x+y}{\sqrt{5}} = \log(x+y) + \log(x-y)$$
$$\log\left(\frac{x+y}{\sqrt{5}}\right)^2 = \log\left[(x+y)\cdot(x-y)\right]$$

Odavde antilogaritmiranjem dobivamo:

$$\left(\frac{x+y}{\sqrt{5}}\right)^2 = (x-y)(x+y)$$

i dalje

$$\frac{(x+y)^2}{5} = (x+y)(x-y)$$
$$(x+y)^2 = 5(x+y)(x-y)$$

Budući da izraz $x + y$ ne može biti jednak 0 (jer tada ne postoji $\log(x + y)$), posljednju jednakost smijemo podijeliti s $x + y$, pa ćemo dobiti:

$$x + y = 5(x - y),$$

odnosno

$$4x = 6y,$$

te konačno

$$y = \frac{3}{2}x.$$

840. *Koji realan broj podijeljen s* $\dfrac{\frac{15}{4}-6.03}{1-\frac{1}{50}}:\dfrac{19\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)}{\frac{7}{20}}$ *daje količnik* $\dfrac{91}{11}$?

__Rješenje:__ Izračunajmo najprije vrijednost djelitelja. Imamo:

$$\frac{\frac{15}{4}-6.03}{1-\frac{1}{50}}:\frac{19\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)}{\frac{7}{20}}=\frac{\frac{15}{4}-\frac{603}{100}}{\frac{50}{50}-\frac{1}{50}}:\frac{\left(-\frac{57}{5}\right)}{\frac{7}{20}}=\frac{\frac{375-603}{100}}{\frac{49}{50}}\cdot\left(-\frac{7}{228}\right)=\frac{\frac{-228}{100}}{\frac{49}{50}}\cdot\left(-\frac{7}{228}\right)=$$
$$=\frac{228}{98}\cdot\frac{7}{228}=\frac{1}{14}$$

Označimo li traženi broj s a, možemo postaviti jednadžbu:

$$a:\frac{1}{14}=\frac{91}{11}$$

iz koje je

$$a=\frac{1}{14}\cdot\frac{91}{11}=\frac{13}{22}.$$

841. *Za koji je realan broj x apsolutna vrijednost kompleksnoga broja* $z=\dfrac{(x-i\sqrt{5})^2}{\sqrt{2}-i}$ *jednaka* $7\sqrt{3}$?

__Rješenje:__ Odredimo najprije apsolutnu vrijednost zadanoga kompleksnoga broja kao funkciju varijable x. Imamo:

$$|z|=\left|\frac{(x-i\sqrt{5})^2}{\sqrt{2}-i}\right|=\frac{\left|(x-i\sqrt{5})^2\right|}{\left|\sqrt{2}-i\right|}=\frac{\left|(x-i\sqrt{5})\right|^2}{\left|\sqrt{2}-i\right|}=\frac{\left(\sqrt{x^2+\left(-\sqrt{5}\right)^2}\right)^2}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+(-1)^2}}=\frac{x^2+5}{\sqrt{2+1}}=\frac{x^2+5}{\sqrt{3}}$$

Tako iz

$$|z|=7\sqrt{3}$$

dobivamo jednadžbu

$$\frac{x^2+5}{\sqrt{3}}=7\sqrt{3}$$

iz koje je

$$x^2+5=7\cdot 3,$$

odnosno

$$x^2=16.$$

Odatle slijedi $x\in\{-4, 4\}$.

842. *Odredite vrijednosti realnoga parametra* $m \in \mathbf{R}$ *tako da točke* $A = (m - 2, 0)$, $B = (m + 1, 2 - m)$ *i* $C = (0, m + 2)$ *budu vrhovi pravokutnoga trokuta s hipotenuzom* $\overline{AB}$.

Rješenje: Prema Pitagoninu poučku, zadane točke će biti vrhovi pravokutnoga trokuta s hipotenuzom $\overline{AB}$ ako i samo ako vrijedi jednakost

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2.$$

Kako je

$|AC|^2 = [0 - (m - 2)]^2 + [(m + 2) - 0]^2 = 2m^2 + 8,$
$|BC|^2 = [0 - (m + 1)]^2 + [(m + 2) - (2 - m)]^2 = (m + 1)^2 + 4m^2 = 5m^2 + 2m + 1,$
$|AB|^2 = [(m + 1) - (m - 2)]^2 + [(2 - m) - 0]^2 = 9 + (2 - m)^2 = m^2 - 4m + 13,$

uvrštavanjem u navedenu jednakost dobivamo:

$$(2m^2 + 8) + (5m^2 + 2m + 1) = m^2 - 4m + 13,$$

odnosno

$$3m^2 + 3m - 2 = 0.$$

Realna rješenja ove kvadratne jednadžbe su:

$$m_1 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{6}, \quad m_2 = \frac{\sqrt{33} - 3}{6},$$

i to su tražene vrijednosti realnoga parametra m.

843. *Odredite dirališta tangenata krivulje* $k \ldots\ x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$ *okomitih na pravac* $p \ldots\ 3x + y + 7 = 0$.

Rješenje: Zapišimo najprije jednadžbu pravca p u eksplicitnom obliku:

$$p \ldots\ y = -3x - 7,$$

pa očitajmo koeficijent smjera toga pravca:

$$k_p = -3.$$

To znači da je koeficijent smjera tangenata

$$k_t = -\frac{1}{k_p} = \frac{1}{3}.$$

Sada presijecimo zadanu krivulju familijom pravaca

$$p \ldots\ y = \frac{1}{3}x + l.,$$

odnosno

$$p \ldots\ x = 3y - 3l.$$

Uvrštavanjem ovoga izraza u jednadžbu krivulje dobivamo:

$$(3y - 3l)^2 + y^2 - 4 \cdot (3y - 3l) + 6y + 3 = 0,$$

odnosno

$$10y^2 - (18l + 6)y + 9l^2 + 12l + 3 = 0.$$

U slučaju traženih tangenata ta jednadžba (po y) ima točno jedno realno rješenje. Nužan i dovoljan uvjet za to jest da diskriminanta D te jednadžbe bude jednaka nuli. Kako je

$$D = -12 \cdot (1 + 3l) \cdot (7 + l),$$

to će D biti jednaka nuli ako i samo ako je $l \in \{-7, -\frac{1}{3}\}$. Uvrštavanjem $l = -7$ u jednadžbu

$$(3y - 3l)^2 + y^2 - 4 \cdot (3y - 3l) + 6y + 3 = 0$$

nakon sređivanja i reduciranja dobivamo:

$$y^2 + 12y + 36 = 0.$$

Jedino realno rješenje te jednadžbe je $y = -6$, pa je pripadni x jednak

$$x = 3 \cdot (-6) - 3 \cdot (-7) = 3.$$

pa je diralište $D_1 = (3, -6)$. Analogno, uvrštavanjem $l = -\frac{1}{3}$ u jednadžbu

$$(3y - 3l)^2 + y^2 - 4 \cdot (3y - 3l) + 6y + 3 = 0$$

nakon sređivanja i reduciranja dobijemo:

$$y^2 = 0.$$

Jedino realno rješenje te jednadžbe je $y = 0$, pa je pripadni x jednak

$$x = 3 \cdot 0 - 3 \cdot (-\frac{1}{3}) = 1.$$

Tako smo dobili i koordinate drugoga dirališta: $D_2 = (1, 0)$.

844. *Duljina stranice jednakostraničnoga trokuta je* a = 6 cm. *Izračunajte duljinu luka kružnice opisane tom trokutu nad jednom stranicom toga trokuta.*

Rješenje: Traženi luk ima polumjer $r = \frac{a}{3} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ cm, a središnji kut $\alpha = 120°$ $(= 180° - 2 \cdot \frac{60^\circ}{2})$. Stoga je njegova duljina

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180},$$

odnosno

$$l = \frac{4}{3}\sqrt{3} \cdot \pi \text{ cm}.$$

845. *Odredite vrijednost realnoga parametra* β *tako da polinom* $p(x) = x^4 - 16x^3 - \alpha x - \beta$ *bude djeljiv polinomom* $q(x) = x^2 + 2$.

Rješenje: Podijelimo polinome p i q prema pravilu o dijeljenju polinoma:

$$
\begin{array}{l}
(x^4 - 16x^3 \qquad - \alpha x - \beta) : (x^2 + 2) = x^2 - 16x - 2 \\
\underline{-x^4 \qquad -2x^2} \\
\quad -16x^3 - 2x^2 \quad - \alpha x - \beta \\
\quad \underline{16x^3 + \qquad 32x} \\
\qquad\quad -2x^2 + (32 - \alpha)x - \beta \\
\qquad\quad \underline{2x^2 + \qquad\qquad 4} \\
\qquad\qquad (32 - \alpha)x + (4 - \beta)
\end{array}
$$

Tako smo dobili da je ostatak pri provedenom dijeljenju jednak $r(x) = (32 - \alpha)x + (4 - \beta)$. Taj ostatak će biti jednak nuli (za svaki $x \in \mathbf{R}$) ako i samo ako istodobno budu vrijedile jednakosti

$$32 - \alpha = 0$$
$$4 - \beta = 0.$$

Odavde je $\alpha = 32$, $\beta = 4$, pa je tražena vrijednost parametra β jednaka 4.

846. *Pojednostavnite izraz*: $\left(\dfrac{1-\sqrt[4]{a^3}}{1-\sqrt[4]{a}}+\sqrt[4]{a}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Rješenje: Imamo redom:

$$\left(\frac{1-\sqrt[4]{a^3}}{1-\sqrt[4]{a}}+\sqrt[4]{a}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1-\left(\sqrt[4]{a}\right)^3}{1-\sqrt[4]{a}}+\sqrt[4]{a}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\left(1-\sqrt[4]{a}\right)\cdot\left(1+\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a^2}\right)}{1-\sqrt[4]{a}}+\sqrt[4]{a}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(1+\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a^2}+\sqrt[4]{a}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[1+2\cdot\sqrt[4]{a}+\left(\sqrt[4]{a}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\left(1+\sqrt[4]{a}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = (1+\sqrt[4]{a})^1 = 1+\sqrt[4]{a}$$

847. *Napišite kvadratnu jednadžbu čija su rješenja za dva veća od rješenja jednadžbe* $x^2 + 6x - 7 = 0$.

Rješenje: Rješenja zadane kvadratne jednadžbe su (prema Vieteovim formulama ili formuli za računanje rješenja kvadratne jednadžbe) $x_1 = -7$ i $x_2 = 1$. Stoga su rješenja tražene kvadratne jednadžbe $y_1 = -7 + 2 = -5$ i $y_2 = 1 + 2 = 3$, pa ta jednadžba glasi:

$$[y - (-5)] \cdot (y - 3) = 0,$$

odnosno, nakon množenja i sređivanja,

$$y^2 + 2y - 15 = 0.$$

848. *Odredite ukupan broj svih rješenja jednadžbe* $|x^2 - 5x + 6| = x^2 + 9$ *koja pripadaju skupu svih realnih rješenja nejednadžbe* $\dfrac{x-3}{x+3} < 0$.

Rješenje: Uz uvjet $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ zadana jednadžba je ekvivalentna jednadžbi

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 + 9,$$

čije jedino rješenje $x = \dfrac{6}{5}$ zadovoljava i uvjet $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ i zadanu nejednadžbu. Nadalje, uz uvjet $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ zadana jednadžba je ekvivalentna jednadžbi

$$5x - x^2 - 6 = x^2 + 9$$

koja nema realnih rješenja. Stoga samo jedno rješenje zadane jednadžbe pripada skupu svih realnih rješenja zadane nejednadžbe.

849. *Izračunajte vrijednost izraza* $|\sqrt{6}-\sqrt{8}|+|\sqrt{8}-6|+|\sqrt{6}-2|$.

Rješenje: Budući da vrijedi nejednakost $2 = \sqrt{4} < \sqrt{6} < \sqrt{8}$, to je

$$\begin{aligned} |\sqrt{6}-\sqrt{8}| &= \sqrt{8}-\sqrt{6} \\ |\sqrt{8}-6| &= 6-\sqrt{8} \\ |\sqrt{6}-2| &= \sqrt{6}-2 \end{aligned}$$

pa je vrijednost zadanoga izraza jednaka 6 – 2 = 4.

850. *Nađite zbroj svih realnih rješenja jednadžbe* $4^{2x+4}+1=4^{x+3}+4^{x+1}$.

Rješenje: Zadanu jednadžbu najprije transformirajmo na sljedeći način:

$$4^{2x}\cdot 4^4+1=4^x\cdot 4^3+4^x\cdot 4^1,$$
$$256\cdot (4^x)^2+1=64\cdot 4^x+4\cdot 4^x,$$
$$256\cdot (4^x)^2-68\cdot 4^x+1=0.$$

Zamijenimo li $t = 4^x$, dobit ćemo kvadratnu jednadžbu

$$256t^2-68t+1=0$$

čija su realna rješenja $t_1 = \frac{1}{4}$ i $t_2 = \frac{1}{64}=\left(\frac{1}{4}\right)^3$. Sada iz $4^x = \frac{1}{4}$, tj. $4^x = 4^{-1}$ slijedi $x_1 = -1$, a iz $4^x=\left(\frac{1}{4}\right)^3$ slijedi $x_2 = -3$. Stoga je traženi zbroj jednak $x_1 + x_2 = -4$.

851. *Odredite* $f(x)$ *ako je* $f\left(\frac{2005x-1}{2006}\right)=2005x$.

Rješenje: Stavimo $t = \frac{2005x-1}{2006}$. Odavde je $x = \frac{2006t+1}{2005}$, pa je $f(t) = 2005\cdot\frac{2006t+1}{2005} = 2006\cdot t+1$. Preimenovanjem nezavisne varijable dobivamo $f(x) = 2006x + 1$.

852. *Skratite razlomak*: $\dfrac{1-4\sin^2 x}{\cos 2x-\frac{1}{2}}$.

Rješenje: Koristeći jednakost $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ dobivamo:

$$\frac{1-4\sin^2 x}{\cos 2x-\frac{1}{2}}=\frac{1-4\cdot\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)}{\frac{2\cos 2x-1}{2}}=\frac{1-4\cdot\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)}{\frac{2\cos 2x-1}{2}}=\frac{1-2\cdot(1-\cos 2x)}{\frac{2\cos 2x-1}{2}}=\frac{2\cos 2x-1}{\frac{2\cos 2x-1}{2}}=2.$$

853. *Na raspolaganju nam je po jedan primjerak svake od novčanica od* 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500 *i* 1000 kn. *Koliko različitih svota možemo isplatiti s tim novčanicama ako svaku od tih svota možemo postići s točno jednim izborom novčanica*?

Rješenje: Prigodom isplate svake svote, svaku novčanicu ili uzimamo ili ne uzimamo. Kako imamo ukupno 8 vrsta novčanica, prema načelu umnoška možemo isplatiti 2^8 različitih svota. No, ovaj broj valja umanjiti za 1 jer ne uzimamo u obzir slučaj kada prigodom isplate ne uzimamo niti jednu novčanicu (tj. "isplatu" iznosa od 0 kn). Stoga je traženi broj jednak $2^8 - 1 = 255$.

854. *Dijagonala kvadrata leži na pravcu p…* $2x - y + 4 = 0$. *Ako je jedan vrh kvadrata* $A = (2, 3)$, *izračunajte duljinu stranice kvadrata.*

Rješenje: Udaljenost zadane točke od zadanoga pravca jednaka je

$$d = \frac{|2 \cdot 2 - 3 + 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

Ta je udaljenost jednaka polovici duljine dijagonale kvadrata, tj. $\frac{a}{2}\sqrt{2}$, gdje je a duljina stranice kvadrata. Tako iz

$$\frac{a}{2}\sqrt{2} = \sqrt{5}$$

dobijemo $a = \sqrt{10}$.

855. *Ako je* (x, y) *rješenje sustava jednadžbi*

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{2x} = \frac{5}{xy},$$
$$5x + 3y = 14$$

izračunajte $x^2 + y^2$.

Rješenje: Očito mora biti $x, y \neq 0$, pa prvu jednadžbu pomnožimo s $2xy$. Tako dobijemo ekvivalentan sustav

$$2x - y = 10$$
$$5x + 3y = 14.$$

Njegovo je rješenje $x = 4$, $y = –2$, pa je $x^2 + y^2 = 16 + 4 = 20$.

856. *Duljine stranica usporednika su* 4.2 cm *i* 7.1 cm, *a jedan unutrašnji kut usporednika iznosi* 73°18'. *Izračunajte duljinu kraće dijagonale usporednika.*

Rješenje: Primjenom kosinusova poučka odmah dobivamo:

$$f^2 = 4.2^2 + 7.1^2 - 2 \cdot 4.2 \cdot 7.1 \cdot \cos 73°18',$$

tj. $f \approx 7.14$ cm.

857. I*zračunajte vrijednost brojevnoga izraza*:

$$0.03 : 10^{-2} - \frac{30}{\sqrt{3}} + \sqrt{300} - 4^{-1} : 0.16.$$

Rješenje: Imamo redom:

$$0.03 : 10^{-2} - \frac{30}{\sqrt{3}} + \sqrt{300} - 4^{-1} : 0.16 =$$
$$= 0.03 : 0.01 - \frac{30}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \sqrt{100 \cdot 3} - 0.25 : 0.16 =$$
$$= 3 : 1 - \frac{30}{3} \cdot \sqrt{3} + 10\sqrt{3} - 25 : 16 =$$
$$= 3 - 10\sqrt{3} + 10\sqrt{3} - \frac{25}{16} =$$
$$= \frac{48 - 25}{16} =$$
$$= \frac{23}{16}$$

858. *Ako je* $\frac{5a+4b}{5a+7b} = \frac{2}{3}$, *izračunajte vrijednost izraza* $\frac{b^2 - a^2}{2a^2 - 3ab + b^2}$.

Rješenje: Iz $\frac{5a+4b}{5a+7b} = \frac{2}{3}$ slijedi $3 \cdot (5a + 4b) = 2 \cdot (5a + 7b)$, odnosno $5a = 2b$, a odavde je $b = \frac{5}{2}a$. Tako sada imamo:

$$\frac{b^2 - a^2}{2a^2 - 3ab + b^2} = \frac{\left(\frac{5}{2}a\right)^2 - a^2}{2a^2 - 3a \cdot \left(\frac{5}{2}a\right) + \left(\frac{5}{2}a\right)^2} = \frac{\frac{25}{4}a^2 - a^2}{2a^2 - \frac{15}{2}a^2 + \frac{25}{4}a^2} = \frac{\frac{21}{4}a^2}{\frac{3}{4}a^2} = 7 .$$

859. *Stranice usporednika duge su* 5 i 4. *Izračunajte duljinu kraće dijagonale ako duljina duže iznosi* 8.

Rješenje: U svakom usporedniku su duljine stranica a, b, te duljine dijagonala e, f ($e \geq f$) vezane tzv. *relacijom usporednika*:

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Uvrstimo li ovamo $a = 5$, $b = 4$ i $e = 8$, dobit ćemo jednadžbu:

$$64 + f^2 = 2 \cdot (25 + 16),$$

a odavde je $f = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

860. *Neka je x realno rješenje jednadžbe* $24 \cdot (3^{x-1} - 1) - 6 \cdot (5 - 6^{x-1}) = 594 + 81 \cdot 2^x$. *Izračunajte* $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Rješenje: Riješimo najprije zadanu jednadžbu. Transformirajmo je ovako:

$$24 \cdot 3^{x-1} - 24 - 30 + 6 \cdot 6^{x-1} = 594 + 81 \cdot 2^x,$$
$$8 \cdot 3 \cdot 3^{x-1} - 54 + 6^x = 594 + 81 \cdot 2^x,$$
$$8 \cdot 3^x + 6^x = 648 + 81 \cdot 2^x$$
$$3^x \cdot (8 + 2^x) = 81 \cdot (8 + 2^x).$$

Za svaki $x \in \mathbf{R}$ je $8 + 2^x > 0$, pa dijeljenjem posljednje jednakosti s tim izrazom dobivamo eksponencijalnu jednadžbu

$$3^x = 81$$

čije je rješenje $x = 4$. Stoga je $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$.

861. *Izračunajte* $\text{Im}(\overline{z})$ *ako je* $z = \frac{14 + i^{2005}}{(7 + 14i)(14 - 7i)}$.

Rješenje: Kako je 2005 : 4 = 501 i ostatak 1, to je $i^{2005} = i^{4 \cdot 64 + 1} = (i^4)^{64} \cdot i^1 = 1^{64} \cdot i = i$. Nadalje, $(7 + 14i) \cdot (14 - 7i) = 98 + 196i - 49i - 98i^2 = 98 + 147i + 98 = 196 + 147i = 49 \cdot (4 + 3i)$ Tako sada imamo:

$$z = \frac{14 + i}{49 \cdot (4 + 3i)} = \frac{1}{49} \cdot \frac{(14 + i)(4 - 3i)}{(4 + 3i)(4 - 3i)} = \frac{1}{49} \cdot \frac{56 + 4i - 42i - 3i^2}{16 - 9i^2} = \frac{1}{49} \cdot \frac{59 - 38i}{25} = \frac{59}{1225} - \frac{38}{1225} i .$$

Stoga je $\text{Im}(\overline{z}) = -\text{Im}\, z = -\left(-\frac{38}{1225}\right) = \frac{38}{1225}$.

862. *Izračunajte vrijednost izraza* $36^{\log_6 5} + 10^{1 - \log 2} - 3^{\log_9 36}$.

Rješenje: Kako je

$$36^{\log_6 5} = \left(6^2\right)^{\log_6 5} = 6^{2\log_6 5} = 6^{\log_6 (5^2)} = 5^2 = 25,$$

$$10^{1 - \log 2} = \frac{10}{10^{\log 2}} = \frac{10}{2} = 5,$$

$$3^{\log_9 36} = \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_9 36} = 9^{\frac{1}{2}\log_9 36} = 9^{\log_9 \left(36^{\frac{1}{2}}\right)} = 36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6,$$

vrijednost zadanoga izraza jednaka je 25 + 5 – 6 = 24.

863. *Riješite jednadžbu*: $\log_5(\log x) + \log_5(\log x^4 - 1) = 1$.

Rješenje: Imamo redom:

$\log_5[\log x \cdot (4\log x - 1)] = 1$
$\log x \cdot (4\log x - 1) = 5^1$,
$4\log^2 x - \log x - 5 = 0$.

Stavimo li $t = \log x$, dobit ćemo kvadratnu jednadžbu $4t^2 - t - 5 = 0$ čija su rješenja $t_1 = -1$ i $t_2 = \frac{5}{4}$. Rješenje t_1 ne dolazi u obzir jer mora vrijediti nejednakost $t > 0$ (tj. $\log x > 0$ kako bi izraz $\log_5(\log x)$ bio definiran). Stoga dolazi u obzir jedino $t_2 = \frac{5}{4}$, pa iz $\log x = \frac{5}{4}$ dobivamo $x = 10^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{10^5} = \sqrt[4]{100\,000}$.

864. *Odredite vrijednost realnoga parametra a tako da pravac p… $x + y - 3 = 0$ dodiruje krivulju Γ… $y = -x^2 + 2x + 2a$.*

Rješenje: Presijecimo zadani pravac i zadanu krivulju, tj. riješimo sustav

$$y = -x + 3$$
$$y = -x^2 + 2x + 2a$$

Metodom usporedbe (komparacije) dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$-x^2 + 2x + 2a = -x + 3$$

koju možemo zapisati u obliku

$$x^2 - 3x + (3 - 2a) = 0.$$

Da bi pravac p dodirivao krivulju Γ, ta jednadžba mora imati točno jedno realno rješenje. Nužan i dovoljan uvjet za to jest da njezina diskriminanta D bude jednaka nuli. Kako je

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot (3 - 2a) = 8a - 3,$$

iz uvjeta $D = 0$ dobivamo linearnu jednadžbu

$$8a - 3 = 0$$

čije je rješenje $a = \frac{3}{8}$.

865. *Izračunajte* $\operatorname{tg}(x + y)$ *ako je* $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 15$, $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = 20$.

Rješenje: Jednakost $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = 20$ možemo zapisati u obliku $\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \frac{1}{\operatorname{tg} y} = 20$, odnosno $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} = 20$, pa kad ovamo uvrstimo jednakost $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 15$, dobivamo da je $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$. Tako je:

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} = \frac{15}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{15}{\frac{1}{4}} = 60.$$

866. *Ako su* $a = \log 3$, $b = \log 5$ i $c = \log 2$, *izrazite* $\log_{40} 9$ *pomoću* a, b i c.

Rješenje: Kako je

$$\log_{40} 9 = \frac{\log 9}{\log 40} = \frac{\log(3^2)}{\log(2^3 \cdot 5)} = \frac{2\log 3}{\log(2^3) + \log 5} = \frac{2\log 3}{3\log 2 + \log 5},$$

slijedi da je $\log_{40} 9 = \frac{2a}{b + 3c}$.

867. *Odredite* $f(x)$ *ako je* $f\left(\frac{2006x - 1}{2005}\right) = 2006x$.

Rješenje: Stavimo $t = \frac{2006x - 1}{2005}$. Odavde je $x = \frac{2005t + 1}{2006}$, pa je $f(t) = 2006 \cdot \frac{2005t + 1}{2006} = 2005t + 1$. Preimenovanjem nezavisne varijable dobivamo $f(x) = 2005x + 1$.

868. *Kutovi trokuta odnose se kao* $13 : 10 : 7$. *Izračunajte omjer najkraće i srednje stranice toga trokuta.*

Rješenje: Izračunajmo najprije veličine kutova trokuta. Iz podataka o njihovom odnosu bez smanjenja općenitosti možemo zaključiti da postoji strogo pozitivan realan broj $k \in \mathbf{R}$ takav da je $\alpha = 13k$, $\beta = 10k$, $\gamma = 7k$. Budući da zbroj svih kutova u trokutu mora biti jednak 180°, tj. mora vrijediti jednakost $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, dobivamo jednadžbu

$$13k + 10k + 7k = 180°,$$

a odavde je $k = 6°$. Tako je $\alpha = 13k = 78°$, $\beta = 10k = 60°$ i $\gamma = 7k = 42°$. Najkraća i srednja stranica nalaze se nasuprot najmanjem i srednjem kutu, tj. nasuprot kutovima γ i β, pa je riječ o stranicama c i b. Prema sinusovu poučku je

$$b : \sin\beta = c : \sin\gamma,$$

otkuda je

$$c : b = \sin\beta : \sin\gamma,$$

odnosno

$$c : b = \sin 60° : \sin 42°,$$

odnosno

$$c : b = \sqrt{3} : 2\sin 42^{\circ}.$$

869. *Nađite ostatak pri dijeljenju polinoma* $f(x) = x^{2005} - 2006x + 1$ *polinomom* $g(x) = x - 1$.

__Rješenje:__ Prema poučku o dijeljenju polinoma s ostatkom, postoje polinomi $q(x)$ i $r(x)$ takvi da je stupanj polinoma r strogo manji od stupnja polinoma g i da za svaki realan broj x vrijedi jednakost:

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x).$$

Kako je stupanj polinoma g jednak 1, stupanj polinoma r jednak je 0, tj. r je konstanta, pa neka je $r = a$ za neki $a \in \mathbf{R}$. Tako sada u jednakost

$$x^{2005} - 2006x + 1 = (x - 1) \cdot q(x) + a$$

uvrstimo $x = 1$, pa dobijemo:

$$1 - 2006 + 1 = 0 \cdot q(x) + a,$$

a odavde je izravno $a = -2004$.

870. *Zbroj polovine, trećine, četvrtine i petine nekoga realnoga broja je za* $\frac{17}{3}$ *veći od samoga broja*. Odredite taj broj.

__Rješenje:__ Označimo traženi broj sa x. Iz zadanih podataka možemo postaviti jednadžbu:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x = x + \frac{17}{3}$$

koja množenjem s NZV(2,3,4,5) = 60 prelazi u ekvivalentnu jednadžbu

$$30x + 20x + 15x + 12x = 60x + 340,$$

odnosno u

$$17x = 340.$$

Rješenje ove jednadžbe je $x = 20$ i to je traženi realan broj.

871. *Cijena neke robe je snižena za* 10%. *Za koliko posto treba povećati novu cijenu robe da se dobije cijena prije sniženja*?

Rješenje: Najkraće i najbrže zadatak možemo riješiti ovako: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je cijena robe prije sniženja 100 kn. Tada je cijena robe nakon sniženja

$$100 - 10\% \cdot 100 = 100 - 10 = 90 \text{ kn.}$$

Da se dobije cijena robe prije sniženja, tj. cijena od 100 kn, novu cijenu od 90 kn treba povećati za

$$100 - 90 = 10 \text{ kn,}$$

odnosno za

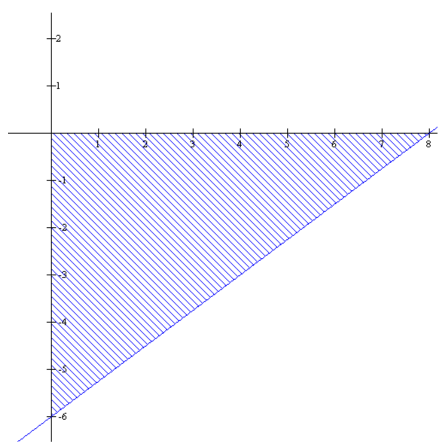
$$\frac{10}{90} \cdot 100 = \frac{100}{9}\% = 11\frac{1}{9}\% .$$

872. *Riješite nejednadžbu*: $\dfrac{x+|x|}{3|x|} \geq \dfrac{1}{2}$.

Rješenje: Za $x > 0$ je $|x| = x$ pa je nejednadžba ekvivalentna s $\dfrac{x+x}{3x} \geq \dfrac{1}{2}$, odnosno s istinitom nejednakošću $\dfrac{2}{3} \geq \dfrac{1}{2}$. Za $x = 0$ nejednadžba nema smisla, a za $x < 0$ je $|x| = -x$ pa je nejednadžba ekvivalentna s $\dfrac{x-x}{-3x} \geq \dfrac{1}{2}$, odnosno s lažnom nejednakošću $0 \geq \dfrac{1}{2}$. Stoga je skup svih realnih rješenja zadane nejednadžbe $\mathbf{R}^+$, tj. interval $\langle 0, +\infty\rangle$.

873. *Izračunajte polumjer kružnice opisane trokutu kojega pravac* $p \ldots\ 3x - 4y - 24 = 0$ *zatvara s koordinatnim osima.*

Rješenje: Promotrite sliku:



Dobiveni trokut je očito pravokutan trokut čije su katete $a = 8$ i $b = 6$, pa je duljina njegove hipotenuze, prema Pitagorinu poučku, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$. U svakom je pravokutnom trokutu polumjer opisane kružnice R jednak polovini duljine hipotenuze c. Stoga je $R = \dfrac{c}{2} = 5$.

874. *U elipsu* $x^2 + a^2y^2 = a^2$ *upisan je kvadrat površine* $P = 0.4$ kv. jed. Odredite $|a|$.

Rješenje: Budući da je elipsa osnosimetrična s obzirom na obje koordinatne osi, i upisani kvadrat mora biti takav. To znači da se koordinate njegovih vrhova dobiju kao sjecišta simetrala I. i III., odnosno II. i IV. kvadranta s elipsom. Jednadžba simetrale I. i III. kvadranta je $s_1 \ldots\ y = x$, pa iz sustava

$$\begin{aligned} y &= x \\ x^2 + a^2 y^2 &= a^2 \end{aligned}$$

odmah dobivamo koordinate dvaju nasuprotnih vrhova kvadrata $A = (-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, -\frac{a}{\sqrt{1+a^2}})$ i $C = (\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{a}{\sqrt{1+a^2}})$. Kvadrat međusobne udaljenosti vrhova A i C jednak je kvadratu duljine dijagonale d upisanoga kvadrata, pa iz $d^2 = |AC|^2$ slijedi:

$$d^2 = \frac{8a^2}{1+a^2}.$$

Budući da je površina kvadrata (kao funkcija dijagonale kvadrata) jednaka

$$P = \frac{1}{2} d^2,$$

uvrštavanjem $P = 0.4 = \frac{2}{5}$ i $d^2 = \frac{8a^2}{1+a^2}$ dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$\frac{4a^2}{1+a^2} = \frac{2}{5}$$

iz koje je $a^2 = \frac{1}{9}$, odnosno $|a| = \sqrt{a^2} = \frac{1}{3}$.

875. *U kutiji se nalaze* 5 *crvenih i* 7 *zelenih kuglica. Na slučajan način odjednom izvlačimo* 3 *kuglice. Izračunajte vjerojatnost da među njima bude barem jedna crvena kuglica.*

Rješenje: Neka je A = "među izvučenim kuglicama je barem jedna crvena kuglica". Tada je suprotni događaj A^C = "među izvučenim kuglicama nema niti jedne crvene kuglice" = "sve izvučene kuglice su zelene". Njegova vjerojatnost jednaka je

$$q = p(A^C) = \frac{\text{broj povoljnih ishoda}}{\text{broj mogućih ishoda}} = \frac{\binom{7}{3}}{\binom{7+5}{3}} = \frac{7}{44}.$$

Stoga je tražena vjerojatnost jednaka

$$p = 1 - q = 1 - \frac{7}{44} = \frac{37}{44}.$$

876. *Odredite ukupan broj različitih peteroznamenkastih prirodnih brojeva koji su u dekadskom brojevnom sustavu zapisani različitim znamenkama i kojima zbroj znamenke stotica i znamenke desetica iznosi* 6.

Rješenje: Pogledajmo najprije mogućnosti izbora za znamenke stotica i desetica. Njihov zbroj treba biti jednak 6, što znači da su mogući slučajevi: (0, 6), (1, 5), (2, 4), (4, 2), (5, 1), (6, 0) (slučaj (3, 3)) nije moguć jer znamenke trebaju biti različite). Razlikujemo sljedeće slučajeve:

1.) Izabran je uređen par (0, 5) – tada na mjesto desettisućica možemo izabrati bilo koju od 8 znamenaka: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, na mjesto tisućica neku od preostalih 7 znamenaka, a na mjesto jedinica neku od preostalih 6 znamenaka. U ovom slučaju dobivamo ukupno $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ različitih prirodnih brojeva.

2.) Izabran je uređeni par (1, 5) – tada na mjesto desettisućica možemo izabrati bilo koju od 7 znamenaka: 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 (pri ovom izboru isključujemo 0), na mjesto tisućica bilo koju od 7 znamenaka (točnije, biramo neku znamenku iz skupa {0, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9} \ {izabrana znamenka desettisućica}), a na mjesto jedinica bilo koju od preostalih 6 znamenaka. Tako dobivamo ukupno 7 · 7 · 6 = 294 različita prirodna broja.

Lako se vidi da se slučajevi (2, 4), (4, 2) i (5, 1) svode na slučaj 2.), a slučaj (6, 0) na slučaj 1. Stoga je traženi broj jednak 4 · 294 + 2 · 336 = 1 848.

877. *Nakon povećanja plaće od* 24% *zaposlenik je primio plaću od* 3 968 kn. *Za koliko* kn *je povećana njegova plaća*?

Rješenje: Riječ je o postotnom računu "više sto", gdje su zadane uvećana osnovna svota $S + P = 3\,968$ i postotak uvećanja $p = 24$. Traži se iznos uvećanja, tj. postotni iznos P. Formula za određivanje te vrijednosti je:

$$P = \frac{p}{100 + p} \cdot (S + P)\,.$$

Uvrštavanjem $p = 24$, $S + P = 3\,968$ odmah dobivamo $P = 768$ kn. Dakle, plaća zaposlenika uvećana je za 768 kn.

878. *Izračunajte vrijednost brojevnoga izraza*:

$$\frac{\left[\left(1.25^{-1} - \frac{3}{5}\right)^{-1} - \sqrt[3]{27}\right]^3 + \sqrt{225}\left[\sqrt[4]{81} - \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]}{2 - \left[\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}} - 2^2\right]^0}$$

Rješenje: Imamo redom:

$$\frac{\left[\left(1.25^{-1} - \frac{3}{5}\right)^{-1} - \sqrt[3]{27}\right]^3 + \sqrt{225}\left[\sqrt[4]{81} - \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]}{2 - \left[\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}} - 2^2\right]^0} = \frac{\left[\left(\left(\frac{5}{4}\right)^{-1} - \frac{3}{5}\right)^{-1} - \sqrt[3]{3^3}\right]^3 + \sqrt{15^2}\left[\sqrt[4]{3^4} - \left(\frac{1}{3^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]}{2 - \left[\left(\frac{1}{7^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 4\right]^0} =$$

$$\frac{\left[\left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\right)^{-1} - 3\right]^3 + 15\left[3 - \frac{1}{3^{-1}}\right]}{2 - \left[\frac{1}{7^{-1}} - 4\right]^0} = \frac{\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} - 3\right]^3 + 15[3 - 3]}{2 - (7 - 4)^0} = \frac{(5-3)^3}{2 - 3^0} = \frac{2^3}{2 - 1} = 8$$

879. *Potpuno skratite algebarski razlomak*: $\dfrac{a^2 + 2ab + b^2 - c^2}{a^2 - b^2 + c^2 + 2ac}$.

Rješenje: Imamo redom:

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2 - c^2}{a^2 - b^2 + c^2 + 2ac} = \frac{(a^2 + 2ab + b^2) - c^2}{(a^2 + 2ac + c^2) - b^2} = \frac{(a+b)^2 - c^2}{(a+c)^2 - b^2} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{(a+c+b)(a+c-b)} = \frac{a+b-c}{a+c-b}$$

880. *Riješite jednadžbu*: $\dfrac{2x+1}{x+4}+\dfrac{17}{x^2-16}=\dfrac{6x-25}{3x-2}$.

Rješenje: Budući da je $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$, jednadžbu ćemo pomnožiti s $(3x - 2)(x^2 - 16)$. Tako ćemo dobiti:

$$(2x + 1)(x - 4)(3x - 2) + 17(3x - 2) = (6x - 25)(x^2 - 16)$$

Dalje je:

$$\begin{gathered}(2x^2 - 7x - 4)(3x - 2) + 51x - 34 = 6x^3 - 25x^2 - 96x + 400,\\ 6x^3 - 21x^2 - 12x - 4x^2 + 14x + 8 + 51x - 34 = 6x^3 - 25x^2 - 96x + 400,\\ 149x = 426,\\ x = \frac{426}{149}.\end{gathered}$$

Budući da su za $x = \dfrac{426}{149}$ vrijednosti izraza $x + 4$, $x^2 - 16$ i $3x - 2$ različite od nule, taj je racionalan broj jedino rješenje polazne jednadžbe.

881. *Riješite nejednadžbu*: $\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|\ge 2$.

Rješenje: Postoje dvije mogućnosti:

1.) $\dfrac{x+2}{x-1}\le -2$

Ovu nejednadžbu dalje transformiramo ovako:

$$\begin{aligned}&\frac{x+2}{x-1}+2\le 0\\ &\frac{x+2+2(x-1)}{x-1}\le 0\\ &\frac{3x}{x-1}\le 0 \quad /:3\\ &\frac{x}{x-1}\le 0\end{aligned}$$

Uz uvjet $x - 1 \neq 0$, množenjem posljednje nejednadžbe s $(x - 1)^2$ dobivamo kvadratnu nejednadžbu $x \cdot (x - 1) \le 0$. Rješenje te nejednadžbe je skup $[0, 1]$, pa zbog uvjeta $x - 1 \neq 0$, slijedi da je skup rješenja polazne nejednadžbe u ovom slučaju $[0, 1\rangle$.

2.) $\dfrac{x+2}{x-1}\ge 2$

Ovu nejednadžbu dalje transformiramo ovako:

$$\begin{aligned}&\frac{x+2}{x-1}-2\ge 0\\ &\frac{x+2-2(x-1)}{x-1}\ge 0\\ &\frac{4-x}{x-1}\ge 0\end{aligned}$$

Uz uvjet $x - 1 \neq 0$, množenjem posljednje nejednadžbe su $(x - 1)^2$ dobivamo kvadratnu nejednadžbu $(4 - x)(x - 1) \geq 0$ čiji je skup rješenja $[1, 4]$. Zbog uvjeta $x - 1 \neq 0$, u ovom je slučaju skup rješenja polazne nejednadžbe $\langle 1, 4]$.

Tako sada slijedi da je skup svih rješenja polazne nejednadžbe $[0, 1\rangle \cup \langle 1, 4] = [0, 4] \setminus \{1\}$.

882. *Odredite kompleksan broj* $z \in \mathbf{C}$ *iz jednakosti*: $z \cdot i = i + 1$.

Rješenje: Odmah imamo:

$$z = \frac{i+1}{i} = \frac{i+1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i^2 + i}{i^2} = \frac{-1+i}{-1} = 1 - i\ .$$

883. *Za koju vrijednost realnoga parametra* $p \in \mathbf{R}$ *vektori* $\vec{a} = p\vec{i} - 2\vec{j}$ i $\vec{b} = 5\vec{i} + (p-1)\vec{j}$ *imaju jednake duljine*?

Rješenje: Zadani vektori će imati jednake duljine ako i samo ako imaju jednake kvadrate tih duljina. Kako je:

$$|\vec{a}|^2 = p^2 + (-2)^2 = p^2 + 4,$$
$$|\vec{b}|^2 = 5^2 + (p - 1)^2 = p^2 - 2p + 26,$$

izjednačavanjem tih izraza dobivamo jednadžbu

$$2p = 22$$

čije je jedino realno rješenje $p = 11$.

884. *Odredite skup svih realnih rješenja jednadžbe* $8 \cdot 0.5^{x(x+1)} = 0.25^{\frac{3}{2}x}$.

Rješenje: Prelaskom na bazu 2 dobivamo:

$$2^3 \cdot (2^{-1})^{x(x+1)} = (2^{-2})^{\frac{3}{2}x}$$
$$2^{3-x^2-x} = 2^{-3x}$$

Izjednačavanjem eksponenata dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$3 - x^2 - x = -3x,$$

tj.

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Sva realna rješenja te jednadžbe su $x_1 = -1$ i $x_2 = 3$. To su ujedno i sva realna rješenja polazne jednadžbe, pa je traženi skup $\{-1, 3\}$.

885. *Izračunajte vrijednost brojevnoga izraza*: $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2} - \log_3 5}$.

Rješenje: Imamo redom:

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}-\log_3 5} = \left(\frac{1}{3^2}\right)^{\frac{1}{2}-\log_3 5} = \left(3^{-2}\right)^{\frac{1}{2}-\log_3 5} = 3^{-1+2\log_3 5} = 3^{-1} \cdot 3^{\log_3 (5^2)} = \frac{1}{3} \cdot 25 = \frac{25}{3}\ .$$

886. *Ako je* $\operatorname{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$ *, izračunajte* $\frac{\operatorname{tg}\,\alpha + \operatorname{ctg}\,\alpha}{\operatorname{tg}\,\alpha - \operatorname{ctg}\,\alpha}$.

Rješenje: Iz $\operatorname{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$ slijedi $\operatorname{ctg}\,\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\,\alpha} = \frac{2}{\sqrt{6}}$. Stoga je:

$$\frac{\operatorname{tg}\,\alpha + \operatorname{ctg}\,\alpha}{\operatorname{tg}\,\alpha - \operatorname{ctg}\,\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{2}{\sqrt{6}}}{\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{2}{\sqrt{6}}} = \frac{\frac{6+4}{2\sqrt{6}}}{\frac{6-4}{2\sqrt{6}}} = \frac{10}{2} = 5\,.$$

887. *Odredite realan broj* $x \in [0, 2\pi\rangle$ *za koji je* $\cos x = -0.472$ *i* $\operatorname{ctg} x > 0$.

Rješenje: Odredimo najprije broj x_1 iz jednadžbe $\cos x_1 = 0.472$. Dobivamo $x_1 = \arccos 0.472 = 1.07924$. Zbog nejednakosti $\cos x < 0$, $\operatorname{ctg} x > 0$, traženi broj x pripada intervalu $\left\langle \pi, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$. Dobijemo ga koristeći jednakost

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$

u koju uvrstimo $\alpha = x_1 = 1.07924$:

$$\cos(\pi + 1.07924) = -\cos 1.07924,$$

odnosno, zbog $\pi = 3.14159$,

$$\cos 4.22083 = -0.472.$$

Prema tome, $x = 4.22083$.

888. *Odredite realnu funkciju inverznu funkciji* $f(x) = -\log_5(x-1)$.

Rješenje: Standardnim postupkom dobivamo:

$$\begin{array}{ll}
1.) & y = -\log_5(x-1),\\
2.) & x = -\log_5(y-1),\\
3.) & -x = \log_5(y-1)\\
 & y - 1 = 5^{-x}\\
 & y = 5^{-x} + 1,\\
4.) & f^{-1}(x) = 5^{-x} + 1.
\end{array}$$

Prema tome, $f^{-1}(x) = 5^{-x} + 1$.

889. *Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma* $f(x) = x^5 - 3x^3 - 5x$ *polinomom* $g(x) = x^2 - x + 1$.

Rješenje: Primjenom pravila o dijeljenju polinoma dobivamo:

$$\begin{array}{l}
(x^5 \quad - 3x^3 \quad - 5x) : (x^2 - x + 1) = x^3 + x^2 - 3x - 4\\
\underline{-x^5 + x^4 - x^3}\\
\quad x^4 - 4x^3\\
\quad \underline{-x^4 + x^3 - x^2}\\
\qquad -3x^3 - x^2 - 5x\\
\qquad \underline{3x^3 - 3x^2 + 3x}\\
\qquad\quad -4x^2 - 2x\\
\qquad\quad \underline{4x^2 - 4x + 4}\\
\qquad\qquad -6x + 4
\end{array}$$

Odavde slijedi da je traženi ostatak jednak $r(x) = -6x + 4$.

890. *Izračunajte duljinu one tetive krivulje* $y^2 = 8x$ *koja prolazi točkom* $A = (2, -4)$ *usporedno s pravcem* $p \ldots 2x - 2y - 3 = 0$.

Rješenje: Pravac na kojemu leži tetiva zadane krivulje ima oblik $2x - 2y + C = 0$, gdje je $C \in \mathbf{R}$ realna konstanta. Taj pravac mora prolaziti točkom A, pa koordinate te točke moraju zadovoljavati jednadžbu pravca:

$$2 \cdot 2 - 2 \cdot (-4) + C = 0.$$

Odavde je $C = -12$, pa je jednadžba pravca na kojemu leži zadana tetiva $p_1 \ldots\ 2x - 2y - 12 = 0$, tj. $p_2 \ldots\ x - y - 6 = 0$. Presijecimo taj pravac s zadanom krivuljom, tj. riješimo sustav jednadžbi:

$$x - y - 6 = 0$$
$$y^2 = 8x$$

Iz prve jednadžbe je $x = y + 6$, pa uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobivamo:

$$y^2 = 8(y + 6),$$

odnosno

$$y^2 - 8y - 48 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $y_1 = -4$ i $y_2 = 12$. Pripadne vrijednosti nepoznanice x su $x_1 = y_1 + 6 = 2$ i $x_2 = y_2 + 6 = 18$. Stoga su krajnje točke tetive $T_1 = A = (2, -4)$ i $T_2 = (18, 12)$. Međusobna udaljenost tih točaka jednaka je

$$d = \sqrt{(18-2)^2 + (12-(-4))^2} = \sqrt{16^2 + 16^2} = \sqrt{2 \cdot 16^2} = 16\sqrt{2}\,.$$

891. *Nađite sjecišta krivulje* $k \ldots\ (x-5)^2 + (y-8)^2 = 5$ *i pravca* $p \ldots\ x + 2y - 21 = 0$.

Rješenje: Rješavamo sustav

$$(x-5)^2 + (y-8)^2 = 5$$
$$x + 2y - 21 = 0.$$

Iz druge jednadžbe je $x = -2y + 21$, što uvršteno u prvu daje

$$(-2y + 21 - 5)^2 + (y - 8)^2 - 5 = 0,$$

tj.

$$(-2y + 16)^2 + (y - 8)^2 - 5 = 0$$

Kvadriranjem dobivamo:

$$5y^2 - 80y + 315 = 0,$$

odnosno, nakon dijeljenja s 5,

$$y^2 - 16y + 63 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $y_1 = 7$ i $y_2 = 9$. Pripadne vrijednosti nepoznanice x su $x_1 = -2y_1 + 21 = 7$ i $x_2 = -2y_2 + 21 = 3$. Stoga su tražena sjecišta točke $S_1 = (3, 9)$ i $S_2 = (7, 7)$.

892. *Opseg pravokutnoga trokuta iznosi* 36 cm, *a duljina hipotenuze* 15 cm. *Izračunajte sinuse šiljastih kutova toga trokuta.*

Rješenje: Uvrštavanjem $c = 15$ u jednakost $a + b + c = 36$ dobivamo $a + b = 21$. Nadalje, prema Pitagorinu je poučku $a^2 + b^2 = 15^2 = 225$. Tako iz sustava $a + b = 21$, $a^2 + b^2 = 225$ dobivamo da katete trokuta imaju duljine 9 cm i 12 cm. Stoga su sinusi šiljastih kutova trokuta $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ i $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

893. *Duljine stranica trokuta su* $a = \sqrt{6}$, $b = 3 + \sqrt{3}$ *i* $c = 2\sqrt{3}$. *Izračunajte veličinu najmanjega kuta toga trokuta.*

Rješenje: Očito je $a < c < b$, pa je najmanji kut trokuta onaj nasuprot najkraće stranice, tj. kut α. Njegov je kosinus, prema kosinusovu poučku, jednak

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\cos\alpha = \frac{(3+\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{6})^2}{2(3+\sqrt{3})(2\sqrt{3})},$$

$$\cos\alpha = \frac{9 + 6\sqrt{3} + 3 + 12 - 6}{12(1+\sqrt{3})},$$

$$\cos\alpha = \frac{18 + 6\sqrt{3}}{12(1+\sqrt{3})},$$

$$\cos\alpha = \frac{6\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{12(1+\sqrt{3})},$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Odavde slijedi $\alpha = \frac{\pi}{6} = 30°$.

894. *Središta dviju kružnica polumjera* 3 cm *i* 5 cm *udaljena su* 15 cm. *Izračunajte kut kojega zatvaraju zajedničke unutrašnje tangente tih kružnica.*

Rješenje: Nacrtajte sliku! Neka su S_1 i S_2 središta kružnica, S_3 sjecište unutrašnjih tangenata, D_1 diralište bilo koje od tangenti i veće kružnice, a D_2 diralište bilo koje od tangenti i manje kružnice. Trokut $S_1S_3D_1$ je pravokutan, duljina jedne njegove katete je $|S_1D_1| = 5$, a duljina hipotenuze $|S_1S_3|$. Analogno, trokut $S_2S_3D_2$ je pravokutan, duljina jedne njegove katete je $|S_2D_2| = 3$, a duljina hipotenuze $|S_2S_3|$. Oba ta trokuta imaju zajednički kut kod vrha S_3 (to je polovica traženoga kuta). S jedne je strane njegov sinus jednak $\frac{|S_1D_1|}{|S_1S_3|} = \frac{5}{|S_1S_3|}$, a s druge $\frac{|S_2D_2|}{|S_2S_3|} = \frac{3}{|S_2S_3|}$ Izjednačavanjem tih izraza dobivamo:

$$\frac{5}{|S_1S_3|} = \frac{3}{|S_2S_3|},$$

otkuda je

$$|S_2S_3| = \frac{3}{5}|S_1S_3|.$$

Preostaje primijeniti činjenicu:

$$15 = |S_1S_2| = |S_1S_3| + |S_2S_3|,$$

pa uvrštavanjem $|S_2S_3| = \frac{3}{5}|S_1S_3|$ dobivamo jednadžbu

$$\frac{8}{5}|S_1S_3| = 15,$$

a odavde je

$$|S_1S_3| = \frac{75}{8}.$$

Označimo li traženi kut s α, onda je

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{|S_1S_3|}$$
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{\frac{75}{8}},$$
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{8}{15}$$

te

$$\alpha = 64°46'19''.$$

895. *Površina kruga je* 96 m^2. *Izračunajte površinu onoga isječka toga kruga čiji je središnji kut* 15°.

Rješenje: Površina kruga upravno je razmjerna veličini središnjega kuta. Stoga ako središnjemu kutu od 360° odgovara površina od 96 m^2, onda 360 : 15 = 24 puta manjemu središnjemu kutu odgovara 24 puta manja površina kružnoga isječka: 96 : 24 = 4 m^2. Prema tome, tražena je površina 4 m^2.

896. *Površina plašta uspravnog valjka visine* 14 cm *je* 112 cm^2. Izračunajte obujam valjka.

Rješenje: Označimo sa r polumjer osnovke, a sa v visinu valjka. Znamo da je $v = 14$, te da je $112 = P = 2r\pi \cdot v$. Stoga je $112 = 2r\pi \cdot 14$, pa je $r = \frac{4}{\pi}$. Tako je $V = r^2\pi \cdot v = \frac{16}{\pi^2} \cdot \pi \cdot 14 = \frac{224}{\pi}$ cm^3.

897. *Duljina visine pravilne uspravne četverostrane piramide je* 20 cm, *a površina poprečnoga presjeka te piramide je* 120 cm^2. *Izračunajte obujam te piramide.*

Rješenje: Poprečni presjek piramide je jednakokračan trokut čija je osnovica dijagonala osnovke piramide, a visina upravo visina piramide. Kako je osnovka kvadrat stranice a, njegova dijagonala je $d = a\sqrt{2}$, pa – ako s h označimo visinu piramide – slijedi:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot h.$$

Ovamo uvrstimo $P = 120$, $h = 20$, pa dobijemo $a = 6\sqrt{2}$ cm. Stoga je obujam piramide jednak $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = 480$ cm^3.

898. *Izračunajte omjer obujma uspravnoga kružnoga stošca i umnoška površine osnoga presjeka i opsega osnovke toga stošca.*

Rješenje: Neka je r polumjer osnovke stošca, a h njegova visina. Obujam stošca je

$$V = \frac{1}{3} r^2\pi \cdot h,$$

površina osnoga presjeka

$$P = \frac{1}{2} \cdot (2r) \cdot h = r \cdot h,$$

a opseg osnovke stošca

$$O = 2r\pi.$$

Stoga je

$$V : (P \cdot O) = (\frac{1}{3} r^2\pi \cdot h) : (2r^2\pi \cdot h) = \frac{1}{3} : 2 = \text{(nakon množenja omjera s 3)} = 1 : 6.$$

899. *Pojednostavnite izraz*: $\{x - 2[x - 2(x - 2)]\} \cdot \{x - [2x - (-x + 1)]\}$.

Rješenje: Imamo redom:

$\{x - 2[x - 2(x - 2)]\} \cdot \{x - [2x - (-x + 1)]\} = \{x - 2[x - 2x + 4)]\} \cdot \{x - [2x + x - 1]\} = \{x - 2[4 - x]\} \cdot \{x - [3x - 1]\} = \{x - 8 + 2x\} \cdot \{x - 3x + 1\} = (3x - 8)(1 - 2x) = -6x^2 + 19x - 8$.

900. *Odredite ukupan broj različitih realnih rješenja jednadžbe* $\frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 2$.

Rješenje: Uz uvjet $x \neq 1$, jednadžbu pomnožimo s $(x - 1)$, pa dobijemo:

$$x^2 = 1 + 2(x - 1),$$

odnosno

$$x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Jedino realno rješenje ove jednadžbe je $x = 1$, a to rješenje ne zadovoljava uvjet $x \neq 1$. Stoga zadana jednadžba nema niti jedno realno rješenje.

901. *Sustav jednadžbi* $x^2 + y^2 = 5$, $2x^2 + y = 0$ *ima dva realna rješenja*: (x_1, y_1) *i* (x_2, y_2). *Izračunajte zbroj* $x_1 + y_1 + x_2 + y_2$.

Rješenje: Iz prve jednadžbe je $x^2 = 5 - y^2$, što uvršteno u drugu jednadžbu daje $10 - 2y^2 + y = 0$, odnosno $2y^2 - y - 10 = 0$. Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $y_1 = -2$ i $y_2 = \frac{5}{2}$. Za $y_1 = -2$ je $x^2 = 5 - (-2)^2 = 5 - 4 = 1$, tj. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, dok za $y_2 = \frac{5}{2}$ dobivamo $x^2 = -\frac{5}{4}$, a ta jednadžba nema realnih rješenja. Stoga su sva realna rješenja zadanoga sustava $(-1, -2)$ i $(1, -2)$. Zbog toga je traženi zbroj jednak $-1 + 1 + 2 \cdot (-2) = -4$.

902. *Skupini djece treba razdijeliti* 72 kn *tako da svako dijete dobije jednak iznos novca. Kad bi u skupini bilo* 3 *djeteta manje*, *svako bi dijete dobilo za* 4 kn *više*. *Izračunajte ukupan broj djece u skupini*.

Rješenje: Označimo sa x traženi broj, a sa y svotu koju dobije svako dijete. Očito je $xy = 72$, te $(x - 3)(y + 4) = 72$, tj. $xy - 3y + 4x - 12 = 72$. Zbog $xy = 72$ tu jednadžbu možemo zapisati u obliku $4x - 3y = 12$. Tako sada imamo sustav $4x - 3y = 12$, $xy = 72$. Rješavamo ga pazeći na to da x (broj djece u skupini) mora biti prirodan broj, pa dobijemo: $x = 9$, $y = 8$ (rješenje $x = -6$, $y = -12$ ne dolazi u obzir). Dakle, u skupini ima devetero djece.

903. *Riješite nejednadžbu*: $\frac{1}{x} > x$.

Rješenje: Jednadžbu najprije zapišimo u obliku $\frac{1}{x} - x > 0$, tj. u obliku $\frac{1-x^2}{x} > 0$. Razlikujemo dva moguća slučaja:

1.) $1 - x^2 > 0$
$x > 0$

Iz prvoga je uvjeta $x \in \langle -1, 1\rangle$, pa, zbog $x > 0$, slijedi da je skup rješenja u ovom slučaju $\langle 0, 1\rangle$.

2.) $1 - x^2 < 0$
$x < 0$

Iz prvoga je uvjeta $x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$, pa, zbog $x < 0$, slijedi da je skup svih rješenja u ovom slučaju $\langle -\infty, -1\rangle$.

Prema tome, skup svih realnih rješenja polazne nejednadžbe je $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 0, 1\rangle$.

904. *Odredite intervale rasta funkcije* $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

Rješenje: Budući da je koeficijent uz x^2 jednak 1, graf zadane funkcije je parabola oblika $\cup$. To znači da ta funkcija raste na intervalu $\langle x_{min}, +\infty\rangle$, gdje je x_{min} vrijednost nezavisne varijable x za koju $f(x)$ poprima najmanju vrijednost. Kako je $x_{\min} = -\frac{-2}{2\cdot 1} = 1$, zaključujemo da je traženi interval $\langle 1, +\infty\rangle$.

905. *Odredite prirodno područje definicije* (*domenu*) *funkcije* $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

Rješenje: Zadana funkcija je racionalna funkcija (količnik dvaju polinoma). Ona nije definirana jedino u nultočkama svojega nazivnika. Te nultočke dobijemo rješavajući jednadžbu $x^2 - 1 = 0$. Njezina su rješenja $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$, pa je traženo područje definicije $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$.

906. *Izračunajte zbroj svih nultočaka polinoma* $p(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 1 + 2i)(x - 1 - 2i)$.

Rješenje: Nultočke zadanoga polinoma su $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1 - 2i$ i $x_4 = 1 + 2i$ (svaku zagradu treba izjednačiti s nulom). Njihov je zbroj jednak 3.

907. *Pojednostavnite izraz*: $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{(1-x)\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{1+\sqrt{x}}$.

Rješenje: Najprije uočimo da je $1 - x = 1^2 - (\sqrt{x})^2 = (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$. Tako imamo redom:

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{(1-x)\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{1+\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{1+\sqrt{x}} =$$

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + (1-\sqrt{x})\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 - \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 = 2$$

908. *Riješite jednadžbu*: $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x+1}$.

<u>Rješenje:</u> Budući da su i lijeva i desna strana jednadžbe nenegativni realni brojevi (jer je drugi korijen iz nenegativnoga realnoga broja opet nenegativan realan broj), smijemo kvadrirati zadanu jednadžbu, pa ćemo dobiti:

$$2x - 1 = x + 1,$$

a odavde je $x = 2$. Izravnim uvrštavanjem $x = 2$ u polaznu jednadžbu dobivamo identitet $\sqrt{3}\equiv\sqrt{3}$, pa je $x = 2$ ujedno i jedino realno rješenje polazne jednadžbe.

909. *Pojednostavnite izraz*: $\left(\dfrac{9a^{-2}}{16b^3c^{-1}}\right)^{-3}:\left(\dfrac{8a^3c^{-2}}{27b^{-5}}\right)^{2}$.

<u>Rješenje:</u> Koristeći činjenice da je $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, $16 = 2^4$ i $27 = 3^3$, primjenom pravila za potenciranje dobivamo:

$$\left(\frac{9a^{-2}}{16b^3c^{-1}}\right)^{-3}:\left(\frac{8a^3c^{-2}}{27b^{-5}}\right)^{2}=\left(\frac{3^2a^{-2}}{2^4b^3c^{-1}}\right)^{-3}:\left(\frac{2^3a^3c^{-2}}{3^3b^{-5}}\right)^{2}=\frac{3^{-6}a^6}{2^{-12}b^{-9}c^3}:\frac{2^6a^6c^{-4}}{3^6b^{-10}}=\frac{2^{12}a^6b^9}{3^6c^3}\cdot\frac{3^6c^4}{2^6a^6b^{10}}=\frac{2^6c}{b}=\frac{64c}{b}.$$

910. *Nađite zbroj svih realnih rješenja jednadžbe* $|4x - 8| = 12$.

<u>Rješenje:</u> Dva su moguća slučaja: 1.) $4x - 8 = -12$, otkuda je $x = -1$; 2.) $4x - 8 = 12$, otkuda je $x = 5$. Tako je traženi zbroj jednak $-1 + 5 = 4$.

911. *Riješite jednadžbu*: $4^{3x+2} = 64\cdot 2^{2x-4}$.

<u>Rješenje:</u> Prelaskom na bazu 2 redom dobivamo:

$$(2^2)^{3x+2} = 2^6\cdot 2^{2x-4}$$
$$2^{6x+4} = 2^{2x+2}$$

Odavde izjednačavanjem eksponenata dobivamo linearnu jednadžbu:

$$6x + 4 = 2x + 2$$

čije je jedino realno rješenje $x=-\dfrac{1}{2}$. Taj je broj ujedno i jedino realno rješenje polazne jednadžbe.

912. *Izračunajte umnožak rješenja jednadžbe* $\dfrac{8}{\log x-1}=1+\log x$.

<u>Rješenje:</u> Uz uvažavanje uvjeta $x > 0$ i $\log x - 1 \neq 0$, pomnožimo zadanu jednadžbu s $\log x - 1$. Dobit ćemo:

$$8 = (\log x - 1)(\log x + 1),$$

odnosno

$$\log^2 x - 1 = 8,$$

odnosno

$$\log^2 x = 9.$$

Odavde je $(\log x)_1 = -3$ i $(\log x)_2 = 3$, pa su $x_1 = 10^{-3}$ i $x_2 = 10^3$ sva rješenja polazne jednadžbe. Njihov je umnožak jednak $10^{-3+3} = 10^0 = 1$.

913. *Pojednostavnite izraz*: $\dfrac{\sin x+\operatorname{tg} x}{1+\cos x}$.

Rješenje: Zbog $\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$, zadani izraz je jednak

$$\frac{\sin x+\dfrac{\sin x}{\cos x}}{1+\cos x}=\frac{\sin x\cdot\left(1+\dfrac{1}{\cos x}\right)}{1+\cos x}=\frac{\sin x\cdot\left(\dfrac{1+\cos x}{\cos x}\right)}{1+\cos x}=\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot(1+\cos x)}{1+\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tg} x\,.$$

914. *Izračunajte zbroj svih rješenja jednadžbe* $1+\operatorname{tg}\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ *koja pripadaju segmentu* $[0, 2\pi]$.

Rješenje: Zadana jednadžba je ekvivalentna jednadžbi

$$\operatorname{tg}\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-1.$$

Odavde je

$$3x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k\cdot\pi,\ k\in\mathbf{Z},$$

odnosno

$$x_k=\frac{\pi}{3}\cdot(1+k)\,,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Tako sada iz uvjeta

$$0\le x_k\le 2\pi$$

dobivamo nejednadžbu

$$0\le\frac{\pi}{3}\cdot(1+k)\ \le 2\pi$$

koja dijeljenjem s $\dfrac{\pi}{3}$ prelazi u

$$0\le 1+k\le 6,$$

odnosno

$$-1\le k\le 5.$$

Imamo ukupno 7 cijelih brojeva koji su rješenje ove nejednadžbe: –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5. Izračunajmo x_k za svaki od njih:

$$x_{-1}=\frac{\pi}{3}\cdot(1-1)=0,$$

$$x_0=\frac{\pi}{3}\cdot(1+0)=\frac{\pi}{3},$$

$$x_1 = \frac{\pi}{3} \cdot (1+1) = \frac{2\pi}{3},$$

$$x_2 = \frac{\pi}{3} \cdot (1+2) = \pi,$$

$$x_3 = \frac{\pi}{3} \cdot (1+3) = \frac{4\pi}{3},$$

$$x_4 = \frac{\pi}{3} \cdot (1+4) = \frac{5\pi}{3},$$

$$x_5 = \frac{\pi}{3} \cdot (1+5) = 2\pi.$$

Sada je lako izračunati zbroj svih dobivenih rješenja: on je jednak 7π.

915. *Odredite skup svih rješenja nejednadžbe* $\sin x > \frac{1}{2}$ *na segmentu* $[0, 2\pi]$.

Rješenje: Unutar segmenta funkcija $f(x) = \sin x$ poprima nenegativne vrijednosti na segmentu $[0, \pi]$. Na tom segmentu ona najprije raste na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, a nakon toga pada na intervalu $\langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$. Nadalje, na segmentu $[0, \pi]$ funkcija $f(x)$ poprima vrijednost $\frac{1}{2}$ točno dva puta: za $x = \frac{\pi}{6}$ i za $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. Između tih dviju vrijednosti vrijednosti funkcije $f(x)$ su strogo veće od $\frac{1}{2}$, a na preostalom dijelu segmenta $[0, \pi]$ te vrijednosti su strogo manje od $\frac{1}{2}$. Stoga je traženi skup $\langle \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \rangle$.

916. *Zadani su vektori* $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ *i* $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j}$. *Odredite vektor* $\vec{c} = 2 \cdot (\vec{a} - 3\vec{b}) - (-\vec{a} + \vec{b})$.

Rješenje: Najprije pojednostavnimo izraz za dobivanje vektora $\vec{c}$:

$$\vec{c} = 2 \cdot (\vec{a} - 3\vec{b}) - (-\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} - 6\vec{b} + \vec{a} - \vec{b} = 3\vec{a} - 7\vec{b}.$$

Stoga je

$$\vec{c} = 3\vec{a} - 7\vec{b} = 3(2\vec{i} - 3\vec{j}) - 7(3\vec{i} + \vec{j}) = 6\vec{i} - 9\vec{j} - 21\vec{i} - 7\vec{j} = -15\vec{i} - 16\vec{j}.$$

917. *Duljine stranica trokuta su* $a = 5$, $b = 4$ *i* $c = 7$. *Izračunajte sinus kuta nasuprot stranice* a.

Rješenje: Primijetimo najprije da kut čiji sinus tražimo nužno mora biti šiljasti kut (jer a nije najdulja stranica trokuta, pa bi suprotna pretpostavka povlačila zadani trokut ima barem dva tupa kuta (nasuprot stranica a i c) što je nemoguće). Primjenom kosinusova poučka odredimo njegov kosinus:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{5}{7}.$$

Tako je traženi sinus jednak

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2}{7}\sqrt{6}.$$

918. *Zbroj duljina kateta pravokutnoga trokuta je za 20% veći od duljine hipotenuze. Izračunajte veličinu najmanjega kuta toga trokuta.*

Rješenje: Neka su a, b, c redom duljine kateta, odnosno hipotenuze toga trokuta. Podatak iskazan u zadatku možemo zapisati u obliku jednakosti

$$a + b = c + \frac{20}{100} \cdot c,$$

odnosno

$$a + b = 1.2 \cdot c.$$

Kvadriranjem te jednakosti dobivamo:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 1.44 \cdot c^2.$$

Prema Pitagorinu poučku je

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

pa slijedi:

$$c^2 + 2ab = 1.44 \cdot c^2,$$

odnosno

$$2ab = 0.44 \cdot c^2.$$

Dijeljenjem s c^2 ova jednakost prelazi u

$$2 \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = 0.44$$

No, u pravokutnom je trokutu

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha$$
$$\frac{b}{c} = \cos\alpha$$

pa uvrštavanjem u prethodnu jednakost dobivamo:

$$2 \sin\alpha \cos\alpha = 0.44,$$

odnosno

$$\sin 2\alpha = 0.44.$$

Odavde je

$$2\alpha = 26.10388113733989966258342279445 9°,$$

odnosno

$$\alpha = 13.05194056866994983129171139722 95° \approx 13°3'7''$$

i to je traženi najmanji kut trokuta (preostala dva su 90° i 76°56'53'').

919. *Iz točke A neki objekt vidimo pod kutom od* 50° *u odnosu na horizontalu. Odmaknemo li se za* 10 *metara od točke A*, *objekt ćemo vidjeti pod kutom od* 45°. *Kolika je visina objekta*?

Rješenje: Neka je h tražena visina, a d udaljenost od objekta do točke A (po horizontali). Tada je:

$$\text{tg } 50° = \frac{h}{d}.$$

Da bismo objekt vidjeli pod manjim kutom, nužno je još više se udaljiti od njega. Stoga je udaljenost (u metrima) s koje vidimo objekt pod kutom od 45° jednaka $d + 10$, pa je

$$\text{tg } 45° = \frac{h}{d+10}.$$

Budući da je tg 45° = 1, iz posljednje jednakosti slijedi

$$h = d + 10,$$

odnosno

$$d = h - 10$$

što uvršteno u prvu jednakost daje

$$\text{tg } 50° = \frac{h}{h-10}.$$

Odavde je

$$h = \frac{10 \cdot \text{tg } 50°}{\text{tg } 50° - 1} = 62.150261513806715336054277745 8145 \approx 62.15 \text{ m}.$$

920. *Objekt visok* 20 *metara iz točke A se vidi pod kutom od* 45° *u odnosu na horizontalu. Kako se treba pomaknuti iz točke A tako da se objekt vidi pod kutom od* 60° *u odnosu na horizontalu*?

Rješenje: Postupamo analogno kao u rješenju prethodnoga zadatka. Neka je d udaljenost od objekta do točke A, a $h = 20$ visina objekta. Tada iz

$$\text{tg } 45° = \frac{h}{d}$$

slijedi

$$d = h = 20 \text{ m}.$$

Da bismo objekt vidjeli pod većim kutom, moramo mu se približiti. Neka je x udaljenost za koju se moramo približiti objektu. Tada je:

$$\text{tg } 60° = \frac{h}{d-x},$$

pa uvrštavanjem tg 60° = $\sqrt{3}$, $h = d = 20$ dobivamo jednadžbu

$$\sqrt{3} = \frac{20}{20 - x}$$

iz koje je

$$x = \frac{20\sqrt{3} - 20}{\sqrt{3}} = 20 - \frac{20}{3} \cdot \sqrt{3} = 8.4529946162074847098170243899608 5 \approx 8.453 \text{ m.}$$

Prema tome, objektu se trebamo približiti za (približno) 8.453 m.

921. *Točka* $T(m, n)$ *leži na pravcu* $p \ldots \frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1$ *i jednako je udaljena od točaka* $A(6, 3)$ *i* $B(7, 2)$. *Izračunajte* $m - n$.

<u>Rješenje:</u> Točka T je sjecište pravca p i simetrale s dužine $\overline{AB}$. Pravac s prolazi polovištem P dužine $\overline{AB}$ okomito na pravac AB. Kako je

$$P = \left(\frac{6+7}{2}, \frac{3+2}{2}\right) = \left(\frac{13}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

i

$$k_s = -\frac{1}{k_{AB}} = \frac{x_A - x_B}{y_B - y_A} = \frac{6-7}{2-3} = 1,$$

to je jednadžba pravca s

$$y - \frac{5}{2} = 1 \cdot (x - \frac{13}{2}),$$

odnosno

$$y = x - 4.$$

Tako su koordinate točke T rješenja sustava

$$\begin{aligned} \frac{x}{10} + \frac{y}{5} &= 1, \\ y &= x - 4 \end{aligned}$$

odnosno sustava

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10 \\ x - y &= 4 \end{aligned}$$

Odavde je $x = 6$, $y = 2$, pa je $T(6, 2)$. Dakle, $m = 6$, $n = 2$, te je $m - n = 6 - 2 = 4$.

922. *Izračunajte vrijednost izraza* $(\sqrt{3}i - 1)^{2006} + (\sqrt{3}i + 1)^{2006}$.

<u>Rješenje:</u> Kompleksne brojeve u zagradama najprije zapišimo u trigonometrijskom obliku. Dobivamo:

$$\sqrt{3}i-1=-1+\sqrt{3}i=2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\cdot(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})$$

$$\sqrt{3}i+1=1+\sqrt{3}i=2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\cdot(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$$

Primjenom Moivréove formule dobivamo:

$$(\sqrt{3}i-1)^{2006}+(\sqrt{3}i+1)^{2006}=\left[2\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\right]^{2006}+\left[2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{2006}=$$
$$=2^{2006}\cdot\left(\cos\frac{10030\pi}{3}+i\sin\frac{10030\pi}{3}+\cos\frac{2006\pi}{3}+i\sin\frac{2006\pi}{3}\right)=$$
$$=2^{2006}\cdot\left[\cos\left(1671\cdot 2\pi+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(1671\cdot 2\pi+\frac{4\pi}{3}\right)+\cos\left(334\cdot 2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(334\cdot 2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\right]=$$
$$=2^{2006}\cdot\left[\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right]=$$
$$=2^{2006}\cdot\left[-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]=$$
$$=-2^{2006}$$

923. *Ako je* $0 < a < b$, *izračunajte vrijednost izraza* $\left\{\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-2}\right\}^{\frac{1}{2}}$.

Rješenje: Imamo redom:

$$\left\{\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-2}\right\}^{\frac{1}{2}}=\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{(-2)\cdot\frac{1}{2}}=\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}=$$
$$=\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}=\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^{-1}=\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^{-1}=\left(\frac{a-b}{\sqrt{ab}}\right)^{-1}=\frac{\sqrt{ab}}{a-b}$$

924. *Riješite jednadžbu*: $x^{3-\log_x\frac{x}{3}}=1200$.

Rješenje: Logaritmiranjem obje strane jednadžbe po nepoznanici x dobivamo:

$$3-\log_x x+\log_x 3=\log_x 1200,$$
$$\log_x 1200-\log_x 3=3-1$$
$$\log_x 400=2$$
$$x^2=400$$
$$x_{1,2}=\pm 20.$$

Budući da opća potencija i logaritam nisu definirani za negativne realne brojeve, jedino rješenje polazne jednadžbe je $x = 20$.

925. *Zbroj svih binomnih koeficijenata u razvoju binoma* $\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}\right)^n$ *jednak je* 1024. *Koliko članova toga razvoja pripada skupu* **Q**?

Rješenje: Prema binomnom poučku je

$$\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\sqrt[3]{3})^k\cdot(\sqrt{2})^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{\frac{k}{3}}\cdot 2^{\frac{n-k}{2}}.$$

Zbroj svih binomnih koeficijenata u razvoju ovoga binoma jednak je 2^n. Naime, uvrstimo li u binomni poučak

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\cdot y^{n-k}$$

$x = y = 1$, dobit ćemo

$$(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k\cdot 1^{n-k},$$

odnosno

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n.$$

Tako sada iz jednadžbe

$$2^n = 1024$$

(zbog $1024 = 2^{10}$) dobivamo $n = 10$. Stoga je tipični član zadanoga binomnoga razvoja

$$\binom{10}{k}3^{\frac{k}{3}}\cdot 2^{\frac{10-k}{2}}.$$

Taj član će biti racionalan broj ako i samo ako brojevi $\frac{k}{3}$ i $\frac{10-k}{2}$ istovremeno budu prirodni brojevi. Budući da mora biti $0 \le k \le 10$, iz prvoga uvjeta dobivamo $k \in \{0, 3, 6, 9\}$, a iz drugoga $k \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Presjek tih dvaju skupova je skup $\{0, 6\}$, pa slijedi da su točno dva člana zadanoga razvoja racionalni brojevi – prvi: $\binom{10}{0}3^{\frac{0}{3}}\cdot 2^{\frac{10-0}{2}}=24$ i sedmi: $\binom{10}{6}3^{\frac{6}{3}}\cdot 2^{\frac{10-6}{2}}=7560$.

926. *Izračunajte ukupan broj različitih načina da se* 10 *osoba rasporedi u* 5 *grupa po dvije osobe.*

Rješenje: Označimo osobe s 1, 2, …, 10, a grupe s $G_1, G_2, \ldots, G_5$. Broj osoba koje možemo izabrati u grupu G_1 je $\binom{10}{2}$, u grupu G_2 $\binom{10-2}{2}=\binom{8}{2}$, u grupu G_3 $\binom{8-2}{2}=\binom{6}{2}$, u grupu G_4 $\binom{6-2}{2}=\binom{4}{2}$, dok preostale dvije osobe možemo rasporediti u grupu G_5 na jedan jedini način. Kako grupe možemo poredati na ukupno 5! različitih načina, slijedi da je traženi broj jednak

$$\frac{\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}}{5!}=\frac{\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}\cdot\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}\cdot\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\cdot\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{2^5}=\frac{30240}{32}=945.$$

927. *Neka je X skup svih četveroznamenkastih prirodnih brojeva čije znamenke pripadaju skupu* $\{4, 5, 6\}$, *pri čemu se svaka od tih znamenaka barem jednom pojavljuje u svakom od brojeva. Izračunajte ukupan broj podskupova skupa X.*

Rješenje: Izračunajmo najprije ukupan broj elemenata skupa X. Svih četveroznamenkastih prirodnih brojeva čije znamenke pripadaju skupu {4, 5, 6} ima $3^4 = 81$. Od njih:

- $2^4 = 16$ ne sadrži znamenku 4
- $2^4 = 16$ ne sadrži znamenku 5,
- $2^4 = 16$ ne sadrži znamenku 6
- 1 (6666) ni znamenku 4 ni znamenku 5,
- 1 (4444) ni znamenku 5 ni znamenku 6,
- 1 (5555) ni znamenku 4 ni znamenku 6.

Prema formuli uključivanja i isključivanja, ukupan broj svih četveroznamenkastih prirodnih brojeva u kojima se svaka od znamenki 4, 5 i 6 pojavljuje barem jednom jednak je

$$|X| = 81 - 3 \cdot 16 + 3 \cdot 1 = 36.$$

Stoga je ukupan broj podskupova skupa X jednak $2^{|X|} = 2^{36}$.

928. *Izračunajte ukupan broj različitih načina na koje* 4 *osobe mogu podijeliti* 5 *različitih knjiga tako da svaka osoba dobije barem jednu knjigu i da sve knjige budu podijeljene.*

Rješenje: S obzirom da svaka osoba mora dobiti barem jednu knjigu, najprije izaberemo osobu kojoj ćemo dati dvije knjige. Taj izbor možemo učiniti na 4 različita načina, a izbor dvije različite knjige na $\binom{5}{2} = 10$ načina. Preostale su nam tri osobe kojima možemo podijeliti tri knjige na točno $3! = 6$ različitih načina. Prema načelu umnoška, traženi ukupan broj jednak je $4 \cdot 10 \cdot 6 = 240$.

929. *Na dvama usporednim pravcima p i q odabrano je redom* 12, *odnosno* 10 *različitih točaka. Izračunajte ukupan broj različitih trokutova koje određuju te točke.*

Rješenje: Imamo točno dvije mogućnosti za formiranje trokuta: ili odabrati 1 točku s pravca p, a preostale dvije s pravca q ili odabrati 2 točke s pravca p, a preostalu s pravca q. U prvom je slučaju ukupan broj različitih trokutova jednak $\binom{10}{2} \cdot \binom{12}{1} = 45 \cdot 12 = 540$, a u drugom $\binom{10}{1} \cdot \binom{12}{2} = 10 \cdot 66 = 660$. Stoga je ukupan broj različitih trokutova jednak $540 + 660 = 1\,200$.

930. *Na raspolaganju su nam tri različita proizvoda tvornice A, četiri različita proizvoda tvornice B i pet različitih proizvoda tvornice C. Na koliko načina sve te proizvode možemo poredati u niz tako da svi proizvodi tvornice B budu jedan do drugoga, svi proizvodi tvornice C budu jedan do drugoga, a nikoja dva proizvoda tvornice A ne budu jedan do drugoga*?

Rješenje: Jedini razmještaji koji odgovaraju uvjetima zadatka su oblika A – (blok B ili blok C) – A – (blok C ili blok B) – A. Na prvo, treće i peto mjesto stavimo proizvode tvornice A na ukupno 3! načina. Potom razmjestimo proizvode tvornica B i C na 2! Načina, a nakon toga zasebno proizvode tvornice B na 4! Načina i proizvode tvornice C na 5! načina. Prema tome, traženi je broj 2!3!4!5! = 34 560.

931. *Izračunajte koeficijent uz* $x^{-\frac{1}{6}}$ *u razvoju binoma* $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$.

Rješenje: Prema binomnom je poučku

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^8 = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} \left(\sqrt{x}\right)^k \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{8-k} = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} (-1)^{8-k} x^{\frac{k}{2}} \cdot x^{-\frac{8-k}{3}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} (-1)^{8-k} x^{\frac{k}{2}} \cdot x^{\frac{k-8}{3}} = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} (-1)^{8-k} x^{\frac{5k-16}{6}}$$

Odredimo za koji k dobijemo član $x^{-\frac{1}{6}}$. U tu svrhu riješimo (po k) jednadžbu

$$x^{-\frac{1}{6}} = x^{\frac{5k-16}{6}},$$

odnosno jednadžbu

$$5k - 16 = -1.$$

Odavde je $k = 3$, pa je traženi koeficijent jednak $\binom{8}{3} \cdot (-1)^{8-3} = -56$.

932. *Zbroj koeficijenata uz x i x^2 u binomnom razvoju $(1 + x)^n$ jednak je 55. Izračunajte koeficijent uz x^8.*

<u>Rješenje:</u> Budući da je

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k,$$

slijedi da je koeficijent uz x jednak $\binom{n}{1} = n$, a koeficijent uz x^2 $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$. Tako dobivamo jednadžbu

$$n + \frac{n \cdot (n-1)}{2} = 55$$

koja je ekvivalentna kvadratnoj jednadžbi

$$n^2 + n - 110 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su $n_1 = -11$ i $n_2 = 10$. Budući da n mora biti prirodan broj, rješenje n_1 zanemarujemo, pa preostaje $n = n_2 = 10$. Sada lako nalazimo da je koeficijent uz x^8 jednak $\binom{10}{8} = \binom{10}{10-8} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$.

933. *Koeficijent trećega člana u razvoju binoma $(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^n$ jednak je 28. Odredite srednji član toga razvoja.*

<u>Rješenje:</u> Koeficijent trećega člana u zadanom razvoju je $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$. Iz uvjeta

$$\binom{n}{2} = 28$$

dobivamo jednadžbu

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} = 28,$$

odnosno kvadratnu jednadžbu

$$n^2 - n - 56 = 0$$

čije je jedino rješenje u skupu **N** $n = 8$. Stoga je srednji član zadanoga razvoja 4. član i on je jednak

$$\binom{8}{4} \cdot \left(\sqrt{1+x}\right)^4 \cdot \left(\sqrt{1-x}\right)^4 = 70 \cdot (1+x)^2 \cdot (1-x)^2 = 70 \cdot (1-x^2)^2 .$$

934. *Izračunajte zbroj svih cjelobrojnih članova u razvoju binoma* $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)^9$.

Rješenje: Prema binomnom je poučku

$$\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)^9 = \sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}(\sqrt[3]{3})^k(\sqrt{2})^{9-k} = \sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}3^{\frac{k}{3}}2^{\frac{9-k}{2}} .$$

Cjelobrojne članove dobivamo za k – ove takve da su oba razlomka $\frac{k}{3}$ i $\frac{9-k}{2}$ istodobno cijeli brojevi (pri čemu je $0 \le k \le 9$). Ukupno su dva takva broja: 3 i 9. Odgovarajući članovi su $\binom{9}{3}3^{\frac{3}{3}} \cdot 2^{\frac{9-3}{2}} = 2016$ i $\binom{9}{9}3^{\frac{9}{3}} \cdot 2^{\frac{9-9}{2}} = 27$. Njihov je zbroj jednak 2043.

935. *Usporedite brojeve* $a = \binom{2006}{1002}$, $b = \binom{2006}{1003}$ i $c = \binom{2006}{1004}$.

Rješenje: Kako je 1004 + 1002 = 2006, to je $\binom{2006}{1004} = \binom{2006}{2006-1004} = \binom{2006}{1002}$. Prema svojstvu unimodalnosti niza binomnih koeficijenata, niz $\left(\binom{2006}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ raste do člana $\binom{2006}{\frac{2006}{2}} = \binom{2006}{1003}$, a potom počinje opadati. Stoga je $a = c < b$.

936. *Zadane su realne funkcije* $f_1(x) = \sqrt{x+1}$ *i* $f_2(x) = 4x - 1$. *Izračunajte* $(f_1 \circ f_2 + f_2 \circ f_1)(1)$.

Rješenje: Imamo redom:

$(f_1 \circ f_2 + f_2 \circ f_1)(1) = (f_1 \circ f_2)(1) + (f_2 \circ f_1)(1) = f_1(f_2(1)) + f_2(f_1(1)) = f_1(4 \cdot 1 - 1) + f_2(\sqrt{1+1}) = f_1(3) + f_2(\sqrt{2}) =$
$= \sqrt{3+1} + (4 \cdot \sqrt{2} - 1) = 2 + 4\sqrt{2} - 1 = 4\sqrt{2} + 1.$

937. *Riješite nejednadžbu* $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3 \frac{x+3}{x+1}\right) \ge 0$.

Rješenje: Postavimo najprije nužne uvjete uz koje nejednadžba uopće ima rješenje. Svaki logaritmand mora biti strogo veći od 0, što daje:

$$\log_3 \frac{x+3}{x+1} > 0$$
$$\frac{x+3}{x+1} > 0.$$

Iz prvoga uvjeta dobivamo

$$\frac{x+3}{x+1} > 1$$

pa lako vidimo da taj uvjet povlači drugi uvjet $\frac{x+3}{x+1} > 0$. Nadalje je:

$$\frac{x+3}{x+1} - 1 > 0$$

$$\frac{x+3-(x+1)}{x+1} > 0$$

$$\frac{2}{x+1} > 0.$$

Ta nejednakost će biti valjana ako i samo ako je $x + 1 > 0$, tj. $x \in \langle -1, +\infty\rangle$.
Sada možemo prijeći na rješavanje nejednadžbe. Uzastopnim antilogaritmiranjem (pri kojemu se znak nejednakosti mijenja ako i samo ako je baza strogo manja od 1) dobivamo:

$$\log_3 \frac{x+3}{x+1} \le \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$\log_3 \frac{x+3}{x+1} \le 1$$

$$\frac{x+3}{x+1} \le 3^1$$

$$\frac{x+3}{x+1} \le 3$$

$$\frac{x+3}{x+1} - 3 \le 0$$

$$\frac{x+3-3(x+1)}{x+1} \le 0$$

$$\frac{x+3-3x-3}{x+1} \le 0$$

$$\frac{-2x}{x+1} \le 0 \quad /:(-2)$$

$$\frac{x}{x+1} \ge 0$$

Zbog uvjeta $x \in \langle -1, +\infty\rangle$ vrijednost nazivnika je strogo veća od nule. Stoga množenjem nejednadžbe sa (strogo pozitivnim) brojem $x + 1$ dobivamo:

$$x \ge 0.$$

Stoga je rješenje polazne nejednadžbe presjek skupova $[0, +\infty\rangle$ i $\langle -1, +\infty\rangle$, a to je skup $[0, +\infty\rangle$.

938 *Nađite ostatak pri dijeljenju polinoma* $f(x) = x^{2006} - 2006x^{2005} + 2005$ *polinomom* $g(x) = x^2 - 1$.

Rješenje: Ostatak pri dijeljenju svakoga polinoma polinomom 2. stupnja je polinom stupnja najviše 1. Stoga traženi ostatak ima oblik $r(x) = ax + b$, pa prema poučku o dijeljenju polinoma s ostatkom

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

možemo zapisati:

$$x^{2006} - 2006x^{2005} + 2006 = (x^2 - 1) \cdot q(x) + ax + b.$$

Budući da je prirodno područje definicije svih polinoma skup **R**, gornja jednakost mora vrijediti za svaki $x \in \mathbf{R}$. Kako bismo se riješili nepoznatoga polinoma $q(x)$, u gornju jednakost najprije ćemo uvrstiti realne nultočke polinoma $g(x)$ (ako postoje). To su rješenja jednadžbe $x^2 - 1 = 0$, tj. $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$. Stavimo li u gornju jednakost $x = -1$, dobit ćemo:

$$(-1)^{2006} - 2006 \cdot (-1)^{2005} + 2005 = 0 \cdot q(x) + a \cdot (-1) + b,$$

odnosno

$$-a + b = 4012$$

Nadalje, stavimo li $x = 1$, dobit ćemo:

$$1^{2006} - 2006 \cdot 1^{2005} + 2005 = 0 \cdot q(x) + a \cdot 1 + b,$$

odnosno

$$a + b = 0.$$

Tako smo dobili sustav:

$$\begin{aligned} -a + b &= 4012 \\ a + b &= 0 \end{aligned}$$

Njegovim rješavanjem dobivamo $a = -2006$, $b = 2006$, pa je traženi ostatak $r(x) = -2006x + 2006 = -2006(x - 1)$.

939 *Odredite ukupan broj svih realnih rješenja jednadžbe* $\dfrac{(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)}{x-1+|x-1|} = 0$.

Rješenje: Kao potencijalna rješenja jednadžbe dolaze u obzir isključivo nultočke brojnika razlomka na lijevoj strani jednadžbe, a to su (redom) –1, 1, 2 i 3. No, za $x = -1$ i $x = 1$ vrijednost izraza $x - 1 + |x - 1|$ jednaka je nuli, pa u tim slučajevima razlomak na lijevoj strani nije definiran. Stoga zadana jednadžba ima točno dva realna rješenja: $x_1 = 2$ i $x_2 = 3$.

940. *Zadan je uspravan kružni stožac čiji je polumjer osnovke* $r = 6$ cm, *a visina* $h = 9$ cm. *U taj je stožac upisan uspravan kružni valjak najvećega mogućega obujma. Izračunajte taj obujam.*

Rješenje: Promatramo osni presjek stošca i njemu upisanoga valjka. To je jednakokračan trokut (čija je duljina osnovice $a = 2r = 12$ cm, a duljina visine na osnovicu $v_a = 9$ cm) u kojega je upisan pravokutnik (čije su stranice $2r_v$ i v_v, gdje su r_v i v_v redom polumjer osnovke i visina valjka). Iz sličnosti odgovarajućih pravokutnih trokutova dobivamo razmjer:

$$6 : 9 = r_v : (9 - v_v)$$

iz kojega je

$$9r_v = 54 - 6v_v,$$

tj.

$$v_v = 9 - \frac{3}{2} r_v.$$

Stoga je obujam V_v upisanoga valjka jednak

$$V_v = r_v^2 \pi \cdot v$$

$$V_v = r_v^2 \pi \cdot (9 - \frac{3}{2} r_v).$$

Tako obujam valjka V možemo shvatiti kao funkciju varijable r_v. U uobičajenom zapisu, tražimo najveću vrijednost funkcije

$$f(x) = -\frac{3}{2} \cdot \pi \cdot x^3 + 9 \cdot \pi \cdot x^2.$$

Prva derivacija te funkcije jednaka je

$$f'(x) = -\frac{9}{2}\pi \cdot x^2 + 18 \cdot \pi \cdot x = -\frac{9}{2}\pi \cdot x \cdot (x - 4).$$

Njezine nultočke (i kandidati za lokalne ekstreme) su $x_1 = 0$ i $x_2 = 4$. Nadalje, druga derivacija funkcije $f(x)$ jednaka je:

$$f''(x) = -9 \cdot \pi \cdot x + 18 \cdot \pi = -9 \cdot \pi \cdot (x - 2).$$

Za $x_1 = 0$ je $f''(x_1) = 18\pi > 0$, a za $x_2 = 4$ je $f''(x_2) = -18\pi < 0$. Stoga zadana funkcija poprima svoj maksimum za $x = 4$ i taj maksimum je jednak $f(4) = 48\pi$. Prema tome, traženi obujam iznosi $V = 48\pi$ cm^3.

941. *U zadani uspravni stožac upisana je kugla pri čemu je omjer visine stošca i polumjera kugle* 4 : 1. *Izračunajte omjer obujmova stošca i kugle.*

Rješenje: Neka su r, v i R redom polumjer osnovke stošca, visina stišca i polumjer kugle. Znamo da je $v : R = 4 : 1$, otkuda je $v = 4R$. Osni presjek stošca (i njemu upisane kugle) je jednakokračan trokut (čija osnovica ima duljinu $2r$, a visina duljinu v) u kojega je upisana kružnica (čiji je polumjer R). Neka je S središte te kružnice. Spojimo S s diralištem kružnice i jednoga kraka, pa iz sličnosti odgovarajućih pravokutnih trokutova dobivamo razmjer:

$$R : (v - R) = r : \sqrt{r^2 + v^2},$$

odnosno, zbog $v = 4R$,

$$R : 3R = r : \sqrt{r^2 + 16R^2},$$

a odavde je

$$1 : 9 = r^2 : (r^2 + 16R^2),$$

odnosno

$$9r^2 = r^2 + 16R^2,$$
$$8r^2 = 16R^2,$$
$$r^2 = 2R^2.$$

Tako je traženi omjer jednak

$$\frac{V_s}{V_k} = \frac{\frac{1}{3} r^2 \pi \cdot v}{\frac{4}{3} R^3 \pi} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 2R^2 \cdot 4R}{\frac{4}{3} R^3} = 2 : 1.$$

942. *Zadan je pravilan tetraedar čiji je osnovni brid dug* $\sqrt{2}$ cm. *Izračunajte udaljenost između središta dvaju nasuprotnih bridova toga tetraedra.*

Rješenje: Neka je $ABCD$ zadani tetraedar. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je tetraedar polegnut na osnovku ABC. Tražena je udaljenost jednaka udaljenosti središta bridova AB i CD. Neka je S_1 središte brida AB, a S_2 središte brida CD. Promotrimo trokut S_1CD. U njemu je:

$$|S_1C| = |S_1D| = (\text{visina jednakostraničnoga trokuta}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$|CD| = (\text{brid tetraedra}) = \sqrt{2}.$$

Stoga je tražena udaljenost jednaka udaljenosti vrha S_1 od osnovice CD, tj. duljini visine na osnovicu gore navedenoga jednakokračnoga trokuta S_1CD. Ona je jednaka

$$v = \sqrt{|S_1C|^2 - \left(\frac{1}{2}|CD|\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4} - \frac{2}{4}} = \sqrt{1} = 1 \text{ cm}.$$

943. *Dvije ravnine usporedne s osnovkom uspravnoga kružnoga stošca dijele visinu toga stošca na tri jednaka dijela. Izračunajte omjer obujmova najvećega i najmanjega od tako dobivenih dijelova stošca.*

Rješenje: Označimo s B površinu osnovke stošca, a s h njegovu visinu. Dobivene ravnine dijele stožac na ukupno tri dijela. Prvi – najveći – dio jest krnji stožac kojemu su osnovke B i B_1, a visina $\frac{h}{3}$. Površinu manje osnovke B_1 možemo odrediti na osnovu Cavalierijeva načela:

$$B : B_1 = (h : v_1)^2.$$

No, $v_1 = \frac{2}{3}h$, pa je $B : B_1 = 9 : 4$, tj. $B_1 = \frac{4}{9}B$. Stoga je obujam najvećega dijela jednak:

$$V_1 = \frac{1}{3}Bh - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}B\right)\cdot\frac{2h}{3} = \frac{1}{3}Bh - \frac{8}{81}Bh = \frac{19}{81}Bh.$$

Analogno, ako je B_2 površina osnovke najmanjega dijela stošca, onda je

$$B : B_1 = (h : v_2)^2.$$

No, $v_2 = \frac{h}{3}$, pa je $B : B_2 = 9$, odnosno $B_1 = \frac{1}{9}B$. Stoga je obujam najmanjega dijela stošca jednak

$$V_2 = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{9}B\right)\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{81}Bh.$$

Prema tome, $V_1 : V_2 = V_1 = \frac{19}{81}Bh : \frac{1}{81}Bh = 19 : 1$.

943. *U jedinični krug upisan je trokut čiji je jedan kut* $22°30'$. *Izračunajte duljinu stranice toga trokuta nasuprot tom kutu.*

Rješenje: Prema sinusovu poučku je $2R = \frac{a}{\sin\alpha}$, tj. $a = 2R \sin \alpha$, gdje je R polumjer trokutu opisane kružnice, α jedan kut trokuta, a a stranica nasuprot kutu α. U našem je slučaju $R = 1$, $\alpha = 22°30' = 22.5°$, pa je

$$a = 2 \cdot 1 \cdot \sin 22.5° = 2 \cdot \sqrt{\frac{1-\cos(2\cdot 22.5^\circ)}{2}} = 2\cdot\sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{2\cdot(1-\frac{\sqrt{2}}{2})} = \sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

944. *Zadan je jednakokračan trokut ABC. Na osnovici AB toga trokuta odabrana je točka M takva da je* $|AM| = |MC|$, *a na kraku BC točka N takva da je* $|BN| = |BM|$. *Ako kut nasuprot osnovici AB trokuta ABC iznosi* $100°$, *izračunajte veličinu kuta* $\angle CMN$.

Rješenje: Premu pretpostavci, trokut ABC je jednakokračan i AB je njegova osnovica, pa kutovi $\angle CAB$ i $\angle ABC$ imaju jednake veličine. Budući da je zbroj kutova u svakom trokutu jednak 180°, označimo li $\beta = \angle CAB$, dobivamo:

$$100° + \beta + \beta = 180°,$$

otkuda je $\beta = 40°$. Nadalje, iz $|AM| = |MC|$ slijedi da je $\angle MCA = \angle CAM = \angle CAB = \beta = 40°$, pa je $\angle NCM = \angle BCA - \angle MCA = 100° - 40° = 60°$. Također, iz $|BN| = |BM|$ slijedi da je $\angle NMB = \angle BNM$, pa zbog $\angle NMB + \angle BNM + \angle MBN = 180°$ i $\angle MBN = \angle ABC = 40°$ proizlazi da je $\angle NMB = \frac{1}{2} \cdot (180° - 40°) = 70°$. Kut $\angle MNC$ je vanjski kut trokuta MBN, pa je – prema poučku o vanjskim kutovima trokuta – on jednak zbroju dvaju unutrašnjih kutova trokuta MBC koji mu nisu susjedni. Ti kutovi su $\angle NMB$ i $\angle MBN$, a njihov je zbroj jednak $70° + 40° = 110°$. Tako napokon iz jednakosti $\angle NCM + \angle MNC + \angle CMN = 180°$ uvrštavanjem $\angle NCM = 60°$ i $\angle MNC = 110°$ dobivamo veličinu traženoga kuta $\angle CMN = 180° - (110° + 60°) = 10°$.

945. *Kružnica upisana jednakokračnom trokutu ABC dodiruje krakove AC i BC redom u točkama D i E. Označimo s F sjecište te kružnice i spojnice AE, a s G sjecište pravaca DF i AB. Izračunajte omjer* $|AG| : |AB|$.

Rješenje: Budući da nisu zadani nikakvi konkretni podaci, zadani omjer očito ne ovisi o izboru jednakokračnoga trokuta. Da bismo si olakšali rješavanje zadatka, uzet ćemo poseban slučaj da je trokut ABC jednakostraničan trokut čija je duljina stranice jednaka 1 (jer će tada traženi omjer biti jednak duljini $|AG|$). Tada su točke D i E polovišta stranica AC i BC. Neka je S središte trokutu ABC upisane kružnice. Spojnica AE prolazi točkom S (jer je riječ o simetrali kuta $\angle BAC$), a iz analognog razloga točkom S prolazi i spojnica BD. Promotrimo trokut DFS. Kut kod vrha S toga trokuta jednak je kutu kod vrha S pravokutnoga trokuta DAS, a taj je jednak $90° - 30° = 60°$. Trokut DFS je također i jednakokračan jer je $|SF| = |SD|$. No, bilo koji jednakokračan trokut kojemu je jedan kut jednak 60° ujedno je i jednakostraničan (dokažite!) pa je i kut kod vrha F toga trokuta jednak 60°. No, tada je kut kod vrha G trokuta AFG jednak $180° - (60° + 30°) = 90°$, što znači da je DF ustvari okomica na stranicu AB. Označimo li s N nožište visine iz vrha C na stranicu AB (to je ujedno i treće diralište upisane kružnice), zaključujemo da su trokutovi AGD i AHC slični, te postavljamo razmjer:

$$|AG| : |AD| = |AN| : |AC|.$$

No, $|AD| = \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$, $|AN| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$ i $|AC| = 1$, pa dobivamo razmjer:

$$|AG| : \frac{1}{2} = \frac{1}{2} : 1$$

iz kojega je $|AG| = \frac{1}{4}$. Prema tome, $|AG| : |AB| = 1 : 4$.

946. *Zadan je jednakokračan trokut ABC u kojemu je* $|AB| = 6$, $|AC| = |BC| = 5$. *Izračunajte međusobnu udaljenost dirališta upisane kružnice i krakova trokuta.*

Rješenje: Neka je S središte upisane kružnice, a D_1, D_2 i D_3 redom dirališta upisane kružnice i osnovice AB, te krakova AC i BC. Uočimo odmah da je D_1 polovište osnovice AB jer se kod jednakokračnoga trokuta simetrala kuta nasuprot osnovici podudara sa visinom na osnovicu, odnosno sa simetralom osnovice. Trokutovi AD_1S i AD_2S su sukladni pa je $|AD_2| = |AD_1| = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$, te je $|CD_2| = |AC| - |AD_2| = 5 - 4 = 1$. Neka je T sjecište spojnice D_2D_3 i visine CD_1. Primijetimo odmah da je T ujedno i polovište dužine D_2D_3. Trokutovi D_2TC i AD_1C su slični pa možemo postaviti razmjer:

$$|D_2T| : |CD_2| = |AD_1| : |AC|,$$

odnosno

$$|D_2T| : 1 = 4 : 5,$$

pa je $|D_2T| = \frac{4}{5}$. Sada je lako izračunati traženu udaljenost:

$$|D_1D_2| = 2 \cdot |D_1T| = \frac{8}{5}.$$

948. *Zadan je jednakokračan trokut ABC u kojemu je* $|AB| = 12$, $|AC| = |BC| = 10$. *Izračunajte opseg i površinu najvećega mogućega pravokutnika upisanoga u zadani trokut tako da jedna njegova stranica leži na osnovici trokuta.*

Rješenje: Neka je N nožište visine na osnovicu AB. Tada je $|CN|^2 = \sqrt{|AC|^2 - \left(\frac{1}{2}|AB|\right)^2} = \sqrt{10^2 - \left(\frac{1}{2}\cdot 12\right)^2} = \sqrt{100-36} = 8$. Nadalje, neka je $EFGH$ traženi pravokutnik čiji su vrhovi označeni tako da $EF \subset AB$, $G \in BC$ i $H \in AC$ i neka su $x = |EF|$ i $y = |EH|$ duljine stranica pravokutnika. Trokutovi AEH i ANC su slični, pa možemo postaviti razmjer:

$$|AE| : |EH| = |AN| : |CN|.$$

Kako je $|AE| = |AN| - |EN| = \frac{1}{2} \cdot |AB| - \frac{1}{2} \cdot |EF| = \frac{1}{2} \cdot (12 - x)$, slijedi:

$$[\frac{1}{2} \cdot (12 - x)] : y = (\frac{1}{2} \cdot 12) : 8,$$

odnosno

$$4 \cdot (12 - x) = 6y,$$

odnosno

$$y = \frac{2}{3} \cdot (12 - x).$$

Tako je površina pravokutnika jednaka

$$P = xy = \frac{2}{3} \cdot x \cdot (12 - x) = 8x - \frac{2}{3} \cdot x^2.$$

Ovaj izraz poprima najveću vrijednost za $x = -\frac{8}{2 \cdot (-\frac{2}{3})} = 6$ i ta vrijednost je jednaka $P = 8 \cdot 6 - \frac{2}{3} \cdot 6^2 = 24$ cm^2.

Za opseg pravokutnika izračunajmo

$$y = \frac{2}{3} \cdot (12 - 6) = 4,$$

pa je $O = 2(x + y) = 2(6 + 4) = 20$ cm.

949. *Izračunajte tangens šiljastoga kuta kojega zatvaraju dvije prostorne dijagonale kocke.*

Rješenje: Promotrimo pravokutnik kojemu je jedna stranica dijagonala osnovke kocke, a druga brid kocke. Dvije prostorne dijagonale kocke su dijagonale toga pravokutnika. Označimo s a duljinu brida kocke, a s φ traženi kut. Tada je duljina prostorne dijagonale $a\sqrt{3}$, pa primjenom kosinusova poučka dobivamo:

$$a^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\cos\varphi,$$

a odavde je $\cos\varphi = \frac{1}{3}$. Stoga je $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{9}}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{2}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$.

950. *Zadani su koncentrični krugovi k_1 i k_2. Tetiva većega od njih ima duljinu d i dodiruje manji krug. Izrazite površinu kružnoga vijenca omeđenoga zadanim krugovima kao funkciju varijable d.*

Rješenje: Neka je R polumjer većega, a r polumjer manjega od zadanih dvaju krugova. Središte obaju krugova zajedno s krajevima tetive određuje jednakokračan trokut čija je duljina osnovice d, duljina kraka R, a duljina visine na osnovicu r. Iz toga trokuta dobivamo:

$$R^2 = r^2 - \left(\frac{1}{2}d\right)^2,$$

odnosno

$$R^2 - r^2 = \frac{1}{4}d^2.$$

Stoga je tražena površina jednaka

$$P = (R^2 - r^2)\cdot\pi = \frac{1}{4}d^2\pi.$$

951. *Duljine stranica šiljastokutnoga trokuta su $a = 39$, $b = 60$ i c. Izračunajte $\sin\gamma$ ako je $\sin\alpha = 0.6$. (Sve oznake u trokutu su standardne.)*

Rješenje: Iz $\sin\alpha = 0.6$ slijedi $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-0.6^2} = \sqrt{1-0.36} = 0.8$. Prema kosinusovu je poučku

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

pa uvrštavanjem dobivamo:

$$1521 = 3600 + c^2 - 2\cdot 60\cdot c\cdot 0.8,$$

odnosno kvadratnu jednadžbu

$$c^2 - 96c + 2079 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su $c_1 = 33$ i $c_2 = 63$. Ako bi bilo $c = 33$, onda zbog $60^2 > 39^2 + 33^2$ slijedi da je kut nasuprot stranici b tup, što je proturječje pretpostavci da je trokut šiljastokutan. Stoga je $c = c_2 = 63$. Sada iz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

uvrštavanjem $c = 63$, $a = 39$ i $b = 60$ dobivamo

$$\cos \gamma = \frac{16}{65},$$

i konačno $\sin \gamma = \sqrt{1-\cos^2 \gamma} = \sqrt{1-\left(\frac{16}{65}\right)^2} = \frac{63}{65}$.

952. *Izračunajte vrijednost izraza* $\dfrac{\sin 20^\circ + \cos 20^\circ}{\cos 25^\circ}$.

Rješenje: Imamo redom:

$$\frac{\sin 20^\circ + \cos 20^\circ}{\cos 25^\circ} = \frac{\sin(45-25)^\circ + \cos(45-25)^\circ}{\cos 25^\circ} = \frac{\sin 45^\circ \cos 25^\circ - \cos 45^\circ \sin 25^\circ + \cos 45^\circ \cos 25^\circ + \sin 45^\circ \sin 25^\circ}{\cos 25^\circ} =$$
$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 25^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 25^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 25^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 25^\circ}{\cos 25^\circ} = \frac{\sqrt{2}\cos 25^\circ}{\cos 25^\circ} = \sqrt{2}$$

953. *Odredite najmanju vrijednost realne funkcije* $f(x) = \sin^2 x - 6 \sin x + 16$.

Rješenje: Najmanja vrijednost realne funkcije $g(t) = t^2 - 6t + 16$ na segmentu $[-1, 1]$ (kodomeni funkcije $h(x) = \sin x$) jednaka je $f(1) = 11$ jer je $g(t)$ strogo padajuća na intervalu $\langle -\infty, 3\rangle$. Stoga je i najmanja vrijednost zadane funkcije jednaka 11.

954. *Odredite skup svih vrijednosti realnoga parametra* $a \in \mathbf{R}$ *za koje jednadžba (po* x*)* $(a - 1) \cdot \sin x = a + 1$ *ima barem jedno realno rješenje.*

Rješenje: Za $a = 1$ zadana jednadžba očito nema rješenja. Za $a \neq 1$ podijelimo jednadžbu s $a - 1$, pa dobijemo:

$$\sin x = \frac{a+1}{a-1} = 1 + \frac{2}{a-1}.$$

Zbog nejednakosti

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \ \forall x \in \mathbf{R},$$

dobivamo nejednadžbu

$$-1 \leq 1 + \frac{2}{a-1} \leq 1$$

otkuda je

$$-2 \leq \frac{2}{a-1} \leq 0$$
$$-1 \leq \frac{1}{a-1} \leq 0$$

Na taj smo način dobili sustav nejednadžbi

$$\frac{1}{a-1} \geq -1 \Leftrightarrow \frac{1}{a-1} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a}{a-1} \geq 0$$
$$\frac{1}{a-1} \leq 0 \Leftrightarrow a - 1 < 0$$

Množenjem prve nejednadžbe izrazom $a - 1$ (koji je prema drugoj nejednadžbi strogo manji od 0) dobivamo nejednadžbu $a \le 0$, tj. $a \in \langle -\infty, 0]$. Za svaki element toga skupa očito vrijedi nejednakost $a - 1 < 0$, pa je traženi skup svih vrijednosti parametra a upravo $\langle -\infty, 0]$.

955. *Izračunajte vrijednost izraza*

$$a \sin(\beta - \gamma) + b \sin(\gamma - \alpha) + c \sin(\alpha - \beta)$$

ako su a, b i c duljine stranica trokuta, a α, β i γ redom tim stranicama nasuprotni kutovi.

Rješenje: Koristeći adicioni poučak za funkciju sinus najprije imamo:

$a \sin(\beta - \gamma) + b \sin(\gamma - \alpha) + c \sin(\alpha - \beta) = a(\sin\beta\cos\gamma - \sin\gamma\cos\beta) + b(\sin\gamma\cos\alpha - \sin\alpha\cos\gamma) + c(\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha)$.

Prema sinusovu poučku je $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$ i $c = 2R\sin\gamma$, gdje je R polumjer trokutu opisane kružnice, pa uvrštavanjem dobivamo:

$a \sin(\beta - \gamma) + b \sin(\gamma - \alpha) + c \sin(\alpha - \beta) = 2R(\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma\cos\beta + \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\sin\alpha\cos\beta - \sin\gamma\sin\beta\cos\alpha) = 2R \cdot 0 = 0$.

956. *Izračunajte* $\sin(2006 \cdot x)$ *ako je* $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ *i* $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$.

Rješenje: Kut u prvom kvadrantu čiji je kosinus jednak $\frac{1}{2}$ iznosi $\frac{\pi}{3}$. Zbog identiteta

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha,$$

kut u trećem kvadrantu čiji je kosinus $-\frac{1}{2}$ jednak je $x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$. Stoga je $2006 \cdot x = 2006 \cdot \frac{4\pi}{3} = \frac{8024\pi}{3}$. Nadalje je

$$\frac{8024\pi}{3} = 1337 \cdot 2\pi + \frac{2\pi}{3},$$

pa konačno imamo

$$\sin(2006 \cdot x) = \sin\left(\frac{8024\pi}{3}\right) = \sin\left(1337 \cdot 2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

957. *Zadani su izrazi*

$$E_1 = \sin^2\frac{x+y}{2} + \cos x\cos y,$$
$$E_2 = \cos^2\frac{x-y}{2} - \sin x\sin y,$$
$$E_3 = \cos^2\frac{x+y}{2} + \sin x\sin y,$$
$$E_4 = \sin^2\frac{x-y}{2} + \cos x\cos y.$$

Ima li među tim izrazima međusobno jednakih?

Rješenje: Iz formula za sinus i kosinus polovičnoga kuta

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

kvadriranjem dobivamo:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$
$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

pa imamo redom:

$$E_1=\frac{1-\cos(x+y)}{2}+\cos x\cos y=\frac{1-\cos x\cos y+\sin x\sin y+2\cos x\cos y}{2}=\frac{1+\cos x\cos y+\sin x\sin y}{2}=$$
$$=\frac{1+\cos(x-y)}{2}=\cos^2\frac{x-y}{2}$$
$$E_2=\frac{1+\cos(x-y)}{2}-\sin x\sin y=\frac{1+\cos x\cos y+\sin x\sin y-2\sin x\sin y}{2}=\frac{1+\cos x\cos y-\sin x\sin y}{2}=$$
$$=\frac{1+\cos(x+y)}{2}=\cos^2\frac{x+y}{2}$$
$$E_3=\frac{1+\cos(x+y)}{2}+\sin x\sin y=\frac{1+\cos x\cos y-\sin x\sin y+2\sin x\sin y}{2}=\frac{1+\cos x\cos y+\sin x\sin y}{2}=$$
$$=\frac{1+\cos(x-y)}{2}=\cos^2\frac{x-y}{2}$$
$$E_4=\frac{1-\cos(x-y)}{2}+\cos x\cos y=\frac{1-\cos x\cos y-\sin x\sin y+2\cos x\cos y}{2}=\frac{1+\cos x\cos y-\sin x\sin y}{2}=$$
$$=\frac{1+\cos(x+y)}{2}=\cos^2\frac{x+y}{2}$$

Tako vidimo da vrijede jednakosti $E_1 = E_3$ i $E_2 = E_4$.

958. *Neka je* $b \in \mathbf{R}$ *realan broj za kojega istovremeno vrijede nejednakosti* $b > 0$ *i* $b \neq 1$. *Riješite jednadžbu* (*po* x): $\log_{b^2} x+\log_{x^2} b=1$.

Rješenje: Prelaskom na bazu b dobivamo:

$$\frac{\log_b x}{\log_b b^2}+\frac{\log_b b}{\log_b x^2}=1$$
$$\frac{\log_b x}{2}+\frac{1}{2\log_b x}=1 \quad / \cdot 2\cdot\log_b x$$
$$(\log_b x)^2+1=2\log_b x$$
$$(\log_b x)^2-2\log_b x+1=0$$
$$(\log_b x-1)^2=0$$
$$\log_b x-1=0$$
$$\log_b x=1$$

otkuda je antilogaritmiranjem $x = b$.

959. *Neka su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$. Napišite kvadratnu jednadžbu čija su rješenja x_1^4 i x_2^4.*

Rješenje: Koristeći Viéteove formule najprije zaključujemo da vrijede jednakosti

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Tako sada imamo:

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1 x_2)^2 = \left[(x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 x_2)\right]^2 - 2(x_1 x_2)^2 = \left[(-\frac{b}{a})^2 - 2(\frac{c}{a})\right]^2 - 2(\frac{c}{a})^2 =$$
$$= \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}\right)^2 - \frac{2c^2}{a^2} = \frac{(b^2 - 2ac)^2 - 2a^2c^2}{a^4} = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$$
$$x_1^4 \cdot x_2^4 = (x_1 x_2)^4 = \left(\frac{c}{a}\right)^4 = \frac{c^4}{a^4}$$

Stoga je tražena jednadžba

$$x^2 - \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4} x + \frac{c^4}{a^4} = 0,$$

odnosno, nakon množenja s a^4,

$$a^4x^2 + (4ab^2c - b^4 - 2a^2c^2)x + c^4 = 0.$$

960. *Neka su a i b realni brojevi takvi da je $a > b > 0$ i $a^2 + b^2 = 6ab$. Izračunajte omjer $(a - b) : (a + b)$.*

Rješenje: Jednakost $a^2 + b^2 = 6ab$ ekvivalentna je svakoj od sljedećih dvaju jednakosti:

$$a^2 - 2ab + b^2 = 4ab$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = 8ab,$$

tj. jednakostima

$$(a - b)^2 = 4ab$$
$$(a + b)^2 = 8ab$$

Dijeljenjem tih jednakosti dobivamo:

$$\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

a odavde je korjenovanjem

$$(a - b) : (a + b) = 1 : \sqrt{2}$$

ili ekvivalentno

$$(a - b) : (a + b) = \sqrt{2} : 2.$$

961. *Zadana je realna funkcija* $f(x) = 2x - x^2$. *Odredite* $f^3(1 - x)$.

Rješenje: Imamo redom:

$f(1 - x) = 2 \cdot (1 - x) - (1 - x)^2 = 2 - 2x - 1 + 2x - x^2 = 1 - x^2;$
$f^2(1 - x) = f(f(1 - x)) = f(1 - x^2) = 2 \cdot (1 - x^2) - (1 - x^2)^2 = 2 - 2x^2 - 1 + 2x^2 - x^4 = 1 - x^4,$
$f^3(1 - x) = f(f^2(1 - x))) = f(1 - x^4) = 2 \cdot (1 - x^4) - (1 - x^4)^2 = 2 - 2x^4 - 1 + 2x^4 - x^8 = 1 - x^8.$

Dakle, $f^3(1 - x) = 1 - x^8$. Matematičkom indukcijom se može pokazati da za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi jednakost:

$$f^n(1 - x) = 1 - x^{2^n}.$$

962. *Riješite nejednadžbu*: $\sqrt{\dfrac{1}{x+1}} > \dfrac{1}{2x-1}$.

Rješenje: Najprije primijetimo da nazivnik razlomka pod korijenom mora biti strogo veći od nule, pa iz

$$x + 1 > 0$$

dobivamo $x \in \langle -1, +\infty\rangle$. Nultočka nazivnika razlomka na desnoj strani nejednadžbe je $x = \dfrac{1}{2}$. Tako zadanu nejednadžbu razmatramo na dvama intervalima:

1.) $x \in \langle -1, \dfrac{1}{2}\rangle$

Za svaki realan broj iz navedenoga intervala vrijedi nejednakost $\sqrt{\dfrac{1}{x+1}} > 0 > \dfrac{1}{2x-1}$, pa je u ovom slučaju valjana nejednakost $\sqrt{\dfrac{1}{x+1}} > \dfrac{1}{2x-1}$.

2.) $x \in \langle \dfrac{1}{2}, +\infty\rangle$

Za svaki realan broj iz navedenoga intervala su i lijeva i desna strana polazne nejednadžbe strogo pozitivni realni brojevi, pa stoga polaznu nejednadžbu smijemo kvadrirati. Tako ćemo dobiti:

$$\frac{1}{x+1} > \frac{1}{(2x-1)^2},$$

odnosno

$$(2x - 1)^2 > x + 1,$$

odnosno

$$4x^2 - 5x > 0.$$

Budući da je $x \in \langle \dfrac{1}{2}, +\infty\rangle$, tu nejednadžbu smijemo podijeliti s x, pa dobivamo:

$$4x - 5 > 0,$$

odnosno $x \in \langle \frac{5}{4}, +\infty\rangle$. Stoga je u ovom slučaju skup rješenja nejednadžbe $\langle \frac{1}{2}, +\infty\rangle \cap \langle \frac{5}{4}, +\infty\rangle = \langle \frac{5}{4}, +\infty\rangle$.

Preostaje nam zaključiti da je skup svih realnih rješenja polazne nejednadžbe $\langle -1, \frac{1}{2}\rangle \cup \langle \frac{5}{4}, +\infty\rangle$.

963. *Odredite ukupan broj svih različitih realnih rješenja sustava jednadžbi*

$$3^x - 2^{y^2} = 77$$
$$3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7$$

Rješenje: Prvu jednadžbu sustava možemo zapisati u obliku

$$\left(3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}}\right) \cdot \left(3^{\frac{x}{2}} + 2^{\frac{y^2}{2}}\right) = 77,$$

pa zbog $3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7$ slijedi da je $3^{\frac{x}{2}} + 2^{\frac{y^2}{2}} = 11$. Tako smo dobili novi sustav:

$$3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7$$
$$3^{\frac{x}{2}} + 2^{\frac{y^2}{2}} = 11$$

Zbrajanjem njegovih jednadžbi dobivamo

$$3^{\frac{x}{2}} = 9,$$

a oduzimanjem

$$2^{\frac{y^2}{2}} = 2.$$

Iz prve od tih jednadžbi slijedi $x = 4$, a iz druge $y = \pm\sqrt{2}$. Stoga zadani sustav ima točno dva različita realna rješenja: $(4, -\sqrt{2})$ i $(4, \sqrt{2})$.

964. *Realne funkcije f i g zadovoljavaju jednakosti*

$$(g \circ f)(x) = \frac{x}{3}$$
$$g(x) = \log_{64} x,$$

i to za svaki x za koje su te funkcije dobro definirane. Izračunajte $f(-1) + f(-\frac{1}{2})$.

Rješenje: Odredimo najprije funkciju $f(x)$. Očito je $g^{-1}(x) = 64^x$ pa slijedi:

$$g^{-1}(g \circ f)(x) = g^{-1}\left(\frac{x}{3}\right),$$

odnosno

$$f(x)=64^{\frac{x}{3}}=(4^3)^{\frac{x}{3}}=4^x.$$

Tako je

$$f(-1)+f(-\frac{1}{2})=4^{-1}+4^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$

965. *Polinom $f(x)$ stupnja barem 2 pri dijeljenju s polinomom $g_1(x) = x - 1$ daje ostatak 1, a pri dijeljenju s polinomom $g_2(x) = x + 1$ ostatak –1. Nađite ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x)$ s polinomom $g_3(x) = x^2 - 1$.*

Rješenje: Prema poučku o dijeljenju polinoma s ostatkom možemo pisati:

$$f(x) = (x - 1) \cdot q_1(x) + 1$$
$$f(x) = (x + 1) \cdot q_2(x) - 1$$

U prvu jednakost uvrstimo $x = 1$ pa dobijemo $f(1) = 1$, a u drugu $x = -1$, pa dobijemo $f(-1) = -1$. Traženi ostatak pri dijeljenju $f(x)$ s $g_3(x) = x^2 - 1$ je polinom stupnja najviše 1, tj. linearni polinom $r(x) = ax + b$. Zbog toga možemo pisati:

$$f(x) = (x^2 - 1) \cdot q_3(x) + ax + b.$$

U tu jednakost najprije uvrstimo $x = 1$:

$$f(1) = (1^2 - 1) \cdot q_3(1) + a \cdot 1 + b,$$

otkuda je, zbog $f(1) = 1$,

$$a + b = 1.$$

Analogno, uvrštavanjem $x = -1$ dobijemo

$$f(-1) = [(-1)^2 - 1) \cdot q_3(-1) + a \cdot (-1) + b,$$

otkuda je, zbog $f(-1) = -1$,

$$-a + b = -1.$$

Tako iz sustava

$$a + b = 1$$
$$-a + b = -1$$

dobivamo $a = 1$, $b = 0$, pa je traženi ostatak $r(x) = 1 \cdot x = x$.

966. *Zadan je skup* $S=\left\{(x,y)\subset\mathbf{R}^2 : x>0,\, y=\frac{16}{\sqrt{3x^3}}-2\right\}\subset\mathbf{R}^2$. *Izračunajte najkraću udaljenost točke $T = (0, -2)$ od toga skupa.*

Rješenje: Neka je $A = (x_A, y_A) \in S$ bilo koji element skupa S. Kvadrat udaljenosti točaka A i T jednak je:

$$|AT|^2 = x_A^2 + (y_A + 2)^2.$$

Budući da točka A pripada skupu S, vrijedi jednakost:

$$y_A = \frac{16}{\sqrt{3} x_A^3} - 2 .$$

Stoga je

$$|AT|^2 = x_A^2 + \frac{256}{3 x_A^6},$$

pa tražimo ekstreme funkcije

$$f(x) = x^2 + \frac{256}{3x^6}$$

uz uvjet $x > 0$. Prva derivacija te funkcije jednaka je

$$f'(x) = 2x - \frac{512}{x^7} = \frac{2 \cdot (x^8 - 256)}{x^7} = \frac{2(x-2)(x+2)(x^6 + 4x^4 + 16x^2 + 64)}{x^7}.$$

Zbog uvjeta $x > 0$ jedini kandidat za lokalni ekstrem jest $x = 2$. Kako je

$$f'(x) = 2 + \frac{3584}{x^8},$$

to je $f''(2) > 0$, pa za $x = 2$ funkcija $f(x)$ poprima lokalni maksimum $f(2) = \frac{16}{3}$. Stoga je tražena udaljenost jednaka $\sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$.

967. *Realni brojevi a, b i c su istovremeno* 5., 17 *i* 37. *član i aritmetičkoga i geometrijskoga niza. Izračunajte vrijednost izraza* $a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b}$.

Rješenje: Iz činjenice da su zadani realni brojevi 5., 17. i 37. član aritmetičkoga niza slijedi da postoji jedinstven realan broj $d \in \mathbf{R}$ takav da je

$$b = a + 12 \cdot d$$
$$c = a + 32 \cdot d$$

Nadalje, iz činjenice da su zadani realni brojevi 5., 17. i 37. član geometrijskoga niza, slijedi da postoji jedinstven realan broj $q \in \mathbf{R}$ takav da je

$$b = a \cdot q^{12}$$
$$c = a \cdot q^{32}.$$

Izjednačavanjem desnih strana izraza $b = a + 12 \cdot d$ i $b = a \cdot q^{12}$ dobivamo:

$$a \cdot q^{12} - a = 12 \cdot d,$$

a analogno izjednačavanjem desnih strana izraza $c = a + 32 \cdot d$ i $c = a \cdot q^{32}$

$$a \cdot q^{32} - a = 32 \cdot d$$

Zapišimo izraz $a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b}$ u ekvivalentnu obliku

$$\left(\frac{a}{c}\right)^b \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^c \cdot \left(\frac{c}{b}\right)^a$$

pa uvrštavanjem

$$b = a \cdot q^{12}$$
$$c = a \cdot q^{32}$$

dobivamo:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^b \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^c \cdot \left(\frac{c}{b}\right)^a = \left(\frac{a}{a \cdot q^{32}}\right)^{a \cdot q^{12}} \cdot \left(\frac{a \cdot q^{12}}{a}\right)^{a \cdot q^{32}} \cdot \left(\frac{a \cdot q^{32}}{a \cdot q^{12}}\right)^a = q^{-32 \cdot a \cdot q^{12} + 12 \cdot a \cdot q^{32} + a(32-12)}$$

Eksponent posljednje potencije zapišimo u obliku

$$12 \cdot (a \cdot q^{32} - a) - 32 \cdot (a \cdot q^{12} - a),$$

a to je, zbog

$$a \cdot q^{12} - a = 12 \cdot d$$
$$a \cdot q^{32} - a = 32 \cdot d$$

dalje jednako:

$$d \cdot (12 \cdot 32 - 32 \cdot 12) = 0 .$$

Stoga je tražena vrijednost zadanoga izraza jednaka $q^0 = 1$.

968. *Izračunajte y iz produženoga razmjera* $\cos x : \cos 2x : \cos 4x = 1 : 2 : y$.

Rješenje: Iz zadanoga razmjera izravno slijedi da postoji jedinstveni realan broj $k \in \mathbf{R}$ takav da je

$$\cos x = k$$
$$\cos 2x = 2k$$
$$\cos 4x = y \cdot k.$$

Budući da je

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1,$$

dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$2k^2 - 2k - 1 = 0$$

iz koje je

$$k_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$
$$k_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Zbog prirodnoga uvjeta

$$|k| = |\cos x| \leq 1,$$

rješenje k_2 ne dolazi u obzir. Stoga je

$$k = k_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

Nadalje, iz

$$\cos 4x = 2 \cos^2 2x - 1$$

dobivamo

$$y \cdot k = 8k^2 - 1,$$

a odavde je konačno

$$y = 8k - \frac{1}{k} = 5 - 3\sqrt{3}.$$

969. *Dva rješenja jednadžbe* $x^3 + x^2 + ax + b = 0$ *su* $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ i $x_2 = 1 + \sqrt{2}$. *Izračunajte vrijednost umnoška* ab.

Rješenje: Zadana jednadžba očito ima tri realna rješenja. Prema Viéteovim formulama, zbroj svih rješenja jednak je suprotnoj vrijednosti koeficijenta uz x^2. Tako dobivamo jednadžbu:

$$1 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} + x_3 = -1,$$

otkuda je

$$x_3 = -3.$$

Prema istim formulama je

$$b = x_1 x_2 x_3 = 3,$$

a uvrštavanjem $x = 3$ i $b = 3$ u polaznu jednadžbu dobivamo

$$27 + 9 + 3a + 3 = 0,$$

otkuda je

$$a = -13.$$

Tako je

$$ab = (-13) \cdot 3 = -39.$$

970. *Izračunajte umnožak svih realnih rješenja jednadžbe* $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10$.

Rješenje: Kvadriranjem zadane jednadžbe dobivamo:

$$x^{\log \sqrt{x}} = 100,$$

otkuda logaritmiranjem po bazi 10 slijedi:

$$(\log \sqrt{x}) \cdot \log x = 2$$
$$\frac{1}{2} \log x \cdot \log x = 2$$
$$(\log x)^2 = 4$$

Tako je

$$(\log x)_1 = -2, \text{ te } x_1 = 10^{-2}$$

i

$$(\log x)_1 = 2, \text{ te } x_2 = 10^2.$$

Stoga je $x_1 x_2 = 10^0 = 1$.

971. *Zadan je kompleksan broj* $z = \left(\frac{2+i}{3i-4} + 3\frac{2-i}{5}\right)^{2006}$. *Izračunajte* $i \cdot z$.

Rješenje: Imamo redom:

$$z = \left(\frac{2+i}{3i-4} + 3\frac{2-i}{5}\right)^{2006} = \left(\frac{2+i}{-4+3i} + \frac{6}{5} - \frac{3}{5}i\right)^{2006} = \left(\frac{(2+i)(-4-3i)}{(-4+3i)(-4-3i)} + \frac{6}{5} - \frac{3}{5}i\right)^{2006} =$$
$$= \left(\frac{-8-4i-6i-3i^2}{(-4)^2-(3i)^2} + \frac{6}{5} - \frac{3}{5}i\right)^{2006} = \left(\frac{-8-4i-6i+3}{16-9i^2} + \frac{6}{5} - \frac{3}{5}i\right)^{2006} = \left(\frac{-5-10i}{25} + \frac{6}{5} - \frac{3}{5}i\right)^{2006} =$$
$$= \left(\frac{-1-2i}{5} + \frac{6}{5} - \frac{3}{5}i\right)^{2006} = \left(\frac{-1-2i+6-3i}{5}\right)^{2006} = \left(\frac{5-5i}{5}\right)^{2006} = (1-i)^{2006} = \left[(1-i)^2\right]^{1003} =$$
$$= (1-2i+i^2)^{1003} = (-2i)^{1003} = (-1)^{1003} \cdot 2^{1003} \cdot i^{1003} = -2^{1003} \cdot i^{4\cdot 250+3} = -2^{1003} \cdot i^3 = -2^{1003} \cdot (-i) = 2^{1003} i$$

pa je

$$iz = i \cdot 2^{1003} i = 2^{1003} \cdot (-1) = -2^{1003}.$$

972. *Pojednostavnite izraz:* $\frac{a^4-b^4}{a^2+b^2} : \frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$ *uz pretpostavku* $ab(a+b) \neq 0$.

Rješenje: Koristeći formule za razliku kvadrata i zbroj kubova dobivamo:

$$\frac{a^4-b^4}{a^2+b^2} : \frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2} = \frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}{a^2+b^2} : \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2-ab+b^2} = (a^2-b^2):(a+b) =$$
$$= \frac{(a-b)(a+b)}{a+b} = a-b$$

973. *Zbroj drugoga i desetoga člana padajućega aritmetičkog niza jednak je* 8, *a umnožak tih brojeva jednak je* 12. *Izračunajte zbroj prvih petnaest članova toga niza.*

Rješenje: Neka je $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ taj aritmetički niz. Iz podataka iskazanih u zadatku slijedi:

$$a_2 + a_{10} = 8$$
$$a_2 \cdot a_{10} = 12$$

To znači da su a_2 i a_8 rješenja kvadratne jednadžbe

$$x^2 - 8x + 12 = 0.$$

Odavde je $x_1 = 2$, $x_2 = 6$. Budući da je niz $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, prema pretpostavci, padajući, mora biti $a_2 = 6$ i $a_{10} = 2$. Označimo li s d razliku niza, onda moraju vrijediti jednakosti

$$a_1 + d = 6$$
$$a_1 + 9d = 2.$$

Odavde je $a_1 = \frac{13}{2}$, $d = -\frac{1}{2}$, pa je petnaesti član niza jednak

$$a_{15} = a_1 + 14d = \frac{13}{2} - 7 = -\frac{1}{2}.$$

Da izračunamo traženi zbroj, u formulu

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

uvrstimo $n = 15$, $a_1 = \frac{13}{2}$ i $a_{15} = -\frac{1}{2}$ i dobivamo:

$$S_{15} = \frac{15}{2} \cdot \left(\frac{13}{2} - \frac{1}{2}\right) = 45.$$

974. *Odredite realan broj* $k \in \mathbf{R}$ *tako da pravac* $p \ldots kx - 4y + 16 = 0$ *bude tangenta krivulje* $K \ldots x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$.

Rješenje: Jednadžbu krivulje K zapišimo u obliku:

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1,$$

pa vidimo da je K kružnica sa središtem u točki $S = (-1, 2)$ i polumjerom $r = 1$. Pravac p će biti tangenta te kružnice ako i samo ako udaljenost točke S od pravca p bude jednaka polumjeru r. Odatle dobivamo:

$$\frac{|k \cdot (-1) - 4 \cdot 2 + 16|}{\sqrt{k^2 + (-4)^2}} = 1,$$

odnosno

$$|8 - k| = \sqrt{k^2 + 16}.$$

Kvadriranjem te jednakosti (koje smijemo provesti jer su obje strane jednakosti nenegativni realni brojevi) slijedi:

$$(8 - k)^2 = k^2 + 16,$$

odnosno

$$16k = 48,$$

te je $k = 3$.

975. *Izračunajte* $\log_2 a$ *ako je* $a = \frac{\log_5 30}{\log_{150} 5} - \frac{\log_5 750}{\log_6 5}$.

Rješenje: Transformirajmo izraz za a na sljedeći način:

$$a=\frac{\log_5 30}{\log_{150} 5}-\frac{\log_5 750}{\log_6 5}=\frac{\log_5(5\cdot 6)}{\frac{1}{\log_5(150)}}-\frac{\log_5(125\cdot 6)}{\frac{1}{\log_5 6}}=(\log_5 5+\log_5 6)\cdot\log_5 150-(\log_5 125+\log_5 6)\cdot\log_5 6=$$
$$=(1+\log_5 6)\cdot\log_5(25\cdot 6)-(3+\log_5 6)\cdot\log_5 6=(1+\log_5 6)\cdot(\log_5 25+\log_5 6)-(3+\log_5 6)\cdot\log_5 6=$$
$$=(1+\log_5 6)\cdot(2+\log_5 6)-(3+\log_5 6)\cdot\log_5 6=2+3\log_5 6+\log_5^2 6-3\log_5 6-\log_5^2 6=2$$

Stoga je $\log_2 a = \log_2 2 = 1$.

976. *Koliko ukupno različitih realnih rješenja ima jednadžba* $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$?

Rješenje:

Zadanu jednadžbu najprije zapišimo u obliku:

$$\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}-\sqrt{x+1}\ ,$$

otkuda kvadriranjem dobivamo:

$$4x + 13 = 3x + 12 - 2\sqrt{(3x+12)(x+1)} + x + 1,$$

odnosno nakon sređivanja

$$\sqrt{(3x+12)(x+1)} = 0.$$

Ova iracionalna jednadžba ima dva rješenja: $x_1 = -4$ i $x_2 = -1$. No, izrazi $\sqrt{3x+12}$ i $\sqrt{x+1}$ nisu definirani za $x = -4$, pa taj broj nije rješenje polazne jednadžbe. Stoga je jedino realno rješenje polazne jednadžbe $x = -1$.

977. *Ako su* x_1 *i* x_2 *rješenja kvadratne jednadžbe* $x^2 + 4px + q = 0$, *a* $x_3 = x_1 - 2$ *i* $x_4 = x_2 - 2$ *rješenja kvadratne jednadžbe* $x^2 - p^2x + pq = 0$, *gdje su* $p, q \in \mathbf{R}$ *realni parametri, izračunajte zbroj* $p + q$.

Rješenje: Prema Viéteovim formulama možemo pisati:

$$x_1 + x_2 = -4p$$
$$x_1 \cdot x_2 = q,$$

te analogno

$$(x_1 - 2) + (x_2 - 2) = p^2$$
$$(x_1 - 2) \cdot (x_2 - 2) = pq.$$

Jednakost

$$(x_1 - 2) + (x_2 - 2) = p^2$$

možemo zapisati u obliku

$$p^2 - (x_1 + x_2) + 4 = 0,$$

pa uvrštavanjem $x_1 + x_2 = -4p$ dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$p^2 + 4p + 4 = 0$$

čije je jedino realno rješenje $p = -2$. Nadalje, jednakost

$$(x_1 - 2) \cdot (x_2 - 2) = pq$$

možemo zapisati u obliku

$$(x_1 x_2) - 2(x_1 + x_2) + 4 = pq,$$

šo je zbog

$$x_1 + x_2 = -4p$$
$$x_1 \cdot x_2 = q$$

ekvivalentno s

$$q + 8p + 4 = pq.$$

Uvrstimo li ovamo $p = -2$, dobivamo:

$$q - 16 + 4 = (-2)q,$$

a odavde je $q = 4$. Tako je konačno

$$p + q = (-2) + 4 = 2.$$

978. *Izračunajte umnožak svih realnih rješenja jednadžbe* $\log_{\sqrt{2}}^2 x + 3\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} x = 2$.

Rješenje: Svaki pribrojnik napisat ćemo kao logaritam s bazom 2:

$$\log_{\sqrt{2}}^2 x = (\log_{\sqrt{2}} x)^2 = \left(\frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{\log_2 x}{\log_2 2^{\frac{1}{2}}}\right)^2 = \left(\frac{\log_2 x}{\frac{1}{2}}\right)^2 = (2\log_2 x)^2 = 4\log_2^2 x$$
$$\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = \frac{\log_2 x}{\log_2 2^{-1}} = \frac{\log_2 x}{-1} = -\log_2 x$$

Tako je polazna jednadžba ekvivalentna jednadžbi

$$4\log_2^2 x + 3\log_2 x - \log_2 x - 2 = 0,$$

odnosno

$$2\log_2^2 x + \log_2 x - 1 = 0.$$

Uz zamjenu $t = \log_2 x$ dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

čija su rješenja $t_1 = -1$ i $t_2 = \frac{1}{2}$. Iz

$$\log_2 x = -1$$

dobivamo $x_1 = 2^{-1} = \frac{1}{2}$, a iz

$$\log_2 x = \frac{1}{2}$$

dobivamo $x_2 = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. Konačno je $x_1 x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

979. *Neka je p zbroj svih realnih rješenja jednadžbe* $4^{x-1} - 17 \cdot 2^{x-3} + 1 = 0$, *a q umnožak njihovih apsolutnih vrijednosti. Izračunajte omjer p : q.*

Rješenje: Zadanu jednadžbu najprije transformirajmo ovako:

$$4^x \cdot 4^{-1} - 17 \cdot 2^x \cdot 2^{-3} + 1 = 0,$$
$$\frac{1}{4} \cdot (2^2)^x - 17 \cdot \frac{1}{8} \cdot 2^x + 1 = 0.$$

Množenjem s 8 dobivamo:

$$2 \cdot 2^{2x} - 17 \cdot 2^x + 8 = 0.$$

Uz zamjenu $t = 2^x$ dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$2t^2 - 17t + 8 = 0$$

čija su realna rješenja $t_1 = \frac{1}{2}$ i $t_2 = 8$. Tako iz

$$2^x = \frac{1}{2}$$

dobivamo $x_1 = -1$, a iz

$$2^x = 8$$

slijedi $x_2 = 3$. Stoga je $p = 3 + (-1) = 2$ i $q = |x_1 x_2| = |-3| = 3$, te konačno $p : q = 2 : 3$.

980. *Odredite ukupan broj svih realnih rješenja jednadžbe*

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) = \sqrt{2}\cos 2x$$

na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

Rješenje: Zadanu jednadžbu transformiramo na sljedeći način:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) = \sqrt{2}\cos 2x$$
$$\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x - \sin\frac{3\pi}{4}\cos x - \cos\frac{3\pi}{4}\sin x = \sqrt{2}\cos 2x$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \sqrt{2}\cos 2x$$

otkuda je

$$\cos 2x - \sin x = 0.$$

Budući da je

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x,$$

slijedi:

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

Uz zamjenu $t = \sin x$ dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

čija su realna rješenja $t_1 = -1$ i $t_2 = \frac{1}{2}$. Trigonometrijska jednadžba

$$\sin x = -1$$

nema niti jedno rješenje u intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, dok trigonometrijska jednadžba

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

ima točno jedno rješenje u intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$: to je $x = \frac{\pi}{6}$. Stoga je traženi broj jednak 1.

981. *Riješite nejednadžbu*: $\frac{5x-4}{x^2-3x-4} \geq -1$.

Rješenje: Zadanu nejednadžbu najprije transformiramo ovako:

$$\frac{5x-4}{x^2-3x-4} + 1 \geq 0$$
$$\frac{5x-4+x^2-3x-4}{x^2-3x-4} \geq 0$$
$$\frac{x^2+2x-8}{x^2-3x-4} \geq 0$$

Razlikujemo dva moguća slučaja:

1.) $x^2 + 2x - 8 \geq 0$
$x^2 - 3x - 4 > 0$

Iz prve je nejednadžbe $x \in \langle -\infty, -4] \cup [2, +\infty\rangle$, a iz druge $x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 4, +\infty\rangle$. Presjek tih rješenja je skup $x \in \langle -\infty, -4] \cup \langle 4, +\infty\rangle$.

2.) $x^2 + 2x - 8 \leq 0$
$x^2 - 3x - 4 < 0$

Iz prve je nejednadžbe $x \in [-4, 2]$, a iz druge $x \in \langle -1, 4\rangle$. Presjek tih rješenja je skup $\langle -1, 2]$.

Tako je skup svih realnih rješenja polazne nejednadžbe jednak $\langle -\infty, -4] \cup \langle -1, 2] \cup \langle 4, +\infty\rangle$.

982. *Koliko različitih realnih rješenja jednadžbe* $4\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 - \sqrt{2}$ *pripada skupu svih realnih rješenja nejednadžbe* $|x| < 2\pi$?

Rješenje: Koristeći jednakost

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

lijevu stranu zadane jednadžbe možemo zapisati u obliku

$$4\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 4\cdot\frac{1+\cos\left[2\cdot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]}{2} = 2+2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) = 2-2\sin 2x,$$

što znači da je polazna nejednadžba ekvivalentna jednadžbi

$$2-2\sin 2x = 2-\sqrt{2},$$

odnosno jednadžbi

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Odavde je

$$2x = \frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot k \text{ ili } 2x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi \cdot l,$$

odnosno

$$x_{1k} = \frac{\pi}{8} + \pi \cdot k \text{ ili } x_{2l} = \frac{3\pi}{8} + \pi \cdot l.$$

pri čemu su $k, l \in \mathbf{Z}$. Rješenja koja zadovoljavaju uvjet $|x| < 2\pi$ dobivamo za $k, l \in \{-2, -1, 0, 1\}$. Sva ta rješenja su međusobno različita i ima ih ukupno 8.

983. *Polinom $p(x) = x^2 + px + q$ ima najmanju vrijednost 1 za $x = 5$. Izračunajte zbroj $p + q$.*

Rješenje: Općenito, najmanja vrijednost polinoma 2. stupnja $p_1(x) = ax^2 + bx + c$, gdje su $a, b, c \in \mathbf{R}$ realni parametri takvi da je $a > 0$, postiže se za $x = -\frac{b}{2a}$. U našem je slučaju $a = 1$, $b = p$, pa iz jednadžbe

$$-\frac{p}{2} = 5$$

slijedi $p = -10$. Uvrstimo li $x = 5$ u izraz za $p(x)$, dobit ćemo:

$$p(5) = 5^2 + 5p + q,$$

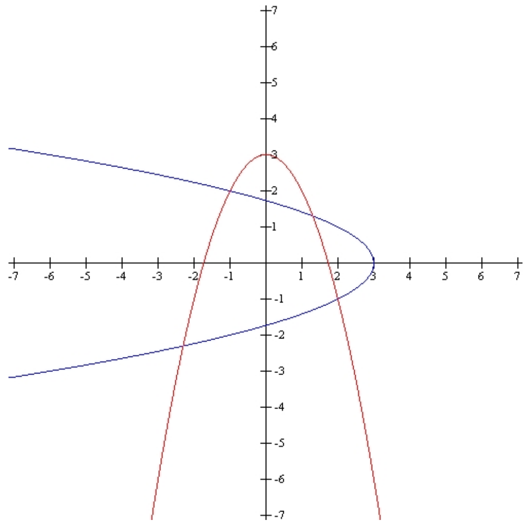
odnosno, zbog $p(5) = 1$ i $p = -10$.

$$1 = 25 - 50 + q.$$

Odavde je $q = 26$, pa je konačno $p + q = -10 + 26 = 16$.

984. *Odredite ukupan broj različitih realnih rješenja sustava $x + y^2 = 3$, $x^2 + y = 3$.*

Rješenje: Traženi je broj jednak ukupnom broju različitih sjecišta krivulja $K_1 \ldots y^2 = 3 - x$ i $K_2 \ldots y = 3 - x^2$. Nacrtamo li obje te krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini, dobivamo:



Nacrtane krivulje sijeku se u točno 4 različite točke. Stoga je ukupan broj različitih rješenja polaznoga sustava jednak 4.

985. *Izračunajte umnožak svih realnih rješenja jednadžbe* $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$.

Rješenje: Stavimo $u=\sqrt[3]{2-x}$, $v=\sqrt{x-1}$. Tada je $u + v = 1$ i $u^3 + v^2 = 1$. Iz prve jednakosti je $v = 1 - u$, pa uvrštavanjem u drugu dobivamo:

$$u^3 + (1 - u)^2 = 1,$$

odnosno

$$u^3 + u^2 - 2u = 0,$$

odnosno

$$u \cdot (u^2 + u - 2) = 0.$$

Sva realna rješenja posljednje jednadžbe su $u_1 = -2$, $u_2 = 0$ i $u_3 = 1$. Sada iz $u=\sqrt[3]{2-x}$ slijedi $x = 2 - u^3$, pa za x dobivamo vrijednosti $x_1 = 10$, $x_2 = 2$ i $x_3 = 1$. Izravnom provjerom utvrđujemo da su te vrijednosti ujedno i rješenja polazne jednadžbe, pa su to sva realna rješenja polazne jednadžbe. Njihov je umnožak jednak 20.

986. *Neka su* $x, y \in \mathbf{R}$ *realni brojevi takvi da je* $0 < x < y$. *Pojednostavnite izraz* $\dfrac{\sqrt{x^2-2xy+y^2}}{\sqrt{x^2+2xy+y^2}}+2\cdot\dfrac{|-x|}{x+y}$.

Rješenje: Kako je

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x^2-2xy+y^2}=\sqrt{(x-y)^2}=|x-y| = (\text{zbog } 0 < x < y) = y-x,\\
&\sqrt{x^2+2xy+y^2}=\sqrt{(x+y)^2}=|x+y| = (\text{zbog } 0 < x < y) = x+y,\\
&|-x| = (\text{zbog } 0 < x) = x,
\end{aligned}$$

zadani izraz je jednak

$$\frac{\sqrt{x^2-2xy+y^2}}{\sqrt{x^2+2xy+y^2}}+2\cdot\frac{|-x|}{x+y}=\frac{y-x}{x+y}+\frac{2x}{x+y}=\frac{x+y}{x+y}=1.$$

987. *Ako je* $A=\frac{4^{-2}-3^{-4}}{0.5-3^{-1}}\cdot(0.5+3^{-1})^{-1}-3^{-1}\cdot 81^{-\frac{1}{4}}$, *izračunajte drugi korijen iz* A^{-1}.

Rješenje: Izračunajmo najprije vrijednost broja A. Imamo redom:

$$A=\frac{4^{-2}-3^{-4}}{0.5-3^{-1}}\cdot(0.5+3^{-1})^{-1}-3^{-1}\cdot 81^{-\frac{1}{4}}=\frac{(2^2)^{-2}-(3^{-2})^2}{0.5-3^{-1}}\cdot\frac{1}{0.5+3^{-1}}-3^{-1}\cdot(3^4)^{-\frac{1}{4}}=$$
$$=\frac{(2^{-2})^2-(3^{-2})^2}{0.5^2-(3^{-1})^2}-3^{-1}\cdot 3^{-1}=\frac{(2^{-2}-3^{-2})(2^{-2}+3^{-2})}{(2^{-1})^2-(3^{-1})^2}-3^{-2}=\frac{(2^{-2}-3^{-2})(2^{-2}+3^{-2})}{2^{-2}-3^{-2}}-3^{-2}=$$
$$=2^{-2}+3^{-2}-3^{-2}=2^{-2}$$

te je

$$A^{-1}=(2^{-2})^{-1}=2^2,$$

pa je drugi korijen iz A^{-1} jednak 2.

988. *Zadan je jednakokračan trapez ABCD čije su osnovice AB i CD takve da je* $|AB| = 2a$, $|CD| = a$, *za neki realan broj* $a > 0$. *Ako je dijagonala AC okomita na krak BC, izrazite površinu zadanoga trapeza kao funkciju varijable a.*

Rješenje: Neka je N nožište okomice iz vrha C na osnovicu AB. Tada je $|NB| = \frac{|AB|-|CD|}{2}=\frac{2a-a}{2}=\frac{a}{2}$, pa je $|AN| = |AB| - |NB| = 2a - \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$. Budući da je trokut ABC pravokutan s pravim kutom kod vrha C, CN je ujedno i visina na hipotenuzu AB toga trokuta. Prema Euklidovu poučku, njezina je duljina jednaka

$$|CN|=\sqrt{|AN|\cdot|NB|}=\sqrt{\frac{a}{2}\cdot\frac{3a}{2}}=\frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Budući da je površina P trapeza dana izrazom

$$P=\frac{1}{2}(|AB|+|CD|)\cdot|CN|,$$

konačno dobivamo:

$$P=\frac{1}{2}(|AB|+|CD|)\cdot|CN|$$
$$P=\frac{1}{2}\cdot(2a+a)\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}$$
$$P=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$$

989. *Ako je* $a = \log 2$ *i* $b = \log 3$, *izrazite* $\log_5 288$ *pomoću a i b.*

Rješenje: Imamo redom:

$$\log_5 288=\frac{\log 288}{\log 5}=\frac{\log(32\cdot 9)}{\log\frac{10}{2}}=\frac{\log 32+\log 9}{\log 10-\log 2}=\frac{\log(2^5)+\log(3^2)}{1-\log 2}=\frac{5\log 2+2\log 3}{1-\log 2},$$

pa je

$$\log_5 288 = \frac{5a+2b}{1-a}.$$

990. *Ako se duljina jedne stranice pravokutnika uveća za 20%, a druga za 40%, za koliko se postotaka uveća površina toga pravokutnika?*

Rješenje: Neka su a i b duljine stranica polaznoga pravokutnika. Njegova je površina $P = ab$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da se a uveća za 20%, a b za 40%. Nove duljine stranica su:

$$a_1 = a + \frac{20}{100} \cdot a = a \cdot (1 + 0.2) = 1.2 \cdot a,$$
$$b_1 = b + \frac{40}{100} \cdot b = b \cdot (1 + 0.4) = 1.4 \cdot b,$$

pa je površina tako dobivenoga pravokutnika jednaka

$$P_1 = a_1 b_1 = (1.2 \cdot a) \cdot (1.4 \cdot b) = (1.2 \cdot 1.4) \cdot (ab) = 1.68 \cdot P = (1 + 0.68) \cdot P = P + \frac{68}{100} \cdot P.$$

Zaključujemo da se površina pravokutnika uvećala za 68%.

991. *Izračunajte zbroj kvadrata svih rješenja jednadžbe* $(9+4\sqrt{5})^{x^2} + (9-4\sqrt{5})^{x^2} = 18$.

Rješenje: Najprije uočimo da vrijedi jednakost

$$(9-4\sqrt{5}) \cdot (9-4\sqrt{5}) = 1$$

iz koje slijedi

$$9-4\sqrt{5} = \frac{1}{9+4\sqrt{5}},$$

te

$$(9-4\sqrt{5})^{x^2} = \left(\frac{1}{9+4\sqrt{5}}\right)^{x^2} = \frac{1}{(9+4\sqrt{5})^{x^2}}$$

Zbog toga uvedimo zamjenu

$$t = (9+4\sqrt{5})^{x^2}$$

pa dobivamo jednadžbu

$$t + \frac{1}{t} = 18,$$

odnosno kvadratnu jednadžbu

$$t^2 - 18t + 1 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su $t_1 = 9-4\sqrt{5}$ i $t_2 = 9+4\sqrt{5}$. Tako iz

$$9-4\sqrt{5}=(9+4\sqrt{5})^{x^2},$$

odnosno

$$\frac{1}{9+4\sqrt{5}}=(9+4\sqrt{5})^{x^2}$$

slijedi $x^2 = -1$, otkuda je $x_1 = -i$, $x_2 = i$. Nadalje, iz

$$9+4\sqrt{5}=(9+4\sqrt{5})^{x^2}$$

slijedi $x^2 = 1$, otkuda je $x_3 = -1$, $x_4 = 1$. Stoga su sva rješenja polazne jednadžbe $x_1 = -i$, $x_2 = i$, $x_3 = -1$ i $x_4 = 1$. Zbroj njihovih kvadrata jednak je $(-1) + (-1) + 1 + 1 = 0$.

992. *Ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^8 + 3x^3 + ax + b$ s polinomom $g(x) = x^2 - 1$ jednak je $r(x) = x$. Izračunajte $a^3 + b^3$.*

Rješenje: Prema poučku o dijeljenju polinoma s ostatkom vrijedi:

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x),$$

što u ovom slučaju znači da za svaki $x \in \mathbf{R}$ mora vrijediti jednakost

$$x^8 + 3x^3 + ax + b = (x^2 - 1) \cdot q(x) + x.$$

Uvrstimo li u ovu jednakost $x = -1$ dobivamo:

$$1 - 3 - a + b = 0 - 1,$$

odakle je

$$-a + b = 1.$$

Nadalje, uvrstimo li $x = 1$, dobivamo:

$$1 + 3 + a + b = 0 + 1,$$

odakle je

$$a + b = -3.$$

Tako smo dobili sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} -a + b &= 1 \\ a + b &= -3 \end{aligned}$$

Njegovo je rješenje $a = -2$, $b = -1$, pa je konačno $a^3 + b^3 = (-2)^3 + (-1)^3 = -8 - 1 = -9$.

993. *Izračunajte vrijednost izraza* $\dfrac{3\cos 50° - 4\sin 140°}{\cos 130°}$.

Rješenje: Kako je

$$\begin{aligned} &\cos 50° = \cos(90° - 40°) = \cos 90° \cos 40° + \sin 90° \sin 40° = \sin 40°, \\ &\sin 140° = \sin(180° - 40°) = \sin 180° \cos 40° - \cos 180° \sin 40° = \sin 40°, \\ &\cos 130° = \cos(90° + 40°) = \cos 90° \cos 40° - \sin 90° \sin 40° = -\sin 40°, \end{aligned}$$

vrijednost zadanoga izraza jednaka je

$$\frac{3\sin 40° - 4\sin 40°}{-\sin 40°} = \frac{-\sin 40°}{-\sin 40°} = 1.$$

994. *Od svih točaka krivulje K… $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$ pravcu p… $4x + 3y - 75 = 0$ najbliža je točka $T = (m, n)$. Izračunajte $m^2 - n^2$.*

Rješenje: Jednadžbu krivulje K zapišimo u obliku $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$, pa vidimo da je riječ o kružnici sa središtem u točki $S = (4, 3)$ i polumjerom $r = 5$. Povucimo okomicu iz točke S na pravac p. Ta okomica ima oblik p_1… $3x - 4y + C = 0$ (općenito, ako je jednadžba pravca q dana s q… $ax + by + c = 0$, onda je familija pravaca okomitih na q određena jednadžbom $bx - ay + d = 0$). Budući da p_1 prolazi točkom S, koordinate točke S moraju zadovoljavati jednadžbu pravca p_1, pa uvrštavanjem dobivamo:

$$3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 + C = 0,$$

a odavde je $C = 0$. Stoga je jednadžba okomice p_1… $3x - 4y = 0$, odnosno p_1… $y = \frac{3}{4}x$. Presijecimo tu okomicu s kružnicom K, tj. riješimo sustav:

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$$
$$y = \frac{3}{4}x$$

Uvrštavanjem druge jednadžbe u prvu i kvadriranjem dobivamo:

$$x^2 - 8x + 16 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{9}{2}x + 9 - 25 = 0,$$

a odavde je reduciranjem i sređivanjem

$$x^2 - 8x = 0.$$

Rješenja te kvadratne jednadžbe su $x_1 = 0$ i $x_2 = 8$, pa su pripadne vrijednosti nepoznanice y $y_1 = 0$ i $y_2 = 6$, pa smo dobili točke $S_1 = (0, 0)$ i $S_2 = (8, 6)$. Udaljenost prve točke od pravca p jednaka je

$$d(S_1, p) = \frac{|4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 75|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 15,$$

a udaljenost druge

$$d(S_2, p) = \frac{|4 \cdot 8 + 3 \cdot 6 - 75|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 5 < 15 .$$

Dakle, pravcu p najbliža točka krivulje K ima koordinate $T(8, 6)$, što znači da je $m = 8$, $n = 6$. Tako je napokon $m^2 - n^2 = 64 - 36 = 28$.

995. *Izračunajte zbroj svih cjelobrojnih rješenja nejednadžbe* $\frac{x-2}{x^2+x-6} \geq \frac{x-1}{x^2-6x+5}$.

Rješenje: Budući da vrijede identiteti

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2),$$
$$x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5),$$

vidimo da nejednadžba nema smisla za $x \in \{-3, 1, 2, 5\}$. Stoga u daljnjem nejednadžbu razmatramo za $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 1, 2, 5\}$. Za takve x smijemo skratiti razlomke na lijevoj i desnoj strani nejednadžbe, pa dobivamo:

$$\frac{1}{x+3} \geq \frac{1}{x-5},$$

odnosno

$$\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-5} \geq 0$$
$$\frac{x-5-(x-3)}{(x+3)(x-5)} \geq 0$$
$$\frac{-2}{(x+3)(x-5)} \geq 0$$

Ova nejednakost je istinita za svaki $x \in \mathbf{R}$ takav da je $(x + 3)(x - 5) < 0$, otkuda se dobiva $x \in \langle -3, 5\rangle$. U tom intervalu ima točno 5 cijelih brojeva koji su rješenje polazne nejednadžbe: $-2, -1, 0, 3$ i 4. Njihov je zbroj jednak 4.

996. *Odredite ukupan broj realnih rješenja jednadžbe* $\sqrt{5x-1} = \sqrt{3x-2} - \sqrt{2x-3}$.

Rješenje: Kvadriranjem zadane jednadžbe dobivamo:

$$5x - 1 = 3x - 2 - 2\sqrt{(3x-2)(2x-3)} + 2x - 3,$$

odnosno

$$\sqrt{(3x-2)(2x-3)} = -2.$$

Lijeva strana ove jednadžbe je uvijek nenegativan realan broj, a desna strogo negativan realan broj. Stoga zadana jednadžba nema niti jedno realno rješenje.

997. *U pravilnu šesterostranu prizmu upisana je sfera polumjera R. Izrazite obujam te prizme kao funkciju varijable R.*

Rješenje: Visina prizme h jednaka je $2R$. No, R je ujedno i duljina visine karakterističnoga trokuta osnovke, pa ako s a označimo duljinu osnovnoga brida, onda vrijedi jednakost

$$\frac{a}{2}\sqrt{3} = R,$$

otkuda je

$$a = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot R .$$

Tako je traženi obujam prizme jednak

$$V = B \cdot h$$
$$V = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot h$$
$$V = \frac{3 \cdot \frac{4}{9} \cdot 3 \cdot R^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot 2R$$
$$V = 4\sqrt{3} \cdot R^3$$

998. *Izračunajte zbroj najvećega negativnoga i najmanjega pozitivnoga rješenja jednadžbe* $\sin 2x + \sin^4 \frac{x}{2} = \cos^4 \frac{x}{2}$.

Rješenje: Zadanu jednadžbu najprije transformirajmo na sljedeći način:

$$\sin 2x + \sin^4 \frac{x}{2} = \cos^4 \frac{x}{2},$$
$$\sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2},$$
$$\sin 2x = (\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2})(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2})$$

Prema formuli za kosinus dvostrukoga kuta, izraz u prvoj zagradi jednak je cos x, a prema osnovnom trigonometrijskom identitetu izraz u drugoj zagradi jednak je 1. Tako je polazna jednadžba ekvivalentna jednadžbi

$$\sin 2x = \cos x,$$

odnosno, zbog identiteta $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$,

$$\cos x \cdot (2 \sin x - 1) = 0.$$

Iz $\cos x = 0$ slijedi $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, a iz $2 \sin x - 1 = 0$ slijedi $x = \frac{\pi}{6} + l \cdot 2\pi$ i $x = \frac{5\pi}{6} + m \cdot 2\pi$, pri čemu su $k, l, m \in \mathbf{Z}$. Tako vidimo da je najveće negativno rješenje jednako $\frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$, a najmanje pozitivno $\frac{\pi}{6}$. Stoga je traženi zbroj jednak $-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}$.

999. 10 *realnih brojeva tvore geometrijski niz. Zbroj prvih pet članova je* 32 *puta manji od zbroja sljedećih pet članova, a zbroj prvoga i šestoga člana jednak je* 33. *Izračunajte zbroj svih članova toga niza.*

Rješenje: Neka je a_1 prvi član, a q količnik zadanoga niza. Tada su za svaki $n = 2, 3, \ldots, 10$ članovi a_n definirani formulom $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Stoga je:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_1 \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + q^4),$$

te

$$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = a_1 \cdot (q^5 + q^6 + q^7 + q^8 + q^9) = a_1 \cdot q^5 \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + q^4).$$

Podijelimo li drugi izraz prvim, dobivamo q^5, a prema uvjetima zadatka, vrijednost toga količnika jednaka je 32. Tako iz eksponencijalne jednadžbe

$$q^5 = 32,$$

tj. iz

$$q^5 = 2^5$$

slijedi $q = 2$. Nadalje, iz uvjeta

$$a_1 + a_6 = 33$$

slijedi

$$a_1 + a_1 \cdot q^5 = 33,$$

odnosno, zbog $q = 2$,

$$a_1 + 32a_1 = 33.$$

Odavde je $a_1 = 1$. Tako je traženi zbroj svih 10 članova niza jednak

$$S_{10} = a_1 \cdot \frac{q^{10}-1}{q-1}$$
$$S_{10} = 1 \cdot \frac{2^{10}-1}{2-1} = 2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023$$

1000. *Niz funkcija* $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *definiran je rekurzivno s*:

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x}$$
$$f_{n+1}(x) = f_n(f_1(x))$$

za svaki $n \in \mathbf{N}$. *Izračunajte* $f_{2006}(2006)$.

<u>Rješenje:</u> Ispišimo prvih nekoliko članova zadanoga niza funkcija:

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x}$$
$$f_2(x) = f_1(f_1(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x} = \frac{x-1}{x}$$
$$f_3(x) = f_2(f_1(x) = \frac{\frac{1}{1-x}-1}{\frac{1}{1-x}} = x$$

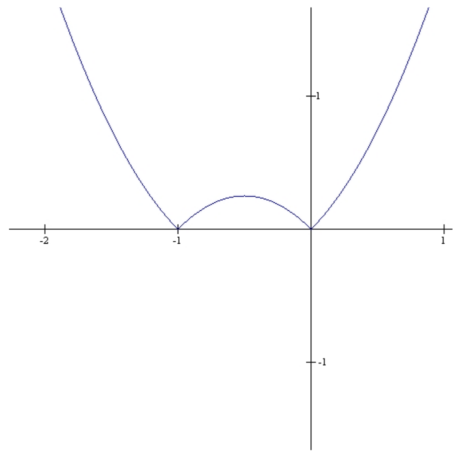
pa vidimo da za svaki $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ i svaki $j \in \{1, 2, 3\}$ vrijedi jednakost $f_{j+3k} = f_j$. Budući da je ostatak pri dijeljenju broja 2006 sa 3 jednak 2, to je $f_{2006}(x) = f_2(x) = \frac{x-1}{x}$. Stoga je $f_{2006}(2006) = \frac{2006-1}{2006} = \frac{2005}{2006}$.

1001. *Za koje vrijednosti realnoga parametra $a \in \mathbf{R}$ jednadžba $|x^2 + x| = a$ ima točno četiri različita realna rješenja?*

Rješenje: Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = |x^2 + x|$. Najprije raspišimo tu funkciju ovako:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, \text{ za } x^2 + x \geq 0 \\ -(x^2 + x), \text{ za } x^2 + x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 + x, \text{ za } x \in \mathbf{R} \setminus \langle -1, 0 \rangle \\ -(x^2 + x), \text{ za } x \in \langle -1, 0 \rangle \end{cases},$$

pa dobivamo:



Lokalni ekstrem ove funkcije je točka $T = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ (dobijemo je kao ekstrem funkcije $g(x) = -(x^2 + x)$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$). Vidimo da će pravac usporedan s osi Ox sjeći dobivenu krivulju u četiri različite točke ako i samo ako njegov odsječak na osi Oy bude u intervalu $\langle 0, \frac{1}{4} \rangle$. Taj odsječak je upravo jednak a, pa zaključujemo da će polazna jednadžba imati točno četiri realna rješenja ako i samo ako je $a \in \langle 0, \frac{1}{4} \rangle$.

1002. *Izračunajte vrijednost izraza* $\dfrac{1 - 2^{-\frac{1}{2}}}{1 + 2^{-\frac{1}{2}}} + \dfrac{1 + 2^{-\frac{1}{2}}}{1 - 2^{-\frac{1}{2}}}$.

Rješenje: Zadani je izraz jednak

$$\frac{1 - 2^{-\frac{1}{2}}}{1 + 2^{-\frac{1}{2}}} + \frac{1 + 2^{-\frac{1}{2}}}{1 - 2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1 - \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}}{1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}} + \frac{1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}}{1 - \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} =$$

$$= \frac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} + \frac{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - 1)} = \frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{2 - 1} + \frac{(\sqrt{2} + 1)^2}{2 - 1} = 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 2 + 2\sqrt{2} + 1 = 6$$

1003. *Neka su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe $5x^2 - 7x + 3 = 0$. Napišite neku kvadratnu jednadžbu čija su rješenja $\frac{1}{x_1}$ i $\frac{1}{x_2}$.*

Rješenje: Prema Viéteovim formulama zbroj, odnosno umnožak rješenja polazne kvadratne jednadžbe jednaki su:

$$x_1 + x_2 = \frac{7}{5}$$
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{5}$$

Odatle slijedi da su zbroj, odnosno umnožak rješenja tražene jednadžbe jednaki:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{\frac{7}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{7}{3}$$
$$\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

pa je tražena kvadratna jednadžba

$$x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{5}{3} = 0,$$

ili njoj ekvivalentna jednadžba

$$3x^2 - 7x + 5 = 0.$$

1004. *Izračunajte vrijednost izraza* $3 - \log 2 - \frac{1}{2}\log 25 + \log_{\frac{1}{2}} 4$.

Rješenje: Zadani izraz je jednak:

$$3 - \log 2 - \log(25^{\frac{1}{2}}) + \frac{\log 4}{\log \frac{1}{2}} = 3 - \log 2 - \log 5 + \frac{\log(2^2)}{\log 1 - \log 2} = 3 - \log 2 - \log 5 + \frac{2\log 2}{-\log 2} =$$
$$3 - \log(2 \cdot 5) - 2 = 3 - \log 10 - 2 = 3 - 1 - 2 = 0$$

1005. *Visina na hipotenuzu pravokutnoga trokuta ima duljinu* $v = 2$ cm *i dijeli hipotenuzu na dva dijela čije se duljine razlikuju za* 3 cm. *Izračunajte površinu toga trokuta.*

Rješenje: Neka su p i q duljine dijelova na koje visina v dijeli hipotenuzu c. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $p > q$, pa iz podatka da se te duljine razlikuju za 3 cm slijedi

$$p - q = 3.$$

Prema Euklidovu je poučku

$$v^2 = pq,$$

pa je u ovom slučaju

$$pq = 4.$$

Tako smo dobili sustav jednadžbi

$$p - q = 3$$
$$pq = 4.$$

Iz prve je jednadžbe $q = p - 3$ pa uvrštavanjem u drugu dobivamo kvadratnu jednadžbu $p^2 - 3p - 4 = 0$ čije je jedino strogo pozitivno rješenje $p = 4$. (Rješenje $p = -1$ ne dolazi u obzir jer broj p – kao duljina – ne može biti strogo negativan.) Stoga je $q = 1$, pa je duljina hipotenuze c jednaka

$$c = p + q = 5.$$

Tako je tražena površina trokuta jednaka

$$P = \frac{1}{2} cv = 5 \text{ cm}^2.$$

1006. *Neka su* $x, y \in \mathbf{R}$ *realni brojevi takvi da vrijedi* $(2 + 3i)x + (3 + 2i)y = 1$, *pri čemu je* i *imaginarna jedinica* ($i^2 = -1$). *Izračunajte* $x - y$.

Rješenje: Iz zadane jednakosti množenjem i grupiranjem dobivamo:

$$(2x + 3y) + (3x + 2y)i = 1.$$

Izjednačavanjem realnih, odnosno imaginarnih dijelova dobivamo sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ 3x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

Oduzimanjem prve jednadžbe od druge izravno dobivamo $x - y = -1$.

1007. *Odredite najmanje rješenje nejednadžbe* $\dfrac{x^2 + x}{x^2 - 4} < 0$.

Rješenje: Razlikujemo dva moguća slučaja:

1.) $x^2 + x > 0$
$x^2 - 4 < 0$

Iz prve je nejednadžbe $x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$, a iz druge $x \in \langle -2, 2\rangle$. Presjek tih rješenja je skup $\langle -2, -1\rangle \cup \langle 0, 2\rangle$.

2.) $x^2 + x < 0$
$x^2 - 4 > 0$

Iz prve je nejednadžbe $x \in \langle -1, 0\rangle$, a iz druge $x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$. Presjek tih rješenja je prazan skup.

Tako je skup svih realnih rješenja polazne nejednadžbe $\langle -2, -1\rangle \cup \langle 0, 2\rangle$. Budući da je riječ o uniji otvorenih intervala, taj skup nema najmanjega elementa.

1008. *Riješite jednadžbu*: $2^{\log_3 x} + 2^{\log_3 (x^2)} = 2$.

Rješenje: Zadanu jednadžbu najprije transformirajmo ovako:

$$2^{\log_3 x} + 2^{2\log_3 x} = 2$$
$$(2^{\log_3 x})^2 + 2^{\log_3 x} - 2 = 0$$

Uz zamjenu $t = 2^{\log_3 x}$ dobivamo kvadratnu jednadžbu $t^2 + t - 2 = 0$ čija su realna rješenja $t_1 = -2$ i $t_2 = 1$. No, za svaki $y \in \mathbf{R}$ vrijedi $2^y > 0$, pa rješenje t_1 ne dolazi u obzir. Tako iz $2^{\log_3 x} = 1$ dobivamo logaritamsku jednadžbu $\log_3 x = 0$ čije je jedino rješenje $x = 1$. To je ujedno i jedino realno rješenje polazne jednadžbe.

1009. *Koliko realnih rješenja ima jednadžba* $\sqrt{x+7} = x + 1$?

Rješenje: Kvadriranjem polazne jednadžbe dobivamo:

$$x + 7 = (x + 1)^2,$$

odnosno

$$x^2 + x - 6 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1 = -3$ i $x_2 = 2$. Izravnim uvrštavanjem u polaznu jednadžbu utvrđujemo da $x_1 = -3$ nije njezino rješenje (jer je u tom slučaju lijeva strana jednadžbe nenegativan, a desna strogo negativan realan broj), a $x_2 = 2$ jest. Stoga polazna jednadžba ima jedinstveno rješenje $x = 2$.

1010. *Izračunajte koeficijent smjera simetrale dužine* $\overline{AB}$ *ako je* $A = (-2, -1)$ *i* $B = (2, 2)$.

Rješenje: Simetrala dužine je, prema definiciji, pravac kroz polovište dužine okomit na dužinu. Njegov koeficijent smjera je suprotan i recipročan koeficijentu smjera pravca na kojemu leži dužina. Stoga je:

$$k_s = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}} = \frac{x_A - x_B}{y_B - y_A} = \frac{-2-2}{2-(-1)} = -\frac{4}{3}.$$

1011. *Neka su* a_1, a_2, a_3 *i* a_4 *uzastopni članovi rastućega aritmetičkoga niza, a* b_1, b_2, b_3 *i* b_4 *uzastopni članovi geometrijskoga niza. Ako je* $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = b_2$ *i* $b_3 - a_3 = 1$, *izračunajte* $b_4 - a_4$.

Rješenje: Budući da je

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$b_2 = b_1 \cdot q,$$

gdje su d i q redom razlika aritmetičkoga, odnosno količnik geometrijskoga niza, zbog uvjeta $a_2 = b_2$ mora biti

$$a_1 + d = b_1 \cdot q,$$

pa uvrštavanjem $a_1 = b_1 = 1$ u tu jednakost dobivamo

$$q = d + 1.$$

Nadalje, budući da je

$$a_3 = a_1 + 2d,$$
$$b_3 = b_1 \cdot q^2,$$

oduzimanjem prve jednakosti od druge dobivamo

$$b_3 - a_3 = b_1 \cdot q^2 - (a_1 + 2d),$$

pa uvrštavanjem $b_3 - a_3 = 1$, $b_1 = 1$, $q = d + 1$ i $a_1 = 1$ dobivamo jednadžbu

$$1 = (d + 1)^2 - 1 - 2d,$$

a odavde je $d_1 = -1$, $d_2 = 1$. Rješenje $d_1 = -1$ ne dolazi u obzir jer je niz $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ rastući, pa preostaje $d = 1$. Stoga je $q = 2$, te

$$b_4 = b_1 \cdot q^3 = 1 \cdot 2^3 = 8,$$
$$a_4 = a_1 + 3d = 1 + 3 = 4,$$

te konačno

$$b_4 - a_4 = 8 - 4 = 4.$$

1012. *Odredite skup svih vrijednosti realnoga parametra* $m \in \mathbf{R}$ *takvih da za svaki* $x \in \mathbf{R}$ *vrijedi nejednakost* $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m < 0$.

Rješenje: Promotrimo funkciju $f(x) = (m-1)x^2 - 2(m+1)x + m$. Zadatak zapravo traži da odredimo sve vrijednosti realnoga parametra $m \in \mathbf{R}$ za koje će ta funkcija poprimati strogo negativne vrijednosti. Nužni i dovoljni uvjeti za to su:

$$m - 1 < 0$$
$$[2(m+1)]^2 - 4(m-1) \cdot m < 0,$$

tj.

$$m < 1$$
$$12m + 4 < 0,$$

Iz ovoga je sustava $m \in \langle -\infty, -\frac{1}{3} \rangle$, pa je traženi skup $\langle -\infty, -\frac{1}{3} \rangle$.

1013. *Neka je* (a, b, c) *rješenje sustava jednadžbi*

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= -1 \\ x + 2y - 4z &= 5 \\ 3x + y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

Izračunajte $a - 2b + 3c$.

Rješenje: Oduzimanjem prve jednadžbe od treće dobivamo $x + 2y - z = 2$, a iz druge jednadžbe je $x + 2y = 4z + 5$. Tako dobivamo linearnu jednadžbu $4z + 5 - z = 2$ iz koje je $z = -1$. Uvrštavanjem $z = -1$ u prvu i treću jednadžbu sustava dobivamo sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 2 \\ 3x + y &= 3 \end{aligned}$$

Zbrajanjem tih jednadžbi dobivamo $x = 1$, pa je $y = 0$. Prema tome, rješenje zadanoga sustava je uređena trojka $(1, 0, -1)$, što znači da je $a = 1$, $b = 0$ i $c = -1$. Stoga je $a - 2b + 3c = 1 - 3 = -2$.

1014. *Odredite vrijednost strogo pozitivnoga realnoga parametra a za koju je pravac* $p\ldots\ x + y - 3 = 0$ *tangenta krivulje* $K\ldots\ a^2x^2 + 4y^2 = 4a^2$.

Rješenje: Krivulja K je elipsa čija je duljina male poluosi $b_1 = a$, a velike $a_1 = 2$. Koeficijent smjera zadanoga pravca je $k = -1$, a odsječak na osi Oy $l = 3$. Te vrijednosti uvrstimo u uvjet tangencijalnosti za elipsu:

$$a_1^2 k^2 + b_1^2 = l^2,$$

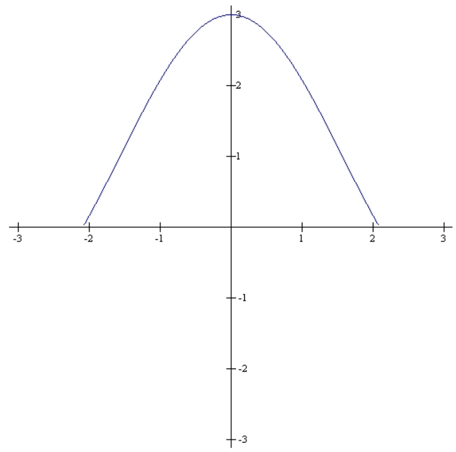
pa dobivamo:

$$4 \cdot (-1)^2 + a^2 = 3^2,$$

odnosno $a^2 = 5$. Zbog zahtjeva $a > 0$ jedino rješenje ove jednadžbe je $a = \sqrt{5}$.

1015. *Odredite ukupan broj svih različitih realnih rješenja nejednadžbe* $2\cos x + 1 \le 0$ *na segmentu* $\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

Rješenje: Graf funkcije $f(x) = 2\cos x + 1$ na zadanom segmentu je:



Stoga zadana nejednadžba na tom segmentu ima točno dva realna rješenja: $x_1 = -\frac{2\pi}{3}$ i $x_2 = \frac{2\pi}{3}$.

1016. *Odredite najveću vrijednost realne funkcije* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definirane formulom*

$$f(x) = |x - 1| - |2x + 1|.$$

Rješenje: Nultočke pribrojnika su $x_1 = -\frac{1}{2}$ i $x_2 = 1$, pa zadanu funkciju razmatramo na tri intervala:

1.) $\langle -\infty, -\frac{1}{2}]$

Na ovome je intervalu $|x - 1| = -(x - 1) = 1 - x$ i $|2x + 1| = -(2x + 1) = -2x - 1$, pa je $f(x) = 1 - x - (-2x - 1) = x + 2$.

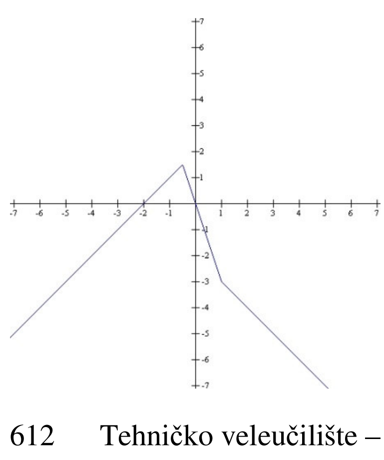
2.) $\langle -\frac{1}{2}, 1]$

Na ovome je intervalu $|x - 1| = -(x - 1) = 1 - x$ i $|2x + 1| = 2x + 1$, pa je $f(x) = 1 - x - (2x + 1) = -3x$.

3.) $\langle 1, +\infty \rangle$

Na ovome je intervalu $|x - 1| = x - 1$ i $|2x + 1| = 2x + 1$, pa je $f(x) = x - 1 - (2x + 1) = -x - 2$.

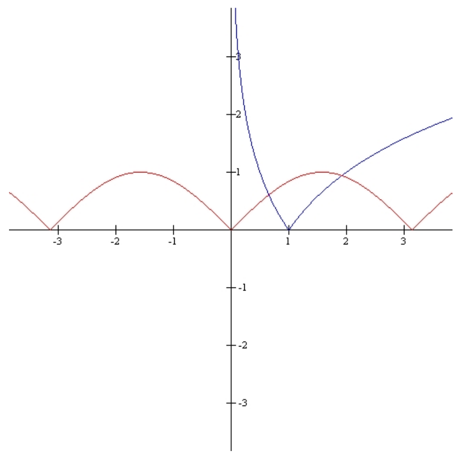
Tako graf zadane funkcije izgleda ovako:



Vidimo da funkcija $f(x)$ ima najveću vrijednost $\frac{3}{2}$ za $x = -\frac{1}{2}$. Dakle, tražena vrijednost jednaka je $\frac{3}{2}$.

1017. *Odredite ukupan broj različitih rješenja jednadžbe* $|\log_2 x| = |\sin x|$.

Rješenje: Nacrtamo li grafove funkcija $f_1(x) = |\log_2 x|$ i $f_2(x) = |\sin x|$, dobit ćemo:



Budući da je $f_1(x)$ strogo padajuća na intervalu $\langle 0, 1\rangle$, a strogo rastuća na intervalu $\langle 1, +\infty\rangle$, a $f_2(x)$ periodična (s temeljnim periodom π), zadana jednadžba ima točno dva različita realna rješenja.

1018. *Riješite sljedeću jednadžbu u skupu* **C**: $2|z| - z = 7 + 4i$.

Rješenje: Pretpostavimo da je $z = a + bi$, gdje su $a, b \in \mathbf{R}$. Tada zadanu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$2\sqrt{a^2+b^2} - a - bi = 7 + 4i,$$

otkuda izjednačavanjem realnih, odnosno imaginarnih dijelova dobivamo sustav:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{a^2+b^2} - a &= 7 \\ -b &= 4 \end{aligned}$$

Iz druge jednadžbe toga sustava je $b = -4$, što uvršteno u prvu jednadžbu daje

$$2\sqrt{a^2+16} = a + 7,$$

odnosno nakon kvadriranja

$$3a^2 - 14a + 15 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $a_1 = \frac{5}{3}$ i $a_2 = 3$. Stoga su sva rješenja polazne jednadžbe $z_1 = \frac{5}{3} - 4i$ i $z_2 = 3 - 4i$.

1019. *Izračunajte aritmetičku sredinu svih realnih rješenja jednadžbe* $\left|\frac{3x+2}{1-2x}\right| = 5$.

Rješenje: Postoje točno dvije mogućnosti:

1.) $\frac{3x+2}{1-2x} \geq 0$

U tom je slučaju zadana jednadžba ekvivalentna jednadžbi $\frac{3x+2}{1-2x}$ = 5, odnosno jednadžbi $3x + 2 = 5 - 10x$. Jedino realno rješenje ove jednadžbe je $x = \frac{3}{13}$. Izravnim uvrštavanjem u polaznu jednadžbu utvrđujemo da je $x_1 = \frac{3}{13}$ ujedno i rješenje polazne jednadžbe.

2.) $\frac{3x+2}{1-2x} < 0$

U tom je slučaju zadana jednadžba ekvivalentna jednadžbi $\frac{3x+2}{1-2x}$ = –5, odnosno jednadžbi $3x + 2 = 10x - 5$. Jedino realno rješenje ove jednadžbe je $x = 1$. Izravnim uvrštavanjem u polaznu jednadžbu utvrđujemo da je $x_2 = 1$ ujedno i rješenje polazne jednadžbe.

Stoga je tražena aritmetička sredina svih realnih rješenja polazne jednadžbe jednaka $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{1+\frac{3}{13}}{2} = \frac{8}{13}$.

1020. *Odredite skup svih vrijednosti realnoga parametra* $a \in \mathbf{R}$ *za koje sva realna rješenja jednadžbe* $ax(x - 1) = x^2 - 1$ *zadovoljavaju nejednakost* $\left|\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right| \leq 3$.

Rješenje: Zadanu jednadžbu najprije zapišimo u obliku

$$(x - 1)(ax - x - 1) = 0,$$

pa vidimo da su sva realna rješenja zadane jednadžbe $x_1 = 1$ (neovisno o vrijednosti realnoga parametra a) i $x_2 = \frac{1}{a-1}$ (za $a \neq 1$). Tako imamo dva slučaja:

1.) $a = 1$

U ovom slučaju zadana jednadžba ima jedinstveno rješenje $x = 1$. To rješenje zadovoljava zadanu nejednakost jer je nejednakost $1 \leq 3$ istinita.

2.) $a \neq 1$

U ovom slučaju zadana jednadžba ima dva rješenja: $x_1 = 1$ i $x_2 = \frac{1}{a-1}$. Zbroj njihovih recipročnih vrijednosti jednak je $1 + a - 1 = a$, pa iz $|a| \leq 3$ slijedi $a \in [-3, 3]$.

Prema tome, traženi je skup jednak $[-3, 3]$.

1021. *Riješite jednadžbu*: $10^{\log(x^2-8x+17)+1} = 5x - 5$.

Rješenje: Zadanu jednadžbu najprije transformirajmo ovako:

$$10^{\log(x^2-8x+17)+\log 10} = 5x - 5$$
$$10^{\log\left[10\cdot(x^2-8x+17)\right]} = 5x - 5$$

a odavde, zbog jednakosti $10^{\log a} = a$, $\forall a \in \mathbf{R}^+$, slijedi

$$10x^2 - 80x + 170 = 5x - 5,$$

odnosno

$$2x^2 - 17x + 35 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1 = \frac{7}{2}$ i $x_2 = 5$. Izravnom provjerom utvrđujemo da su navedena rješenja ujedno i sva rješenja polazne jednadžbe.

1022. *Ivica je tijekom zime i ljeta na svojoj težini izgubio* 10%, *u proljeće je dobio* 15%, *a ujesen još* 6%. *Iskažite u postotcima ukupnu promjenu Ivicine težine u promatranom razdoblju.*

Rješenje: Iskoristit ćemo formulu za određivanje postotka sukcesivne promjene osnovne veličine:

$$R = 100 \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{p_n}{100}\right) - 100$$

u koju ćemo uvrstiti $n = 4$ (jer imamo ukupno točno 4 promjene), $p_1 = -10$ (– znači smanjenje), $p_2 = +15$ (+ znači povećanje), $p_3 = -10$ i $p_4 = +6$. Tako dobivamo:

$$R = 100 \cdot \left(1 - \frac{10}{100}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{15}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right) - 100,$$

odnosno

$$R = -1.261.$$

Odatle slijedi da je u promatranom razdoblju Ivica izgubio na težini ukupno 1.261% (tj. njegova krajnja težina je za 1.261% manja od početne).

1023. *Suprotni kutovi tetivnoga četverokuta odnose se kao* 17 : 3, *odnosno* 4 : 5. *Izračunajte te kutove.*

Rješenje: Koristit ćemo činjenicu da je zbroj dvaju nasuprotnih kutova tetivnoga četverokuta jednak 180°. Stoga u prvom slučaju veličinu 180° trebamo podijeliti u omjeru 17 : 3, a u drugom u omjeru 4 : 5. Prvi omjerni koeficijent jednak je

$$k_1 = \frac{180}{17+3} = 9°,$$

pa je riječ o kutovima $\alpha = 17 \cdot 9° = 153°$ i $\beta = 3 \cdot 9° = 27°$. Analogno, drugi omjerni koeficijent jednak je

$$k_2 = \frac{180}{5+4} = 20°,$$

pa je riječ o kutovima $\gamma = 4 \cdot 20° = 80°$ i $\delta = 5 \cdot 20° = 100°$. Poredani po veličini, traženi kutovi su 27°, 80°, 100° i 153°.

1024. *Odredite troznamenkasti prirodan broj* $\overline{abc}$ *ako je* 12% *od toga broja jednako* $\overline{ac}$.

Rješenje: Najprije odmah istaknimo uvjete $a \in [9]$, $b, c \in [9] \cup \{0\}$. Podatak iskazan u zadatku možemo zapisati u obliku jednadžbe

$$10a + c = \frac{12}{100} \cdot (100a + 10b + c),$$

odnosno

$$2a + 1.2b - 0.88c = 0,$$

odnosno

$$25a + 15b - 11c = 0.$$

Budući da je zbroj $25a + 15b$ djeljiv s 5, takav mora biti i broj $11c$, što znači da je $c \in \{0, 5\}$. No, $c = 0$ ne dolazi u obzir jer bi u tom slučaju slijedilo $25a + 15b = 0$, pa bi brojevi a i b bili suprotnoga predznaka (što je nemoguće jer su a i b znamenke istoga predznaka). Zato mora biti $c = 5$. U tom je slučaju

$$25a + 15b = 55,$$

odnosno

$$5a + 3b = 11.$$

Odatle slijedi $a = 1$ i $b = 2$, pa je traženi broj 125.

1025. *Riješite nejednadžbu*: $2 \sin^2 x - 3 \cos x < 0$.

Rješenje: Izrazimo $\sin^2 x$ pomoću $\cos^2 x$:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

pa dobivamo nejednadžbu

$$2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 > 0.$$

Uz zamjenu $t = \cos x$ dobivamo kvadratnu nejednadžbu

$$2t^2 + 3t - 2 > 0.$$

Odavde je $t \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle \frac{1}{2}, +\infty\rangle$. Zbog $-1 \leq \cos x \leq 1$ ne može biti $\cos x < -2$, pa preostaje

$$\cos x > \frac{1}{2}.$$

Na intervalu $[-\pi, \pi\rangle$ ova nejednadžba ima za rješenje skup $\langle -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\rangle$. Stoga je skup svih rješenja te nejednadžbe $\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left\langle -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \right\rangle$.

1026. *Odredite jednadžbu težišnice iz vrha C trokuta ABC ako je* $A = (1, 1)$, $B = (5, 2)$ *i* $C = (-1, 3)$.

Rješenje: Polovište vrhu C nasuprotne stranice AB je točka $P = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{1+2}{2}\right) = \left(3, \frac{3}{2}\right)$. Tražena težišnica prolazi vrhom C i točkom P pa je njezina jednadžba

$$y-3=\frac{\frac{3}{2}-3}{3-(-1)}\cdot(x+1),$$

odnosno t_c … $3x + 8y - 21 = 0$.

1027. *Ravnina prolazi jednim bridom osnovke kocke, zatvara s tom osnovkom kut od* 30°*, te siječe kocku u liku površine* $32\sqrt{3}$ cm^2. *Izračunajte oplošje kocke.*

Rješenje: Označimo s a duljinu brida kocke. Presječni lik je pravokutnik kojemu je duljina jedne stranice jednaka a, a duljina druge $\frac{a}{\cos 30°}=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$, pa je njegova površina $P=\frac{2\sqrt{3}}{3}a^2$. Tako iz $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^2=32\sqrt{3}$ slijedi $a^2 = 48$, pa je oplošje kocke $O = 6a^2 = 288$ cm^2.

1028. *Izračunajte vrijednost brojevnoga izraza* $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+...+\frac{1}{2756}$.

Rješenje: Uočimo da vrijede jednakosti $\frac{1}{20}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$, $\frac{1}{30}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$, $\frac{1}{42}=\frac{1}{6}-\frac{1}{7}$,..., $\frac{1}{2756}=\frac{1}{52}-\frac{1}{53}$. Njihovim zbrajanjem (zbrojimo posebno lijeve, a posebno desne strane) dobivamo da je vrijednost zadanoga izraza jednaka $\frac{1}{4}-\frac{1}{53}=\frac{49}{212}$.

1029. *Koliko rješenja u skupu* **N** *ima jednadžba* $\sqrt{30-\sqrt{29-\sqrt{12+\sqrt{3x+10}}}}=5$?

Rješenje: Iz zadane jednadžbe kvadriranjem redom slijedi:

$$\sqrt{30-\sqrt{29-\sqrt{12+\sqrt{3x+10}}}}=5$$
$$30-\sqrt{29-\sqrt{12+\sqrt{3x+10}}}=25$$
$$\sqrt{29-\sqrt{12+\sqrt{3x+10}}}=5$$
$$29-\sqrt{12+\sqrt{3x+10}}=25$$
$$\sqrt{12+\sqrt{3x+10}}=4$$
$$12+\sqrt{3x+10}=16$$
$$\sqrt{3x+10}=4$$
$$3x+10=16$$
$$x=2$$

Stoga zadana jednadžba u skupu **N** ima točno jedno rješenje: $x = 2$.

1030. *Odredite skup svih realnih rješenja jednadžbe* $(a^{-2}-2)^{-2}-2^{-2}=0$.

Rješenje: Iz zadane jednadžbe slijedi $(a^{-2} - 2)^{-2} = 2^{-2}$, otkuda je $a^{-2} - 2 = 2$, odnosno $a^{-2} = 4$. Obje strane ove jednadžbe potenciramo na potenciju $-\frac{1}{2}$, pa konačno dobijemo $a=4^{-\frac{1}{2}}=(2^2)^{-\frac{1}{2}}=2^{-1}=\frac{1}{2}$.

1031. *Ako je* $x+\frac{1}{x}=4$, *izračunajte* $x^4+\frac{1}{x^4}$.

Rješenje: Iz zadane jednakosti kvadriranjem dobivamo $(x+\frac{1}{x})^2=16$, tj. $x^2+2+\frac{1}{x^2}=16$, a odavde je $x^2+\frac{1}{x^2}=14$. Ponovimo navedeni postupak s ovom jednakošću pa dobijemo: $x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2 = 196-2 = 194$.

1032. *Izračunajte* $\left(i^{2006}+\frac{1}{i^{2007}}\right)^{2008}$.

Rješenje: Budući da je $i^{2006} = i^{4\cdot 501+2} = (i^4)^{501}\cdot i^2 = 1^{501}\cdot(-1) = (-1)$, to je $i^{2007} = i^{2006}\cdot i = (-1)\cdot i = -i$, pa je

$\frac{1}{i^{2007}}=-\frac{1}{i}=-\frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i}=-\frac{i}{i^2}=-\frac{i}{-1}=i$. Tako je zadani izraz jednak $(-1+i)^{2008} = [(-1+i)^2]^{1004} = (1-2i+i^2)^{1004} = (-2i)^{1004} = (-1)^{1004}\cdot 2^{1004}\cdot i^{1004} = 2^{1004}\cdot(i^4)^{251} = 2^{1004}\cdot 1^{251} = 2^{1004}$.

1033. *Pojednostavnite izraz*: $\dfrac{x(1+x^{-1})^{-1}-(1+x)^{-1}+1}{x(1-x^{-1})^{-1}+(1-x)^{-1}-x}$.

Rješenje: Zadani je izraz jednak

$$\frac{x(1+x^{-1})^{-1}-(1+x)^{-1}+1}{x(1-x^{-1})^{-1}+(1-x)^{-1}-x}=\frac{x\cdot\frac{1}{1+x^{-1}}-\frac{1}{1+x}+1}{x\cdot\frac{1}{1-x^{-1}}+\frac{1}{1-x}-x}=\frac{x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}-\frac{1}{1+x}+1}{x\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{x}}+\frac{1}{1-x}-x}=$$

$$=\frac{x\cdot\frac{x}{x+1}-\frac{1}{1+x}+1}{x\cdot\frac{x}{x-1}+\frac{1}{1-x}-x}=\frac{\frac{x^2-1+x+1}{x+1}}{\frac{x^2-1-x(x-1)}{x-1}}=\frac{\frac{x^2+x}{x+1}}{\frac{x-1}{x-1}}=\frac{x(x+1)}{x+1}=x$$

1034. *Neka je* $a\in\mathbf{R}\setminus\{-3, 3\}$. *Odredite koeficijent smjera pravca* $p\ldots\ 2ay-a^2x+a+6y+9x-3=0$.

Rješenje: Zapišimo najprije jednadžbu pravca p u obliku $p\ldots\ (9-a^2)x+(6+2a)y+a-3=0$, pa odavde odmah dobivamo $k=\frac{a^2-9}{2a+6}=\frac{(a-3)(a+3)}{2(a+3)}=\frac{a-3}{2}$.

1035. *Odredite ukupan broj svih različitih realnih rješenja jednadžbe* $x^5-x^3-2x=0$.

Rješenje: Lijevu stranu zadane jednadžbe možemo faktorizirati ovako:

$$x^5-x^3-2x = x\cdot(x^4-x^2-2) = x\cdot(x^4+x^2-2x^2-2) = x\cdot[x^2\cdot(x^2+1)-2\cdot(x^2+1)] = x\cdot(x^2+1)\cdot(x^2-2)$$

Tako vidimo da zadana jednadžba ima točno tri različita realna rješenja: $x_1=-\sqrt{2}$, $x_2=0$ i $x_3=\sqrt{2}$.

1036. *Površina pravokutnika je* 168 cm^2, *a opseg mu je* 52 cm. *Kolika je duljina dijagonale pravokutnika*?

Rješenje: Neka su a i b duljine stranica pravokutnika. Iz podataka iskazanih u zadatku možemo postaviti sljedeći sustav jednadžbi:

$$2a+2b=52$$

$$ab = 168.$$

Iz prve jednadžbe toga sustava slijedi $a + b = 26$. Kvadriranjem te jednakosti dobijemo $a^2 + 2ab + b^2 = 676$. U tu jednakost uvrstimo $ab = 168$, pa dobijemo $a^2 + b^2 = 340$. Stoga je tražena duljina dijagonale $d = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{340} = 2\sqrt{85}$ cm.

1037. *Riješite jednadžbu*: $\log_4(1 + 5 \log_2(x - 3)) = 2$.

Rješenje: Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&1 + 5 \log_2(x - 3) = 4^2\\
&1 + 5 \log_2(x - 3) = 16\\
&5 \log_2(x - 3) = 15\\
&\log_2(x - 3) = 3\\
&x - 3 = 2^3\\
&x - 3 = 8\\
&x = 11
\end{aligned}$$

1038. *Odredite imaginarni dio kompleksnoga broja* $z = \dfrac{(1+i)^4}{3-4i} + \left(1+i\sqrt{3}\right)^3$.

Rješenje: Izračunajmo najprije $(1 + i)^4$ i $(1+i\sqrt{3})^3$. Imamo:

$(1 + i)^4 = [(1 + i)^2]^2 = (1 + 2i + i^2)^2 = (2i)^2 = 4i^2 = -4;$
$(1+i\sqrt{3})^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2\cdot i\sqrt{3} + 3\cdot 1\cdot (i\sqrt{3})^2 + (i\sqrt{3})^3 = 1 + 3\sqrt{3}i + 3\sqrt{3}i^2 + 3\sqrt{3}i^3 = 1 + 3\sqrt{3}i - 3 - 3\sqrt{3}i = -2$.

Tako je zadani kompleksan broj jednak

$$z = \frac{-4}{3-4i} + (-2) = \frac{-4(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} - 2 = \frac{-12-16i}{9-16i^2} - 2 = \frac{-12-16i}{9+16} - 2 = \frac{-12-16i}{25} - 2 = -\frac{62}{25} - \frac{16}{25}i$$

pa je $\operatorname{Im} z = -\dfrac{16}{25}$.

1039. *Cijena nekoga proizvoda uvećana je za* 11%, *pa sad iznosi* 99 kn 90 lp. *Izračunajte cijenu toga proizvoda prije povećanja.*

Rješenje: Neka je c tražena cijena. Tada je cijena nakon povećanja jednaka $c + \dfrac{11}{100}\cdot c = c + 0.11 \cdot c = 1.11 \cdot c$. Tako iz jednadžbe $1.11 \cdot c = 99.9$ slijedi $c = 90$ kn.

1040. *Duljine kateta pravokutnoga trokuta odnose se kao* 3 : 4. *Ako je površina toga trokuta jednaka* 150 cm², *izračunajte njegov opseg*.

Rješenje: Neka su standardno a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze trokuta. Iz podatka $a : b = 3 : 4$ slijedi da postoji jedinstven (strogo pozitivan) realan broj k takav da je $a = 3k$ i $b = 4k$. Te izraze, zajedno s $P = 150$, uvrstimo u formulu $P = \dfrac{1}{2}ab$, pa dobijemo:

$$150 = \frac{1}{2}\cdot 3k \cdot 4k,$$

a otuda je $k^2 = 25$, odnosno (zbog $k > 0$) $k = 5$. Stoga su duljine kateta $a = 3 \cdot 5 = 15$ cm i $b = 4 \cdot 5 = 20$ cm, pa je duljina hipotenuze (prema Pitagorinu poučku) $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{15^2+20^2} = \sqrt{225+400} = \sqrt{625} = 25$ cm. Tako je opseg zadanoga trokuta jednak $O = a + b + c = 15 + 20 + 25 = 60$ cm.

1041. *Kugla polumjera* 41 cm *presječena je ravninom koja je od središta kugle udaljena* 9 cm. *Izračunajte površinu presjeka kugle i ravnine.*

Rješenje: Presjek kugle i ravnine je kružnica. Označimo s r njezin polumjer. Određenosti radi, neka je S središte zadane kugle, S_1 središte navedene kružnice, a AB neki njezin promjer. Promotrimo pravokutan trokut SS_1A (s pravim kutom kod vrha S_1). U njemu je $|SS_1| = 9$ cm, $|S_1A| = r$ i $|SA| = 41$ cm, pa primjenom Pitagorina poučka dobivamo:

$$9^2 + r^2 = 41^2,$$

odnosno $r^2 = 41^2 - 9^2 = 1600$. Tako je tražena površina presjeka jednaka $P = r^2\pi = 1600\pi$ cm^2.

1042. *Tri metalne kocke čije su osnovice redom duge* 30 cm, 40 cm *i* 50 cm *pretaljene su u jednu kocku. Izračunajte duljinu brida te kocke.*

Rješenje: Obujam dobivene kocke jednak je zbroju obujmova triju pretaljenih kocaka:

$$V = 30^3 + 40^3 + 50^3 = 216\,000 \text{ cm}^3.$$

Označimo li s a traženu duljinu brida, onda iz jednadžbe $a^3 = 216\,000$ slijedi $a = 60$ cm.

1043. *Izračunajte vrijednost brojevnoga izraza*: $\dfrac{25\cdot 9^{\frac{1}{2}} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2}}{\sqrt{490}}$.

Rješenje: Imamo redom:

$$\frac{25\cdot 9^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}}{\sqrt{490}} = \frac{25\cdot (3^2)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2^2}\right)^{-2}}{\sqrt{49\cdot 10}} = \frac{25\cdot 3^1 + (2^{-2})^{-2}}{\sqrt{49}\cdot\sqrt{10}} = \frac{25\cdot 3 + 2^4}{7\cdot\sqrt{10}} = \frac{75+16}{7\cdot\sqrt{10}} = \frac{91}{7\cdot\sqrt{10}} = \frac{13}{\sqrt{10}} = \frac{13\sqrt{10}}{10}.$$

1044. *Tek posječeno stablo sadrži* 31 % *vode. Nakon tromjesečnog sušenja maseni udio vode iznosi* 8%. *Kolika je masa stabla nakon sušenja ako tek posječeno stablo ima masu* 400 kg?

Rješenje: U tek posječenom stablu ima 100% – 31% = 69% suhe tvari. Stoga je masa suhe tvari u 400 kg tek posječenoga stabla jednaka $m = \frac{69}{100}\cdot 400 = 276$ kg. Tih 276 kg čini 100% – 8% = 92% ukupne mase stabla nakon sušenja. Označimo li traženu masu s m_1, onda iz jednadžbe $\frac{92}{100}\cdot m_1 = 276$ dobivamo $m_1 = 300$ kg.

1045. *Koliko vode treba dodati u* 3 litre 15 %*–tne otopine da bi se dobila* 8%*–tna otopina*?

Rješenje: Primijenjujemo jednostavan račun smjese, tj. "pravilo zvijezde":

```
15 ------------- 8 – 0 = 8
          8
0 ---------------15 – 8 = 7
```

Dakle, otopinu i vodu treba pomiješati u omjeru 8 : 7, tj. treba uzeti $8k$ 15%–tne otopine i $7k$ vode (za neki $k \in \mathbf{R}^+$). Budući da obujam otopine iznosi 3 litre, iz jednadžbe $8k = 3$ dobivamo $k = \frac{3}{8}$, pa tražena količina vode iznosi $7\cdot\frac{3}{8} = \frac{21}{8} = 2.625$ litara (= 26.25 dl).

1046. *Krivulja* $y = ax^2 + bx + c$, *gdje su* a, b, $c \in \mathbf{R}$ *realni parametri, prolazi točkama* $A = (0, 3)$, $B = (-1, 2)$ *i* $C = (2, 11)$. *Izračunajte* $3a + 2b + c$.

Rješenje: Budući da svaka od točaka pripada krivulji, njezine koordinate moraju zadovoljavati jednadžbu krivulje. Za točku A dobivamo:

$$3 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c,$$

za točku B

$$2 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c,$$

a za točku C

$$11 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c.$$

Te tri jednadžbe daju sljedeći sustav triju linearnih jednadžbi s tri nepoznanice:

$$\begin{aligned} 4a + 2b + c &= 11 \\ a - b + c &= 2 \\ c &= 3. \end{aligned}$$

Uvrstimo li $c = 3$ u prvu i drugu jednadžbu sustava, dobit ćemo:

$$\begin{aligned} 4a + 2b &= 8 \\ a - b &= -1, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} 2a + b &= 4 \\ a - b &= -1 \end{aligned}$$

Zbrajanjem tih jednadžbi dobivamo $a = 1$, a oduzimanjem $b = -2$. Stoga je $3a + 2b + c = 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 3 = 2$.

1047. *Odredite ukupan broj realnih rješenja jednadžbe* $\log(x - 2) = 2 \log (x - 3) - \log(x - 1)$.

Rješenje: Zadanu jednadžbu možemo zapisati u obliku $\log(x - 2) + \log(x - 1) = 2 \log(x - 3)$, odnosno u obliku $\log[(x - 2)(x - 1)] = \log[(x - 3)]^2$. Izjednačavanjem logaritmanada dobivamo $x^2 - 3x + 2 = x^2 - 6x + 9$. Odavde je $x = \frac{7}{3}$. Ali, za $x = \frac{7}{3}$ izraz $\log(x - 3)$ nije definiran, a kako drugih kandidata za rješenje nema, zaključujemo da polazna jednadžba nema niti jedno realno rješenje.

1048. *Napišite neku kvadratnu jednadžbu s cjelobrojnim koeficijentima čije je jedno rješenje* $x = 3 - 2i$.

Rješenje: Primijenit ćemo činjenicu da ako je $z \in \mathbf{C}$ rješenje kvadratne jednadžbe s realnim koeficijentima, onda je i $\overline{z}$ rješenje te iste jednadžbe. U našem slučaju to znači da su brojevi x i $\overline{x} = 3 + 2i$ sva rješenja tražene kvadratne jednadžbe. Zbroj tih dvaju brojeva jednak je 6, a umnožak $3^2 - (2i)^2 = 9 + 4 = 13$, pa prema Viéteovim formulama slijedi da tražena jednadžba glasi:

$$x^2 - 6x + 13 = 0.$$

1049. *Pojednostavnite izraz*: $\dfrac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9} : \dfrac{1}{3 - x}$.

Rješenje: Imamo redom:

$$\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}:\frac{1}{3-x}=\frac{(x+3)^2}{(x-3)(x+3)}\cdot(3-x)=-(x+3)\,.$$

1050. *Riješite nejednadžbu*: $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x-4}\geq 0\,.$

Rješenje: Svođenjem na zajednički nazivnik dobivamo:

$$\frac{x-4-(x+2)}{(x+2)(x-4)}\geq 0\,,$$

odnosno

$$\frac{-6}{(x+2)(x-4)}\geq 0\,.$$

Lijeva strana će biti nenegativan realan broj ako i samo ako vrijednost izraza $(x + 2)(x – 4)$ bude strogo manja od nule. Tako iz

$$(x+2)(x-4)<0$$

slijedi $x \in \langle -2, 4\rangle$, i to je skup svih realnih rješenja polazne nejednadžbe.

1051. *Odredite skup svih realnih rješenja jednadžbe* $(x^2-x-1)^{\sqrt{x-x^2}}=1.$

Rješenje: Prirodan broj 1 možemo dobiti ili kao a^0, za svaki $a \in \mathbf{R}^+$, ili kao 1^b, za svaki $b \in \mathbf{R}$ ili kao $(-1)^{2k}$ za svaki $k \in \mathbf{Z}$. U skladu s tim razlikovat ćemo tri slučaja:

1.) $x - x^2 = 0$

Rješenja ove jednadžbe su $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$. Uvrštavanjem tih brojeva u polaznu jednadžbu dobit ćemo $(-1)^0$ i taj broj je identički jednak 1. Prema tome, $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$ su rješenja polazne jednadžbe.

2.) $x^2 - x - 1 = 1$

Ova jednadžba je ekvivalentna jednadžbi $x^2 - x - 2 = 0$ čija su rješenja $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$. Međutim, za $x = 2$ izraz $\sqrt{x-x^2}$ nije realan broj, pa ta vrijednost nije rješenje polazne jednadžbe. Stoga u ovom slučaju dobivamo samo jedno rješenje: $x = -1$.

3.) $x^2 - x - 1 = -1$ i $\sqrt{x-x^2}$ je paran cijeli broj

Iz $x^2 - x - 1 = -1$ slijedi $x^2 - x = 0$, što je slučaj 1. Prema tome, u ovom slučaju ne dobivamo niti jedno novo rješenje.

Zaključimo: skup svih realnih rješenja polazne jednadžbe je $S = \{-1, 0, 1\}$.

1052. *Pojednostavnite izraz*: $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-a-b-b^2}\,.$

Rješenje: Imamo redom:

$$\frac{a^2-b^2}{a^2-a-b-b^2}=\frac{(a-b)(a+b)}{a^2-b^2-(a+b)}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)(a+b)-(a+b)}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)(a-b-1)}=\frac{a-b}{a-b-1}\,.$$

1053. *S kojim od sljedećih brojeva nikada nije djeljiv broj* $n^2 - 8$ ($n \in \mathbf{N}$): 4, 5, 7 *ili* 23?

Rješenje: Lako se vidi da je za svaki paran prirodan broj $n \in \mathbf{N}$ broj $n^2 - 8$ djeljiv s 4 (jer su i n^2 i 8 djeljivi s 4). Nadalje, za $n = 8$ je $n^2 - 8 = 56$, a taj broj je djeljiv sa 7. Napokon, za $n = 10$ je $n^2 - 8 = 92$, a taj je broj djeljiv s 23. Stoga $n^2 - 8$ nikada nije djeljiv s 5. To je čak lako i dokazati jer kad bi postojao $k \in \mathbf{N}$ takav da je $n^2 - 8 = 5k$, onda bi n^2 bio oblika $5k + 8$, a taj broj završava ili s 3 (za neparne k) ili s 8 (za parne k). No, kvadrat prirodnoga broja ne može završavati niti s 3 niti s 8, nego s točno jednim od elemenata skupa $\{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$.

1054. *Pojednostavnite izraz*: $\binom{n}{1} + 6\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3}$.

Rješenje: Zadani je izraz jednak

$$\binom{n}{1} + 6\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3} = \frac{n}{1!} + 6 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2!} + 6 \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} = n + 6 \cdot \frac{n^2 - n}{2} + 6 \cdot \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{6} =$$
$$= n + 3n^2 - 3n + n^3 - 3n^2 + 2n = n^3$$

1055. *Riješite jednadžbu*: $\frac{n!}{(n-4)!} = \frac{12n!}{(n-2)!}$.

Rješenje: Odmah primijetimo da zadana jednadžba ima smisla samo za prirodne brojeve $n \geq 4$. Pomnožimo zadanu jednadžbu s $\frac{(n-2)!}{n!}$, pa ćemo dobiti:

$$\frac{(n-2)!}{(n-4)!} = 12.$$

Kako je

$$(n - 2)! = (n - 4)! \cdot (n - 3) \cdot (n - 2),$$

posljednja jednadžba je ekvivalentna jednadžbi

$$(n - 3)(n - 2) = 12,$$

a ova kvadratnoj jednadžbi $n^2 - 5n - 6 = 0$. Rješenja te jednadžbe su $n_1 = -1$ i $n_2 = 6$, ali zbog uvjeta $n \geq 4$ u obzir dolazi samo $n_2 = 6$. Taj je broj ujedno i jedino realno rješenje polazne jednadžbe.

1056. *Zbroj znamenaka dvoznamenkastoga prirodnog broja x jednak je* 12. *Podijelimo li broj x njegovom znamenkom jedinica*, *dobit ćemo količnik* 8 *i ostatak* 1. *Odredite x*.

Rješenje: Budući da je, prema uvjetima zadatka, x dvoznamenkast prirodan broj, postoje jedinstveni prirodni brojevi $a \in [9]$ i $b \in [9] \cup \{0\}$ takvi da je $x = 10a + b$. Znamo da je $a + b = 12$. Iz činjenice da x pri dijeljenju s b daje količnik 8 i ostatak 1 slijedi da je $x = 8b + 1$, tj. $10a + b = 8b + 1$. Tako smo dobili sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$a + b = 12$$
$$10a - 7b = 1$$

Rješenje toga sustava je $a = 5$, $b = 7$, pa je traženi broj jednak $x = 10a + b = 57$.

1057. *Ako se duljina jedne stranice pravokutnika uveća za* 25%, *za koliko postotaka treba smanjiti duljinu druge stranice tako da površina pravokutnika ostane nepromijenjena*?

Rješenje: Iskoristit ćemo formulu za određivanje postotka sukcesivne promjene osnovne veličine:

$$R=100\cdot\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p_2}{100}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{p_n}{100}\right)-100$$

Zahtjev da površina pravokutnika ostane nepromijenjena ekvivalentan je s $R = 0$. Uvrštavanjem $R = 0$, $n = 2$ i $p_1 = +25$ u tu formulu dobivamo jednadžbu

$$0=100\cdot\left(1+\frac{25}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p_2}{100}\right)-100$$

iz koje je $p_2 = -20$. Stoga duljinu druge stranicu pravokutnika treba smanjiti za 20%.

1058. *Izračunajte* $i \cdot i^2 \cdot \ldots \cdot i^{2006}$.

Rješenje: Izraz je jednak $i^{1+2+\ldots+2006} = i^{\frac{2006}{2}\cdot(1+2006)} = i^{1003\cdot 2007} = (i^{1003})^{2007} = (i^{4\cdot 250+3})^{2007} = (i^3)^{2007} = (-i)^{2007} = (-1)^{2007}\cdot i^{2007} = (-1)\cdot i^{4\cdot 551+3} = (-1)\cdot i^3 = (-1)\cdot(-i) = i$.

1059. *Izračunajte* $\omega - z$ *ako su* ω *i* z *rješenja sustava*

$$\begin{aligned} iz+\overline{\omega}&=1\\ \overline{z}-i\omega&=2-i \end{aligned}.$$

Rješenje: Neka su $z = a + bi$ i $\omega = c + di$, gdje su $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Uvrštavanjem tih jednakosti u gornji sustav dobivamo:

$$\begin{aligned} i(a+bi)+(c-di)&=1\\ (a-bi)-i(c+di)&=2-i \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} (c-b)+(a-d)i&=1\\ (a+d)-(b+c)i&=2-i. \end{aligned}$$

Izjednačavanjem realnih i imaginarnih dijelova u obje jednadžbe dobivamo sljedeći sustav četiriju linearnih jednadžbi s četiri nepoznanice:

$$\begin{aligned} c-b&=1\\ a-d&=0\\ a+d&=2\\ b+c&=1 \end{aligned}$$

Zbrajanjem prve i četvrte jednadžbe dobivamo $c = 1$, pa je $b = 0$. Također, zbrajanjem druge i treće jednadžbe dobivamo $a = 1$, pa je $d = 1$. Tako je $z = 1$ i $\omega = 1 + i$, pa je konačno $\omega - z = (1 + i) - 1 = i$.

1060. *Pomoću dviju cijevi neki se bazen može napuniti za tri sata. Pritom je za punjenje bazena samo pomoću prve cijevi potrebno* 8 *sati više nego samo pomoću druge cijevi. Za koliko sati druga cijev sama napuni bazen*?

Rješenje: Neka je t traženo vrijeme. Tada je $t + 8$ vrijeme za koje prva cijev sama napuni bazen. U jednom satu obje cijevi zajedno napune $\frac{1}{t}+\frac{1}{t+8}=\frac{2t+8}{t(t+8)}$ dio bazena, pa za 3 sata napune $3\cdot\frac{2t+8}{t(t+8)}=\frac{6t+24}{t(t+8)}$ dio bazena. Kako taj dio mora biti cijeli bazen, dobivamo jednadžbu:

$$\frac{6t+24}{t(t+8)}=1$$

koja je ekvivalentna kvadratnoj jednadžbi

$$t^2 + 2t - 24 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su $t_1 = -6$ i $t_2 = 4$. Rješenje t_1 ne dolazi u obzir (jer vrijeme mora biti nenegativan realan broj), pa preostaje $t = t_2 = 4$ sata.

1061. *Odredite najveću vrijednost realne funkcije* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definirane formulom*

$$f(x) = |x + 1| - |x - 2|.$$

<u>Rješenje:</u> Kritične točke dobivamo iz $x + 1 = 0$ i $x - 2 = 0$, pa zaključujemo da se radi o $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$. Stoga funkciju razmatramo na intervalima $\langle -\infty, -1\rangle$, $[-1, 2\rangle$ i $[2, +\infty\rangle$.

1.) $x \in \langle -\infty, -1\rangle$

Na ovome je intervalu $|x + 1| = -(x + 1) = -x - 1$ i $|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$ pa je $f(x) = -x - 1 - (2 - x) = -3$.

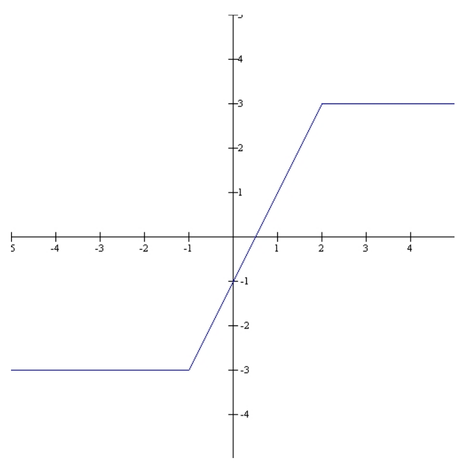
2.) $x \in [-1, 2\rangle$

Na ovome je intervalu $|x + 1| = -(x + 1) = -x - 1$ i $|x - 2| = x - 2$ pa je $f(x) = -x - 1 - (x - 2) = -2x + 1$.

3.) $x \in [2, +\infty\rangle$

Na ovome je intervalu $|x + 1| = x + 1$ i $|x - 2| = x - 2$ pa je $f(x) = x + 1 - (x - 2) = 3$.

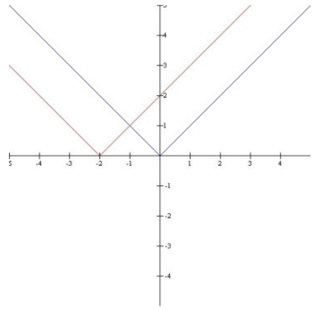
Stoga graf zadane funkcije izgleda ovako:



Prema tome, najveća vrijednost zadane funkcije jednaka je 3.

1062. *Odredite ukupan broj različitih realnih rješenja jednadžbe* $|x| = |x + 2|$.

<u>Rješenje:</u> Nacrtajmo u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini grafove funkcija $f(x) = |x|$ i $g(x) = |x + 2|$. Dobivamo:



Navedeni grafovi imaju točno jednu zajedničku točku: $T = (-1, 1)$, pa polazna jednadžba ima točno jedno realno rješenje: $x = -1$.

1063. *Iz kružne ploče izrezan je jednakostraničan trokut maksimalne površine. Koliko postotaka površine te ploče iznosi otpadak?*

Rješenje: Neka je R polumjer kružne ploče. Tada je R zapravo polumjer kružnice opisane izrezanom jednakostraničnom trokutu. Stoga je duljina stranice toga trokuta jednaka (zbog $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$) $a = \sqrt{3} \cdot R$, pa je površina trokuta $P_\Delta = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$. Budući da je površina ploče $P_o = R^2\pi$, postotak otpatka jednak je

$$p = \frac{P_o - P_\Delta}{P_o} = \frac{R^2\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2}{R^2\pi} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0.586503 = 58.65\%.$$

1064. *Mjerni broj površine nekoga kruga jednak je duljini njegova promjera. Izračunajte opseg toga kruga.*

Rješenje: Neka je R polumjer toga kruga. Budući da je površina brojčano jednaka promjeru kruga, možemo pisati: $R^2\pi = 2R$, a odavde dijeljenjem s $R\pi$ dobivamo $R = \frac{2}{\pi}$. Stoga je opseg kruga jednak $O = 2R\pi = 2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \pi =$ $= 4$.

1065. *U jednakokračan pravokutan trokut upisan je kvadrat tako da dva njegova vrha leže na hipotenuzi, a dva na katetama. Izračunajte duljinu stranice kvadrata ako je duljina hipotenuze jednaka c.*

Rješenje: Nacrtajte sliku! Neka je ABC zadani jednakokračan pravokutan trokut (s pravim kutom pri vrhu C), neka su $D \in AC$, E, $F \in AB$ i $G \in BC$ uzastopni vrhovi upisanoga kvadrata i neka je a tražena duljina stranice kvadrata. Trokut DAE je pravokutan (jer je $DE \perp AB$) i jednakokračan (jer je kut kod A jednak 45°), pa je $|AE| = |DE| = a$. Iz analognih je razloga $|FB| = |FG| = a$. Tako iz $|AE| + |EF| + |FB| = |AB|$ uvrštavanjem $|AE| = |EF| = |FB| = a$ i $|AB| = c$ dobivamo jednadžbu $3a = c$, a odavde je $a = \frac{c}{3}$.

1066. *Odredite ukupan broj različitih realnih rješenja jednadžbe* $\sqrt{x+7} - \sqrt{2x} = 1$.

Rješenje: Jednadžbu najprije zapišimo u obliku

$$\sqrt{x+7} = \sqrt{2x} + 1.$$

Obje strane dobivene jednadžbe su nenegativni realni brojevi, pa kvadriranjem dobivamo:

$$x + 7 = 2x + 2\sqrt{2x} + 1,$$

odnosno

$$2\sqrt{2x} = 6 - x.$$

Kvadriramo i ovu jednadžbu (pri čemu moramo pripaziti da dobiveno rješenje zadovoljava nejednakost $6 - x \geq 0$), pa dobivamo:

$$x^2 - 20x + 36 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1 = 2$ i $x_2 = 18$. No, $x_2 = 18$ ne zadovoljava nejednakost $6 - x_2 \geq 0$, pa to rješenje ne dolazi u obzir. Stoga je jedino realno rješenje zadane jednadžbe $x = 2$, tj. traženi je broj jednak 1.

1067. *Izračunajte vrijednost brojevnoga izraza* $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{27} \cdot \log_{\frac{1}{3}} 16$.

Rješenje: Prelaskom na dekadsku bazu dobivamo:

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{27} \cdot \log_{\frac{1}{3}} 16 = \frac{\log \frac{1}{27}}{\log \frac{1}{2}} \cdot \frac{\log 16}{\log \frac{1}{3}} = \frac{\log 1 - \log 27}{\log 1 - \log 2} \cdot \frac{\log(2^4)}{\log 1 - \log 3} = \frac{-\log 27}{-\log 2} \cdot \frac{4 \log 2}{\log 3} = 4 \cdot \frac{\log(3^3)}{\log 3} = 4 \cdot \frac{3 \log 3}{\log 3} = 12.$$

1068. *Odredite ukupan broj realnih rješenja jednadžbe* $\log_5(5^x - 24) = 2 - x$.

Rješenje: Iz zadane jednadžbe antilogaritmiranjem dobivamo:

$$5^x - 24 = 5^{2-x},$$

a odavde je množenjem s 5^x

$$5^{2x} - 24 \cdot 5^x - 25 = 0.$$

Stavimo li $t = 5^x$, dobivamo kvadratnu jednadžbu $t^2 - 24t - 25 = 0$ čije je jedino strogo pozitivno rješenje $t = 25$ ($t = -1$ ne dolazi u obzir jer je $t = 5^x > 0$ za svaki $x \in \mathbf{R}$). Tako iz $5^x = 25$ slijedi $x = 2$, pa zadana jednadžba ima točno jedno realno rješenje: $x = 2$.

1069. *U sjecištima krivulja* $K_1 \ldots\ 3x - 2y - 6 = 0$ *i* $K_2 \ldots\ y^2 = 6x$ *položene su tangente na krivulju* K_2. *Odredite sjecište tih tangenata.*

Rješenje: Odredimo najprije sjecišta zadanih krivulja. U tu svrhu riješimo sustav

$$\begin{gathered} 3x - 2y - 6 = 0 \\ y^2 = 6x \end{gathered}$$

Pomnožimo li prvu jednadžbu s 2, dobit ćemo:

$$6x = 4y + 12,$$

pa uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$y^2 - 4y - 12 = 0$$

čija su rješenja $y_1 = -2$ i $y_2 = 6$. Pripadne vrijednosti nepoznanice x su $x_1 = \frac{1}{6} y_1^2 = \frac{2}{3}$ i $x_2 = \frac{1}{6} y_2^2 = 6$, pa je riječ o točkama $S_1 = \left(\frac{2}{3}, -2\right)$ i $S_2 = (6, 6)$. Budući da je K_2 parabola oblika $y^2 = 2px$, jednadžba tangente u točki $T = (x_T, y_T)$ te parabole glasi:

$$y y_T = p(x + x_T).$$

Stoga je jednadžba tangente na krivulju K_2 u točki S_1 (pri čemu je $2p = 6$, odnosno $p = 3$):

$$t_1 \ldots -2y = 3\left(x + \frac{2}{3}\right),$$

odnosno

$$t_1 \ldots\ y = -\frac{3}{2}x - 1.$$

Analogno je jednadžba tangente na krivulju K_2 u točki S_2:

$$t_2 \ldots\ 6y = 3(x + 6),$$

odnosno

$$t_2 \ldots\ y = \frac{1}{2}x + 3.$$

Sjecišta tangenata t_1 i t_2 dobivamo rješavajući sustav:

$$y = -\frac{3}{2}x - 1$$
$$y = \frac{1}{2}x + 3$$

Taj je sustav najlakše i najbrže riješiti metodom usporedbe (komparacije). Lijeve strane obiju jednadžbi su jednake, pa takve moraju biti i desne strane:

$$-\frac{3}{2}x - 1 = \frac{1}{2}x + 3,$$

otkuda je

$$x = -2.$$

Stoga je pripadna vrijednost nepoznanice y jednaka $\frac{1}{2} \cdot (-2) + 3 = 2$, pa je sjecište tangenata točka $S_3 = (-2, 2)$.

1070. *Izračunajte kut između krivulja $K_1 \ldots x^2 + y^2 = 2$ i $K_2 \ldots y^2 = x$.*

Rješenje: Traženi je kut jednak šiljastom kutu između tangenata povučenih na krivulje u *bilo kojemu* njihovu sjecištu. Stoga najprije odredimo barem jedno sjecište zadanih krivulja. U tu svrhu riješimo sustav:

$$x^2 + y^2 = 2$$
$$y^2 = x$$

Uvrštavanjem druge jednadžbe u prvu dobiva se:

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1 = -2$ i $x_2 = 1$. Odaberimo $x_2 = 1$ i izračunajmo pripadnu vrijednost nepoznanice y:

$$y^2 = 1,$$

a odavde je $y_1 = -1$ i $y_2 = 1$. Odaberimo $y_2 = 1$, tj. sjecište $S = (1, 1)$, pa odredimo koeficijente smjera tangenata. Uočimo da je krivulja K kružnica sa središtem u ishodištu, pa je koeficijent smjera tangente na nju u bilo kojoj njezinoj točki $T = (x_T, y_T)$ jednak

$$k_k = -\frac{x_T}{y_T},$$

odnosno u slučaju točke $S = (1, 1)$ $k_k = -1$. Nadalje, krivulja K_2 je parabola oblika $y^2 = 2px$ pa je koeficijent smjera tangente na nju u bilo kojoj njezinoj točki $T = (x_T, y_T)$ jednak

$$k_p = \frac{p \cdot x_T}{y_T},$$

što u našem slučaju (za $p = \frac{1}{2}$ i $x_T = y_T = 1$) daje $k_p = \frac{1}{2}$. Označimo li traženi kut s α, onda uvrštavanjem $k_k = -1$ i $k_p = \frac{1}{2}$ u jednakost

$$\text{tg } \alpha = \frac{k_p - k_k}{1 + k_p k_k}$$

dobivamo tg $\alpha = 3$. Odavde je $\alpha = 71.565051177077989351572193720453 3°\approx 71°33'54''$.

1071. *Ako je* $\frac{a}{a-b} = \frac{2}{3}$, *izračunajte* $\frac{a-b}{b}$.

Rješenje: Iz zadane jednakosti slijedi $3a = 2a - 2b$, odnosno $a = -2b$. Tako je $\frac{a-b}{b} = \frac{-2b-b}{b} = -3$.

1072. *Izračunajte* $\frac{108^{-\frac{1}{3}}}{9^{-1.5} \cdot \sqrt[3]{0.25}}$.

Rješenje: Imamo redom:

$$\frac{108^{-\frac{1}{3}}}{9^{-1.5} \cdot \sqrt[3]{0.25}} = \frac{108^{-\frac{1}{3}}}{9^{-1.5} \cdot 0.25^{\frac{1}{3}}} = \frac{9^{1.5}}{108^{\frac{1}{3}} \cdot 0.25^{\frac{1}{3}}} = \frac{(3^2)^{1.5}}{(108 \cdot 0.25)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^3}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^3}{(3^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^3}{3^1} = 3^2 = 9.$$

1073. *Duljina promjera kružnice je* 12 cm. *Izračunajte duljinu one njezine tetive kojoj odgovara obodni kut od* 60°.

Rješenje: Tražena je duljina $l = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$, gdje je R polumjer kružnice, a α središnji kut. Prema poučku o obodnom i središnjem kutu nad istom tetivom vrijedi jednakost $\alpha = 2\beta$, gdje je β obodni kut. Zbog toga je $l = 2R \sin \beta$. Uvrštavanjem $2R = 12$ i $\beta = 60°$ konačno dobivamo $l = 6\sqrt{3}$ cm.

1074. *Neka su A i B zajedničke točke krivulja* $K_1 \ldots\ x^2 - 2y^2 = 2$ *i* $K_2 \ldots\ x - 2y + 4 = 0$. *Odredite jednadžbu simetrale dužine* $\overline{AB}$.

Rješenje: Odredimo najprije koordinate točaka A i B. U tu svrhu riješimo sustav

$$x^2 - 2y^2 = 2$$

$$x - 2y + 4 = 0$$

Iz druge jednadžbe je $x = 2y - 4$ pa uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo:

$$(2y - 4)^2 - 2y^2 - 2 = 0,$$

odnosno nakon kvadriranja i reduciranja

$$y^2 - 8y + 7 = 0.$$

Odavde je $y_1 = 1$ i $y_2 = 7$, pa su pripadne vrijednosti nepoznanice x jednake $x_1 = 2y_1 - 4 = -2$ i $x_2 = 2y_2 - 4 = 10$. Stoga možemo označiti: $A = (-2, 1)$, $B = (10, 7)$. Simetrala dužine Ab prolazi polovištem te dužine okomito na pravac kroz A i B. Polovište dužine AB je $P = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = (4, 4)$, a koeficijent smjera simetrale s

$$k_s = -\frac{1}{k_{AB}} = \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} = -2.$$

Stoga je tražena jednadžba simetrale s

$$s \ldots\ y - 4 = -2(x - 4),$$

odnosno

$$s \ldots\ 2x + y - 12 = 0.$$

1075. *Zadan je kompleksan broj* $z = \dfrac{i^{2006}}{(1+2i)(3-i)}$. *Odredite* $\overline{z}$.

Rješenje: Izračunajmo zasebno brojnik, a zasebno nazivnik navedenoga razlomka. Budući da je 2006 : 4 = 551 i ostatak 2, to je

$$I^{2006} = i^2 = -1.$$

Nadalje je

$$(1 + 2i)(3 - i) = 3 + 5i - 2i^2 = 5 + 5i = 5 \cdot (1 + i).$$

Zbog toga je

$$\overline{z} = \overline{-\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1+i}} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\overline{1+i}} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1-i} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1+i}{1-i^2} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1+i}{2} = -\frac{1}{10} - \frac{1}{10} i\ .$$

1076. *Nazivnik nekoga razlomka je za* 700 *veći od brojnika. Potpunim skraćivanjem razlomka s prirodnim brojem n dobije se razlomak* $\frac{3}{7}$. *Odredite n.*

Rješenje: Neka je x nazivnik polaznoga razlomka. Tada je brojnik toga razlomka jednak $x - 700$. Budući da je vrijednost razlomka jednaka $\frac{3}{7}$, možemo pisati:

$$\frac{x - 700}{x} = \frac{3}{7}.$$

Odavde slijedi

$$7x - 4\,900 = 3x,$$

odnosno $x = 1\,225$. Tako iz jednadžbe $1225 : n = 7$ dobivamo $n = 1225 : 7 = 175$.

1077. *Riješite nejednadžbu*: $\dfrac{x+2005}{x+2006} \le \dfrac{x+2006}{x+2007}$.

Rješenje: Nejednadžbu najprije transformiramo ovako:

$$\frac{x+2005}{x+2006} - \frac{x+2006}{x+2007} \le 0$$
$$\frac{(x+2005)(x+2007)-(x+2006)^2}{(x+2006)(x+2007)} \le 0$$
$$\frac{x^2+4012x+2007\cdot 2005 - x^2 - 4012x - 2006^2}{(x+2006)(x+2007)} \le 0$$
$$\frac{(2006+1)\cdot(2006-1)-2006^2}{(x+2006)(x+2007)} \le 0$$
$$\frac{2006^2-1-2006^2}{(x+2006)(x+2007)} \le 0$$
$$\frac{-1}{(x+2006)(x+2007)} \le 0$$

Vrijednost posljednjega razlomka će biti nepozitivna ako i samo ako njegov nazivnik bude strogo pozitivan. To znači da mora vrijediti nejednakost

$$(x + 2006)(x + 2007) > 0.$$

Odavde lako dobivamo $x \in \mathbf{R} \setminus [-2007, -2006]$.

1078. *Racionalizirajte nazivnik razlomka*: $\dfrac{1}{\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{2}-\sqrt{2}-1}$.

Rješenje: Imamo redom:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{2}-\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt[4]{4\cdot 2}+\sqrt[4]{2}-\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{2}-\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{2}-\sqrt{2}-1} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt[4]{2}\cdot(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)\cdot(\sqrt[4]{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}+1)\cdot(\sqrt[4]{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{(2-1)\cdot(\sqrt[4]{2}-1)} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt[4]{2}-1} = \frac{(\sqrt[4]{2})^2-1}{\sqrt[4]{2}-1} = \frac{(\sqrt[4]{2}-1)\cdot(\sqrt[4]{2}+1)}{\sqrt[4]{2}-1} = \sqrt[4]{2}+1$$

1079. *Ako je* $\log_{xy} y = -2$, *izračunajte* $\log_{\frac{x}{y}} y$.

Rješenje: Iz zadane jednakosti slijedi

$$\frac{1}{\log_y (xy)} = -2,$$

odnosno

$$\frac{1}{1+\log_y x}=-2$$

Odavde je $\log_y x=-\frac{3}{2}$. Stoga je

$$\log_{\frac{x}{y}} y=\frac{1}{\log_y \frac{x}{y}}=\frac{1}{\log_y x-\log_y y}=\frac{1}{-\frac{3}{2}-1}=-\frac{2}{5}.$$

1080. *Točka M ima svojstvo da je njezina udaljenost od bilo kojega vrha jednakostraničnoga trokuta ABC jednaka* $\sqrt{13}$ cm, *a njezina udaljenost od bilo koje stranice istoga trokuta* 2 cm. *Kolika je udaljenost točke M od ravnine u kojoj leži trokut ABC*?

__Rješenje:__ Postavljeni zadatak je ekvivalentan sljedećem: *Zadana je pravilna uspravna trostrana piramida čiji je bočni brid dug b =* $\sqrt{13}$ cm, *a bočna visina* v_b = 2 cm. *Izračunajte visinu te piramide*. Označimo s a duljinu osnovnoga brida te piramide. Iz jednoga od jednakokračnih trokutova koji tvore pobočje piramide slijedi:

$$b^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+v_b^2,$$

pa uvrštavanjem $b=\sqrt{13}$ i $v_b=2$ dobivamo a = 6 cm. Bočni brid, polumjer osnovki opisane kružnice i visina piramide tvore pravokutan trokut:

$$b^2=\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2+h^2,$$

pa uvrštavanjem $b=\sqrt{13}$ i $a=6$ dobivamo $h=1$. Stoga je tražena udaljenost jednaka 1 cm.

1081. *Odredite vrijednost realnoga parametra* $a\in\mathbf{R}$ *za koju je zbroj kvadrata rješenja jednadžbe* $x^2-ax+a^2=3a+2$ *najveći.*

__Rješenje:__ Prema Viéteovim formulama zaključujemo da za rješenja x_1 i x_2 zadane jednadžbe vrijede jednakosti:

$$x_1+x_2=a$$
$$x_1\cdot x_2=a^2-3a-2$$

Odatle slijedi:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=a^2-2(a^2-3a-2)=-a^2+6a+4.$$

Taj izraz – kao kvadratna funkcija varijable a – poprima najveću vrijednost za $a=-\frac{6}{2\cdot(-1)}=3$.

1082. *Pojednostavnite izraz*: $\frac{2-\sin 4x\ \mathrm{ctg} 2x}{\sin 4x}$.

__Rješenje:__ Koristeći adicioni poučak za sinus dvostrukoga kuta imamo redom:

$$\frac{2-\sin 4x \operatorname{ctg} 2x}{\sin 4x}=\frac{2-(2\sin 2x\cos 2x)\cdot\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}}{\sin 4x}=\frac{2-2\cos^2 2x}{\sin 4x}=\frac{2(1-\cos^2 2x)}{\sin 4x}=\frac{2\sin^2 2x}{2\sin 2x\cos 2x}=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\operatorname{tg} 2x$$

.

1083. *Duljina hipotenuze pravokutnoga trokuta iznosi* 25 cm. *Ako je* tg $\alpha = 3\frac{3}{7}$, *izračunajte zbroj duljina kateta toga trokuta.*

Rješenje: Neka su a i b duljine kateta toga trokuta. Iz zadanih podataka dobivamo sljedeći sustav jednadžbi:

$$\frac{a}{b}=\operatorname{tg}\alpha=\frac{24}{7}$$
$$a^2+b^2=25^2.$$

Iz prve jednadžbe je $a = \frac{24}{7}b$, pa uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobivamo:

$$\left(\frac{24}{7}b\right)^2+b^2=625,$$

a odavde je $b = 7$. Stoga je $a = 24$, pa je traženi zbroj duljina kateta jednak 24 + 7 = 31 cm.

1084. *x i y su strogo pozitivni i međusobno recipročni brojevi. Ako se vrijednost broja x uveća za p%, kako treba promijeniti vrijednost broja y pa da dobiveni brojevi također budu recipročni?*

Rješenje: To što su x i y međusobno recipročni brojevi znači da je $xy = 1$. Neka je p_2 postotak promjene broja y. Tada možemo pisati:

$$\left(x+\frac{p}{100}\cdot x\right)\cdot\left(y+\frac{p_1}{100}\cdot y\right)=1,$$

odnosno

$$x\cdot y\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p_1}{100}\right)=1,$$

a taj izraz je – zbog $xy = 1$ – ekvivalentan s

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p_1}{100}\right)=1.$$

Odavde se dobiva $p_1 = -\frac{100\cdot p}{100+p}$, što znači da vrijednost broja y treba smanjiti za $\frac{100\cdot p}{100+p}$ %.

1085. *Izračunajte veličinu šiljastoga kuta kojega zatvaraju kazaljke sata u pet minuta do dvanaest sati.*

Rješenje: U 12:00 sati mala i velika kazaljka se poklapaju, tj. zatvaraju kut od 0°. U jednom satu velika kazaljka opiše kut od 360°, pa u 5 minuta = $\frac{5}{60}=\frac{1}{12}$ sati opiše kut od $\frac{1}{12}$ · 360° = 30°. Mala kazaljka u jednom satu opiše 12 puta manji kut, tj. $\frac{30°}{12}$ = 2.5°. Stoga je traženi kut jednak 30° – 2.5° = 27.5°= 27°30'.

1086. *Duljina brida kocke jednaka je* a ($a > 0$). *U kocku je upisan uspravan kružni stožac tako da je njegova osnovka upisana jednoj strani kocke, a vrh ujedno i središte toj strani nasuprotne strane kocke. Izračunajte omjer obujmova kocke i stošca.*

Rješenje: Polumjer osnovke stošca R jednak je polumjeru kruga upisanoga kvadratu stranice a, a taj je jednak $\frac{a}{2}$. Visina stošca jednaka je a, pa je traženi omjer jednak:

$$V_k : V_s = (a^3) : \left[\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi \cdot a\right] = 12 : \pi.$$

1087. *Neka je A najmanja, a B najveća vrijednost realne funkcije* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definirane formulom* $f(x) = \sqrt{x^2-6x+9}-\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2-2x+1}$ *na segmentu* [2, 3]. *Izračunajte* $|A - B|$.

Rješenje: Najprije funkciju $f(x)$ zapišimo u sljedećem obliku:

$$f(x) = \sqrt{(x-3)^2}-\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{(x-1)^2} = |x-3| - |x-2| - |x-1|.$$

Na segmentu [2, 3] vrijede jednakosti:

$$|x - 3| = -(x - 3) = 3 - x$$
$$|x - 2| = x - 2$$
$$|x - 1| = x - 1$$

pa je na tom segmentu

$$f(x) = 3 - x - (x - 2) - (x - 1) = -3x + 6.$$

Ova funkcija je linearna i strogo padajuća (jer joj je koeficijent uz x strogo negativan), pa svoju najveću vrijednost poprima na lijevom, a najmanju na desnom rubu segmenta. Stoga je $A = f(3) = -3$, a $B = f(2) = 0$, pa je $|A - B| = |-3 - 0| = 3$.

1088. *Riješite sustav jednadžbi*:

$$a^b = b^a$$
$$b = 9a$$

Rješenje: Uvrštavanjem druge jednadžbe u prvu dobivamo:

$$a^{9a} = (9a)^a,$$

odnosno

$$(a^9)^a = (9a)^a.$$

Izjednačavanjem baza dobivamo:

$$a^9 = 9a,$$

a zbog prirodnoga zahtjeva $a > 0$ (jer baza potencije mora biti strogo pozitivan realan broj) dijeljenjem s a dobivamo

$$a^8 = 9.$$

Odavde je $a = \sqrt[8]{9} = \sqrt[8]{3^2} = \sqrt[4]{3}$, pa je $b = 9 \cdot \sqrt[4]{3}$. Stoga je jedino rješenje sustava $(a, b) = \left(\sqrt[4]{3},\ 9\cdot\sqrt[4]{3}\right)$.

1089. *Kutija sadrži točno* 10 *loptica označenih redom brojevima* 1, 2, …, 10. *Istovremeno i slučajno izvlačimo točno* 6 *loptica, zapišemo brojeve na njima i poredamo ih po veličini od najmanjega do najvećega. Izračunajte vjerojatnost da drugi član tako dobivenoga niza bude jednak* 3.

Rješenje: Ukupan broj mogućih ishoda jednak je ukupnom broju različitih načina da se iz skupa od 10 različitih elemenata izabere 6-eročlani podskup, a taj je jednak $\binom{10}{6}$. Odredimo ukupan broj povoljnih ishoda. Prvi član niza može biti 1 ili 2, drugi član mora biti 3, a na 4 preostala mjesta mogu doći bilo koja 4 broja od 7 preostalih. Prema načelu umnoška, ukupan broj povoljnih ishoda jednak je $\binom{2}{1}\cdot\binom{7}{4}$, pa je tražena vjerojatnost jednaka

$$p = \frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{7}{4}}{\binom{10}{6}} = \frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{7}{7-4}}{\binom{10}{10-6}} = \frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{7}{3}}{\binom{10}{4}} = \frac{\frac{2\cdot 1}{1}\cdot\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}}{\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}} = \frac{2\cdot 6\cdot 5}{\frac{10\cdot 9\cdot 8}{4}} = \frac{4\cdot 6}{9\cdot 8} = \frac{1}{3}.$$

1090. *Odredite* $(a + b) : (b + c)$ *ako je* $b : a = 2 : 1$ *i* $c : b = 3 : 1$.

Rješenje: Iz zadanih razmjera slijedi $b = 2a$, te $c = 3b = 3 \cdot 2a = 6a$. Tako je $(a + b) : (b + c) = (a + 2a) : (2a + 6a) = 3a : 8a = 3 : 8$.

1091. *Izračunajte* $\dfrac{2\log_{0.2}12+\log_{\sqrt{5}}16}{\log_{25}36-3\log_5 2}$.

Rješenje: Sve logaritme zapisati ćemo u obliku $\log_5 a$, pri čemu ćemo koristiti jednakosti $\log_b(a^2) = 2\log_b a$ i $\log_{b^k} a = \frac{1}{k}\cdot\log_b a$. Tako redom dobivamo:

$$\frac{2\log_{0.2}12+\log_{\sqrt{5}}16}{\log_{25}36-3\log_5 2} = \frac{2\log_{\frac{1}{5}}12+\log_{5^{\frac{1}{2}}}16}{\log_{5^2}36-3\log_5 2} = \frac{2\log_{5^{-1}}12+\log_{5^{\frac{1}{2}}}16}{\log_{5^2}36-\log_5(2^3)} = \frac{-2\log_5 12+\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_5 16}{\frac{1}{2}\log_5 36-\log_5 8} =$$

$$= \frac{-2\log_5(12)+2\log_5 16}{\log_5(36^{\frac{1}{2}})-\log_5 8} = \frac{2(\log_5 16-\log_5 12)}{\log_5 6-\log_5 8} = \frac{2\log_5\frac{16}{12}}{\log_5\frac{6}{8}} = \frac{2\log_5\frac{4}{3}}{\log_5\frac{3}{4}} = 2\log_{\frac{3}{4}}\frac{4}{3} = 2\log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} =$$

$$= 2\cdot(-1) = -2$$

1092. *Opsezi dvaju krugova odnose se kao* 3 : 4*, a zbroj njihovih površina je* 625π cm^2. *Izračunajte površinu većega od tih dvaju krugova.*

Rješenje: Neka su r_1 i r_2 duljine polumjera tih krugova. Tada je opseg prvoga kruga $O_1 = 2r_1\pi$, a opseg drugoga $O_2 = 2r_2\pi$, pa je $O_1 : O_2 = (2r_1\pi) : (2r_2\pi) = r_1 : r_2$. U zadatku je zadano $O_1 : O_2 = 3 : 4$, što znači da je $r_1 : r_2 = 3 : 4$. Prema definiciji razmjera postoji strogo pozitivan realan broj k takav da je

$$r_1 = 3k$$
$$r_2 = 4k.$$

Površine krugova su redom $P_1 = r_1^2\,\pi$ i $P_2 = r_2^2\,\pi$, pa je njihov zbroj jednak $P_1 + P_2 = (r_1^2 + r_2^2)\pi$. U tu jednakost uvrstimo $P_1 + P_2 = 625\pi$ i gornje izraze za r_1 i r_2, pa dobivamo:

$$625\pi = [(3k)^2 + (4k)^2]\pi,$$

odnosno

$$25k^2 = 625.$$

Odavde je $k = 5$, pa je duljina polumjera većega kruga $r_2 = 4 \cdot 5 = 20$ cm i njegova je površina jednaka $P_2 = r_2^2\,\pi = 400\pi$ cm^2.

1093. *Točka* $A = (1, y)$ *pripada pravcu* $p\ldots\ y = 3x + 1$, *a točka* $B = (x, -5)$ *pravcu* $q\ldots\ 2x + y + 1 = 0$. *Odredite segmentni oblik jednadžbe pravca kroz točke A i B.*

Rješenje: Odredimo najprije koordinate točaka A i B. U jednadžbu pravca p uvrstimo $x = 1$, pa dobijemo:

$$y = 3 \cdot 1 + 1 = 4,$$

te je $A = (1, 4)$. Nadalje, u jednadžbu pravca q uvrstimo $y = -5$, pa dobijemo:

$$2x + (-5) + 1 = 0,$$

a odavde je $x = 2$. Stoga je $B = (2, -5)$. Jednadžba pravca kroz točke A i B je

$$p_1\ldots\ y - 4 = \frac{-5-4}{2-1}(x-1),$$

odnosno

$$p_1\ldots\ y = -9x + 13.$$

Ova jednadžba zapisana u segmentnom obliku glasi:

$$p_1\ldots \frac{x}{\frac{13}{9}} + \frac{y}{13} = 1.$$

1094. *Kompleksan broj* $z \in \mathbf{C}$ *je rješenje jednadžbe* $z + |z| = 2 + 8i$. *Izračunajte* $|z|^2$.

Rješenje: Neka je $z = a + bi$, gdje su $a, b \in \mathbf{R}$. Tada zadanu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$a + bi + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 + 8i,$$

a odavde izjednačavanjem realnih, odnosno imaginarnih dijelova dobivamo sustav:

$$\begin{aligned} a + \sqrt{a^2 + b^2} &= 2 \\ b &= 8. \end{aligned}$$

Prvu jednadžbu toga sustava možemo zapisati u obliku

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 2 - a,$$

odnosno

$$a^2 + b^2 = (2 - a)^2,$$

pa kad ovamo uvrstimo $b = 8$ dobijemo

$$a^2 + 64 = 4 - 4a + a^2,$$

te je $a = -15$. Tako je konačno

$$|z|^2 = (\sqrt{a^2+b^2})^2 = a^2 + b^2 = (2 - a)^2 = (-17)^2 = 289.$$

1095. *Odredite najveći prirodan broj koji pripada skupu svih realnih rješenja nejednadžbe* $x^{200} < 5^{300}$.

Rješenje: Zadanu nejednadžbu najprije zapišemo u obliku

$$(x^2)^{100} < (5^3)^{100},$$

pa je traženi prirodan broj najveći među svim prirodnim brojevima koji su rješenje nejednadžbe

$$x^2 < 5^3,$$

tj. nejednadžbe

$$x^2 < 125.$$

Kako je $11^2 = 121 < 125$ i $12^2 = 144 > 125$, traženi prirodan broj je $n = 11$.

1096. *Odredite skup svih vrijednosti realnoga parametra* $c \in \mathbf{R}$ *za koje prikaz uređenoga para* (x, y) *rješenja sustava*

$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ cx + y &= 3 \end{aligned}$$

u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini pripada prvom kvadrantu.

Rješenje: Mi zapravo tražimo skup svih vrijednosti realnoga parametra $c \in \mathbf{R}$ za koje su rješenja zadanoga sustava strogo pozitivna, tj. za koje istovremeno vrijede nejednakosti $x > 0$ i $y > 0$. Zbrajanjem postavljenih jednadžbi dobivamo

$$(c + 1)x = 5.$$

Odavde slijedi da će vrijednost nepoznanice x biti strogo pozitivna ako i samo ako vrijedi nejednakost $c + 1 > 0$, tj. ako i samo ako vrijedi $c > -1$. Za $c = 0$ dobivamo sustav $x - y = 2$, $y = 3$ čije je rješenje $(x, y) = (5, 3)$ i to rješenje pripada prvom kvadrantu. Sad prvu jednadžbu pomnožimo s $-c \neq 0$, pa dobivamo sustav

$$\begin{aligned} -cx + cy &= -2c \\ cx + y &= 3 \end{aligned}$$

pa ponovnim zbrajanjem jednadžbi dobijemo $(c + 1)y = 3 - 2c$. Već smo utvrdili da je $c > -1$, pa je izraz $c + 1$ strogo pozitivan. Stoga će vrijednost nepoznanice y biti strogo pozitivna ako i samo ako vrijednost izraza $3 - 2c$ bude strogo pozitivna. Tako iz $3 - 2c > 0$ dobivamo $c < \frac{3}{2}$. Konačno, iz $c > -1$ i $c < \frac{3}{2}$ dobivamo traženi skup svih vrijednosti realnoga parametra $c \in \mathbf{R}$: $\langle -1, \frac{3}{2} \rangle$

1097. *Racionalizirajte nazivnik razlomka* $\dfrac{2\sqrt{15}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

Rješenje: Imamo redom:

$$\frac{2\sqrt{15}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{15}}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})+2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{15}\cdot\left[(\sqrt{3}+\sqrt{5})-2\sqrt{2}\right]}{\left[(\sqrt{3}+\sqrt{5})+2\sqrt{2}\right]\cdot\left[(\sqrt{3}+\sqrt{5})-2\sqrt{2}\right]}=$$
$$=\frac{2\sqrt{15}\cdot\left[(\sqrt{3}+\sqrt{5})-2\sqrt{2}\right]}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2})^2}=\frac{2\sqrt{15}\cdot\left[(\sqrt{3}+\sqrt{5})-2\sqrt{2}\right]}{3+2\sqrt{15}+5-4\cdot 2}=\frac{2\sqrt{15}\cdot\left[(\sqrt{3}+\sqrt{5})-2\sqrt{2}\right]}{2\sqrt{15}}=\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{2}.$$

1098. *Odredite ukupan broj znamenaka broja* $x = 4^{16}\cdot 5^{25}$ *zapisanoga u dekadskom brojevnom sustavu.*

Rješenje: Općenito, za broj $y = (a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0)_{10}$ je ukupan broj znamenaka jednak $n + 1$, a kako je $n = \lfloor \log a \rfloor$, slijedi da je traženi broj jednak $\lfloor \log x \rfloor + 1$. Zato najprije izračunamo:

$\log x = \log(4^{16}\cdot 5^{25}) = \log(4^{16}) + \log(5^{25}) = 16\cdot\log 4 + 25\cdot\log 5 \approx 27.107209969647868366496172263 0715$

pa je $\lfloor \log x \rfloor + 1 = 27 + 1 = 28$.

1099. *Duljina prostorne dijagonale kvadra je za* 1 cm *dulja od jednoga brida kvadra*, *za* 2 cm *od drugoga*, *a za* 3 cm *od trećega. Odredite duljinu te dijagonale*.

Rješenje: Neka je d tražena duljina. Tada su duljine bridova kvadra $a = d - 1$, $b = d - 2$ i $c = d - 3$. Zbroj kvadrata tih duljina mora biti jednak kvadratu duljine dijagonale, pa dobivamo jednadžbu:

$$(d-1)^2 + (d-2)^2 + (d-3)^2 = d^2,$$

odnosno nakon kvadriranja i reduciranja

$$d^2 - 6d + 7 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $d_1 = 3 - \sqrt{2}$ i $d_2 = 3 + \sqrt{2}$. No, za d_1 su duljine bridova b i c strogo negativni realni brojevi, a to je nemoguće. Stoga je jedino moguće $d = d_2 = 3 + 2\sqrt{2}$ cm.

1100. *Duljine stranica trokuta su u omjeru* 5 : 6 : 7. *Izračunajte najmanji kut toga trokuta.*

Rješenje: Neka su a, b i c duljine stranica trokuta. Iz $a : b : c = 5 : 6 : 7$ slijedi da postoji strogo pozitivan realan broj k takav da je $a = 5k$, $b = 6k$ i $c = 7k$, pa zaključujemo da je najmanja stranica trokuta a, a to znači da je najmanji kut u trokutu kut nasuprot stranici a, tj. kut α. Primjenom kosinusova poučka dobivamo:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

odnosno

$$\cos\alpha = \frac{(6k)^2+(7k)^2-(5k)^2}{2\cdot(6k)\cdot(7k)}=\frac{36k^2+49k^2-25k^2}{84k^2}=\frac{60k^2}{84k^2}=\frac{5}{7}.$$

Odavde je $\alpha = \arccos\frac{5}{7} = 44.415308597192974974111240052 3565° \approx 44°24'55''$.

1101. *Izračunajte zbroj svih različitih realnih rješenja jednadžbe* $0.4^{|2x^2-3|} = 2.5^x$.

Rješenje: Uočimo da je $2.5 = \frac{5}{2} = (\frac{2}{5})^{-1} = 0.4^{-1}$, pa zadanu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$0.4^{|2x^2-3|} = 0.4^{-x},$$

a odavde izjednačavanjem eksponenata dobivamo:

$$|2x^2 - 3| = -x.$$

Razlikujemo točno dva slučaja:

1.) $2x^2 - 3 \geq 0$

U ovome je slučaju $|2x^2 - 3| = 2x^2 - 3$, pa jednadžba prelazi u

$$2x^2 + x - 3 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1 = -\frac{3}{2}$ i $x_2 = 1$. Uvjet $2x^2 - 3 \geq 0$ zadovoljava samo $x_1 = -\frac{3}{2}$, pa je to ujedno i jedino rješenje jednadžbe u ovom slučaju.

2.) $2x^2 - 3 < 0$

U ovome je slučaju $|2x^2 - 3| = 3 - 2x^2$, pa jednadžba prelazi u

$$2x^2 - x - 3 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1 = -1$ i $x_2 = \frac{3}{2}$. Uvjet $2x^2 - 3 < 0$ zadovoljava samo $x_1 = -1$, pa je to ujedno i jedino rješenje jednadžbe u ovom slučaju.

Stoga polazna jednadžba ima točno dva različita realna rješenja: $x_1 = -\frac{3}{2}$ i $x_2 = -1$. Njihov je zbroj jednak $-\frac{5}{2}$.

1102. *Izračunajte opseg krivocrtnoga lika koji se dobije kad se iz jediničnoga kruga izreže kružni isječak čiji je središnji kut* $60°$.

Rješenje: Kružni isječak kojemu je središnji kut $60°$ čini $\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$ cijeloga kruga. Opseg preostalih $\frac{5}{6}$ kruga jednak je $O_1 = \frac{5}{6} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \pi = \frac{5}{3}\pi$. Da dobijemo traženi opseg, ovome opsegu valja pridodati duljine dvaju polumjera kruga koji određuju izrezani isječak. Stoga je $O = O_1 + 2r = \frac{5}{3}\pi + 2 \cdot 1 = \frac{5}{3}\pi + 2$.

1103. *Ako za svaki* $x \in \mathbf{R}$ *vrijedi jednakost* $f(x^2 + 1) = x^4 + 5x^2 + 3$, *odredite* $f(x^2 - 1)$.

Rješenje: Uočimo da je

$$x^4 + 5x^2 + 3 = (x^2 + 1)^2 + 3(x^2 + 1) - 1,$$

pa iz

$$f(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2 + 3(x^2 + 1) - 1$$

zaključujemo da je $f(x) = x^2 + 3x - 1$. Tako je

$$f(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) - 1 = x^4 + x^2 - 3.$$

1104. *Duljine stranica kvadra su tri uzastopna člana geometrijskoga niza. Ako je oplošje kvadra* 32 cm^2, *a obujam kvadra* 8 cm^3, *izračunajte zbroj duljina svih stranica kvadra.*

Rješenje: Neka su a, b i c duljine stranica kvadra. Činjenicu da su a, b i c tri uzastopna člana geometrijskoga niza možemo zapisati u obliku

$$b^2 = ac.$$

Pomnožimo ovu jednakost s $b > 0$, pa dobivamo:

$$b^3 = abc.$$

No, $abc = V = 8$, pa iz jednadžbe $b^3 = 8$ slijedi $b = 2$. Stoga je $ac = b^2 = 4$ pa uvrštavanjem $O = 32$, $b = 2$ i $ac = 4$ u formulu za oplošje kvadra

$$O = 2(ab + ac + bc)$$

Dobivamo

$$32 = 2 \cdot (2a + 4 + 2c),$$

a odavde je

$$a + c = 6.$$

Stoga je traženi zbroj jednak $O_1 = 4 \cdot (a + b + c) = 4 \cdot [(a + c) + b] = 4 \cdot (6 + 2) = 32$.

1105. *Odredite prirodno područje definicije (domenu) realne funkcije* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definirane formulom* $f(x) = \dfrac{1}{2 - \sin 2006x}$.

Rješenje: $f(x)$ nije definirana za sve $x \in \mathbf{R}$ za koje je $2 - \sin(2006x) = 0$. Međutim, za svaki realan broj $a \in \mathbf{R}$ vrijedi nejednakost $\sin(ax) \leq 1$, pa ta nejednakost posebno vrijedi i za $a = 2006$, tj. vrijedi $\sin(2006x) \leq 1$. No, onda je $2 - \sin(2006x) \geq 2 - 1 = 1 > 0$, što znači da jednadžba $2 - \sin(2006x) = 0$ nema realnih rješenja. Stoga je $D(f) = \mathbf{R}$.

1106. *Koliko prostih brojeva strogo manjih od* 100 *završava znamenkom* 7?

Rješenje: Njih 6, i to su redom: 7, 17, 37, 47, 67 i 97.

1107. *Ako je* (x, y) *rješenje sustava jednadžbi*

$$\begin{gathered} xy = 6 \\ x^2y + xy^2 + x + y = 63, \end{gathered}$$

izračunajte $x^2 + y^2$.

Rješenje: Drugu jednadžbu sustava zapišimo u obliku

$$xy(x + y) + (x + y) = 63,$$

odnosno u obliku

$$(x + y)(xy + 1) = 63,$$

pa uvrštavanjem $xy = 6$ dobivamo

$$x + y = 9.$$

Stoga je $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2(xy) = 81 - 2 \cdot 6 = 69$.

1108. *Izračunajte ukupan broj različitih načina na koje možemo poredati slova riječi POTPIS tako se da na prva dva mjesta nalaze samoglasnici.*

Rješenje: Samoglasnike poredamo na 2! = 2 različita načina, a na 4 preostala mjesta poredamo 4 preostala suglasnika od kojih su dva jednaka. To možemo učiniti na $\binom{4}{1,2,1} = \frac{4!}{2!}$ različitih načina. Prema načelu umnoška, traženi je broj jednak $2! \cdot \frac{4!}{2!} = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

1109. *Sankt Peterburg (Rusija) smješten je na* 60° *sjeverne geografske širine i* 31° *istočne geografske dužine. Seward (SAD) smješten je na* 60° *sjeverne geografske širine i* 149° *zapadne geografske dužine. Kolika je približna udaljenost tih dvaju mjesta ako se uzme da je Zemlja kugla opsega* 40000 km?

Rješenje: Promotrimo kosokutni sferni trokut PS_1S_2, pri čemu je P (sjeverni) pol Zemlje, S_1 položaj Sankt Peterburga i S_2 položaj Sewarda. S obzirom da oba mjesta leže na istoj geografskoj širini, taj trokut je jednakokračan, tj. vrijedi $a = b = 90° - 60° = 30°$. Nadalje, kut pri vrhu P toga trokuta jednak je $\gamma = 149° + 31° = 180°$. Označimo li traženu udaljenost s d, prema kosinusovu poučku za sferni trokut

$$\cos d = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cdot \cos \gamma,$$

dobivamo

$$\cos d = (\cos 30°)^2 + (\sin 30°)^2 \cdot \cos(180°) = \frac{1}{2}.$$

Odavde je $d = 60°$. Kako 1 stupanj približno odgovara udaljenosti od 111.3 km, tražena udaljenost je jednaka $111.3 \cdot 60 = 6\,678$ km.

1110. *Izračunajte mjerilo zemljovida na kojemu udaljenost od* 91 mm *odgovara udaljenosti od* 2275 m *u prirodi.*

Rješenje: Traženo mjerilo možemo izračunati i tako da odredimo kojoj udaljenosti u prirodi odgovara udaljenost od 1 mm na zemljovidu. Kako je 2275 m = 2 275 000 mm, iz razmjera $1 : x = 91 : 2\,275\,000$ dobivamo $x = 25\,000$. Stoga je traženo mjerilo 1 : 25 000.

1111. *Teodolit je postavljen u razinu s podnožjem TV tornja na udaljenosti od* 199 m *od podnožja tornja. Visina teodolita je* 1.6 m. *Teodolitom je izmjereno da se vrh tornja vidi pod kutom elevacije* 30°. *Kolika je visina tornja*?

Rješenje: Spojimo vrh teodolita s vrhom tornja, te povucimo spojnicu vrha teoolita i tornja usporedno s horizontalnom podlogom. Tako dobijemo pravokutan trokut u kojemu znamo duljinu jedne katete (b = 199 m) i jedan kut ($\alpha = 30°$), a tražimo duljinu druge katete (a). Iz $a = b \text{ tg } \alpha$ dobivamo $a = 199 \cdot \text{tg } 30° \approx 114.9$ m, pa je visina tornja (približno) jednaka $a + 1.6 = 116.5$ m.

1112. *Jedrilica jedri pravocrtno* 8 milja *prema jugu. Potom promijeni smjer kretanja pa pravocrtno jedri* 8 milja *pod azimutom od* 54°. *Izračunajte udaljenost jedrilice od njezine polazne točke.*

Rješenje: Neka je A polazna točka, B točka u koju jedilica dojedri nakon plovidbe od 8 milja prema jugu, a C krajnja točka. U trokutu ABC znamo duljine dviju stranica: $|AB| = 8$ i $|BC| = 11$, te kut kod vrha B $\gamma = 54°$. Tražimo duljinu stranice $|AC|$. Prema kosinusovu je poučku

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \cos\gamma,$$

pa uvrštavanjem podataka dobivamo

$$|AC|^2 = 81.549795596524729266307751983523 2,$$

a odavde je

$$d = |AC| \approx 9.03 \text{ milja}.$$

1113. *Presjek kanala ima oblik trapeza s osnovicama duljine* 4 m *i* 6 m. *Dubina kanala je* 3 m, *a dubina vode u njemu* 1.5 m. *Kanalom teče voda brzinom od* 0.5 m/s. *Koliko kubnih metara vode protekne kanalom za jedan sat*?

Rješenje: Izračunajmo najprije površinu presjeka kanala kojega zauzima voda. I taj je presjek trapez kojemu je jedna stranica duga 4 m, a visina 1.5 m. Budući da je dubina vode jednaka polovici dubine kanala, to je veća osnovica trapeza kojega zauzima voda jednaka srednjici presjeka kanala, tj. $\frac{4+6}{2} = 5$ m. Tako je obujam vode koji u jednoj sekundi prođe kanalom jednak $V_1 = \frac{4+5}{2} \cdot 1.5 \cdot 0.5 = 3.375$ m^3, pa u jednom satu (= 60^2 = 3 600 s) kanalom protekne ukupno $V = V_1 \cdot 3\,600 = 12\,150$ m^3 vode.

1114. *Pojednostavnite izraz*: $\frac{2x^4y^5}{4x^3y^2}$.

Rješenje: Izraz je jednak $\frac{2}{4} \cdot x^{4-3} \cdot y^{5-2} = \frac{xy^3}{2}$.

1115. *Stup visine* 1.1 m *zabijen je okomito u vodoravnu podlogu. Duljina njegove sjene u* 16 sati *iznosila je* 1.5 m. *Izračunajte visinu zgrade čija je istodobna duljina sjene iznosila* 55 m.

Rješenje: Visina sjene razmjerna je visini objekta, pa možemo postaviti razmjer: 1.1 : 1.6 = x : 55. Odavde je $x = 40.33$, pa je tražena visina zgrade 40.33 m.

1116. *Simetričnu igraću kocku nezavisno i slučajno bacamo točno pet puta, svaki put bilježimo dobiveni broj, te naposljetku zbrojimo sve zapisane brojeve. Izračunajte ukupan broj međusobno različitih zbrojeva koje možemo dobiti na taj način.*

Rješenje: Najmanji zbroj koji možemo dobiti jednak je 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5, a najveći 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30. Stoga je traženi broj jednak ukupnom broju prirodnih brojeva u segmentu [5, 30]. Njih ima točno 30 – 5 + 1 = 26 pa zaključujemo da možemo dobiti točno 26 različitih zbrojeva.

1117. *Dva mjesta nalaze se na istom podnevniku. Mjesto A se nalazi na* 31° *sjeverne geografske širine, a mjesto B je* 1 200 km *sjevernije. Uz pretpostavku da je Zemlja kugla, izračunajte približnu geografsku širinu mjesta B.*

Rješenje: 1 stupanj na ekvatoru približno je jednak 111.3 km. Stoga udaljenosti od 1200 km odgovara širina od $\frac{1200}{111.3} \approx 10.781671159029649595687331536388 1° \approx 10°46'54''$. Stoga je tražena približna geografska širina mjesta B jednaka 31° + 10°46'54'' =41°46'54''.

1118. *Pomnožite i reducirajte*: $\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b\right)\cdot\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}b\right)$.

Rješenje: Imamo redom:

$$\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b\right)\cdot\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}b\right)=\frac{1}{3}a^2-\frac{4}{9}ab-\frac{1}{4}ab+\frac{1}{3}b^2=\frac{1}{3}a^2-\frac{17}{36}ab+\frac{1}{3}b^2.$$

1119. *Prosječna slanost svjetskoga mora iznosi* 3.5%. *Uz pretpostavku da* 1 litra *morske vode ima masu* 1.030 kg, *izračunajte koliko litara morske vode treba ispariti da se dobije* 7 kg *soli.*

Rješenje: U 1.030 kg morske vode ima ukupno $\frac{3.5}{100}\cdot 1.030=$ 0.03605 kg soli. Budući da su masa morske vode i masa soli u njoj (upravno) razmjerne veličine, označimo li s x masu morske vode koja treba ispariti, onda iz razmjera x : 7 = 1.030 : 0.0365 dobivamo $x \approx$ 197.34 kg morske vode. Stoga treba ispariti ukupno 197.34 – 7 = 190.34 kg, odnosno $\frac{190.34}{1.030}\approx$ 185 litara morske vode.

1120. *Pretpostavimo da u posudu kaplju savršeno okrugle kapljice vode. Ako polumjer svake takve kapljice iznosi* r = 0.5 mm, *koliko kapljica treba nakapati da se nakupi* 1 litra *vode*.

Rješenje: Obujam jedne kapljice jednak je $V=\frac{4}{3}r^3\pi=\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\pi=\frac{\pi}{6}$ mm^3 = $\frac{\pi}{6}\cdot(10^{-2})^3$ dm^3 = $\frac{\pi}{6}\cdot 10^{-6}$ dm^3 = $\frac{\pi}{6}\cdot 10^{-6}$ litara (jer je 1 litra = 1 dm^3). Stoga je traženi broj jednak $n=\frac{1}{V}=\frac{6\cdot 10^6}{\pi}\approx$ 1909859.3. Prema tome, treba nakapati 1 909 860 kapljica.

1121. *Pojednostavnite izraz*: $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}\right)^{-4}$.

Rješenje: Imamo redom:

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}\right)^{-4}=\left[\frac{b^{\frac{1}{4}}\cdot\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\cdot\left(a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)}\right]^{-4}=\left[\frac{b^{\frac{1}{4}}\cdot\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\cdot\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)}\right]^{-4}=\left(\frac{b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}}\right)^{-4}=\frac{b^{\frac{1}{4}\cdot(-4)}}{a^{\frac{1}{4}\cdot(-4)}}=\frac{b^{-1}}{a^{-1}}=\frac{a}{b}.$$

1122. *Izračunajte* $i^{2003}+i^{2004}+i^{2005}+i^{2006}$.

Rješenje: Kako je:

$$i^{2003}=i^{4\cdot 500+3}=(i^4)^{500}\cdot i^3=1^{500}\cdot i^3=i^3=-i,$$

te analogno

$$i^{2004}=(i^4)^{501}=1,$$
$$i^{2005}=i^1=i$$

i

$$i^{2006}=i^2=-1,$$

traženi je zbroj jednak $(-i) + (-1) + i + 1 = 0$.

1123. *Ako je* $x + y = \pi$, *izračunajte* $\sin x - \sin y$.

Rješenje: Iz $x + y = \pi$ slijedi $x = \pi - y$, pa slijedi:

$\sin x - \sin y = \sin(\pi - y) - \sin y = \sin \pi \cos y - \cos \pi \sin y - \sin y = 0 \cdot \cos y - (-1) \cdot \sin y - \sin y = \sin y - \sin y =$
$= 0$.

1124. *Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma* $f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1$ *polinomom* $g(x) =$
$= x^2 + 2x - 1$.

Rješenje: Podijelimo zadane polinome prema pravilima o dijeljenju polinoma:

$$
\begin{array}{l}
(x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1) : (x^2 + 2x - 1) = x^2 - 3x + 9 \\
\underline{-x^4 - 2x^3 + x^2} \\
\quad -3x^3 + 3x^2 + x - 1 \\
\quad \underline{3x^3 + 6x^2 - 3x} \\
\qquad 9x^2 - 2x - 1 \\
\qquad \underline{-9x^2 - 18x + 9} \\
\qquad\quad -20x + 8
\end{array}
$$

Stoga je traženi ostatak jednak $r(x) = -20x + 8$.

1125. *Neki je proizvod poskupio za* 20%, *a zatim je pojeftinio za* 15%. *Ako je sadašnja cijena* 1249 kn 50 lp, *kolika je bila cijena prije poskupljenja i pojeftinjenja*?

Rješenje: Iskoristit ćemo formulu za određivanje postotka sukcesivne promjene osnovne veličine:

$$R = 100 \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{p_n}{100}\right) - 100$$

u koju ćemo uvrstiti $n = 2$ (jer imamo ukupno točno dvije promjene), $p_1 = +20$ (+ znači poskupljenje) i $p_2 = -15$ (– znači pojeftinjenje). Tako ćemo dobiti:

$$R = +2,$$

što znači da je krajnja cijena za 2% veća od početne. Označimo li traženu cijenu s c, onda iz jednadžbe

$$c + \frac{2}{100} \cdot c = 1249.5$$

slijedi $c = 1225$ kn.

1126. *S kojim od sljedećih brojeva broj* 2006 *daje isti ostatak kao i pri dijeljenju sa* 7: 5, 9, 11 *ili* 12?

Rješenje: Pri dijeljenju sa 7 broj 2006 daje ostatak 4, dok pri dijeljenju sa 5, 9, 11 i 12 dobivamo redom ostatke 1, 8, 4 i 2. Stoga je traženi broj jednak 11.

1127. *Riješite jednadžbu*: $\sqrt{(x+3) \cdot (x+4)} - \sqrt{(x+4) \cdot (x+5)} = 0$.

Rješenje: Iz zadane jednadžbe slijedi:

$$\sqrt{(x+3) \cdot (x+4)} = \sqrt{(x+4) \cdot (x+5)},$$

a odatle kvadriranjem

$$(x + 3)(x + 4) = (x + 4)(x + 5),$$

odnosno

$$(x + 4) \cdot [(x + 3) - (x + 5)] = 0,$$
$$-2(x + 4) = 0,$$
$$x + 4 = 0$$

te konačno

$$x = -4.$$

1128. *Na nekom studiju postoje dvije studijske grupe s istim ukupnim brojem studenata. U jednoj je grupi omjer broja žena i broja muškaraca* 1 : 2, *a u drugoj* 3 : 2. *Koliki je omjer broja žena i broja muškaraca u obje studijske grupe zajedno*?

Rješenje: Budući da obje studijske grupe imaju isti ukupan broj studenata, zaključujemo da u prvom slučaju taj broj dijelimo u omjeru 1 : 2, a u drugom u omjeru 3 : 2. Neka je $♂_i$ ukupan broj žena, a $♀_i$ ukupan broj muškaraca u i–toj grupi, $i = 1, 2$. Tada postoje prirodni brojevi k, $l \in \mathbf{N}$ (jer brojevi žena, odnosno muškaraca moraju biti prirodni brojevi) takvi da vrijede sljedeće jednakosti:

$$♂_1 = 1 \cdot k$$
$$♀_1 = 2 \cdot k$$
$$♂_2 = 3 \cdot l$$
$$♀_2 = 2 \cdot l$$

Budući da obje grupe imaju jednak broj studenata, mora vrijediti jednakost:

$$♂_1 + ♀_1 = ♂_2 + ♀_2.$$

Uvrštavanjem gornjih četiriju izraza dobivamo:

$$1 \cdot k + 2 \cdot k = 3 \cdot l + 2 \cdot l.$$

a odatle je

$$3k = 5l,$$

odnosno

$$l = \frac{3}{5} k.$$

Tako je ukupan broj žena u obje grupe jednak

$$♂_1 + ♂_2 = k + 3l = k + 3 \cdot \frac{3}{5} k = \frac{14}{5} k,$$

a ukupan broj muškaraca

$$♀_1 + ♀_2 = 2 \cdot k + 2 \cdot l = 2 \cdot k + 2 \cdot \frac{3}{5} k = \frac{16}{5} k.$$

Stoga je traženi omjer jednak

$$(♂_1 + ♂_2) : (♀_1 + ♀_2) = \frac{14}{5} k : \frac{16}{5} k = 14 : 16 = 7 : 8.$$

1129. *Odredite vrijednosti cjelobrojnoga parametra* $a \in \mathbf{Z}$ *tako da jedno rješenje jednadžbe*

$$x^2 - 2a^2 x - 4a - 11 = 0$$

bude jednako 5.

Rješenje: U zadanu jednadžbu uvrstimo $x = 5$, pa dobijemo:

$$25 - 10a^2 - 4a - 11 = 0,$$

odnosno

$$5a^2 + 2a - 7 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $a_1 = -\frac{7}{5}$ i $a_2 = 1$. Rješenje a_1 nije cijeli broj, pa preostaje $a = a_2 = 1$.

1130. *Odredite* 2006. *član niza* 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, . . ., *u kojemu se svaki prirodan broj k uzastopno pojavljuje točno k puta.*

Rješenje: Zaključujemo redom:

1 jedinica – ukupno: 1 član niza
2 dvojke – ukupno: 1 + 2 = 3 člana niza
3 trojke – ukupno: 1 + 2 + 3 = 6 članova niza
4 četvorke – ukupno: 1 + 2 + 3 + 4 = 10 članova niza,
5 petica – ukupno 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 članova niza,
…
k brojeva k – ukupno: $1 + 2 + 3 + \ldots + (k-1) + k = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$ članova niza.

Odredimo sada najveći prirodan broj k takav da je $\frac{k \cdot (k+1)}{2} < 2006$. Iz ove kvadratne nejednadžbe dobijemo k = 62, što znači da je $\frac{62 \cdot (62+1)}{2} = 1953$. član niza broj 62 i odatle se niz nastavlja s ukupno 63 broja 63 sve do 1953 + 63 = 2016. člana. Stoga je $a_{2006} = 63$.

1131. *Zadane su koncentrične kružnice* $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$, $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 16$. *Tangenta na manju kružnicu u njezinoj proizvoljno odabranoj točki presjeca veću kružnicu u dvije točke. Izračunajte duljinu tako dobivene tetive veće kružnice.*

Rješenje: Za rješavanje zadatka zapravo nisu bitna središta kružnica, već samo njihovi polumjeri. Neka je S zajedničko središte obiju kružnica, T točka manje kružnice u kojoj je povučena tangenta na manju kružnicu i D bilo koji kraj tetive određene sjecištima tangente i veće kružnice. Trokut SDT je pravokutan (s pravim kutom kod vrha T), kvadrat duljine jedne njegove katete je $|ST|^2 = 4$, a kvadrat duljine njegove hipotenuze je $|SD|^2 = 16$. Prema Pitagorinu je poučku tada

$$|DT|^2 = |SD|^2 - |ST|^2 = 16 - 4 = 12,$$

pa je $|DT| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Ta je udaljenost upola kraća od tražene duljine tetive, pa je ta duljina jednaka

$$d = 2 \cdot |DT| = 4\sqrt{3}.$$

1132. *Riješite jednadžbu*: $5 + 2\log_b 5 = 4\log_b 25 - 1$.

Rješenje: Zadanu jednadžbu najprije zapišimo u obliku:

$$4\log_b 25 - 2\log_b 5 = 6,$$

a odavde je

$$\begin{aligned} 4\log_b 25 - \log_b 5^2 &= 6, \\ 4\log_b 25 - \log_b 25 &= 6, \\ 3\log_b 25 &= 6 \quad /:3 \\ \log_b 25 &= 2 \\ b^2 &= 25. \end{aligned}$$

Jedino strogo pozitivno rješenje posljednje kvadratne jednadžbe je $b = 5$.

1133. *Dvije mačke ulove dva miša u dva sata. Za koliko će sati deset mačaka uloviti deset miševa?*

Rješenje: Jedna mačka ulovi jednoga miša u dva sata. Upravo toliko vremena trebat će i deset mačaka da ulove deset miševa (svaka mačka po jednoga miša u dva sata).

1134. *U kocku je upisana uspravna četverostrana piramida tako da joj je osnovka četverokut kojeg čine polovišta osnovke kocke. Izračunajte omjer obujmova kocke i piramide.*

Rješenje: Osnovka kocke je kvadrat stranice a, a osnovka piramide kvadrat stranice $a_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Njegova je površina $P = \frac{1}{2}a^2$. Visine kocke i piramide jednake su a (jer je piramida uspravna), pa je traženi omjer obujmova jednak

$$V_k : V_p = (a^3) : (\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot a) = 1 : \frac{1}{6} = 6 : 1.$$

1135. *Dvije stranice pravokutnika leže na pravcima p… $x + 2y - 1 = 0$ i q… $x + 2y + 4 = 0$. Ako je duljina njegove dijagonale 5 cm, izračunajte njegov opseg.*

Rješenje: Udaljenost između usporednih pravaca p i q jednaka je duljini jedne stranice pravokutnika (označimo je s a). Za računanje udaljenosti usporednih pravaca $p_1 \ldots Ax + By + C_1 = 0$ i $p_2 \ldots Ax + By + C_2 = 0$ koristimo formulu

$$d = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

U našem je slučaju $A = 1$, $B = 2$, $C_1 = -1$ i $C_2 = 4$, pa slijedi:

$$a = \frac{|4 - (-1)|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{1+4}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Sada u formulu za računanje duljine dijagonale pravokutnika

$$d^2 = a^2 + b^2$$

uvrstimo $d = 5$, $a = \sqrt{5}$, pa dobijemo:

$$5^2 = (\sqrt{5})^2 + b^2,$$

odnosno

$$25 = 5 + b^2.$$

Odavde je

$$b^2 = 20,$$

tj.

$$b = 2\sqrt{5}.$$

Tako je konačno opseg pravokutnika jednak

$$O = 2(a + b),$$
$$O = 2(\sqrt{5} + 2\sqrt{5}),$$
$$O = 6\sqrt{5}.$$

1136. *Polinom* $p(x) = 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x + 2$ *djeljiv je polinomom* $q(x) = 2x^3 + ax^2 + x + b$. *Ako su* $a, b \in \mathbf{Z}$, *izračunajte zbroj* $a + b$.

Rješenje: Podijelimo polinome p i q prema pravilu za dijeljenje polinoma:

$$(2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x + 2) : (2x^3 + ax^2 + x + b) = x + \frac{3-a}{2}$$
$$\begin{array}{l}
\underline{2x^4 + ax^3 + x^2 + bx} \\
\quad (3-a)x^3 + x^2 + (3-b)x + 2 \\
\quad \underline{(3-a)x^3 + \frac{3a-a^2}{2}x^2 + \frac{3-a}{2}x + \frac{3b-ab}{2}} \\
\qquad \left(1 - \frac{3a-a^2}{2}\right)x^2 + \left(3 - b - \frac{3-a}{2}\right)x + 2 - \frac{3b-ab}{2}
\end{array}$$

Budući da su polinomi p i q, prema pretpostavci, djeljivi bez ostatka, ostatak $r(x) = \left(1 - \frac{3a-a^2}{2}\right)x^2 + \left(3 - b - \frac{3-a}{2}\right)x + 2 - \frac{3b-ab}{2}$ treba biti jednak nulpolinomu. Prema poučku o nulpolinomu istodobno moraju vrijediti sljedeće jednakosti:

$$1 - \frac{3a-a^2}{2} = 0$$
$$3 - b - \frac{3-a}{2} = 0$$
$$2 - \frac{3b-ab}{2} = 0$$

Prva jednakost je ekvivalentna kvadratnoj jednadžbi

$$a^2 - 3a + 2 = 0$$

čija su cjelobrojna rješenja $a_1 = 1$ i $a_2 = 2$. Uvrštavanjem $a = 1$ u drugu jednakost dobivamo $b = 2$, a uvrštavanjem $a = 2$ dobivamo $b = \frac{5}{2}$. Budući da a i b, prema pretpostavci, moraju biti cijeli brojevi, druga mogućnost otpada, pa je jedino moguće rješenje $a = 1$, $b = 2$. Stoga je $a + b = 3$.

1137. *Ako se realan broj x podijeli brojem y, dobije se količnik 2 i ostatak 2. Podijeli li se zbroj tih brojeva njihovom razlikom, dobije se količnik 2 i ostatak 4. Izračunajte umnožak xy.*

Rješenje: Činjenicu da broj x podijeljen brojem y daje količnik 2 i ostatak 2 možemo zapisati u obliku jednakosti:

$$x = 2y + 2.$$

Nadalje, činjenicu da zbroj $x + y$ podijeljen razlikom $x - y$ daje količnik 2 i ostatak 4 možemo zapisati u obliku jednakosti

$$x + y = 2(x - y) + 4.$$

Iz tih dviju jednadžbi dobivamo sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} x - 2y &= 2 \\ -x + 3y &= 4 \end{aligned}$$

čije je rješenje $x = 14$, $y = 6$. Stoga je $xy = 14 \cdot 6 = 84$.

1138. *Izračunajte*: $\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{\frac{1}{7}+\frac{1}{\frac{1}{8}+\frac{1}{9}}}\right)\cdot\frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{3}+\frac{2}{3-\frac{3}{5}}}$.

Rješenje: Imamo redom:

$$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{\frac{1}{7}+\frac{1}{\frac{1}{8}+\frac{1}{9}}}\right)\cdot\frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{3}+\frac{2}{3-\frac{3}{5}}}=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{\frac{1}{7}+\frac{1}{\frac{9+8}{72}}}\right)\cdot\frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{3}+\frac{2}{\frac{15-3}{5}}}=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{\frac{1}{7}+\frac{72}{9+8}}\right)\cdot\frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{3}+\frac{10}{12}}=$$

$$=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{\frac{1}{7}+\frac{72}{17}}\right)\cdot\frac{\frac{1}{5}}{\frac{16+10}{12}}=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{\frac{17+504}{119}}\right)\cdot\frac{\frac{1}{5}}{\frac{26}{12}}=\left(\frac{1}{6}+\frac{119}{521}\right)\cdot\frac{\frac{1}{5}}{\frac{26}{12}}=\left(\frac{521+714}{3126}\right)\cdot\frac{12}{130}=$$

$$=\frac{1235}{3126}\cdot\frac{6}{65}=\frac{65\cdot 19}{521\cdot 6}\cdot\frac{6}{65}=\frac{19}{521}$$

1139. *Izračunajte umnožak svih realnih rješenja jednadžbe*

$$\left(\frac{1}{4^x+1}+\frac{1}{16^x-1}\right)\cdot(1+4^{-x})=\frac{4^{1-x}}{4^x-1}.$$

Rješenje: Najprije primijetimo da vrijedi identitet

$$16^x - 1 = (4^x - 1) \cdot (4^x + 1).$$

Tako redom imamo:

$$\left(\frac{1}{4^x+1}+\frac{1}{16^x-1}\right)\cdot(1+4^{-x})=\frac{4^{1-x}}{4^x-1}$$
$$\left(\frac{1}{4^x+1}+\frac{1}{(4^x-1)(4^x+1)}\right)\cdot(1+\frac{1}{4^x})=\frac{4^{1-x}}{4^x-1}$$
$$\left(\frac{4^x-1+1}{(4^x-1)(4^x+1)}\right)\cdot\frac{4^x+1}{4^x}=\frac{4^{1-x}}{4^x-1}$$
$$\frac{4^x}{(4^x-1)(4^x+1)}\cdot\frac{4^x+1}{4^x}=\frac{4^{1-x}}{4^x-1}$$
$$\frac{1}{4^x-1}=\frac{4^{1-x}}{4^x-1}$$

Odavde slijedi:

$$4^{1-x}=1,$$
$$4^{1-x}=4^0,$$
$$1-x=0,$$
$$x=1.$$

Dakle, jedino realno rješenje polazne jednadžbe je $x = 1$, pa je traženi umnožak jednak 1.

1140. *Odredite skup svih realnih rješenja nejednadžbe* $\left|\frac{x}{2x-1}\right|\geq 2.$

Rješenje: Traženi je skup unija skupa svih rješenja nejednadžbe $\frac{x}{2x-1}\geq 2$ i skupa svih rješenja nejednadžbe $\frac{x}{2x-1}\leq -2$. Prva od tih dviju nejednadžbi je ekvivalentna nejednadžbi $\frac{2-3x}{2x-1}\geq 0$, odnosno sustavu nejednadžbi $(2-3x)\cdot(2x-1)\geq 0$, $2x-1\neq 0$. Rješenje toga sustava je $x\in\left\langle\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\right]$. Analogno, druga od tih dviju nejednadžbi ekvivalentna je nejednadžbi $\frac{5x-2}{2x-1}\leq 0$, odnosno sustavu nejednadžbi $(5x-2)\cdot(2x-1)\leq 0$, $2x-1\neq 0$. Rješenje toga sustava je $x\in\left[\frac{2}{5},\ \frac{1}{2}\right\rangle$. Tako je traženo rješenje polazne jednadžbe skup $S=\left[\frac{2}{5},\ \frac{1}{2}\right\rangle\cup\left\langle\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right]=\left[\frac{2}{5},\ \frac{2}{3}\right]\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

1141. *Odredite skup svih realnih brojeva* $a\in\mathbf{R}$ *takvih da rješenje jednadžbe*

$$\frac{2-ax}{2-x}+\frac{2a-x}{2+x}=a-1$$

po nepoznanici x zadovoljava uvjet $|x| < 2$.

Rješenje: Riješimo polaznu jednadžbu po nepoznanici x. Uz uvjet $x\notin\{-2, 2\}$ ta je jednadžba ekvivalentna jednadžbi

$$(2-ax)(2+x)+(2a-x)(2-x)=(a-1)(2-x)(2+x),$$

odnosno

$$4-2ax+2x-ax^2+4a-2x-2ax+x^2=(a-1)(4-x^2),$$

odnosno

$$4 - 2ax + 2x - ax^2 + 4a - 2x - 2ax + x^2 = 4a - 4 - ax^2 + x^2.$$

Reduciranjem dobijemo:

$$-4ax = -8,$$

odnosno

$$x = \frac{2}{a}.$$

Uvrštavanjem ove jednakosti u uvjet $|x| < 2$ dobivamo

$$\left|\frac{2}{a}\right| < 2,$$

a odavde je $|a| > 1$. Stoga je traženi skup $S = \mathbf{R} \setminus [-1, 1]$.

1142. *U prodavaonici čokolade kilogram švicarske čokolade stoji* 60 kn, *a belgijske* 35 kn. *Ako za* 2 kg *smjese tih čokolada želimo platiti* 90 kn, *koliko kg švicarske čokolade trebamo uzeti*?

Rješenje: Prema jednostavnom računu smjese, masu od 2 kg trebamo razdijeliti u omjeru (60 – 45) : (45 – 35), tj. u omjeru 3 : 2. Prema jednostavnom računu diobe, iz $3k + 2k = 2$ slijedi $k = 0.4$, pa trebamo uzeti $3k = 3 \cdot 0.4 = 1.2$ kg švicarske čokolade.

1143. *Odredite vrijednost realnoga parametra* $k \in \mathbf{R}$ *tako da pravac* $p\ldots\ (2k - 3)x + (k + 2)y - 15 = 0$ *bude okomit na pravac kroz točke* $A = (2, 7)$ *i* $B = (3, 4)$.

Rješenje: Koeficijent smjera pravca p je $k_p = \frac{3-2k}{k+2}$, a koeficijent smjera pravca kroz točke A i B je $k_{AB} = \frac{4-7}{3-2} = -3$. Spomenuti pravci će biti okomiti ako i samo ako vrijedi jednakost $k_p \cdot k_{AB} = -1$, pa iz jednadžbe

$$\frac{3-2k}{k+2} \cdot (-3) = -1$$

najprije slijedi

$$6k - 9 = -2 - k,$$

a odavde je $k = 1$.

1144. *Ortogonalne projekcija kateta na hipotenuzu pravokutnoga trokuta razlikuju se za* 527 mm. *Izračunajte duljinu hipotenuze ako je omjer duljina kateta toga trokuta* 7 : 24.

Rješenje: Označimo redom s a, b, c, p i q duljine kateta, hipotenuze i ortogonalnih projekcija kateta na hipotenuzu. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $p > q$, te da je $a : b = 7 : 24$. Budući da je kateta a očito kraća od katete b, njezina ortogonalna projekcija ima duljinu q, a ortogonalna projekcija katete b ima duljinu p. Znamo da je $p - q = 527$, te da je prema Euklidovu poučku $a^2 = q \cdot c$, $b^2 = p \cdot c$. Podijelimo li te dvije jednakosti, dobit ćemo $(a : b)^2 = q : p$, odnosno $q : p = (7 : 24)^2 = 49 : 576$. Odavde je $p = \frac{576}{49} \cdot q$, pa uvrštavanjem u jednakost $p - q = 527$ dobijemo:

$$\frac{576}{49}\cdot q - q = 527,$$

a odavde je q = 49 mm. Stoga je p = 576 mm, pa je tražena duljina hipotenuze jednaka $c = p + q$ = 625 mm.

1145. *Pojednostavnite izraz*:

$$\left(\frac{\sqrt[4]{a}+5\sqrt[4]{b}}{(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})^2}+\frac{\sqrt[4]{a}-5\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right):\frac{\sqrt{a}+5\sqrt{b}}{(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})^2}.$$

Rješenje: Radi jednostavnosti, stavimo: $x=\sqrt[4]{a},\ y=\sqrt[4]{b}$. Tada je $\sqrt{a}=x^2,\ \sqrt{b}=y^2$, pa zadani izraz prelazi u ekvivalentan izraz:

$$\left(\frac{x+5y}{(x-y)^2}+\frac{x-5y}{x^2-y^2}\right):\frac{x^2+5y^2}{(x-y)^2}=\left(\frac{x+5y}{(x-y)^2}+\frac{x-5y}{(x-y)(x+y)}\right)\cdot\frac{(x-y)^2}{x^2+5y^2}=\left(\frac{(x+5y)(x+y)+(x-5y)(x-y)}{(x-y)^2(x+y)}\right)\cdot$$
$$\cdot\frac{(x-y)^2}{x^2+5y^2}=\left(\frac{x^2+6xy+5y^2+x^2-6xy+5y^2}{(x-y)^2(x+y)}\right)\cdot\frac{(x-y)^2}{x^2+5y^2}=\frac{2(x^2+5y^2)}{(x-y)^2(x+y)}\cdot\frac{(x-y)^2}{x^2+5y^2}=\frac{2}{x+y}$$

Stoga je konačna vrijednost zadanoga izraza $\frac{2}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$.

1146. *Odredite realni dio kompleksnoga broja*

$$z=\frac{i^{2005}}{(1-3i^{2006})(2+i^{2007})}.$$

Rješenje: Podijelimo li 2005 s 4, dobit ćemo 501 i ostatak 1. Stoga je $i^{2005} = i^{501\cdot 4+1} = (i^4)^{501}\cdot i^1 = 1^{501}\cdot i = i$, te nadalje $i^{2006} = i^{2005}\cdot i = i\cdot i = i^2 = -1$ i $i^{2007} = i^{2006}\cdot i = (-1)\cdot i = -i$. Tako imamo:

$$z=\frac{i^{2005}}{(1-3i^{2006})(2+i^{2007})}=\frac{i}{(1-3\cdot(-1))(2+(-i))}=\frac{i}{4(2-i)}=\frac{i\cdot(2+i)}{4(2-i)\cdot(2-i)}=\frac{2i+i^2}{4(4-i^2)}=$$
$$=\frac{2i+(-1)}{4(4-(-1))}=\frac{-1+2i}{4\cdot5}=\frac{-1}{20}+\frac{2}{20}i=\frac{-1}{20}+\frac{1}{10}i$$

Stoga je tražena vrijednost $\mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{20}$.

1147. *Zadan je krug polumjera* 15 cm. *Pod kojim se kutom taj krug vidi iz točke udaljene* 39 cm *od njegova središta*?

Rješenje: Neka su S središte kruga, T točka iz koje se promatra krug, D jedno dihralište tangente povučene iz T na kružnicu koja omeđuje krug i α traženi kut. Kut $\angle STD$ je polovica kuta α, a trokut STD je pravokutan trokut s pravim kutom kod vrha D. Stoga je

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{|SD|}{|ST|}=\frac{15}{39}=\frac{5}{13},$$

pa odavde lagano slijedi $\alpha \approx 45.2397298960808523458980217533594° = 45°14'23''$.

1148. *Neka je $T = (a, b)$ točka pravca $p \dots\ x - y - 2 = 0$ najbliža točki $A = (2, 2)$. Izračunajte vrijednost izraza $a^2 + b^2$.*

Rješenje: Jednadžbu pravca p najprije zapišimo u eksplicitnom obliku: $p \dots\ y = x - 2$, pa očitajmo koeficijent smjera pravca p: $k_p = 1$. Točka T je sjecište pravca p i okomice q povučene iz točke A na pravac p. Koeficijent smjera te okomice je $k_q = -\frac{1}{k_p} = -1$, pa je njezina jednadžba $q \dots\ y - 2 = (-1) \cdot (x - 2)$, tj. $q \dots\ y = -x + 4$. Koordinate točke T lako dobijemo rješavajući sustav

$$\begin{aligned} y &= x - 2 \\ y &= -x + 4 \end{aligned}$$

Njegovo je rješenje $x = 3$, $y = 1$, pa je $T = (3, 1)$. Dakle, $a = 3$, $b = 1$ i $a^2 + b^2 = 9 + 1 = 10$.

1149. *Ako je $\log_{\frac{y^2}{x}} x = 3$, izračunajte $\log_{\frac{x^2}{y}} y$.*

Rješenje: Iz $\log_{\frac{y^2}{x}} x = 3$ slijedi $x = \left(\frac{y^2}{x}\right)^3 = \frac{y^6}{x^3}$, odnosno $x^4 = y^6$, te vađenjem drugog korijena $x^2 = y^3$. Tako odmah imamo:

$$\log_{\frac{x^2}{y}} y = \log_{\frac{y^3}{y}} y = \log_{y^2} y = \frac{1}{2}\log_y y = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

1150. *Polumjeri triju kugala su u omjeru* 1 : 2 : 6. *Koliko je puta obujam najveće kugle veći od zbroja obujmova ostalih dviju kugala?*

Rješenje: Iz podatka o omjeru polumjera kugala slijedi da postoji strogo pozitivan realan broj $k \in \mathbf{R}$ takav da je $r_1 = 1 \cdot k$, $r_2 = 2 \cdot k$ i $r_3 = 6 \cdot k$. Tako odmah imamo:

$$\frac{V_3}{V_1 + V_2} = \frac{\frac{4}{3} r_3^3 \cdot \pi}{\frac{4}{3} r_1^3 \cdot \pi + \frac{4}{3} r_2^3 \cdot \pi} = \frac{\frac{4}{3} r_3^3 \cdot \pi}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (r_1^3 + r_2^3)} = \frac{r_3^3}{r_1^3 + r_2^3} = \frac{(6k)^3}{k^3 + (2k)^3} = \frac{216k^3}{k^3 + 8k^3} = \frac{216k^3}{9k^3} = 24.$$

Dakle, obujam najveće kugle je 24 puta veći od zbroja obujmova ostalih dviju kugala.

1151. *Za neke kutove $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ su brojevi $\operatorname{tg} \alpha$ i $\operatorname{tg} \beta$ rješenja jednadžbe $x^2 - px + q = 0$, a brojevi $\operatorname{ctg} \alpha$ i $\operatorname{ctg} \beta$ rješenja jednadžbe $x^2 - rx + s = 0$. Izrazite umnožak $r \cdot s$ kao funkciju argumenata p i q.*

Rješenje: Prema Vièteovim formulama vrijede jednakosti:

$$\begin{aligned} p &= \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta, \\ q &= \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta, \\ r &= \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta, \\ s &= \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta. \end{aligned}$$

Tako sada imamo:

$$r = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{p}{q},$$

$$s = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{1}{q}$$

Prema tome je

$$r \cdot s = \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{q} = \frac{p}{q^2}$$

1152. *Broj* 2.5 *rastavljen je uniformno i slučajno na dva strogo pozitivna pribrojnika, pa su ti pribrojnici zaokruženi na najbliže cijele brojeve. Izračunajte vjerojatnost da je zbroj tako dobivenih cijelih brojeva jednak* 3.

<u>Rješenje:</u> Označimo navedene nenegativne pribrojnike s x i y. Zaokruživanjem x i y možemo dobiti sljedeće parove cijelih brojeva: 0 i 2 (npr. za $x = 0.1$, $y = 2.4$), 2 i 0 (obratno od prethodnoga), 1 i 2 (npr. za $x = 0.6$ i $y = 1.9$), 2 i 1 (obratno od prethodnoga), te 1 i 1 (npr. za $x = 1.2$, $y = 1.3$). Stoga je ukupan broj mogućih parova cijelih brojeva 5. Broj povoljnih parova cijelih brojeva je 2 ((1, 2) i (2, 1)), pa je, prema klasičnoj definiciji vjerojatnosti, tražena vjerojatnost jednaka $p = \frac{2}{5}$.

1153. *Neki autobus vozi linijom na kojoj je točno* 7 *različitih stajališta* (*početno stajalište je uračunato*). *Ukoliko na početnom stajalištu uđu točno* 4 *osobe, na koliko različitih načina one mogu izaći na preostalim stajalištima ako svaka od njih izlazi na različitom stajalištu*?

<u>Rješenje:</u> Označimo osobe (uz ispriku!) brojevima 1, 2, 3 i 4. To možemo napraviti na 4! = 24 različita načina. Fiksirajmo jedno označavanje, pa izračunajmo na koliko načina označene osobe mogu izaći na preostalim stajalištima. Osoba 1 na 6 različitih načina može izabrati stajalište na kojemu će izaći. Osoba 2 to može učiniti na 5 različitih načina, osoba 3 na 4 različita načina, a osoba 4 na 3 različita načina. Tako za fiksirano označavanje osoba dobivamo $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ različita načina izlaska iz autobusa. Stoga je traženi broj 24 puta veći i iznosi $24 \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3) = 8640$.

1154. *Neka su a, b i c stranice proizvoljnoga trokuta, a* α, β *i* γ *redom tim stranicama nasuprotni kutovi. Izračunajte vrijednost izraza* $\frac{b-2a\cos\gamma}{a\sin\gamma}+\frac{c-2b\cos\alpha}{b\sin\alpha}+\frac{a-2c\cos\beta}{c\sin\beta}$.

<u>Rješenje:</u> Svedimo tri zadana pribrojnika na najmanji zajednički nazivnik $abc \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$. Brojnik tako dobivenoga razlomka jednak je

$b^2c \cdot \sin\alpha \sin\beta - 2abc \cos\gamma \sin\alpha \sin\beta + c^2a \cdot \sin\beta \sin\gamma - 2abc \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma + a^2b \cdot \sin\alpha \sin\gamma - 2abc \cos\beta \sin\alpha \sin\gamma$.

Označimo li s R polumjer trokutu opisane kružnice, prema sinusovu poučku imamo:

$$a = 2R\sin\alpha$$
$$b = 2R\sin\beta$$
$$c = 2R\sin\gamma$$

Stoga je zadani izraz jednak:

$8R^3 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot (\sin^2\beta - 2\cos\gamma \sin\alpha \sin\beta + \sin^2\gamma - 2\cos\alpha \sin\beta \sin\gamma + \sin^2\alpha - 2\cos\beta \sin\alpha \sin\gamma)$.

Prema kosinusovu je poučku

$$2\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{bc},$$
$$2\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{ac},$$

$$2\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{ab}.$$

Uvrštavanjem gore navedenih izraza za a, b i c dobivamo:

$$2\cos\alpha = \frac{(2R\sin\beta)^2+(2R\sin\gamma)^2-(2R\sin\alpha)^2}{4R^2\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\sin^2\beta+\sin^2\gamma-\sin^2\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}$$

te potpuno analogno:

$$2\cos\beta = \frac{\sin^2\alpha+\sin^2\gamma-\sin^2\beta}{\sin\alpha\sin\gamma},$$
$$2\cos\gamma = \frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Tako je

$$2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma = \sin^2\beta+\sin^2\gamma-\sin^2\alpha$$

i analogno

$$2\cos\beta\sin\alpha\sin\gamma = \sin^2\alpha+\sin^2\gamma-\sin^2\beta,$$
$$2\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta = \sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma.$$

Stoga je

$8R^3\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot(\sin^2\beta-2\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\gamma-2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma+\sin^2\alpha-2\cos\beta\sin\alpha\sin\gamma) =$
$= 8R^3\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot(\sin^2\beta-\sin^2\alpha-\sin^2\beta+\sin^2\gamma+\sin^2\gamma-\sin^2\beta-\sin^2\gamma+\sin^2\alpha+\sin^2\alpha-\sin^2\gamma-\sin^2\alpha$
$+\ \sin^2\beta) = 8R^3\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot 0 = 0,$

pa je i vrijednost polaznoga izraza jednaka 0.

1155. *Od* 2 *matematičara i* 8 *fizičara treba formirati peteročlano povjerenstvo tako da barem jedan njegov član bude matematičar. Na koliko se različitih načina to može učiniti*?

Rješenje: Postoje točno dvije mogućnosti:

1.) točno jedan član povjerenstva je matematičar (a ostala četiri su fizičari);
2.) točno dva člana povjerenstva su matematičari (a ostala tri su fizičari).

U prvom slučaju jednog matematičara možemo izabrati na 2 različita načina, a četiri fizičara na $\binom{8}{4}$ različita načina. U drugom slučaju, oba matematičara ulaze u povjerenstvo, pa biramo samo fizičare, i to na $\binom{8}{3}$ različitih načina. Prema načelu zbroja, traženi je broj jednak $2\cdot\binom{8}{4}+\binom{8}{3} = 196$.

1156. *Poredajte po veličini brojeve* $a=\frac{\sin 1}{\sin 2}$, $b=\frac{\sin 2}{\sin 3}$, $c=\frac{\sin 3}{\sin 4}$.

Rješenje: Najprije primijetimo da je funkcija $f(x) = \sin x$ strogo rastuća na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, a strogo padajuća na intervalu $\langle \frac{\pi}{2}, \pi\rangle$, a na oba ta intervala vrijedi nejednakost $f(x) > 0$. Nadalje, na intervalu $\langle \pi, \frac{3\pi}{2}\rangle$ funkcija je strogo padajuća i vrijedi nejednakost $f(x) < 0$. Budući da vrijede relacije $1 \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, $2, 3 \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi\rangle$, $4 \in \langle \pi, \frac{3\pi}{2} \rangle$, zaključujemo redom:

- Razlomak $\frac{\sin 3}{\sin 4}$ je negativan jer mu je, prema gornjim razmatranjima, brojnik strogo pozitivan ($f(3) = \sin 3 > 0$), a nazivnik strogo negativan ($f(4) = \sin 4 < 0$);
- Razlomak $\frac{\sin 2}{\sin 3}$ je strogo veći od 1 jer činjenica da je $f(x)$ strogo padajuća na intervalu $\langle \frac{\pi}{2}, \pi\rangle$ kojemu pripadaju i 2 i 3 izravno povlači $f(2) > f(3)$, tj. $\sin 2 > \sin 3$;

Preostaje još usporediti sin 1 i sin 2. U tu svrhu odredimo predznak razlike tih brojeva, tj. izračunajmo:

$$\sin 1 - \sin 2 = (\text{prema formulama pretvorbe zbroja u umnožak}) = 2\cos\frac{3}{2}\sin\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\cos\frac{3}{2}\sin\frac{1}{2}.$$

Funkcija $g(x) = \cos x$ strogo pozitivna na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ kojemu pripada broj $\frac{3}{2}$, pa je $\cos\frac{3}{2} > 0$. Broj $\frac{1}{2}$ pripada istom tom intervalu, a već smo vidjeli da je na tom intervalu $f(x) = \sin x > 0$, pa je $\sin\frac{1}{2} > 0$. Stoga je vrijednost izraza $-2\cos\frac{3}{2}\sin\frac{1}{2}$ strogo negativna, što znači da je

$$\sin 1 - \sin 2 < 0,$$

tj.

$$\sin 1 < \sin 2,$$

pa je

$$\frac{\sin 1}{\sin 2} < 1.$$

Tako smo dobili sljedeći niz nejednakosti:

$$\frac{\sin 3}{\sin 4} < 0 < \frac{\sin 1}{\sin 2} < 1 < \frac{\sin 2}{\sin 3},$$

pa traženi poredak po veličini glasi: *c*, *a*, *b*.

1157. *Zadane su funkcije* $f_1(x) = 2^{\log_2 x}$, $f_2(x) = \log_2(2^x)$, $f_3(x) = x$ i $f_4(x) = (x \cdot 2^{-\log_2 \sqrt{x}})^2$. *Ima li među njima međusobno jednakih funkcija*?

Rješenje: Prirodno područje definicije (domena) funkcije $f_1(x)$ je interval $\langle 0, +\infty\rangle$ (jer $\log_2 x$ nije definiran za nepozitivne realne brojeve), a prirodno područje definicije funkcije $f_2(x)$ je skup **R** (jer je izraz 2^x definiran za svaki realan broj x). Stoga je $f_1 \neq f_2$.
Uočimo da su funkcije 2^x i $\log_2 x$ međusobno inverzne bijekcije. To znači da je prirodno područje definicije te funkcije skup **R** (jer je **R** prirodno područje definicije eksponencijalne funkcije 2^x), područje vrijednosti također skup **R** (jer je **R** područje vrijednosti funkcije $\log_2 x$ koja je bijekcija sa skupa $\langle 0, +\infty\rangle$ u skup **R**) i propis $f_2(x) = x$. Stoga je $f_2 = f_3$ jer i funkcija $f_3(x)$ ima skup **R** i za prirodno područje definicije i područje vrijednosti, te očito isti propis.
Funkcija f_4 definirana je samo za brojeve iz intervala $\langle 0, +\infty\rangle$. Naime, funkcija $\sqrt{x}$ preslikava interval $[0, +\infty\rangle$ na sama sebe, a funkcija $\log_2 x$, kako smo već vidjeli, preslikava interval $\langle 0, +\infty\rangle$ u skup **R**. Odavde zaključujemo

da je prirodno područje definicije funkcije $f_4(x)$ skup $[0, +\infty\rangle \cap \langle 0, +\infty\rangle = \langle 0, +\infty\rangle$, a prirodno područje vrijednosti isti taj skup, tj. $\langle 0, +\infty\rangle$. Propis funkcije f_4 zapišimo na sljedeći način:

$$f_4(x) = (x \cdot 2^{-\log_2 \sqrt{x}})^2 = (x \cdot 2^{\log_2 (\sqrt{x})^{-1}})^2 = (x \cdot (\sqrt{x})^{-1})^2 = (x \cdot x^{-\frac{1}{2}})^2 = (x^{\frac{1}{2}})^2 = x .$$

Funkcija f_1 također ima skup $\langle 0, +\infty\rangle$ i za prirodno područje definicije i za područje vrijednosti, te je na tom skupu $f_1(x) = x$. Stoga je $f_1 = f_4$.
Zaključimo: Među zadanim funkcijama postoje dva para međusobno jednakih funkcija: $f_2 = f_3$ i $f_1 = f_4$.

1158. *Odredite zbroj najmanje i najveće vrijednosti funkcije* $f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$ *na segmentu* $[-5, 5]$.

Rješenje: Odredimo najprije intervale rasta i pada zadane funkcije na promatranom segmentu. U tu svrhu nađimo prvu i drugu derivaciju zadane funkcije:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 72 = 3 \cdot (x - 4) \cdot (x + 6).$$
$$f''(x) = 6x + 6.$$

Riješimo li nejednadžbu $f'(x) = 0$ na segmentu $[-5, 5]$, dobit ćemo $x = 4$. Budući da je $f''(4) > 0$, za $x = 4$ funkcija $f(x)$ postiže svoj lokalni minimum $f(4) = -86$ na segmentu $[-5, 5]$. To ujedno znači da $f(x)$ raste na intervalu $\langle 4, 5]$, a pada na intervalu $[-5, 4\rangle$. Budući da je $f(-5) = 400$, a $f(5) = 70$, najveća vrijednost funkcije $f(x)$ na segmentu $[-5, 5]$ jednaka je 400, a najmanja – kako smo već vidjeli – jednaka je $f(4) = -86$. Zbroj tih dvaju brojeva jednak je $400 + (-86) = 314$.

1159. *U geometrijskom nizu* $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *poznato je*: $g_1 + g_5 = 51$, $g_2 + g_6 = 102$. *Odredite* $n \in \mathbf{N}$ *za koji je zbroj prvih n članova toga niza jednak* 3 069.

Rješenje: Odredimo najprije formulu za opći član zadanoga niza. Označimo sa q količnik niza. Tada je:

$$g_2 = g_1 \cdot q,$$
$$g_5 = g_1 \cdot q^4,$$
$$g_6 = g_1 \cdot q^5,$$

pa uvrštavanjem u zadane jednakosti dobivamo sustav:

$$g_1 \cdot (1 + q^4) = 51$$
$$g_1 \cdot (q + q^5) = 102,$$

odnosno

$$g_1 \cdot (1 + q^4) = 51$$
$$g_1 \cdot q \cdot (1 + q^4) = 102.$$

Dijeljenjem ovih jednadžbi odmah dobivamo $q = 2$, pa slijedi $g_1 = 3$. Te vrijednosti uvrstimo u formulu za zbroj prvih n članova aritmetičkoga niza

$$S_n = g_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

pa dobivamo:

$$S_n = 3 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 3 \cdot (2^n - 1).$$

Prema zahtjevu zadatka, tražimo prirodan broj n takav da je $S_n = 3\,069$. Stoga rješavamo jednadžbu

$$3 \cdot (2^n - 1) = 3069,$$

odnosno eksponencijalnu jednadžbu

$$2^n = 1024.$$

Jedino rješenje te jednadžbe je $n = 10$ i to je tražena vrijednost broja n.

1160. *Odredite onaj član u razvoju binoma* $\left(\sqrt[4]{a^2 x} + \frac{1}{\sqrt[5]{ax^2}}\right)^{13}$ *koji ne sadrži x.*

Rješenje: Prema binomnom poučku, opći član navedenoga razvoja je :

$$\binom{13}{k}\left(\sqrt[4]{a^2 x}\right)^k \left(\sqrt[5]{\frac{1}{ax^2}}\right)^{13-k} = \binom{13}{k} \cdot a^{\frac{2k}{4}} \cdot x^{\frac{k}{4}} \cdot a^{\frac{k-13}{5}} \cdot x^{\frac{2k-26}{5}} = \binom{13}{k} \cdot a^{\frac{7k-26}{10}} \cdot x^{\frac{13k-104}{20}}.$$

Član koji ne sadrži x je onaj u kojemu varijabla x dolazi s eksponentom 0. Odavde dobivamo linearnu jednadžbu

$$\frac{13k - 104}{20} = 0$$

čije je jedino rješenje $k = 8$. Dakle, 8. član navedenoga razvoja ne sadrži x i on je jednak

$$\binom{13}{8} \cdot a^{\frac{7 \cdot 8 - 26}{10}} \cdot x^{\frac{13 \cdot 8 - 104}{20}} = 1287a^3.$$

1161. *Ako je polinom* $p(x) = x^4 + ax^2 + b$ *djeljiv polinomom* $q(x) = x^2 + 4x + 6$, *izračunajte* $a + b$.

Rješenje: Iz uvjeta zadatka slijedi da postoji polinom $r(x)$ stupnja $4 - 2 = 2$ takav da je $p(x) = q(x) \cdot r(x)$. Budući da su vodeći koeficijenti polinoma p i q jednaki 1, i vodeći koeficijent polinoma $r(x)$ mora biti jednak 1, što znači da je $r(x)$ polinom oblika $r(x) = x^2 + cx + d$, za neke $c, d \in \mathbf{R}$. Tako imamo jednakost:

$$x^4 + ax^2 + b = (x^2 + 4x + 6)(x^2 + cx + d),$$

a odavde množenjem i sređivanjem dobivamo:

$$x^4 + ax^2 + b = x^4 + (c + 4)x^3 + (4c + d + 6)x^2 + (6c + 4d)x + 6d.$$

Usporedbom koeficijenata uz x^3 i x na lijevoj i desnoj strani dobivamo sustav:

$$c + 4 = 0$$
$$6c + 4d = 0.$$

Njegovo je rješenje $c = -4$, $d = 6$. Tako je

$$a + b = (4c + d + 6) + 6d = 32.$$

1162. *Izračunajte vrijednost izraza* $\frac{\sin 86° + \sin 76° - \sin 26° - \sin 16°}{\cos 86° + \cos 76° + \cos 26° + \cos 16°}$.

Rješenje: Primjenom formula pretvorbe zbroja u umnožak dobivamo redom:

$$\frac{\sin 86° + \sin 76° - \sin 26° - \sin 16°}{\cos 86° + \cos 76° + \cos 26° + \cos 16°} = \frac{(\sin 86° - \sin 26°) + (\sin 76° - \sin 16°)}{(\cos 86° + \cos 26°) + (\cos 76° + \cos 16°)} =$$
$$= \frac{2\cos 56° \sin 30° + 2\cos 46° \sin 30°}{2\cos 56° \cos 30° + 2\cos 46° \cos 30°} = \frac{\cos 56° + \cos 46°}{\sqrt{3} \cdot (\cos 56° + \cos 46°)} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

1163. *Odredite ukupan broj različitih realnih rješenja jednadžbe*

$$9^{2\sqrt{x-1}} - 4 \cdot 3^{2\sqrt{x-1}} + 3 = 0.$$

Rješenje: Označimo: $t = 3^{2\sqrt{x-1}}$. Tada je $9^{2\sqrt{x-1}} = (3^2)^{2\sqrt{x-1}} = (3^{2\sqrt{x-1}})^2 = t^2$, pa zadana jednadžba prelazi u kvadratnu jednadžbu

$$t^2 - 4t + 3 = 0.$$

Sva realna rješenja te jednadžbe su $t_1 = 1$ i $t_2 = 3$. Iz $3^{2\sqrt{x-1}} = 1$ slijedi $3^{2\sqrt{x-1}} = 3^0$, pa izjednačavanjem eksponenata dobivamo iracionalnu jednadžbu $2\sqrt{x-1} = 0$. Dijeljenjem s 2 i kvadriranjem dobijemo $x - 1 = 0$, odnosno $x_1 = 1$. Nadalje, iz $3^{2\sqrt{x-1}} = 3$ slijedi $2\sqrt{x-1} = 1$, odnosno dijeljenjem i kvadriranjem $x_2 = \frac{5}{4}$. Izravnom provjerom (uvrštavanjem u polaznu jednadžbu) utvrđujemo da su x_1 i x_2 rješenja polazne jednadžbe, pa zaključujemo da polazna jednadžba ima točno dva različita realna rješenja.

1164. *Odredite ukupan broj različitih realnih rješenja jednadžbe* $\cos^2 x - \sin^2 2x = 0$ *na segmentu* $[0, 2\pi]$.

Rješenje: Prelaskom na dvostruki argument dobivamo ekvivalentnu jednadžbu:

$$\frac{1+\cos 2x}{2} - \frac{1-\cos 4x}{2} = 0,$$

odnosno množenjem s 2 i reduciranjem

$$\cos 2x + \cos 4x = 0,$$

te pretvorbom zbroja u umnožak

$$2 \cos 3x \cos x = 0.$$

Razlikovat ćemo točno dva slučaja:

1.) $\cos 3x = 0$

Iz ove jednadžbe je $x_k = \frac{\pi}{6}(1+2k)$, $k \in \mathbf{Z}$, pa iz uvjeta $0 \le x_k \le 2\pi$ dobivamo nejednadžbu

$$0 \le \frac{\pi}{6}(1+2k) \le 2\pi,$$

odnosno nejednadžbu

$$-\frac{1}{2} \le k \le \frac{11}{2}$$

koja u skupu $\mathbf{Z}$ ima točno 6 rješenja (to su 0, 1, 2, 3, 4 i 5). Stoga u ovom slučaju dobivamo ukupno 6 različitih realnih rješenja polazne jednadžbe.

2.) $\cos x = 0$

Sva rješenja ove jednadžbe u segmentu [0, 2π] su $x_1 = \frac{\pi}{2}$ i $x_2 = \frac{3\pi}{2}$. Laganom provjerom utvrđujemo da za te dvije vrijednosti vrijedi identitet $\cos 3x = 0$, pa navedena rješenja pripadaju skupu rješenja dobivenom u 1. podslučaju (konkretno, $x = \frac{\pi}{2}$ i $x = \frac{3\pi}{2}$ dobivamo redom uvrštavajući $k = 1$ i $k = 4$ u izraz $x_k = \frac{\pi}{6}(1+2k)$). Stoga u ovom podslučaju ne dobivamo niti jedno novo rješenje polazne jednadžbe.

Opaska. Zbog identiteta $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, jednadžba $\cos 3x = 0$ ekvivalentna je jednadžbi $\cos x \cdot (4\cos^2 x - 3) = 0$, pa odavde slijedi da je skup svih rješenja jednadžbe $\cos 3x = 0$ jednak uniji skupa svih rješenja jednadžbe $\cos x = 0$ i skupa svih rješenja jednadžbe $4\cos^2 x - 3 = 0$. Stoga je skup svih rješenja jednadžbe $\cos x = 0$ pravi podskup skupa svih rješenja jednadžbe $\cos 3x = 0$, pa zato u drugom podslučaju nismo mogli dobiti niti jedno novo rješenje.

Tako zaključujemo da polazna jednadžba ima točno 6 različitih realnih rješenja na segmentu [0, 2π].

1165. *Neka su x_1 i x_2 rješenja jednadžbe $3x^2 + 17x - 14 = 0$. Izračunajte vrijednost izraza*

$$\frac{3x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2}{4x_1x_2^2 + 4x_2x_1^2}.$$

Rješenje: Prema Vièteovim formulama vrijede jednakosti:

$$x_1 + x_2 = -\frac{17}{3}$$
$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{14}{3}$$

Stoga je vrijednost zadanoga izraza jednaka:

$$\frac{3x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2}{4x_1x_2^2 + 4x_2x_1^2} = \frac{3(x_1+x_2)^2 - x_1x_2}{4x_1x_2\cdot(x_1+x_2)} = \frac{3\cdot\left(-\frac{17}{3}\right)^2 - \left(-\frac{14}{3}\right)}{4\cdot\left(-\frac{14}{3}\right)\cdot\left(-\frac{17}{3}\right)} = \frac{\frac{289}{3}+\frac{14}{3}}{\frac{952}{9}} = \frac{909}{952}.$$

1166. *Odredite skup svih realnih rješenja nejednadžbe* $\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)} \geq 1$.

Rješenje: Zadanu nejednadžbu najprije transformirajmo na sljedeći način:

$$\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x+2)-(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{6x}{(x-1)(x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{(x-1)(x-2)} \geq 0.$$

Sada razlikujemo dva podslučaja:

1.) $x \geq 0$, $(x-1)(x-2) > 0$

Iz prve nejednadžbe je $x \in [0, +\infty\rangle$, a iz druge $x \in \mathbf{R} \setminus [1, 2]$. Presjek tih rješenja je skup $[0, 1\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$.

2.) $x \leq 0$, $(x-1)(x-2) < 0$

Iz prve nejednadžbe je $x \in \langle -\infty, 0]$, a iz druge $x \in \langle 1, 2\rangle$. Presjek tih rješenja je prazan skup.

Tako zaključujemo da je skup svih realnih rješenja polazne jednadžbe $[0, 1\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$.

1167. *Odredite ukupan broj različitih realnih rješenja jednadžbe* $\log_2(1 - x) = \log_2(x - 3)$.

Rješenje: Zbog bijektivnosti bilo koje logaritamske funkcije vrijednosti logaritmanada moraju biti jednake, pa dobivamo jednadžbu $1 - x = x - 3$ iz koje je $x = 2$. Međutim, izravnim uvrštavanjem $x = 2$ u polaznu jednadžbu dobivamo $\log_2(-1) = \log_2(-1)$, što je neistinita jednakost jer $\log_2(-1)$ ne postoji. Stoga polazna jednadžba nema niti jedno realno rješenje.

1168. *Izračunajte omjer oplošja bilo koje kugle i toj kugli opisane kocke.*

Rješenje: Neka je R polumjer kugle, a a duljina brida kocke. Budući da je kocka opisana kugli, duljina njezina brida mora biti jednaka promjeru kugle, tj. $a = 2R$. Tako je traženi omjer jednak

$$O_{\text{kugla}} : O_{\text{kocka}} = (4R^2\pi) : (6 \cdot (2R)^2) = (4R^2\pi) : (6 \cdot 4R^2) = \pi : 6.$$

1169. *Ako je* $|x + a| = a$, *za* $a \geq 0$, *izračunajte* $||x| - a|$.

Rješenje: Jednakost $|x + a| = a$ ekvivalentna je relaciji $x + a \in \{-a, a\}$, odnosno s $x \in \{-2a, 0\}$. Tako je $|x| \in \{2a, 0\}$, $|x| - a \in \{a, -a\}$ i $||x| - a| \in \{a, a\} = \{a\}$. Odavde izravno slijedi $||x| - a| = a$.

1170. *Izračunajte vrijednost izraza* $\dfrac{(1+i)^{2008} - (1-i)^{2009}}{(1+i)^{2006} + (1-i)^{2007}}$.

Rješenje: Uočimo da je $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$, te analogno $(1 - i)^2 = -2i$. Stoga je:

$(1 + i)^{2006} = [(1 + i)^2]^{1003} = (2i)^{1003} = 2^{1003} \cdot i^{1003} = 2^{1003} \cdot i^{4 \cdot 250 + 3} = 2^{1003} \cdot (i^4)^{250} \cdot i^3 = 2^{1003} \cdot 1^{250} \cdot (-i) = -2^{1003} \cdot i;$

$(1 - i)^{2007} = (1 - i)^{2006 + 1} = (1 - i)^{2006} \cdot (1 - i) = [(1 - i)^2]^{1003} \cdot (1 - i) = (-2i)^{1003} \cdot (1 - i) = (-2)^{1003} \cdot i^{1003} \cdot (1 - i) = -2^{1003} \cdot i^{4 \cdot 250 + 3} \cdot (1 - i) = -2^{1003} \cdot (i^4)^{250} \cdot i^3 \cdot (1 - i) = -2^{1003} \cdot 1^{250} \cdot (-i) \cdot (1 - i) = 2^{1003} \cdot i \cdot (1 - i) = 2^{1003} \cdot i - 2^{1003} \cdot i^2 = 2^{1003} \cdot i - 2^{1003} \cdot (-1) = 2^{1003} + 2^{1003} \cdot i;$

$(1 + i)^{2008} = [(1 + i)^2]^{1004} = (2i)^{1004} = 2^{1004} \cdot i^{1004} = 2^{1004} \cdot i^{4 \cdot 251} = 2^{1004} \cdot (i^4)^{251} = 2^{1003} \cdot 1^{251} = 2^{1004};$

$(1 - i)^{2009} = (1 - i)^{2008 + 1} = (1 - i)^{2008} \cdot (1 - i) = [(1 - i)^2]^{1004} \cdot (1 - i) = (-2i)^{1004} \cdot (1 - i) = (-2)^{1004} \cdot i^{1004} \cdot (1 - i) = 2^{1004} \cdot i^{4 \cdot 251} \cdot (1 - i) = 2^{1004} \cdot (i^4)^{251} \cdot (1 - i) = 2^{1004} \cdot 1^{251} \cdot (1 - i) = 2^{1004} \cdot (1 - i) = 2^{1004} - 2^{1004} \cdot i.$

Tako vidimo da je brojnik zadanoga razlomka jednak $2^{1004} - (2^{1004} - 2^{1004} \cdot i) = 2^{1004} \cdot i$, a nazivnik $-2^{1003} \cdot i + 2^{1003} + 2^{1003} \cdot i = 2^{1003}$. Stoga je vrijednost razlomka jednaka $2^{1004 - 1003} \cdot i = 2^1 \cdot i = 2i$.

Opaska: Zadatak se mogao riješiti i uporabom *Moivreove formule* za potenciranje kompleksnih brojeva. Kompleksne brojeve $z_1 = 1 + i$ i $z_2 = 1 - i$ najprije zapišemo u trigonometrijskom obliku:

$$z_1 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),\ z_2 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right),$$

pa imamo:

$$\frac{(1+i)^{2008}-(1-i)^{2009}}{(1+i)^{2006}+(1-i)^{2007}}=\frac{\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2008}-\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right]^{2009}}{\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2006}+\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right]^{2007}}=$$

$$=\frac{\left[2^{1004}\left(\cos\frac{2008\pi}{4}+i\sin\frac{2008\pi}{4}\right)\right]-\left[2^{1004}\sqrt{2}\left(\cos\frac{2009\cdot 7\pi}{4}+i\sin\frac{2009\cdot 7\pi}{4}\right)\right]}{\left[2^{1003}\left(\cos\frac{2006\pi}{4}+i\sin\frac{2006\pi}{4}\right)\right]+\left[2^{1003}\sqrt{2}\left(\cos\frac{2007\cdot 7\pi}{4}+i\sin\frac{2007\cdot 7\pi}{4}\right)\right]}=$$

$$=\frac{\left[2^{1004}\left(\cos 502\pi+i\sin 502\pi\right)\right]-\left[2^{1004}\sqrt{2}\left(\cos\frac{14063\pi}{4}+i\sin\frac{14063\pi}{4}\right)\right]}{\left[2^{1003}\left(\cos\frac{1003\pi}{2}+i\sin\frac{1003\pi}{2}\right)\right]+\left[2^{1003}\sqrt{2}\left(\cos\frac{14049\pi}{4}+i\sin\frac{14049\pi}{4}\right)\right]}=$$

$$=\frac{\left[2^{1004}(1+i\cdot 0)\right]-\left[2^{1004}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]}{\left[2^{1003}(0+i\cdot(-1))\right]+\left[2^{1003}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]}=\frac{2^{1004}-(2^{1004}-2^{1004}i)}{-2^{1003}i+(2^{1003}+2^{1003}i)}$$

s istim rezultatom.

1171. *Pojednostavnite izraz*: $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ *za* $x>0$.

Rješenje: $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}=\sqrt{\sqrt{x^2\cdot x\sqrt{x}}}=\sqrt{\sqrt{x^3\sqrt{x}}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{x^6\cdot x}}}=\sqrt[8]{x^7}$.

1172. *Izračunajte vrijednost izraza* $2^{0.5}-2^0-(2^{0.5}+2^0)^{-1}$.

Rješenje: Izraz je jednak $2^{0.5}-1-(2^{0.5}+1)^{-1}=\sqrt{2}-1-\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{(2-1)-1}{\sqrt{2}+1}=0.$

1173. *Izračunajte zbroj svih znamenki dekadskoga broja* 13 *u binarnom brojevnom sustavu.*

Rješenje: Pretvorbom broja 13 u binarni sustav dobivamo broj $(1101)_2$. Stoga je traženi zbroj jednak 3.

1174. *U nekom se mravinjaku populacija mrava svake godine poveća za prosječno* 20%. *Ako danas u mravinjaku ima točno M mrava, koliko najmanje godina treba proći da se taj broj mrava barem udvostruči?*

Rješenje: Brojevi mrava tvore geometrijski niz kojemu je prvi član M, a količnik $1+\frac{20}{100}=1.2$. Mi tražimo prvi član toga niza veći ili jednak broju $2M$. Ako s n označimo taj član, onda iz eksponencijalne nejednadžbe $M\cdot 1.2^{n-1}\geq 2M$ slijedi $n\geq\frac{\log 2}{\log 1.2}+1$, tj. $n\geq 4.801784$. Dakle, riječ je o petom članu niza, pa zaključujemo da trebaju proći najmanje 4 godine da se populacija mrava barem udvostruči obzirom na sadašnji broj.

1175. *Ako je* $f(2x-1)=x$, *odredite* $(f\circ f)(x)$.

Rješenje: Označimo $t=2x-1$. Odavde je $x=\frac{t-1}{2}$, pa je $f(t)=\frac{t-1}{2}$, odnosno – prelaskom na varijablu x – $f(x)=\frac{x-1}{2}$. Tako je

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{x-1}{2}\right)=\frac{\frac{x-1}{2}-1}{2}=\frac{x-1-2}{4}=\frac{x-3}{4}.$$

1177. *Odredite ukupan broj različitih cjelobrojnih vrijednosti parametra* $k \in \mathbf{Z}$ *takvih da je izraz* $(k-1)x^2 - 2(k+5)x - (k+5)$ *strogo negativan za svaki realan broj* $x \in \mathbf{R}$.

Rješenje: Označimo: $p(x) = (k-1)x^2 - 2(k+5)x - (k+5)$. $p(x)$ je polinom stupnja 2 u varijabli x. On će poprimati isključivo strogo negativne vrijednosti ako i samo ako istodobno budu vrijedile sljedeće nejednakosti:

$$k - 1 < 0$$
$$[2(k+5)]^2 - 4 \cdot (k-1) \cdot [-(k+5)] < 0$$

Iz prve nejednakosti je $k < 1$, a druga je ekvivalentna s $8 \cdot (k-2) \cdot (k+1) < 0$, otkuda je $k \in [-1, 2]$. Tako iz uvjeta $k \in \mathbf{Z}$, $k < 1$ i $k \in [-1, 2]$ slijedi $k \in \{-1, 0\}$. Dakle, postoje točno dvije različite cjelobrojne vrijednosti parametra k za koje polinom $p(x)$ poprima isključivo strogo negativne vrijednosti za svaki realan broj $x \in \mathbf{R}$.

1178. *Odredite najveću vrijednost funkcije* $f(x) = \sin(\sin x)$.

Rješenje: Funkcija $g(x) = \sin x$ poprima vrijednosti iz segmenta $[-1, 1]$. Ista ta funkcija je strogo rastuća na segmentu $[-1, 1]$ jer je strogo rastuća na segmentu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ čiji je pravi podskup segment $[-1, 1]$. Stoga funkcija $f(x)$ poprima najveću vrijednost na "desnom kraju" segmenta $[-1, 1]$, tj. za sve $x \in \mathbf{R}$ takve da je $\sin x = 1$. Ta vrijednost iznosi $\sin 1 \approx 0.017452406437283512819418978516316$2.

1179. *Ravnina prolazi središtem jednoga polumjera kugle okomito na taj polumjer i siječe ga u liku površine* 48π cm^2. *Izračunajte duljinu polumjera kugle.*

Rješenje: Lik u kojemu ravnina siječe kuglu je krug. Promotrimo poprečni presjek kugle i ravnine ravninom okomitom na promatranu ravninu. Označimo li s S središte kugle, a s R traženi polumjer, onda je navedeni poprečni presjek jednakokračan trokut. Duljina njegovih krakova jednaka je R. Duljina visine na osnovicu jednaka je $\frac{R}{2}$ jer, prema uvjetu zadatka, zadana ravnina siječe polumjer kugle u njegovu središtu, tj. polovištu. Duljina osnovice jednaka je duljini promjera kruga površine 48π cm^2, pa je duljina polovice osnovice jednaka duljini polumjera kruga površine 48π cm^2. S druge strane, prema Pitagorinu je poučku kvadrat polovice osnovice jednakokračnoga trokuta jednak razlici kvadrata duljine kraka i kvadrata visine trokuta. To znači da je, u ovom slučaju, kvadrat duljine polumjera kruga jednak $R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3R^2}{4}$, pa je površina kruga jednaka $\frac{3R^2}{4}\pi$. Tako iz jednadžbe

$$\frac{3R^2}{4}\pi = 48\pi$$

slijedi $R = 8$ cm.

1180. *Pravac p siječe pravac q…* $2x - y - 2 = 0$ *u točki A, a pravac r…* $x - y + 1 = 0$ *u točki B. Ako je polovište dužine AB točka* $M = (1, 1)$, *odredite jednadžbu pravca p.*

Rješenje: Neka su $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$. Točka A pripada pravcu q pa njezine koordinate moraju zadovoljavati jednadžbu toga pravca. Dakle, vrijedi jednakost:

$$2x_A - y_A - 2 = 0.$$

Iz analognog razloga koordinate toče B moraju zadovoljavati jednadžbu pravca r, pa vrijedi jednakost:

$$x_B - y_B + 1 = 0.$$

Točka M je polovište dužine AB pa je njezina prva koordinata jednaka poluzbroju prvih koordinata točaka A i B, a njezina druga koordinata jednaka poluzbroju drugih koordinata točaka A i B, tj. vrijede jednakosti:

$$\frac{1}{2}\cdot(x_A+x_B)=1$$
$$\frac{1}{2}\cdot(y_A+y_B)=1.$$

Tako smo dobili sustav četiriju linearnih jednadžbi s četiri nepoznanice:

$$\begin{aligned}2x_A-y_A-2&=0\\ x_B-y_B+1&=0\\ \frac{1}{2}\cdot(x_A+x_B)&=1\\ \frac{1}{2}\cdot(y_A+y_B)&=1.\end{aligned}$$

Zbroj prve i druge jednadžbe toga sustava možemo zapisati ovako:

$$x_A+(x_A+x_B)-(y_A+y_B)-1=0.$$

Iz treće i četvrte jednadžbe slijedi

$$\begin{aligned}x_A+x_B&=2\\ y_A+y_B&=2\end{aligned}$$

pa kad te vrijednosti uvrstimo u jednadžbu

$$x_A+(x_A+x_B)-(y_A+y_B)-1=0$$

odmah dobivamo $x_A=1$. Sada iz prve jednadžbe sustava slijedi $y_A=0$, pa je $A=(1, 0)$. Jednadžbu traženoga pravca možemo naći i kao jednadžbu pravca kroz točke $A=(1, 0)$ i $M=(1, 1)$. Ta je jednadžba očito $p\ldots\ x=1$.

1181. *Odredite najmanju vrijednost realnoga parametra $a\in\mathbf{R}$ za koju jednadžba $x^2-2x-\log_2 a=0$ ima barem jedno realno rješenje.*

<u>Rješenje:</u> Uvjeti na parametar a su $a>0$ i $(-2)^2-4\cdot1\cdot(-\log_2 a)\geq0$ (uvjet da jednadžba ima barem jedno realno rješenje ekvivalentan je uvjetu da diskriminanta te jednadžbe bude barem jednaka 0). Drugu nejednadžbu možemo zapisati u obliku $\log_2 a\geq-1$, a odavde je $a\geq2^{-1}=\frac{1}{2}$. Tako iz uvjeta $a>0$ i $a\geq\frac{1}{2}$ zaključujemo da je tražena najmanja vrijednost parametra a jednaka $\frac{1}{2}$.

1182. *Zadan je skup svih uspravnih kružnih stožaca čija izvodnica ima duljinu s. Odredite onaj element toga skupa koji ima najveći obujam.*

<u>Rješenje:</u> Označimo s r polumjer toga stošca, a s v njegovu visinu. Prema Pitagorinu poučku vrijedi jednakost:

$$r^2+v^2=s^2$$

iz koje je

$$r^2=s^2-v^2.$$

Tada je obujam stošca (kao funkcija varijable v) jednak:

$$V=V(v)=\frac{1}{3}r^2\cdot\pi\cdot v=\frac{1}{3}(s^2-v^2)\cdot\pi\cdot v=\frac{\pi}{3}(s^2v-v^3)\,.$$

Prva i druga derivacija te funkcije (po varijabli v) jednake su:

$$V'(v) = \frac{\pi}{3} s^2 - \pi v^2$$
$$V''(v) = -2\pi v$$

Izjednačavanjem prve derivacije s nulom dobivamo jednadžbu

$$\frac{\pi}{3} s^2 - \pi v^2 = 0$$

čije je jedino strogo pozitivno rješenje (jer duljina visine stošca ne može biti nepozitivan realan broj) $v = \frac{\sqrt{3}}{3} s$.

Za navedeni v je vrijednost druge derivacije $V''(v)$ strogo negativna, pa je riječ o vrijednosti varijable v za koju funkcija $V(v)$ poprima lokalni maksimum. Taj maksimum iznosi:

$$V_{\max} = \frac{\pi}{3}\left(s^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} s - \frac{\sqrt{3}}{9} s^3\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot \pi \cdot s^3$$

i to je traženi najveći obujam.

1183. "*Špil*" *od* 32 *karte sadrži točno* 4 *asa. Na koliko različitih načina možemo izabrati točno* 5 *karata tako da među njima budu barem dva asa*?

Rješenje: Razlikovat ćemo ukupno tri različita slučaja:

1.) Među 5 izabranih karata su točno dva asa. Ta dva asa možemo izabrati na $\binom{4}{2}$ različitih načina, a preostale tri karte na $\binom{32-4}{3} = \binom{28}{3}$ različitih načina.

2.) Među 5 izabranih karata su točno tri asa. Ta tri asa možemo izabrati na $\binom{4}{3}$ različitih načina, a preostale dvije karte na $\binom{32-4}{2} = \binom{28}{2}$ različitih načina.

3.) Među 5 izabranih karata su sva četiri asa. Preostaje odabrati još jednu kartu na $\binom{32-4}{1} = \binom{28}{1}$ različitih načina.

Tako je, prema načelu zbroja, traženi broj jednak $\binom{4}{2} \cdot \binom{28}{3} + \binom{4}{3} \cdot \binom{28}{2} + \binom{28}{1} = 21\ 196$.

1184. *Izračunajte zbroj svih troznamenkastih prirodnih brojeva djeljivih sa* 11.

Rješenje: Riječ je o zbroju svih članova aritmetičkoga niza čiji je prvi član 110, posljednji 990, a razlika 11. Odredimo ukupan broj članova toga niza. Iz formule za opći član aritmetičkoga niza

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

lagano slijedi

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1,$$

pa uvrštavanjem $a_n = 990$, $a_1 = 110$ i $d = 11$ u tu formulu dobijemo da promatrani niz ima ukupno

$$n = \frac{990-110}{11}+1 = 81 \text{ članova.}$$

Preostaje nam izračunati zbroj svih tih članova tako da u formulu za zbroj prvih n članova aritmetičkoga niza

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

uvrstimo $n = 81$, $a_1 = 110$ i $a_n = 990$. Tako dobivamo: $S_{81} = 44\,550$.

1182. *U* 2007–*znamenkastom broju* 1234512345…1234512 *precrtane su sve znamenke na neparnim mjestima* (*počevši od prve slijeva*). *Isti je postupak ponavljan s tako dobivenim prirodnim brojevima sve dok naposljetku nije preostala točno jedna neprecrtana znamenka. Odredite tu znamenku.*

Rješenje: Pogledajmo na kojim se mjestima u polaznom broju nalaze znamenke precrtane u pojedinim koracima. U prvom su koraku precrtane (brojeći slijeva) 1., 3., 5., …, 2003., 2005. i 2007. znamenka. U drugom su koraku precrtane 2., 6., 10., …, 2002. i 2006. znamenka. U trećem su koraku precrtane 4, 12, 20, …, 1996. i 2004. znamenka. Tako uočavamo da u n – tom koraku imamo aritmetički niz pozicija znamenki kojemu je prvi član 2^{n-1}, te da je ukupan broj koraka potrebnih da u nizu ostane samo jedna znamenka jednak ukupnom broju znamenki u binarnom zapisu broja 2007. Kako je $2007 = (11111010111)_2$, imat ćemo točno 11 koraka. U 11. koraku preostat će jedna jedina znamenka. Ona se nalazi na $2^{11-1} = 1024$. mjestu polaznoga broja. Budući da se na svakoj četvrtoj poziciji u polaznom broju nalazi znamenka 4, to je i 1024. znamenka jednaka 4 i to je tražena znamenka.

1183. *Odredite* $f^{-1}(1)$ *ako je* $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x+2}$.

Rješenje: "Klasično" bi se zadatak mogao riješiti tako da odredimo inverz zadane funkcije i potom izračunamo njegovu vrijednost za $x = 1$. No, imamo jedno brže i elegantnije rješenje. Prema definiciji inverzne funkcije, $f^{-1}(1)$ je realan broj a takav da je $f(a) = 1$. Kako je

$$f(a) = \frac{2a-1}{3a+2},$$

dobivamo jednadžbu

$$\frac{2a-1}{3a+2} = 1$$

čije je rješenje $a = -3$. Prema tome, $f^{-1}(1) = -3$.

1184. *Realni brojevi x i y zadovoljavaju jednakosti* $3^{-x}2^{y} = 2$, $\log_{\sqrt{2}}(x + 2y) = 2$. *Izračunajte zbroj tih brojeva.*

Rješenje: Iz druge zadane jednakosti slijedi $x + 2y = 2$, a odavde je $x = 2 - 2y$. Uvrštavanjem u prvu jednakost dobivamo eksponencijalnu jednadžbu

$$3^{2y-2} \cdot 2^{y} = 2$$

koju nakon množenja s $3^2 = 9$ možemo zapisati u obliku

$$3^{2y} \cdot 2^{y} = 18,$$

odnosno u obliku

$$9^{y} \cdot 2^{y} = 18,$$

tj. kao

$$18^y = 18.$$

Odavde je $y = 1$, pa je $x = 2 - 2 \cdot 1 = 0$. Stoga je traženi zbroj jednak $x + y = 1$.

1185. *Odredite vrijednost realnoga parametra* $a \in \mathbf{R}$ *tako da polinom* $p(x) = x^4 - 4x^3 - 2ax - 1$ *bude djeljiv polinomom* $q(x) = x^2 + 1$.

Rješenje: Nultočke polinoma $q(x)$ dobivamo iz jednadžbe $x^2 + 1 = 0$, a odavde je $x_1 = -i$, $x_2 = i$. Da bi polinom $p(x)$ bio djeljiv polinomom $q(x)$, nužno mora vrijediti $p(i) = p(-i) = 0$. Budući da je $p(i) = i^4 - 4i^3 - 2ai - 1 = 1 + 4i - 2ai - 1 = (4 - 2a) \cdot i$, taj će broj biti jednak 0 ako i samo ako je $4 - 2a = 0$, tj. ako i samo ako je $a = 2$. Istu vrijednost dobivamo i iz uvjeta $p(-i) = 0$, pa je $a = 2$ tražena vrijednost.

1186. *Pojednostavnite izraz*: $\dfrac{a+b}{a-b} : \dfrac{\dfrac{a+b}{a-b} - 1}{\dfrac{a-b}{a+b} + 1}$.

Rješenje: Izraz je jednak:

$$\frac{a+b}{a-b} : \frac{\frac{a+b}{a-b} - 1}{\frac{a-b}{a+b} + 1} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{\frac{a-b}{a+b} + 1}{\frac{a+b}{a-b} - 1} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{\frac{a-b+a+b}{a+b}}{\frac{a+b-a+b}{a-b}} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{\frac{2a}{a+b}}{\frac{2b}{a-b}} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{a \cdot (a-b)}{b \cdot (a+b)} = \frac{a}{b}.$$

1187. *Odredite skup svih realnih rješenja nejednadžbe* $|x + 3| > |2x - 1|$.

Rješenje: Zadanu jednadžbu ćemo razmatrati na tri intervala:

1.) $x \in \langle -\infty, -3]$

Za x–eve iz toga intervala je $|x + 3| = -(x + 3)$ i $|2x - 1| = -(2x - 1) = 1 - 2x$, pa dobivamo nejednadžbu

$$-x - 3 > 1 - 2x$$

čije je rješenje $x > 4$. No, niti jedan broj strogo veći od 4 ne pripada intervalu $\langle -\infty, -3]$, pa polazna nejednadžba u ovom slučaju nema rješenja.

2.) $x \in \langle -3, \frac{1}{2}]$

Za x–eve iz toga intervala je $|x + 3| = x + 3$ i $|2x - 1| = -(2x - 1) = 1 - 2x$, pa dobivamo nejednadžbu

$$x + 3 > 1 - 2x$$

čije je rješenje $x > -\frac{2}{3}$. Realni brojevi iz intervala $\langle -3, \frac{1}{2}]$ koji su strogo veći od $-\frac{2}{3}$ tvore skup $\langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}]$ i taj je skup u ovom slučaju rješenje polazne nejednadžbe.

3.) $x \in \langle \frac{1}{2}, +\infty \rangle$

Za x–eve iz toga intervala je $|x + 3| = x + 3$ i $|2x - 1| = 2x - 1$, pa dobivamo nejednadžbu

$$x + 3 > 2x - 1$$

čije je rješenje $x < 4$. Realni brojevi iz intervala $\langle \frac{1}{2}, +\infty\rangle$ koji su strogo manji od 4 tvore skup $\langle \frac{1}{2}, 4\rangle$ i taj je skup u ovom slučaju rješenje polazne nejednadžbe.

Preostaje nam zaključiti da je skup svih rješenja polazne nejednadžbe $\langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}] \cup \langle \frac{1}{2}, 4\rangle = \langle -\frac{2}{3}, 4\rangle$.

1188. *Odredite vrijednost strogo pozitivnoga realnoga parametra* $b \in \langle 0, +\infty\rangle$ *za koju pravac* $p\ldots\ bx + 3y + 4 = 0$ *s objema koordinatnim osima zatvara trokut površine* $\frac{1}{2}$ kv. jed.

<u>Rješenje:</u> Zapišimo jednadžbu pravca p u segmentnom obliku:

$$p\ldots\ \frac{x}{-\frac{4}{b}} + \frac{y}{-\frac{4}{3}} = 1,$$

pa slijedi da je površina trokuta kojega pravac p zatvara s objema koordinatnim osima jednaka

$$P = \frac{1}{2}\cdot\left|-\frac{4}{b}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\frac{16}{3b}\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{3|b|} = \frac{8}{3|b|} \text{ kv. jed.}$$

Tako iz uvjeta $P = \frac{1}{2}$ dobivamo jednadžbu:

$$\frac{8}{3|b|} = \frac{1}{2}$$

čije je strogo pozitivno realno rješenje $b = \frac{16}{3}$ i to je tražena vrijednost realnoga parametra b.

1189. *Omjer površina dvaju sličnih trokuta je* 25 : 9. *Izračunajte duljinu najkraće stranice manjega od njih ako je duljina najkraće stranice većega od njih* 10 cm.

<u>Rješenje:</u> Iz podatka da su površine sličnih trokuta u omjeru 25 : 9 slijedi da se odgovarajuće stranice tih trokuta u omjeru $\sqrt{25} : \sqrt{9}$ = 5 : 3. Označimo li s x duljinu najkraće stranice manjega trokuta, onda iz razmjera $10 : x = 5 : 3$ slijedi $x = \frac{30}{5}$ = 6 cm.

1190. *Duljine stranica trokuta su* a = 8 cm, b = 11 cm *i* c = 14 cm. *Svaku od njih treba produžiti za dužine jednakih duljina tako da dobiveni trokut bude pravokutan. Odredite duljinu svakoga od tih produžetaka.*

<u>Rješenje:</u> Neka je x tražena duljina. Očito mora biti $x > 0$. Duljine (u cm) stranica novoga trokuta su $8 + x$, $11 + x$ i $14 + x$, te, zbog $x > 0$, vrijede nejednakosti: $8 + x < 11 + x < 14 + x$. Stoga su $8 + x$ i $11 + x$ duljine kateta, a $14 + x$ duljina hipotenuze dobivenoga pravokutnoga trokuta. Prema Pitagorinu je poučku

$$(8 + x)^2 + (11 + x)^2 = (14 + x)^2,$$

a odavde kvadriranjem i sređivanjem dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2 + 10x - 11 = 0.$$

Jedino strogo pozitivno rješenje te jednadžbe je $x = 1$. Stoga je tražena duljina 1 cm.

1191. *Odredite jednadžbu kružnice koja prolazi kroz sjecišta kružnica* $k_1 \ldots x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ *i* $k_2 \ldots x^2 + y^2 - 10x - 16y + 40 = 0$ *i ima središte na pravcu* $p \ldots 8x - 3y - 2 = 0$.

Rješenje: Odredimo najprije koordinate sjecišta zadanih kružnica. Oduzimanjem jednadžbi kružnica dobivamo:

$$4x + 20y - 52 = 0,$$

odnosno

$$x + 5y - 13 = 0.$$

Presjek tetive $t \ldots x + 5y - 13 = 0$ i kružnice k_1 dobivamo uvrštavajući $x = 13 - 5y$ u jednadžbu kružnice k_1:

$$(13 - 5y)^2 + y^2 - 6(13 - 5y) + 4y - 12 = 0,$$

otkuda kvadriranjem i reduciranjem dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$26y^2 - 96y + 79 = 0.$$

Njezina rješenja su $y_1 = \dfrac{48-5\sqrt{10}}{26}$ i $y_2 = \dfrac{48+5\sqrt{10}}{26}$. Pripadne vrijednosti nepoznanice x su:

$$x_1 = 13 - 5y_1 = \frac{98+25\sqrt{10}}{26},$$
$$x_2 = 13 - 5y_2 = \frac{98-25\sqrt{10}}{26}.$$

Stoga su sjecišta zadanih kružnica $S_1 = (\dfrac{98+25\sqrt{10}}{26}, \dfrac{48-5\sqrt{10}}{26})$ i $S_2 = (\dfrac{98-25\sqrt{10}}{26}, \dfrac{48+5\sqrt{10}}{26})$.

Tetiva t zajednička je tetiva objiju zadanih kružnica, ali i tražene kružnice (jer krajnje točke S_1 i S_2 tetive t, prema uvjetu zadatka, pripadaju i traženoj kružnici). To znači da pravac povučen polovištem P dužine S_1S_2 okomito na pravac t prolazi središtem tražene kružnice. Odredimo njegovu jednadžbu.

Polovište P dužine S_1S_2 ima koordinate $P = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\dfrac{49}{13}, \dfrac{24}{13}\right)$. Koeficijent smjera tetive t je $k_t = -\dfrac{1}{5}$, pa je koeficijent smjera pravca koji prolazi točkom P okomito na tetivu t $k_q = -\dfrac{1}{k_t} = 5$. Njegova je jednadžba:

$$q \ldots y - \frac{24}{13} = 5 \cdot (x - \frac{49}{13}),$$

odnosno

$$q \ldots 65x - 13y - 221 = 0.$$

Sjecište pravaca p i q je središte tražene kružnice. Dobivamo ga rješavajući sustav:

$$8x - 3y - 2 = 0$$
$$65x - 13y - 221 = 0$$

Odavde je $x = 7$, $y = 18$, pa je središte tražene kružnice točka $S = (7, 18)$.

Kvadrat udaljenosti točaka S i S_1 jednak je kvadratu polumjera r tražene kružnice:

$$r^2 = \left(7 - \frac{98+25\sqrt{10}}{26}\right)^2 + \left(18 - \frac{48-5\sqrt{10}}{26}\right)^2 = 281.$$

Tako je konačno jednadžba tražene kružnice

$$(x-7)^2 + (y-18)^2 = 281.$$

1192. *Neka su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe $Ax^2 + Bx + C = 0$. Izrazite zbroj $x_1^3 + x_2^3$ pomoću A, B i C.*

Rješenje: Prema Vièteovim formulama vrijede jednakosti:

$$x_1 + x_2 = -\frac{B}{A},$$
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A}.$$

Tako je

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3(x_1 \cdot x_2)\cdot(x_1 + x_2) = \left(-\frac{B}{A}\right)^3 - 3\cdot\frac{C}{A}\cdot\left(-\frac{B}{A}\right) = -\frac{B^3}{A^3} + 3\cdot\frac{BC}{A^2} = \frac{3ABC - B^3}{A^3}.$$

1193. *Zadani su pravokutnik $ABCD$ i polovišta P_1, P_2, P_3 i P_4 četiriju njegovih stranica. Ako lik $P_1P_2P_3P_4$ ima opseg 40 cm i površinu 96 cm^2, izračunajte duljinu kraće stranice pravokutnika $ABCD$.*

Rješenje: Označimo duljine stranica pravokutnika s a i b. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a \geq b$. Lik $P_1P_2P_3P_4$ je romb čija stranica ima duljinu $d = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$. Iz podatka da je opseg lika $P_1P_2P_3P_4$ jednak 40 cm slijedi:

$$4d = 40 \text{ cm},$$

odnosno

$$d = 10 \text{ cm},$$

pa uvrštavanjem izraza za d i kvadriranjem dobivamo:

$$a^2 + b^2 = 400.$$

Nadalje, $P_1P_2P_3P_4$ – kao romb – je četverokut s okomitim dijagonalama i te dijagonale imaju duljinu a i b. Stoga je površina romba $P_1P_2P_3P_4$ jednaka:

$$P = \frac{1}{2}ab,$$

pa kad u tu jednakost uvrstimo $P = 96$ dobivamo

$$ab = 192.$$

Tako smo dobili sustav jednadžbi

$$a^2 + b^2 = 400$$
$$ab = 192$$

kojega najlakše i najbrže možemo riješiti ovako: Pomnožimo drugu jednadžbu s 2, pa je najprije pribrojimo, a potom oduzmimo od prve jednadžbe. Dobivamo:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 784$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = 16,$$

odnosno

$$(a + b)^2 = 784$$
$$(a - b)^2 = 16.$$

Zbog pretpostavke $a \geq b$ smijemo korjenovati obje navedene jednadžbe, te dobiti:

$$a + b = 28$$
$$a - b = 4$$

Oduzimanjem tih jednadžbi odmah dobivamo $b = 12$ cm i to je tražena duljina kraće stranice pravokutnika.

1194. *U grupi od* 11 *studenata ima točno* 6 *studenata matematike, a ostali studenti su studenti fizike. Između njih treba sastaviti* 7*-članu ekipu tako da većina članova ekipe budu studenti matematike. Na koliko se različitih načina to može učiniti?*

Rješenje: Razlikovat ćemo tri moguća slučaja:

1.) Ekipu tvore točno 4 studenta matematike i 3 studenta fizike. 4 studenta matematike možemo izabrati na $\binom{6}{4}$ načina, a 3 studenta fizike na $\binom{5}{3}$ načina. Prema načelu umnoška u ovom je slučaju traženi broj $\binom{6}{4} \cdot \binom{5}{3}$.

2.) Ekipu tvori točno 5 studenata matematike i 2 studenta fizike. 5 studenata matematike možemo izabrati na $\binom{6}{5}$ načina, a 2 studenta fizike na $\binom{5}{2}$ načina. Prema načelu umnoška u ovom je slučaju traženi broj $\binom{6}{5} \cdot \binom{5}{2}$.

3.) Ekipu tvore svi studenti matematike i točno jedan student fizike. Njega možemo izabrati na 5 različitih načina.

Primijenjujući načelo zbroja zaključujemo da je traženi broj jednak

$$\binom{6}{4} \cdot \binom{5}{3} + \binom{6}{5} \cdot \binom{5}{2} + 5 = 215.$$

1195. *Izračunajte zbroj kvadrata svih vrijednosti realnoga parametra $k \in$ **R** za koje kvadratna jednadžba*

$$x^2 - (2k + 4)x + k + 8 = 0$$

ima točno jedno dvostruko realno rješenje.

Rješenje: Navedena jednadžba će imati točno jedno dvostruko realno rješenje ako i samo ako njezina diskriminanta bude jednaka nuli, tj. ako i samo ako vrijedi jednakost

$$(2k + 4)^2 - 4 \cdot (k + 8) = 0.$$

Odavde je

$$k^2 + 3k - 4 = 0.$$

Sva realna rješenja te jednadžbe su $k_1 = -4$ i $k_2 = 1$. Zbroj njihovih kvadrata jednak je $(-4)^2 + 1^2 = 16 + 1 = 17$.

1196. *Izračunajte* $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ *ako je* $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{2006}$.

Rješenje: Svaki pribrojnik u brojniku i nazivniku izraza čiju vrijednost tražimo podijelimo s $\cos x$. To smijemo učiniti jer iz uvjeta zadatka $\operatorname{tg} x$ postoji (i jednak je $\frac{1}{2006}$), što znači da je $\cos x \neq 0$. Tako dobivamo da je traženi izraz jednak:

$$\frac{\operatorname{tg} x+1}{\operatorname{tg} x-1}=\frac{\frac{1}{2006}+1}{\frac{1}{2006}-1}=\frac{\frac{2007}{2006}}{\frac{-2005}{2006}}=-\frac{2007}{2005}.$$

1197. *Ako je* $f(x) = \sin x$, *te* x, y *realni brojevi takvi da je* $(x - y) \in [-\pi, \pi]$, *izrazite vrijednost izraza*

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right)\sqrt{1-\left(f\left(\frac{x-y}{2}\right)\right)^2}$$

pomoću $f(x)$ *i* $f(y)$.

Rješenje: Koristeći činjenicu da za svaki kut $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ vrijedi nejednakost $\cos \alpha \geq 0$, te formule pretvorbe umnoška trigonometrijskih funkcija u njigov zbroj imamo redom:

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right)\sqrt{1-\left(f\left(\frac{x-y}{2}\right)\right)^2}=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sqrt{1-\left(\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right)^2}=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right)}=$$
$$=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sqrt{\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right)}=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\sin\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right)+\sin\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right)\right]$$
$$=\sin x+\sin y=f(x)+f(y)$$

1198. *Izračunajte umnožak svih realnih rješenja jednadžbe*

$$\frac{1}{\log_x 8}+\frac{1}{\log_{2x} 8}+\frac{1}{\log_{4x} 8}=2.$$

Rješenje: Koristit ćemo identitet $\dfrac{1}{\log_b a} = \log_a b$. Tako zadanu jednadžbu možemo zapisati u obliku:

$$\log_8 x + \log_8(2x) + \log_8(4x) = 2,$$

a odavde je

$$\log_8(8x^3) = 2.$$

Antilogaritmiranjem dobivamo:

$$8x^3 = 8^2,$$

odnosno

$$x^3 = 8.$$

Jedino realno rješenje ove jednadžbe je $x = 2$. Stoga je traženi umnožak jednak 2.

1199. *Odredite apsolutnu vrijednost kompleksnoga broja* $z = \dfrac{2005 i^{2007} + 2007 i^{2005}}{2006 i^{2006}}$.

Rješenje: Najprije izračunajmo navedene potencije broja i. Zbog identiteta $2005 = 4 \cdot 501 + 1$ imamo:

$i^{2005} = i^{4 \cdot 501 + 1} = i^{4 \cdot 501} \cdot i^1 = (i^4)^{501} \cdot i = 1^{501} \cdot i = i$;
$i^{2006} = i^{2005} \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$;
$i^{2007} = i^{2006} \cdot i = (-1) \cdot i = -i$.

Tako imamo:

$$|z| = \left|\frac{2005 i^{2007} + 2007 i^{2005}}{2006 i^{2006}}\right| = \left|\frac{2005(-i) + 2007 i}{2006 \cdot (-1)}\right| = \left|\frac{2i}{-2006}\right| = \left|\frac{i}{-1003}\right| = \frac{|i|}{|-1003|} = \frac{1}{1003}.$$

1200. *Duljine dviju stranica šiljastokutnoga trokuta su* $a = 28$ *i* $b = 26$. *Za kut nasuprot trećoj stranici vrijedi jednakost* $\operatorname{tg} \gamma = \dfrac{12}{5}$. *Izračunajte duljinu stranice* c.

Rješenje: Iz podatka $\operatorname{tg} \gamma = \dfrac{12}{5}$ slijedi $\cos \gamma = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2}} = \pm \dfrac{1}{\frac{13}{5}} = \pm \dfrac{5}{13}$. Budući da je trokut šiljastokutan, kosinusi njegovih kutova su strogo pozitivni realni brojevi, pa je jedino moguće $\cos \gamma = \dfrac{5}{13}$. Tako primjenom kosinusova poučka dobivamo $c^2 = 28^2 + 26^2 - 2 \cdot 28 \cdot 26 \cdot \dfrac{5}{13} = 900$. Odavde je $c = 30$ i to je tražena duljina treće stranice.

1201. *Izračunajte vrijednost sljedećeg brojevnog izraza:*

$$\left[2^{-1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\sqrt{(-7)^2} + 18\frac{2}{5} + 10.6\right) : 8^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{2}{3}}.$$

Rješenje: Imamo redom:

$$\left[2^{-1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\sqrt{(-7)^2} + 18\frac{2}{5} + 10.6\right) : 8^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{2}{3}} = \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\sqrt{49} + 18.4 + 10.6\right) : (2^3)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{2}{3}} =$$

$$= \left[\frac{1}{2} \cdot \left(3^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (7 + 29) : 2^1\right]^{\frac{2}{3}} = \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 36 : 2\right]^{\frac{2}{3}} = (27)^{\frac{2}{3}} = \left(3^3\right)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$$

1202. *Neka je* $T = (x, y)$ *ortogonalna projekcija točke* $M = (-1, 4)$ *na pravac određen točkama* $A = (-2, -1)$ *i* $B = (4, 3)$. *Izračunajte zbroj* $x + y$.

Rješenje: Odredimo najprije jednadžbu pravca kroz točke A i B. koeficijent smjera pravca kroz točke A i B:

$$y-(-1)=\frac{3-(-1)}{4-(-2)}\cdot\left[x-(-2)\right]$$
$$y+1=\frac{2}{3}(x+2)$$
$$y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$$

Koeficijent smjera pravca koji prolazi točkom M okomito na pravac kroz točke A i B jednak je $-\frac{1}{\frac{2}{3}}=-\frac{3}{2}$, pa je njegova jednadžba:

$$y-4=-\frac{3}{2}[x-(-1)],$$

tj.

$$y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}.$$

Tako iz sustava

$$y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$$
$$y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$$

dobivamo $x = 1$, $y = 1$. Stoga je traženi zbroj jednak $x + y = 2$.

1203. *Odredite ukupan broj različitih cjelobrojnih rješenja nejednadžbe*

$$(x^2+x-6)\cdot\sqrt{6+5x-x^2}\geq 0.$$

Rješenje: Razlikovat ćemo točno dva slučaja:
1.)

$$x^2+x-6\geq 0$$
$$6+5x-x^2\geq 0$$

(druga je nejednadžba nužna radi osiguravanja definiranosti drugoga korijena). Iz prve nejednadžbe slijedi $x \in \langle -\infty, -3] \cup [2, +\infty\rangle$, a iz druge $x \in [-1, 6]$. Presjek skupova $\langle -\infty, -3] \cup [2, +\infty\rangle$ i $[-1, 6]$ je skup $[2, 6]$ i u tom se skupu nalazi točno 5 različitih cijelih brojeva: to su 2, 3, 4, 5, 6.

2.) $6 + 5x - x^2 = 0$, $x^2 + x - 6 \in \mathbf{R}$

Ovaj slučaj zapravo znači da je izraz pod korijenom jednak 0, pa vrijednost izraza izvan korijena može biti bilo koji realan broj. Iz $6 + 5x - x^2 = 0$ slijedi $x_1 = -1$, $x_2 = 6$ i to su još dva cjelobrojna rješenja polazne nejednadžbe.

Prema tome, sva različita cjelobrojna rješenja polazne nejednadžbe su: –1, 2, 3, 4, 5 i 6. Ima ih ukupno 6, pa je traženi broj jednak 6.

1204. *Izračunajte vrijednost izraza* $\dfrac{\sin 32°+5\cos 58°}{2\cos 58°}$.

Rješenje: U identitet sin(90° – α) = cos α uvrstimo α = 58°, pa dobijemo jednakost sin 32° = cos 58°. Tako je tražena vrijednost zadanoga izraza jednaka

$$\frac{\sin 32° + 5\cos 58°}{2\cos 58°} = \frac{\cos 58° + 5\cos 58°}{2\cos 58°} = \frac{6\cos 58°}{2\cos 58°} = 3 .$$

1205. *Odredite ukupan broj racionalnih članova u razvoju binoma* $(\sqrt{5} + \sqrt[5]{2})^{2007}$.

Rješenje: Opći član navedenoga razvoja je oblika $\binom{2007}{k}(\sqrt{5})^k(\sqrt[5]{2})^{2007-k} = \binom{2007}{k}\cdot 5^{\frac{k}{2}} \cdot 2^{\frac{2007-k}{5}}$. Racionalne članove dobit ćemo za sve one prirodne brojeve k za koje 2 | k, odnosno 5 | 2007 – k. Iz prvoga uvjeta zaključujemo da broj k mora biti paran, a iz drugog slijedi k = 2, 7, 12, 17, …. Tako zapravo tražimo ukupan broj članova rastućega aritmetičkoga niza 2, 12, 22, 32, … najviše jednakih 2007 (jer, prema binomnom poučku, k ne može biti veći od eksponenta razvoja, tj. od 2007). Opći član toga niza je

$$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 10 = 10n - 8,$$

pa iz nejednadžbe

$$10n - 8 \leq 2007$$

slijedi $n \leq 201.7$. Ukupan broj svih prirodnih brojeva najviše jednakih 201.7 jednak je 201 i to su: 1, 2, 3, …, 199, 200, 201.

1206. *Pojednostavnite izraz* $\left(\frac{x^3+1}{x^4-x} - \frac{1}{x-1}\right) : \frac{x+1}{x-x^3}$ *za* $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Rješenje: Imamo redom:

$$\left(\frac{x^3+1}{x^4-x} - \frac{1}{x-1}\right) : \frac{x+1}{x-x^3} = \left(\frac{x^3+1}{x\cdot(x^3-1)} - \frac{1}{x-1}\right)\cdot\frac{x-x^3}{x+1} = \left(\frac{x^3+1}{x\cdot(x-1)(x^2+x+1)} - \frac{1}{x-1}\right)\cdot\frac{x(1-x^2)}{x+1} =$$

$$= \left(\frac{x^3+1-x\cdot(x^2+x+1)}{x\cdot(x-1)(x^2+x+1)}\right)\cdot\frac{x(1-x)(1+x)}{x+1} = \frac{1-x^2-x}{x\cdot(x-1)(x^2+x+1)}\cdot x\cdot(1-x) = -\frac{1-x^2-x}{x\cdot(1-x)(x^2+x+1)}\cdot x\cdot(1-x) =$$

$$= \frac{x^2+x-1}{x^2+x+1}$$

1207. *Izračunajte zbroj svih realnih rješenja jednadžbe* $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-2} \cdot \left(\frac{16}{9}\right)^{x^2-3x+1} = \frac{64}{27}$.

Rješenje: Zadanu jednadžbu najprije transformiramo na sljedeći način:

$$\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}\right]^{x-2} \cdot \left[\left(\frac{4}{3}\right)^{2}\right]^{x^2-3x+1} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{2x^2-6x+2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{2x^2-7x+4} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3}$$

Izjednačavanjem eksponenata odavde dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$2x^2 - 7x + 1 = 0$$

zbroj čijih je rješenja – prema Vièteovim formulama – jednak $\frac{7}{2}$. Ta rješenja su realna jer je diskriminanta dobivene jednadžbe $D = 7^2 - 4 \cdot 2 = 41 > 0$, a budući da nema nikakvih dodatnih uvjeta na vrijednost nepoznanice x, spomenuta rješenja su ujedno i sva rješenja polazne jednadžbe. Stoga je traženi zbroj jednak $\frac{7}{2}$.

1208. *Neka je* $a = \frac{1}{\log_{13} 12}$ *i* $b = \frac{1}{\log_{12} 13}$. *Izračunajte vrijednost izraza* $144^a - 169^b$.

Rješenje: Koristit ćemo identitet $\frac{1}{\log_b a} = \log_a b$. Iz tih je razloga $a = \log_{12}13$, $b = \log_{13}12$. Tako je:

$$144^a = 144^{\log_{12} 13} = (12^2)^{\log_{12} 13} = 12^{2\log_{12} 13} = 12^{\log_{12}(13^2)} = 13^2 = 169$$
$$169^b = 169^{\log_{13} 12} = (13^2)^{\log_{13} 12} = 13^{2\log_{13} 12} = 13^{\log_{13}(12^2)} = 12^2 = 144$$

pa je tražena vrijednost izraza jednaka $169 - 144 = 25$.

1209. *Za koje je vrijednosti parametra* $m \in \mathbf{R}$ *prirodno područje definicije funkcije* $f(x) = \frac{1}{mx^2 + (m-8)x + 1}$ *skup* $\mathbf{R}$?

Rješenje: Prirodno područje definicije zadane funkcije će biti skup $\mathbf{R}$ ako i samo ako polinom $p(x) = mx^2 + (m - 8)x + 1$ nema realnih nultočaka, odnosno ako i samo ako istodobno vrijede nejednakosti $m \neq 0$ i $(m - 8)^2 - 4m < 0$. Potonja nejednakost je ekvivalentna nejednadžbi $m^2 - 20m + 64 < 0$, a odavde je $m \in \langle 4, 16\rangle$. Budući da za svaki realan broj iz segmenta $\langle 4, 16\rangle$ vrijedi nejednakost $m \neq 0$, traženi skup svih vrijednosti parametra m je otvoreni interval $\langle 4, 16\rangle$.

1210. *Na stranicama AC i BC trokuta ABC odabrane su točke D i E takve da spojnica DE prolazi težištem trokuta ABC usporedno sa stranicom AB. Izračunajte omjer površina likova CDE i ABDE.*

Rješenje: Budući da traženi omjer očito ne ovisi o *vrsti* trokuta, radi jednostavnosti možemo uzeti da je ABC jednakostraničan trokut čija stranica ima duljinu a. Tada je težište T trokuta ABC ujedno i ortocentar toga trokuta. Neka je N nožište visine povučene iz vrha C na stranicu AB. Trokutovi ANC i DTC su slični, pa vrijedi razmjer:

$$|AN| : |NC| = |DT| : |TC|.$$

Duljina dužine AN jednaka je polovini duljine osnovice $|AB|$, tj. $\frac{a}{2}$. Duljina dužine NC jednaka je duljini visine jednakostraničnoga trokuta ABC, tj. $\frac{a}{2}\sqrt{3}$. Prema poučku o težištu trokuta, duljina dužine TC iznosi $\frac{2}{3}$ duljine težišnice iz vrha C, a kako se ta težišnica i visina iz vrha C podudaraju, zaključujemo da je duljina dužine TC jednaka $\frac{2}{3}$ duljine visine iz vrha C, tj. $\frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$. Tako iz razmjera

$$|AN| : |NC| = |DT| : |TC|$$

slijedi

$$|DT| = \frac{|AN| \cdot |TC|}{|NC|} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{a}{3}.$$

Površina trokuta *CDE* jednaka je

$$P_{CDE} = \frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |TC| = |DT| \cdot |TC| = \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3}\sqrt{3} = \frac{a^2}{9}\sqrt{3},$$

pa je omjer površina trokutova *CDE* i *ABC* jednak

$$P_{CDE} : P_{ABC} = \frac{a^2}{9}\sqrt{3} : \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 4 : 9,$$

a odavde je

$$P_{ABC} = \frac{9}{4} \cdot P_{CDE}.$$

Stoga je traženi omjer površina trokuta *CDE* i trapeza *ABED* jednak

$$P_{CDE} : P_{ABED} = P_{CDE} : (P_{ABC} - P_{CDE}) = P_{CDE} : (\frac{9}{4} \cdot P_{CDE} - P_{CDE}) = P_{CDE} : (\frac{5}{4} \cdot P_{CDE}) = 1 : \frac{5}{4} = 4 : 5.$$

1211. *Ako se plašt uspravnog kružnog valjka razvije u ravninu, dobije se kvadrat površine* 100 cm^2. *Izračunajte obujam toga valjka.*

<u>Rješenje:</u> Neka je r polumjer osnovke, a v visina valjka. Činjenica da se razvijanjem plašta zadanoga valjka u ravninu dobije kvadrat znači da je opseg osnovke valjka (koji iznosi $2r\pi$) jednak njegovoj visini v i da je površina toga plašta jednaka $P = v^2$. Tako iz $P = 100$ cm^2 slijedi $v^2 = 100$, tj. $v = 10$ cm. Nadalje, iz $v = 2r\pi$ slijedi $r = \frac{5}{\pi}$ cm, pa je konačno $V = r^2\pi \cdot v = \frac{250}{\pi}$ cm^3.

1212. *Riješite jednadžbu*: $\log_3(\log_3 x) = \log_9(5 - 4\log_3 x)$.

<u>Rješenje:</u> Prelaskom na bazu 3 dobivamo:

$$\log_9(5-4\log_3 x) = \frac{\log_3(5-4\log_3 x)}{\log_3 9} = \frac{\log_3(5-4\log_3 x)}{\log_3(3^2)} = \frac{\log_3(5-4\log_3 x)}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}\log_3(5-4\log_3 x) = \log_3\sqrt{5-4\log_3 x}.$$

Tako antilogaritmiranjem i kvadriranjem slijedi

$$\log_3^2 x + 4\log_3 x - 5 = 0,$$

a ta jednadžba – uz zamjenu $t = \log_3 x$ – prelazi u kvadratnu jednadžbu

$$t^2 + 4t - 5 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su $t_1 = -5$ i $t_2 = 1$. Rješenje $t_1 = -5$ ne dolazi u obzir jer za $\log_3 x = -5$ nije definirana lijeva strana polazne jednadžbe ($\log_3(-5)$ ne postoji). Stoga je jedino moguće $\log_3 x = 1$, a odavde je $x = 3$.

1213. *Svježe šljive sadrže* 80% *vode*, *a suhe* 12%. *Koliko se kg suhih šljiva može dobiti od* 220 kg *svježih*?

Rješenje: Neka je x tražena masa. U 220 kg svježih šljiva ima $(1-\frac{80}{100})\cdot 220 = 44$ kg suhe tvari. Ta 44 kg suhe tvari trebaju tvoriti 100% – 12% = 88% mase suhih šljiva. Stoga iz jednadžbe $\frac{88}{100}\cdot x = 44$ slijedi $x = 50$, pa se iz 220 kg svježih šljiva može dobiti 50 kg suhih.

1214. *Zbroj prva tri člana strogo rastućega geometrijskoga niza jednak je* 52, *a umnožak prvoga i trećega člana jednak je* 144. *Odredite zbroj prvih dvaju članova toga niza.*

Rješenje: Prema osnovnom svojstvu geometrijskoga niza, umnožak prvoga i trećega člana jednak je kvadratu drugoga člana niza. Tako iz $g_2^2 = 144$ slijedi $g_2 = 12$ ($g_2 = -12$ ne dolazi u obzir jer tada niz ne bi bio strogo rastući). Stoga možemo postaviti sustav:

$$g_1 + g_3 = 52 - 12$$
$$g_1 \cdot g_3 = 144$$

Odavde je $g_1 = 4$ ($g_1 = 36$ ne dolazi u obzir jer je tada niz strogo padajući), pa je traženi zbroj jednak $g_1 + g_2 = 4 + 12 = 16$.

1215. *Odredite ukupan broj različitih rješenja jednadžbe* $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$ *koja pripadaju segmentu* $[2006\pi, 2007\pi]$.

Rješenje: Zbog identiteta $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ polazna jednadžba je ekvivalentna jednadžbi

$$\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$$

koja, uz zamjenu $t = \cos x$, prelazi u kvadratnu jednadžbu

$$t^2 - t - 2 = 0.$$

Sva rješenja te jednadžbe su $t_1 = -1$ i $t_2 = 2$. Rješenje $t_2 = 2$ ne dolazi u obzir zbog $|\cos x| = |t| \leq 1$, pa je jedino moguće $\cos x = -1$. Odavde je $x_k = (2k + 1)\cdot\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Stoga u zadanom segmentu imamo samo jedno rješenje polazne jednadžbe, i to je $x_{1003} = 2007\pi$.

1216. *Neka su* x_1 *i* x_2 *rješenja jednadžbe* $x^2 + (2m - 1)x + 2m - 5 = 0$, *pri čemu je* $m \in \mathbf{R}$ *realan parametar*. *Odredite najmanju vrijednost zbroja kvadrata tih rješenja*.

Rješenje: Prema Vièteovim formulama je

$$x_1 + x_2 = -(2m - 1)$$
$$x_1 \cdot x_2 = 2m - 5$$

Tako je

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2\cdot(x_1\cdot x_2) = [-(2m-1)]^2 - 2\cdot(2m-5) = 4m^2 - 8m + 11.$$

Najmanja vrijednost ovoga izraza jednaka je $\frac{4\cdot 4\cdot 11 - (-8)^2}{4\cdot 4} = 7$ i to je tražena vrijednost.

1217. *Duljine stranica trokuta su* 7 cm, $5\sqrt{2}$ cm *i* 13 cm. *Izračunajte veličinu najvećega kuta toga trokuta.*

Rješenje: Najveći kut nalazi se nasuprot najduljoj stranici trokuta, a to je stranica duljine 13 cm. Označimo li traženi kut s α, onda prema kosinusovu poučku slijedi

$$\cos\alpha = \frac{7^2 + (5\sqrt{2})^2 - 13^2}{2 \cdot 7 \cdot 5\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Odavde je $\alpha = \frac{3}{4}\pi = 135°$ i to je tražena veličina kuta.

1218. *Odredite ukupan broj različitih šesteroznamenkastih prirodnih brojeva čije znamenke pripadaju skupu* $[6] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *i koji imaju barem dvije jednake znamenke.*

Rješenje: Šesteroznamenkastih prirodnih brojeva čije znamenke pripadaju skupu [6] ima ukupno 6^6 (na svako od 6 mjesta može doći bilo koja od navedenih 6 znamenaka). Među njima ima 6! onih čije su sve znamenke međusobno različite (zapravo su to sve permutacije skupa [6]). Stoga je traženi broj jednak $6^6 - 6! = 45\,936$.

1219. *Odredite apsolutnu vrijednost kompleksnoga broja* $z = \left(\frac{3+i}{2-i}\right)^{2007}$.

Rješenje: Imamo redom:

$$|z| = \left|\left(\frac{3+i}{2-i}\right)^{2007}\right| = \left|\left(\frac{3+i}{2-i}\right)\right|^{2007} = \left(\frac{|3+i|}{|2-i|}\right)^{2007} = \left(\frac{\sqrt{3^2+1^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}\right)^{2007} = \left(\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}\right)^{2007} = (\sqrt{2})^{2007} = 2^{\frac{2007}{2}}.$$

1220. *Odredite visinu najvećega mogućega valjka upisanoga u sferu polumjera* $\sqrt{3}$ cm.

Rješenje: Neka je r polumjer osnovke, a v visina toga valjka. Poprečni presjek sfere i valjka ravninom okomitom na ravninu osnovke valjka je pravokutnik kojemu je duljina $2r$, širina v, a polumjer opisane kružnice $r = \sqrt{3}$ cm. Budući da je jedan promjer te kružnice ujedno i dijagonala pravokutnika, prema Pitagorinu je poučku

$$(2r)^2 + v^2 = (2\sqrt{3})^2,$$

odnosno

$$4r^2 + v^2 = 12.$$

Stoga se polazni zadatak svodi na rješavanje sljedećega optimizacijskoga problema:

$$\max.\ V = r^2\pi \cdot v$$

p.u.

$$4r^2 + v^2 = 12.$$

Iz uvjetne jednakosti je $r^2 = 3 - \frac{1}{4}v^2$, pa se navedeni optimizacijski problem svodi na određivanje ekstrema sljedeće realne funkcije jedne realne varijable:

$$V = V(v) = (3 - \frac{1}{4}v^2) \cdot \pi \cdot v.$$

Prva i druga derivacija te funkcije (po varijabli v) su

$$V'(v) = 3 \cdot \pi \cdot (1 - \frac{1}{4} v^2),$$
$$V''(v) = -\frac{3}{2}\pi v.$$

Izjednačavanjem prve derivacije s 0 dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$1 - \frac{1}{4} v^2 = 0$$

čije je jedino strogo pozitivno rješenje $v = 2$ ($v = –2$ ne dolazi u obzir jer visina valjka ne može biti negativan realan broj). Očito je $V''(v) < 0$, pa je $v = 2$ uistinu maksimum funkcije $V(v)$. Dakle, tražena visina valjka iznosi $v = 2$ cm.

1221. *Pojednostavnite izraz*: $\left(\frac{2+3a}{2a-4}+\frac{3a-1}{a-2}\right)\cdot\left(\frac{15a-12}{3a^2b}-\frac{3}{ab}\right)\cdot\frac{a\sqrt{b^3}}{9}$.

Rješenje: Imamo redom:

$$\left(\frac{2+3a}{2a-4}+\frac{3a-1}{a-2}\right)\cdot\left(\frac{15a-12}{3a^2b}-\frac{3}{ab}\right)\cdot\frac{a\sqrt{b^3}}{9}=\left(\frac{2+3a}{2(a-2)}+\frac{3a-1}{a-2}\right)\cdot\left(\frac{15a-12-9a}{3a^2b}\right)\cdot\frac{ab\sqrt{b}}{9}=$$
$$=\left(\frac{2+3a+2\cdot(3a-1)}{2(a-2)}\right)\cdot\left(\frac{6a-12}{3a^2b}\right)\cdot\frac{ab\sqrt{b}}{9}=\left(\frac{9a}{2(a-2)}\right)\cdot\left(\frac{6(a-2)}{3a^2b}\right)\cdot\frac{ab\sqrt{b}}{9}=\sqrt{b}$$

1222. *Izračunajte*: $\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left[\left(\frac{2^{-1}}{3^{-2}}\right)^{-1}:\left(\frac{2}{3^{-1}}\right)^{-3}\right]$.

Rješenje: Primijenjujući pravila za potenciranje potencije, te množenje i dijeljenje potencija jednakih baza redom dobivamo:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left[\left(\frac{2^{-1}}{3^{-2}}\right)^{-1}:\left(\frac{2}{3^{-1}}\right)^{-3}\right]=\frac{1}{2^5}\cdot\left(\frac{2^1}{3^2}:\frac{2^{-3}}{3^3}\right)=\frac{1}{2^5}\cdot\frac{2^4}{3^{-1}}=\frac{1}{2^5}\cdot 3^1\cdot 2^4=\frac{3}{2^1}=\frac{3}{2}.$$

1223. *Odredite $f(x)$ ako za svaki realan broj $x \in \mathbf{R}$ vrijedi* $f\left(\frac{2+x}{4}\right)=2x$.

Rješenje: Stavimo $t = \frac{2+x}{4}$. Odavde je $x = 4t – 2$, pa je $f(t) = 2 \cdot (4t – 2) = 8t – 4$. Preostaje nam preimenovati nezavisnu varijablu: $f(x) = 8x – 4$.

1224. *Odredite jednadžbu pravca koji prolazi sjecištima krivulja $y = 2x^2 – 4x + 2$ i $y = x^2 + x – – 4$.*
Rješenje: Sjecišta zadanih krivulja određujemo rješavajući sustav jednadžbi

$$y = 2x^2 - 4x + 2$$
$$y = x^2 + x - 4$$

Izjednačavanjem desnih strana tih jednadžbi dobivamo kvadratnu jednadžbu $x^2 – 5x + 6 = 0$ čija su sva realna rješenja $x_1 = 2$ i $x_2 = 3$. Uvrštavanjem svake od dobivenih vrijednosti u bilo koju jednadžbu polaznoga sustava dobivamo $y_1 = 2$, $y_2 = 8$. Stoga su sjecišta zadanih krivulja točke $S_1 = (2, 2)$ i $S_2 = (3, 8)$. Jednadžba pravca kroz te točke je

$$p\ldots\ y-2=\frac{8-2}{3-2}\cdot(x-2),$$

odnosno $p\ldots\ y = 6x - 10$.

1225. *Odredite strogo pozitivan realan broj x takav da apsolutna vrijednost kompleksnoga broja* $z=\frac{x\sqrt{3}+\sqrt{2}\cdot i}{\sqrt{3}-\sqrt{2}\cdot i}$ *bude jednaka* $\sqrt{10}$.

Rješenje: Najprije imamo:

$$|z|=\left|\frac{x\sqrt{3}+\sqrt{2}\cdot i}{\sqrt{3}-\sqrt{2}\cdot i}\right|=\frac{\left|x\sqrt{3}+\sqrt{2}\cdot i\right|}{\left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\cdot i\right|}=\frac{\sqrt{\left(x\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{3x^2+2}}{\sqrt{3+2}}=\frac{\sqrt{3x^2+2}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{3x^2+2}{5}}\ .$$

Tako iz jednadžbe

$$\sqrt{\frac{3x^2+2}{5}}=\sqrt{10}$$

kvadriranjem slijedi $3x^2 + 2 = 50$, odnosno $x^2 = 16$. Jedino strogo pozitivno realno rješenje ove jednadžbe je $x = 4$ i to je traženi broj.

1227. *Polinom* $p(x)$ *drugog stupnja ima dvostruku realnu nultočku i zadovoljava jednakost* $p(-1) = p(2)$. *Odredite njegovu dvostruku nultočku.*

Rješenje: Pokažimo da ako polinom $p(x)$ ima dvostruku realnu nultočku x_0 i ako za neka dva realna broja a i b, $a \neq b$, vrijedi $p(a) = p(b)$, onda je nužno $x_0 = \frac{1}{2}(a + b)$. Iz činjenice da $p(x)$ ima dvostruku realnu nultočku x_0 slijedi da $p(x)$ možemo zapisati u obliku

$$p(x) = A\cdot(x - x_0)^2,$$

za neki realan broj $A \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, a odavde je

$$p(x) = Ax^2 - 2\cdot A\cdot x\cdot x_0 + x_0^2 .$$

Stoga je

$$p(a) = Aa^2 - 2\cdot A\cdot a\cdot x_0 + x_0^2 ,$$
$$p(b) = Ab^2 - 2\cdot A\cdot b\cdot x_0 + x_0^2 .$$

Prema pretpostavci je $p(a) = p(b)$, pa izjednačavanjem desnih strana dobivamo jednadžbu

$$2(a - b)\cdot x_0 = a^2 - b^2.$$

Opet prema pretpostavci vrijedi nejednakost $a \neq b$, tj. $a - b \neq 0$, pa dijeljenjem gornje jednakosti s $2\cdot(a - b)$ dobivamo

$$x_0=\frac{1}{2}(a+b),$$

što smo i htjeli pokazati. Preostaje dokazanu tvrdnju primijeniti na konkretan zadatak u kojemu je $a = -1$, $b = 2$ (ili obratno). Dobiva se da je tražena dvostruka realna nultočka jednaka

$$x_0 = \frac{1}{2}[(-1) + 2) = \frac{1}{2}.$$

1228. *Riješite nejednadžbu*: $\dfrac{6-2x}{1-2x} > \dfrac{4x-3}{2x-1}$.

Rješenje: Zadanu nejednadžbu možemo zapisati u obliku

$$\frac{2x-6}{2x-1} - \frac{4x-3}{2x-1} > 0,$$

odnosno, nakon oduzimanja i reduciranja, u obliku

$$\frac{2x+3}{2x-1} < 0.$$

Zbog znaka stroge nejednakosti navedena je nejednadžba ekvivalentna nejednadžbi $(2x + 3)(2x - 1) < 0$, a odavde je $x \in \langle -\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \rangle$. Dakle, skup svih realnih rješenja polazne nejednadžbe je $\langle -\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \rangle$.

1229. *Odredite ukupan broj svih realnih rješenja jednadžbe* $|7 - |x - 5|| = 2 + |x|$ *koja pripadaju intervalu* $[5, +\infty\rangle$.

Rješenje: Za $x \in [5, +\infty\rangle$ vrijede jednakosti $|x - 5| = x - 5$ i $|x| = x$, što znači da je $|7 - |x - 5|| = |7 - (x - 5)| = |12 - x|$, te $2 + |x| = 2 + x$. Stoga zadanu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$|12 - x| = 2 + x.$$

Za $x \in [5, 12]$ je $|12 - x| = 12 - x$, pa se na tom segmentu jednadžba svodi na linearnu jednadžbu $12 - x = 2 + x$ čije je rješenje $x = 5$. Budući da je relacija $5 \in [5, 12]$ istinita, $x = 5$ je rješenje polazne jednadžbe koje pripada intervalu $[5, +\infty\rangle$.
Za $x \in [12, +\infty\rangle$ je $|12 - x| = -(12 - x) = x - 12$, pa se na tom intervalu jednadžba svodi na linearnu jednadžbu $x - 12 = 2 + x$ koja nema rješenja.
Zaključimo: Polazna jednadžba na zadanom intervalu ima točno jedno rješenje: $x = 5$.

1230. *Odredite ukupan broj znamenaka u heksadecimalnom zapisu broja* 2007^{2007}.

Rješenje: Neka je $x = 2007^{2007}$. Tada je $\log_{16} x = \dfrac{\log(2007^{2007})}{\log 16} = \dfrac{2007 \cdot \log 2007}{\log 16} \approx 5504.6$, pa je $x \approx 16^{5504.6}$.
Odatle zaključujemo da navedeni zapis ima ukupno $5504 + 1 = 5505$ znamenaka (počinjemo sa znamenkom uz potenciju 16^{5504}, nastavljamo sa znamenkom uz potenciju 16^{5503} itd. sve dok ne dođemo do znamenke uz potenciju 16^0).

1231. *Duljine stranica trokuta su* 11 cm, 12 cm *i* 13 cm. *Svaki vrh trokuta je središte kružnice koja izvana dodiruje preostale dvije kružnice. Odredite polumjer najveće od tih triju kružnica.*

Rješenje: Označimo tražene polumjere s r_1, r_2 i r_3. Iz podatka da se kružnice međusobno dodiruju izvana slijedi da je zbrojevi dvaju po dvaju polumjera moraju biti jednaki duljinama stranica trokuta, tj. moraju vrijediti jednakosti

$$r_1 + r_2 = 11$$
$$r_2 + r_3 = 12$$
$$r_3 + r_1 = 13$$

(navedene polumjere uvijek možemo označiti tako da vrijede navedene jednakosti). Zbrajanjem tih triju jednakosti dobivamo $r_1 + r_2 + r_3 = 18$. Traženi polumjer dobit ćemo kad od dobivene jednakosti oduzmemo najmanji od triju navedenih zbrojeva, tj. zbroj $r_1 + r_2 = 11$, tj. traženi je polumjer jednak $r_3 = (r_1 + r_2 + r_3) - (r_1 + r_2) = 18 - 11 = 7$ cm.

1232. *Odredite polumjer kružnice koja prolazi žarištima hiperbole* $x^2 - 3y^2 = 12$ *i točkom* $A = (0, 8)$.

Rješenje: Jednadžbu hiperbole najprije zapišimo u obliku $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$, otkuda očitavamo $a^2 = 12$, $b^2 = 4$, pa je $e^2 = a^2 + b^2 = 16$, tj. žarišta zadane hiperbole su točke $F_1 = (-4, 0)$ i $F_2 = (4, 0)$. Trokut F_1F_2A je jednakokračan jer su mu duljine dviju stranica $b = |AF_1| = |AF_2| = \sqrt{4^2+8^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$. Duljina visine na osnovicu F_1F_2 jednaka je $v = 8$, a duljina osnovice $a = |F_1F_2| = 8$. Traženi polumjer R možemo izračunati iz opće formule za polumjer bilo kojemu trokutu opisane kružnice

$$R=\frac{abc}{4P}$$

pri čemu ćemo uvažiti da je $b = c$ (jer je trokut jednakokračan) i $P = \frac{1}{2}av$ (opet formula koja vrijedi za bilo koji trokut). Tako dobivamo:

$$R=\frac{ab^2}{4\frac{av}{2}}=\frac{b^2}{2v}=\frac{80}{2\cdot 8}=5.$$

1233. *Odredite ukupan broj članova konačnoga padajućega geometrijskoga niza realnih brojeva ako zbroj svih njegovih članova iznosi* $\frac{63}{8}$, *umnožak prvih triju članova* 8, *a razlika prvih dvaju članova* 2.

Rješenje: Označimo s g_1 prvi član, a s q količnik toga niza. Podatak da je umnožak prvih triju članova niza jednak 8 možemo zapisati u obliku jednadžbe

$$g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 = 8.$$

No, kvadrat svakoga člana geometrijskoga niza (osim prvoga) jednak je umnošku tom članu neposredno susjednih članova niza, pa vrijedi jednakost:

$$g_2^2 = g_1 \cdot g_3.$$

Stoga je umnožak $g_1 \cdot g_2 \cdot g_3$ jednak $(g_1 \cdot g_3) \cdot g_2 = g_2^2 \cdot g_2 = g_2^3$. Tako smo dobili kubnu jednadžbu $g_2^3 = 8$ čije je jedino realno rješenje $g_2 = 2$. Nadalje, iz podatka da razlika prvih dvaju članova iznosi 2 i upravo određenoga podatka da je $g_2 = 2$ dobivamo jednadžbu

$$g_1 - 2 = 2,$$

a odavde je $g_1 = 4$. Prema tome, riječ je o geometrijskom nizu 4, 2, … čiji je količnik jednak $q=\frac{g_2}{g_1}=\frac{1}{2}$.

Preostaje nam u formulu za zbroj prvih n članova geometrijskoga niza

$$S_n = g_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$$

uvrstiti $S_n = \frac{63}{8}$, $g_1 = 4$ i $q = \frac{1}{2}$. Dobit ćemo eksponencijalnu jednadžbu $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{64}$ koja je ekvivalentna eksponencijalnoj jednadžbi $2^n = 64$, tj. $2^n = 2^6$. Odatle je $n = 6$ i to je traženi ukupan broj članova.

1234. *Zbroj prvoga i sedmoga člana aritmetičkoga niza jednak je* 2007. *Odredite zbroj trećega i petoga člana toga niza.*

Rješenje: Najprije ćemo pokazati da ako je $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ aritmetički niz, a $p, q, r, s \in \mathbf{N}$ bilo koja (ne nužno različita) prirodna broja, onda jednakost $p + q = r + s$ povlači jednakost $a_p + a_q = a_r + a_s$. Neka su a_1 prvi član, a d razlika aritmetičkoga niza $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Imamo redom:

$a_p + a_q = [a_1 + (p - 1) \cdot d] + [a_1 + (q - 1) \cdot d] = a_1 + a_1 + (p + q - 1 - 1) \cdot d =$ (zbog pretpostavke $p + q = r + s$) $=$
$= a_1 + a_1 + (r + s - 1 - 1) \cdot d = [a_1 + (r - 1) \cdot d] + [a_1 + (s - 1) \cdot d] = a_r + a_s$.

(Lako se vidi da vrijedi i obratna implikacija, tj. da jednakost $a_p + a_q = a_r + a_s$ povlači jednakost $p + q = r + s$). Primijenimo sada upravo dokazanu jednakost na naš zadatak. U našem je slučaju zadan podatak $a_1 + a_7 = 2007$, a tražimo $a_3 + a_5$. Budući da očito vrijedi jednakost $3 + 5 = 1 + 7$, to iz dokazane tvrdnje izravno slijedi $a_3 + a_5 = a_1 + a_7 = 2007$.

1235. *Umnožak prvoga i jedanaestoga člana geometrijskoga niza jednak je* 2007. *Odredite umnožak petoga i sedmoga člana toga niza.*

Rješenje: Najprije ćemo pokazati da ako je $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ geometrijski niz, a $k, l, r, s \in \mathbf{N}$ bilo koja (ne nužno različita) prirodna broja, onda jednakost $k + l = r + s$ povlači jednakost $g_k \cdot g_l = g_r \cdot g_s$. Neka su g_1 prvi član, a q količnik geometrijskoga niza $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Imamo redom:

$g_k \cdot g_l = (g_1 \cdot q^{k-1}) \cdot (g_1 \cdot q^{l-1}) = g_1 \cdot g_1 \cdot q^{k+l-1-1} =$ (zbog pretpostavke $k + l = r + s$) $= g_1 \cdot g_1 \cdot q^{r+s-1-1} =$
$= (g_1 \cdot q^{r-1}) \cdot (g_1 \cdot q^{s-1}) = g_r \cdot g_s$.

(Lako se vidi da vrijedi i obratna implikacija, tj. da jednakost $g_k \cdot g_l = g_r \cdot g_s$ povlači jednakost $k + l = r + s$). Primijenimo sada upravo dokazanu jednakost na naš zadatak. U našem je slučaju zadan podatak $g_1 \cdot g_{11} = 2007$, a tražimo $g_5 \cdot g_7$. Budući da očito vrijedi jednakost $5 + 7 = 1 + 11$, to iz dokazane tvrdnje izravno slijedi $g_5 \cdot g_7 = g_1 \cdot g_{11} = 2007$.

1236. *Nad katetom AC pravokutnoga trokuta ABC konstruirana je kružnica koja hipotenuzu AB trokuta ABC siječe u točki D. Ako je* $|BD| = 8$ *i* $|BC| = 4\sqrt{6}$, *izračunajte duljinu dužine AD.*

Rješenje: Spojimo vrh pravoga kuta C s točkom D. Prema Talesovu poučku, kut $\angle CDA$ je pravi kut (jer je dužina AC, prema pretpostavci, promjer kružnice), pa je trokut CDA pravokutan. No, tada je i trokut CDB pravokutan (s pravim kutom kod vrha D), pa prema Pitagorinu poučku vrijedi jednakost:

$$|BC|^2 = |CD|^2 + |BD|^2.$$

Uvrštavanjem $|BC| = 4\sqrt{6}$ i $|BD| = 8$ dobivamo $|CD|^2 = 32$. Nadalje, također prema Pitagorinu poučku vrijede jednakosti:

$$|AC|^2 = |CD|^2 + |AD|^2,$$
$$|AC|^2 = |AC|^2 - |BC|^2 = (|AD| + |BD|)^2 - |BC|^2$$

Lijeve strane ovih jednakosti su jednake, pa takve moraju biti i desne. Odatle slijedi:

$$|CD|^2 + |AD|^2 = (|AD| + |BD|)^2 - |BC|^2,$$

odnosno

$$|AD| = \frac{|CD|^2 + |BC|^2 - |BD|^2}{2|BD|} = \frac{32+96-64}{2 \cdot 8} = 4.$$

Stoga je tražena duljina tetive $|AD|$ jednaka 4.

1237. *Pravac kroz točku $T = (a, a)$ i središte S kružnice $x^2 + y^2 = a^2$ ($a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$) siječe tu kružnicu u točki $P \in \overline{ST}$. U kojem omjeru, računajući od točke S, točka P dijeli dužinu $\overline{ST}$?*

Rješenje: Zadana kružnica je kružnica sa središtem u ishodištu i polumjerom $|a|$. Dakle, $S = (0, 0)$, pa pravac ST očito ima jednadžbu $y = x$. Udaljenost točaka S i T jednaka je $|a|\sqrt{2}$ pa je traženi omjer jednak:

$$\overline{SP} : \overline{PT} = \overline{SP} : (\overline{ST} - \overline{SP}) = |a| : (|a|\sqrt{2} - |a|) = 1 : (\sqrt{2} - 1).$$

1238. *Odredite ukupan broj svih prirodnih brojeva $m \in \mathbf{N}$ za koje realna rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe (po x) $mx^2 + 5x + m - 7 = 0$ zadovoljavaju nejednakost $x_1 \cdot x_2 \leq -1$.*

Rješenje: Oba rješenja zadane jednadžbe će biti realni brojevi ako i samo ako diskriminanta te jednadžbe bude nenegativna, tj. ako i samo ako vrijedi nejednakost $5^2 - 4 \cdot m \cdot (m - 7) \geq 0$, a odavde je $4m^2 - 28m - 25 \leq 0$. Nadalje, prema Vièteovim formulama je $x_1 \cdot x_2 = \frac{m-7}{m} = 1 - \frac{7}{m}$, pa iz uvjeta $x_1 \cdot x_2 \leq -1$ slijedi $\frac{7}{m} \geq 2$, odnosno $m \leq \frac{7}{2}$. Tri su prirodna broja manja od $\frac{7}{2}$: 1, 2 i 3, a lako se vidi da sva tri navedena broja zadovoljavaju uvjet $4m^2 - 28m - 25 \leq 0$. Stoga postoje točno tri prirodna broja (1, 2 i 3) za koje zadana jednadžba ima realna rješenja čiji je umnožak najviše jednak –1.

1239. *Odredite ukupan broj svih cjelobrojnih rješenja nejednadžbe $x + 1 > \sqrt{5 - x}$.*

Rješenje: Na vrijednost nepoznanice x najprije postavljamo dva uvjeta: $5 - x \geq 0$ (kako bi drugi korijen na desnoj strani nejednadžbe bio definiran) i $x + 1 \geq 0$ (jer je drugi korijen – kao desna strana nejednadžbe – uvijek nenegativan realan broj, pa takva mora biti i lijeva strana nejednadžbe). Iz ovih dviju nejednadžbi dobivamo $x \in [-1, 5]$. Za te x–eve smijemo kvadrirati polaznu nejednadžbu i dobiti

$$(x + 1)^2 > 5 - x,$$

odnosno

$$x^2 + 3x - 4 > 0.$$

Skup svih realnih rješenja ove nejednadžbe je $\mathbf{R} \setminus [-4, 1]$. Stoga je skup svih rješenja polazne nejednadžbe presjek skupova $[-1, 5]$ i $\mathbf{R} \setminus [-4, 1]$, a to je interval $\langle 1, 5]$. Tom intervalu pripadaju točno četiri cijela broja: 2, 3, 4 i 5, pa polazna jednadžba ima točno 4 cjelobrojna rješenja.

1240. *Pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$, gdje su $a, b \in \mathbf{R}$ realni parametri, polinomom $g(x) = x^2 - x - 2$ dobije se ostatak $r(x) = 7x - 7$. Izračunajte $a + 2b$.*

Rješenje: Prema poučku o dijeljenju polinoma s ostatkom možemo zapisati:

$$x^3 + 2x^2 + ax + b = q(x) \cdot (x^2 - x - 2) + 7x - 7.$$

Ova jednakost mora vrijediti za svaki realan broj $x \in \mathbf{R}$, pa posebno mora vrijediti i za nultočke polinoma $g(x)$, a to su sva realna rješenja jednadžbe $x^2 - x - 2 = 0$. Odavde je $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, pa u gornju jednakost najprije zasebno uvrstimo $x = -1$, a potom zasebno $x = 2$. Tako dobivamo:

$$(-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 + a \cdot (-1) + b = q(x) \cdot [(-1)^2 - (-1) - 2] + 7 \cdot (-1) - 7,$$
$$2^3 + 2 \cdot 2^2 + a \cdot 2 + b = q(x) \cdot [2^2 - 2 - 2] + 7 \cdot 2 - 7,$$

odnosno sljedeći sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice

$$-a + b = -15$$
$$2a + b = -9\ .$$

Zbrajanjem dobivenih jednadžbi dobivamo traženu vrijednost $a + 2b = -24$.

1241. *Odredite skup svih realnih rješenja nejednadžbe* $\log_{\frac{\sqrt[2007]{2008}}{2006}}(x^2 - 4) \geq \log_{\frac{\sqrt[2007]{2008}}{2006}}(3x)$.

Rješenje: Najprije moramo postaviti uvjete na vrijednost nepoznanice x tako da obje strane nejednadžbe uopće budu definirane. Ti uvjeti su:

$$x^2 - 4 > 0$$
$$3x > 0$$

a iz njih se lako dobiva $x \in \langle 2, +\infty\rangle$. Baza logaritma je očito realan broj iz intervala $\langle 0, 1\rangle$, pa se antilogaritmiranjem nejednadžbe mijenja znak nejednakosti. Stoga se dobiva nejednadžba $x^2 - 4 \leq 3x$, odnosno nejednadžba $x^2 - 3x - 4 \leq 0$. Skup svih realnih rješenja te nejednadžbe je segment $[-1, 4]$. Tako je skup svih realnih rješenja polazne nejednadžbe presjek skupova $\langle 2, +\infty\rangle$ i $[-1, 4]$, a to je interval $\langle 2, 4]$.

1242. *Jednakokračni pravokutni trokutovi ABC i ABD pripadaju dvjema međusobno okomitim ravninama. Ako duljina zajedničke hipotenuze AB tih trokutova iznosi* $2\sqrt{2}$ cm, *izračunajte oplošje tijela ABCD.*

Rješenje: Tijelo ABCD je trostrana piramida. Za njezinu osnovku možemo uzeti trokut ABC i njegova je površina $B = \frac{1}{4}\left|\overline{AB}\right|^2 = 2$ cm^2. Tolika je i površina strane ABD piramide $ABCD$. Odredimo duljinu dužine CD. U tu svrhu povucimo okomice iz vrhova C i D na zajedničku hipotenuzu AB. Budući da su trokutovi ABC i ABD sukladni, te okomice će se sjeći u istoj točki, pa označimo tu točku s E. Trokut CED je pravokutan s pravim kutom kod vrha E jer su ravnine trokutova ABC i ABD, prema pretpostavci, međusobno okomite. Primjenom Pitagorina poučka dobivamo:

$$|CD|^2 = |CE|^2 + |DE|^2 = \left(\frac{1}{2}|AB|\right)^2 + \left(\frac{1}{2}|AB|\right)^2,$$

tj. $|CD| = 2$ cm. Budući da su i duljine stranica AC, BC i BD također jednake 2 cm, zaključujemo da su preostale dvije strane piramide jednakostranični trokutovi s osnovicom duljine 2 cm. Površina svakoga od njih je $\sqrt{3}$ cm^2. Stoga je traženo oplošje jednako

$$O = 2 + 2 + \sqrt{3} + \sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3}\ \text{cm}^2.$$

1243. *Odredite ukupan broj međusobno različitih realnih rješenja jednadžbe*

$$\frac{1}{\sqrt{x - 2\pi}}\left(1 + \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x}\right)\left(1 + \operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sin x}\right) = \frac{2}{\sqrt{x - 2\pi}}$$

na segmentu $[\frac{\pi}{2}, 8\pi]$.

Rješenje: Najprije primijetimo da za $x \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi]$ zadana jednadžba nije definirana jer drugi korijen u nazivniku razlomaka s obje strane jednadžbe nije definiran. Stoga je zapravo rješavamo na intervalu $\langle 2\pi, 8\pi]$. Najprije je transformirajmo na sljedeći način:

$$\frac{1}{\sqrt{x-2\pi}}\left(1+\operatorname{ctg} x+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\operatorname{ctg} x-\frac{1}{\sin x}\right)=\frac{2}{\sqrt{x-2\pi}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x-2\pi}}\left(1+\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\frac{2}{\sqrt{x-2\pi}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x-2\pi}}\left(\frac{\sin x+\cos x+1}{\sin x}\right)\left(\frac{\sin x+\cos x-1}{\sin x}\right)=\frac{2}{\sqrt{x-2\pi}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x-2\pi}}\cdot\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\sin^2 x}=\frac{2}{\sqrt{x-2\pi}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x-2\pi}}\cdot\frac{\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x-1}{\sin^2 x}=\frac{2}{\sqrt{x-2\pi}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x-2\pi}}\cdot\frac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x}=\frac{2}{\sqrt{x-2\pi}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x-2\pi}}\cdot\frac{2\cos x}{\sin x}=\frac{2}{\sqrt{x-2\pi}}$$

$$\frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{x-2\pi}}=\frac{1}{\sqrt{x-2\pi}}$$

$$\frac{\operatorname{ctg} x-1}{\sqrt{x-2\pi}}=0$$

Odatle slijedi da su sva rješenja polazne jednadžbe u intervalu $\langle 2\pi, 8\pi]$ ona rješenja jednadžbe ctg $x = 1$ koja pripadaju tom intervalu. Ta rješenja su određena formulom $x_k = \frac{\pi}{4}\cdot(4k+1)$, pri čemu je $k \in \mathbf{Z}$, pa dobivamo nejednadžbu (po k)

$$2\pi < \frac{\pi}{4}\cdot(4k+1) \le 8\pi,$$

tj. nejednadžbu

$$\frac{7}{4} < k \le \frac{31}{4}.$$

Postoji ukupno 6 cijelih brojeva koji zadovoljavaju ovu nejednadžbu: to su 2, 3, 4, 5, 6 i 7. Za svaki od tih brojeva dobivamo drugu vrijednost rješenja x_k, pa zaključujemo da polazna jednadžba na zadanom segmentu ima točno 6 međusobno različitih realnih rješenja.

1244. *Odredite skup svih realnih rješenja nejednadžbe* $\log_{x+3}(x^2-5) \ge \log_{x+3}(3|x|-1)$.

Rješenje: Odredimo najprije za koje vrijednosti broja x nejednadžba uopće ima smisla. Imamo ukupno 4 različita uvjeta:

$$x+3>0$$
$$x+3\neq 1$$
$$x^2-5>0$$
$$3|x|-1>0$$

Iz $x^2 - 5 > 0$ slijedi $|x| > \sqrt{5}$, pa je $3|x| - 1 > 3\cdot\sqrt{5} - 1 > 0$. Stoga valjanost trećega uvjeta povlači valjanost četvrtoga, pa četvrti uvjet smijemo zanemariti. Nadalje, iz $x + 3 = 1$ slijedi $x = -2$, a taj broj ne zadovoljava nejednakost $x^2 - 5 > 0$. Stoga valjanost trećega uvjeta povlači i valjanost drugoga uvjeta. Tako smo navedeni sustav sveli na sustav nejednadžbi

$$\begin{aligned} x + 3 &> 0 \\ x^2 - 5 &> 0 \end{aligned}$$

čiji je skup svih realnih rješenja $\langle -3, -\sqrt{5}\,\rangle \cup \langle \sqrt{5}, +\infty\rangle$. Stoga ćemo polaznu jednadžbu razmatrati na dva različita intervala:

1.) $x \in \langle -3, -\sqrt{5}\,\rangle$

Za sve x iz navedenoga skupa vrijedi jednakost $|x| = -x$, te nejednakost $0 < x + 3 < 1$. Stoga pri antilogaritmiranju moramo promijeniti znak nejednakosti. Tako ćemo dobiti nejednadžbu:

$$x^2 - 5 \leq -3x - 1,$$

odnosno nejednadžbu

$$x^2 + 3x - 4 \leq 0$$

čiji je skup svih realnih rješenja $[-4, 1]$. Stoga je u ovom slučaju skup rješenja polazne nejednadžbe presjek skupova $\langle -3, -\sqrt{5}\,\rangle$ i $[-4, 1]$, a budući da je očito $\langle -3, -\sqrt{5}\,\rangle \subset [-4, 1]$, taj je presjek skup $\langle -3, -\sqrt{5}\,\rangle$.

2.) $x \in \langle \sqrt{5}, +\infty\rangle$

Za sve x iz navedenoga skupa vrijedi jednakost $|x| = x$, te nejednakosti $x + 3 > 1$. Stoga pri antilogaritmiranju ne trebamo promijeniti znak nejednakosti. Tako ćemo dobiti nejednadžbu:

$$x^2 - 5 \geq 3x - 1,$$

odnosno nejednadžbu

$$x^2 - 3x - 4 \geq 0$$

čiji je skup svih realnih rješenja $\langle -\infty, -1] \cup [4, +\infty\rangle$. Stoga je u ovom slučaju skup rješenja polazne nejednadžbe presjek skupova $\langle \sqrt{5}, +\infty\rangle$ i $\langle -\infty, -1] \cup [4, +\infty\rangle$, a to je skup $[4, +\infty\rangle$.

Tako konačno zaključujemo da je traženi skup svih realnih rješenja polazne nejednadžbe $\langle -3, -\sqrt{5}\,\rangle \cup [4, +\infty\rangle$.

1245. *U kuglu polumjera R treba upisati uspravni kružni stožac tako da površina njegova plašta bude što veća. Izrazite najveću moguću vrijednost te površine kao funkciju varijable R.*

Rješenje: Neka su r polumjer osnovke, v visina, a s duljina izvodnice upisanoga stošca. Promotrimo presjek zadane kugle i stošca ravninom okomitom na ravninu osnovke stošca. Riječ je o jednakokračnom trokutu čija osnovica ima duljinu $2r$, visina duljinu v, a krak duljinu s, dok je polumjer tom trokutu opisane kružnice jednak R. Prema rješenju zadatka 1232. vrijedi jednakost

$$R = \frac{s^2}{2v}$$

iz koje je

$$s^2 = 2R \cdot v,$$

a tu jednakost zbog jednakosti

$$v^2 = s^2 - r^2$$

možemo zapisati u obliku

$$s^4 = 4R^2 \cdot (s^2 - r^2),$$

a odavde je

$$r^2 = s^2 - \frac{s^4}{4R^2}.$$

Tako je kvadrat površine plašta upisanoga stošca jednak

$$P^2 = r^2\pi^2 \cdot s^2 = (s^2 - \frac{s^4}{4R^2}) \cdot \pi^2 \cdot s^2.$$

Uz oznaku $x = s^2$ slijedi da tražimo maksimum funkcije

$$f(x) = (x - \frac{x^2}{4R^2}) \cdot \pi^2 \cdot x.$$

Odmah uočimo: kad izračunamo vrijednost maksimuma promatrane funkcije, tražena će površina plašta stošca biti jednaka kvadratnom korijenu iz toga maksimuma. Prva derivacija te funkcije je

$$f'(x) = \frac{\pi^2}{4R^2} \cdot x \cdot (8R^2 - 3x),$$

pa izjednačavanjem s nulom slijedi $x_0 = \frac{8}{3}R^2$. Druga derivacija funkcije $f(x)$ je

$$f''(x) = \frac{\pi^2}{2R^2} \cdot (4R^2 - 3x),$$

pa je očito $f''(x_0) < 0$, tj. u točki x_0 funkcija $f(x)$ ima lokalni maksimum. Vrijednost toga maksimuma je

$$f(x_0) = \frac{64}{27}R^4 \cdot \pi^2,$$

pa slijedi da je tražena najveća moguća površina plašta stošca jednaka

$$P_{max} = \sqrt{f(x_0)} = \frac{8}{3\sqrt{3}}R^2\pi = \frac{8\sqrt{3}}{9}R^2\pi.$$

1246. *Razlika duljina dviju stranica trokuta je* 5 cm. *Treća stranica trokuta duga je* 7 cm, *a kut nasuprot njoj iznosi* 60°. *Izračunajte opseg toga trokuta.*

Rješenje: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su stranice trokuta označene tako da vrijede jednakosti $a - b = 5$, $c = 7$. Uz standardne oznake u trokutu tada mora biti $\gamma = 60°$. Kvadriramo li jednakost $a - b = 5$, dobit ćemo:

$$a^2 - 2ab + b^2 = 25,$$

dok prema kosinusovu poučku vrijedi

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

odnosno, nakon uvrštavanja podataka,

$$a^2 + b^2 - ab = 49.$$

Oduzimanjem prve dobivene jednadžbe od druge dobivamo $ab = 24$. Tako sada imamo:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a^2 - 2ab + b^2) + 4ab = 25 + 4 \cdot 24 = 121,$$

a odavde je $a + b = 11$. Stoga je traženi opseg trokuta jednak

$$O = a + b + c = 11 + 7 = 18 \text{ cm}.$$

1247. *Izračunajte umnožak svih cjelobrojnih vrijednosti realnoga parametra* $m \in \mathbf{R}$ *za koje realna rješenja* x_1 *i* x_2 *kvadratne jednadžbe* $x^2 + 2(m + 1)x + m = 0$ *zadovoljavaju nejednakost* $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \geq 8$.

Rješenje: Zadana kvadratna jednadžba će imati dva (ne nužno različita) realna rješenja ako i samo ako njezina diskriminanta bude nenegativna, tj. ako i samo ako vrijedi nejednakost

$$[-2(m + 1)]^2 - 4m \geq 0,$$

a odavde je

$$m^2 + m + 1 \geq 0,$$

tj.

$$(m + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq 0,$$

a ta je jednakost očito istinita za bilo koju vrijednost realnoga parametra m. Prema tome, zadana jednadžba uvijek ima dva realna rješenja (neovisno o vrijednosti parametra m). Odredimo sada skup svih realnih vrijednosti parametra m za koje realna rješenja zadane jednadžbe zadovoljavaju zadanu nejednakost. Budući da je

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 x_2)}{(x_1 x_2)^2},$$

a prema Vièteovim formulama vrijede jednakosti

$$x_1 + x_2 = -2(m + 1)$$
$$x_1 x_2 = m,$$

zadana je nejednakost ekvivalentna nejednadžbi

$$\frac{\left[-2(m+1)\right]^2 - 2m}{m^2} \geq 8.$$

Lako se vidi da za $m = 0$ dobivamo nepotpunu kvadratnu jednadžbu $x^2 + 2x = 0$ čija rješenja $x_1 = 0$ i $x_2 = -2$ ne zadovoljavaju navedenu nejednakosti. Stoga gornju jednadžbu smijemo pomnožiti s m^2, pa ćemo nakon kvadriranja i reduciranja dobiti kvadratnu nejednadžbu

$$2m^2 - 3m - 2 \leq 0.$$

Skup svih realnih rješenja te nejednadžbe je segment $[-\frac{1}{2}, 2]$. U tom segmentu nalaze se točno tri cijela broja: 0, 1 i 2. Već smo vidjeli da $m = 0$ ne dolazi u obzir, pa su jedine moguće cjelobrojne vrijednosti parametra m takve da vrijedi navedena nejednakost $m = 1$ i $m = 2$. Stoga je traženi umnožak jednak 2.

1248. *Izračunajte zbroj svih realnih rješenja jednadžbe* $(7+4\sqrt{3})^{x^2-3x+3}+(7-4\sqrt{3})^{x^2-3x+3}=14$

Rješenje: Najprije primijetimo da vrijedi jednakost

$$(7 + 4\sqrt{3}) \cdot (7 - 4\sqrt{3}) = 49 - 48 = 1,$$

a odavde je

$$7 - 4\sqrt{3} = \frac{1}{7+4\sqrt{3}},$$

otkuda slijedi

$$(7-4\sqrt{3})^{x^2-3x+3} = \frac{1}{(7+4\sqrt{3})^{x^2-3x+3}}.$$

Stoga možemo uvesti zamjenu $t = (7+4\sqrt{3})^{x^2-3x+3}$, pa dobivamo jednadžbu

$$t + \frac{1}{t} = 14$$

koja je ekvivalentna kvadratnoj jednadžbi

$$t^2 - 14t + 1 = 0.$$

Sva realna rješenja te jednadžbe su $t_1 = 7 - 4\sqrt{3}$ i $t_2 = 7 + 4\sqrt{3}$. Tako najprije iz eksponencijalne jednadžbe

$$(7+4\sqrt{3})^{x^2-3x+3} = 7 - 4\sqrt{3} = (7 + 4\sqrt{3})^{-1}$$

izjednačavanjem eksponenata dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - 3x + 4 = 0$$

koja nema realnih rješenja. Potom iz eksponencijalne jednadžbe

$$(7+4\sqrt{3})^{x^2-3x+3} = 7 + 4\sqrt{3} = (7 + 4\sqrt{3})^1$$

izjednačavanjem eksponenata dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

koja ima točno dva realna rješenja: $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$. Stoga je traženi zbroj jednak $1 + 2 = 3$.

1249. *Odredite ukupan broj međusobno različitih vrijednosti realnoga parametra* $k \in \mathbf{R}$ *za koje jednadžba* $kx^2 - 2(k + 3)x + k + 4 = 0$ *ima točno jedno rješenje.*

Rješenje: Zadana jednadžba će imati točno jedno realno rješenje ako i samo ako njezina diskriminanta bude jednaka nuli, tj. ako i samo ako vrijedi jednakost

$$[2(k + 3)]^2 - 4 \cdot k \cdot (k + 4) = 0.$$

Kvadriranjem i reduciranjem dobivamo linearnu jednadžbu

$$8k + 36 = 0$$

čije je jedino realno rješenje $k = -\frac{9}{2}$. Stoga je traženi broj jednak 1.

1250. *Odredite skup svih vrijednosti realnoga parametra* $m \in \mathbf{R}$ *za koje kvadratna jednadžba* $(m + 1)x^2 - (2m - 1)x + m - 3 = 0$ *ima dva različita strogo pozitivna realna rješenja.*

Rješenje: Zadana jednadžba će imati dva različita realna rješenja ako i samo ako istovremeno vrijede sljedeće nejednakosti:

$$m + 1 \neq 0$$
$$(2m - 1)^2 - 4 \cdot (m + 1)(m - 3) > 0.$$

Nadalje, ta će rješenja biti strogo pozitivna ako i samo ako istovremeno vrijede sljedeće nejednakosti:

$$\frac{2m-1}{m+1} > 0$$
$$\frac{m-3}{m+1} > 0.$$

(obje nejednakosti slijede iz Vièteovih formula i činjenice da su dva realna broja strogo pozitivna ako i samo ako su im zbroj i umnožak strogo pozitivni realni brojevi) Tako smo dobili sljedeći sustav nejednadžbi:

$$m + 1 \neq 0$$
$$(2m - 1)^2 - 4 \cdot (m + 1)(m - 3) > 0$$
$$\frac{2m-1}{m+1} > 0$$
$$\frac{m-3}{m+1} > 0.$$

Kvadriranjem i reduciranjem druge nejednadžbe dobivamo sljedeći sustav:

$$m + 1 \neq 0$$
$$4m + 13 > 0$$
$$\frac{2m-1}{m+1} > 0$$
$$\frac{m-3}{m+1} > 0.$$

Zbog prve nejednakosti, treću i četvrtu nejednadžbu smijemo pomnožiti s $(m + 1)^2$, pa gornji sustav prelazi u:

$$m + 1 \neq 0$$
$$4m + 13 > 0$$
$$(2m - 1)(m + 1) > 0$$
$$(m - 3)(m + 1) > 0.$$

Iz druge je nejednadžbe $m \in \langle -\frac{13}{4}, +\infty\rangle$, iz treće $m \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle \frac{1}{2}, +\infty\rangle$, a iz četvrte $m \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle$.

Presjek tih rješenja je skup $\langle -\frac{13}{4}, -1\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle$ i to je traženi skup.

1251. *Izračunajte vrijednost izraza* $\frac{(a-b)^2 + 3ab}{a^3 - b^3} : \frac{a^2 b + ab^2 - ab}{a^2 - b^2 + b - a}$ *za* $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *i* $b = 2a$.

Rješenje: Zadani izraz ćemo najprije pojednostavniti na sljedeći način:

$$\frac{(a-b)^2+3ab}{a^3-b^3}:\frac{a^2b+ab^2-ab}{a^2-b^2+b-a}=\frac{a^2-2ab+b^2+3ab}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}:\frac{ab\cdot(a+b-1)}{(a-b)(a+b)-(a-b)}=$$
$$=\frac{a^2+ab+b^2}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}:\frac{ab\cdot(a+b-1)}{(a-b)(a+b-1)}=\frac{1}{a-b}:\frac{ab}{a-b}=\frac{1}{a-b}\cdot\frac{a-b}{ab}=\frac{1}{ab}$$

Stoga je tražena vrijednost jednaka $\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{2}{2}=1$.

1252. *Ako je* $\log_3 7 = a$ *i* $\log_7 2 = b$, *izrazite* $\log_7 72$ *pomoću a i b.*

Rješenje: Imamo redom:

$\log_7 72 = \log_7(9\cdot 8) = \log_7 9 + \log_7 8 = \log_7(3^2) + \log_7(2^3) = 2\log_7 3 + 3\log_7 2 = \frac{2}{\log_3 7} + 3\log_7 2 = \frac{2}{a} + 3b =$
$= \frac{3ab+2}{a}$.

1253. *Neka roba je tijekom godina poskupjela točno tri puta, i to svaki put po 20%. Odredite ukupno godišnje poskupljenje (u %) te robe.*

Rješenje: Traženo ćemo poskupljenje izračunati iz jednakosti

$$R = 100\cdot\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p_2}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p_3}{100}\right)-100$$

u koju ćemo uvrstiti $p_1 = p_2 = p_3 = 20$. Tako se dobije $R = 72.8$, pa je traženo poskupljenje 72.8%.

1254. *Izračunajte vrijednost izraza* $\frac{\text{tg } 10°\cdot\sin 80°}{\sqrt{3}\cdot\text{tg } 10°-1}$.

Rješenje: Uočimo najprije da je sin 80° = sin(90° – 10°) = (adicioni poučak za sinus razlike dvaju kutova) = cos 10°, što znači da je

$$\text{tg } 10°\cdot\sin 80° = \frac{\sin 10°}{\cos 10°}\cdot\cos 10° = \sin 10°.$$

Nadalje, transformirajmo nazivnik zadanoga izraza na sljedeći način:

$$\sqrt{3}\cdot\text{tg } 10°-1=\sqrt{3}\cdot\frac{\sin 10°}{\cos 10°}-1=\frac{\sqrt{3}\sin 10°-\cos 10}{\cos 10°}=2\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10°-\frac{1}{2}\cos 10°}{\cos 10°}=2\cdot\frac{\sin 10°\cos 30°-\cos 10°\sin 30°}{\cos 10°}=$$
$$=2\cdot\frac{\sin(10°-30°)}{\cos 10°}=-2\cdot\frac{\sin 20°}{\cos 10°}=-2\cdot\frac{2\sin 10°\cos 10°}{\cos 10°}=-4\sin 10°$$

Stoga je tražena vrijednost zadanoga izraza jednaka

$$\frac{\text{tg } 10°\cdot\sin 80°}{\sqrt{3}\cdot\text{tg } 10°-1}=-\frac{\sin 10°}{4\sin 10°}=-\frac{1}{4}.$$

1255. *Pri dijeljenju polinoma* $p(x) = x^5 + 6x^3 + 12x^2 + ax + b$ *(*$a, b \in$ **R** *su realni parametri) polinomom* $q(x) = x^2 + x - 2$ *dobiva se ostatak 3. Izračunajte* $a + 3b$.

Rješenje: Prema poučku o dijeljenju polinoma s ostatkom možemo pisati:

$$x^5 + 6x^3 + 12x^2 + ax + b = q_1(x) \cdot (x^2 + x - 2) + 3,$$

gdje je $q_1(x)$ nepoznati polinom stupnja $5 - 2 = 3$. Ta jednakost mora vrijediti za svaki realan broj $x \in \mathbf{R}$, pa posebno i za sve realne nultočke polinoma $q(x)$. Njih dobivamo rješavajući jednadžbu

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

Odavde je $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Tako u gornju jednakost najprije uvrstimo $x_1 = -2$, a potom zasebno $x = 1$. Dobit ćemo:

$$\begin{gathered} -32 - 2a + b = 0 + 3 \\ 19 + a + b = 0 + 3 \end{gathered}$$

odnosno sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} -2a + b &= 35 \\ a + b &= -16 \end{aligned}$$

Oduzimanjem ovih jednadžbi slijedi $a = -17$, pa je $b = 1$. Stoga je $a + 3b = -17 + 3 \cdot 1 = -14$.

1256. *Odredite ukupan broj različitih realnih rješenja jednadžbe* $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x-2} - \sqrt{x-3}$.

Rješenje: Najprije pogledajmo za koje realne brojeve $x \in \mathbf{R}$ jednadžba uopće ima smisla. Uvjeti na vrijednost nepoznanice x su:

$$\begin{gathered} 2x - 3 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{gathered}$$

Rješavanjem ovoga sustava dobijemo $x \geq 3$. Uz taj uvjet, kvadriranjem polazne jednadžbe dobivamo:

$$2x - 3 = x - 2 - 2\sqrt{(x-2)(x-3)} + x - 3,$$

odnosno

$$\sqrt{(x-2)(x-3)} = -1.$$

Budući da je područje vrijednosti realne funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ skup $[0, +\infty\rangle$, a realan broj -1 ne pripada tom skupu, zaključujemo da posljednja jednadžba nema realnih rješenja. Odatle slijedi da i polazna jednadžba nema niti jedno realno rješenje.

1257. *Izračunajte vrijednost izraza* $\dfrac{(a^2+ab+b^2)^{-2}}{ab\sqrt{a-b}} : \dfrac{\sqrt{a^3b^2-a^2b^3}}{(a^4b-ab^4)^2}$ *za* $a = 1.05$ *i* $b = 0.05$.

Rješenje: Zadani ćemo izraz najprije pojednostavniti na sljedeći način:

$$\frac{(a^2+ab+b^2)^{-2}}{ab\sqrt{a-b}} : \frac{\sqrt{a^3b^2-a^2b^3}}{(a^4b-ab^4)^2} = \frac{1}{ab(a^2+ab+b^2)^2\sqrt{a-b}} \cdot \frac{(a^4b-ab^4)^2}{\sqrt{a^3b^2-a^2b^3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a-b}}{ab(a-b)(a^2+ab+b^2)^2} \cdot \frac{\left[ab(a^3-b^3)\right]^2}{\sqrt{a^2b^2\left(a-b\right)}} = \frac{\sqrt{a-b}}{ab(a-b)(a^2+ab+b^2)^2} \cdot \frac{\left[ab(a-b)(a^2+ab+b^2)\right]^2}{ab\sqrt{\left(a-b\right)}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a-b}}{ab(a-b)(a^2+ab+b^2)^2} \cdot \frac{a^2b^2(a-b)^2(a^2+ab+b^2)^2}{ab\sqrt{\left(a-b\right)}} = a - b$$

(Pritom smo koristili činjenicu da su zadane vrijednosti brojeva a i b strogo pozitivne.) Uvrštavanjem zadanih vrijednosti brojeva a i b dobivamo da je tražena vrijednost jednaka 1.05 – 0.05 = 1.

1258. *Izračunajte vrijednost izraza* $\dfrac{\sqrt{2^2}+\sqrt{(-2)^2}}{\sqrt{2^2}+2\sqrt{(-2)^2}}$.

Rješenje: Najprije uočimo da je $\sqrt{2^2}=\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=2$. Stoga je tražena vrijednost jednaka $\dfrac{2+2}{2+2\cdot 2}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$.

1259. *Izračunajte vrijednost izraza* $\dfrac{\sin 765°\cdot\sin 120°}{\cos 135°\cdot\operatorname{ctg}(-30)°}$.

Rješenje: Izračunajmo najprije vrijednost svakoga faktora. Imamo redom:

$\sin(765°) = \sin(720° + 45°) = \sin(45° + 2 \cdot 360°) =$ (jer je 360° period funkcije $\sin x$) $= \sin 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$\sin(120°) = 2 \cdot \sin 60° \cdot \cos 60° = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos(135°) = \cos(90° + 45°) =$ (adicioni poučak za kosinus zbroja kutova) $= -\sin 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$\operatorname{ctg}(-30°) =$ (neparnost funkcije $\operatorname{ctg} x$) $= -\operatorname{ctg} 30° = -\sqrt{3}$

Tako dobivamo da je tražena vrijednost zadanoga izraza jednaka:

$$\frac{\sin 765°\cdot\sin 120°}{\cos 135°\cdot\operatorname{ctg}(-30)°}=\frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot(-\sqrt{3})}=\frac{1}{2}.$$

1260. *Neka je* $a = \log_2 3$. *Izrazite* $\log_3 54$ *kao funkciju varijable* a.

Rješenje: Imamo redom:

$\log_3 54 = \log_3(27 \cdot 2) = \log_3 27 + \log_3 2 = \log_3(3^3) + \dfrac{1}{\log_2 3} = 3 + \dfrac{1}{a}=\dfrac{3a+1}{a}$.

1261. *Tijekom studija student treba odslušati i položiti točno* 40 *različitih kolegija. Iz svakoga od njih – kao zaključna ocjena – dobiva se točno jedna ocjena iz skupa* $S = \{2, 3, 4, 5\}$. *Na koliko različitih načina student može biti ocijenjen iz svih kolegija*? (*Dva načina ocjenjivanja svih kolegija se međusobno razlikuju ako postoji barem jedan kolegij takav da su pripadne zaključne ocjene međusobno različite*.)

Rješenje: Za svaki od 40 kolegija imamo izbor od 4 različite mogućnosti, pa je – prema načelu umnoška – traženi broj jednak $4^{40} = 2^{80}$ = 1 208 925 819 614 629 174 706 176.

1262. *Drugi*, *četvrti i osmi član nekonstantnoga aritmetičkoga niza su prva tri člana nekoga geometrijskoga niza. Odredite količnik toga geometrijskoga niza.*

Rješenje: Neka su a_1 prvi član, a $d \neq 0$ razlika nekonstantnoga aritmetičkoga niza. Tada su:

$g_1 = a_2 = a_1 + d$ – prvi član geometrijskoga niza (tj. drugi član aritmetičkoga niza);
$g_2 = a_4 = a_1 + 3d$ – drugi član geometrijskoga niza (tj. četvrti član aritmetičkoga niza);

$g_3 = a_8 = a_1 + 7d$ – treći član geometrijskoga niza (tj.osmi član aritmetičkoga niza).

Prema osnovnom svojstvu svakoga geometrijskoga niza, kvadrat drugoga člana niza treba biti jednak umnošku prvoga i trećega člana niza. To znači da mora vrijediti jednakost:

$$(a_1 + 3d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 7d),$$

a odavde je

$$2d^2 - 2ad = 0.$$

Zbog $d \neq 0$, tu jednadžbu smijemo podijeliti s $2d$ i dobiti

$$d = a.$$

Tako je prvi član geometrijskoga niza $g_1 = a + d = a + a = 2a$, a drugi $g_2 = a_1 + 3d = a + 3a = 4a$. Traženi količnik q geometrijskoga niza jednak je količniku drugoga i prvoga člana niza, tj.

$$q = \frac{g_2}{g_1} = \frac{4a}{2a} = 2\,.$$

1263. *Duljina osnovice AB trapeza ABCD iznosi* $2\sqrt{3}$ cm, *a tolika je i duljina dijagonale BD. Površina trokuta ABD iznosi* 3 cm². *Ako kut trapeza kod vrha B iznosi* 60°, *izračunajte kut kod istoga vrha u trokutu BCD.*

<u>Rješenje:</u> Odredimo najprije kut kod vrha B u trokutu ABD. Površina toga trokuta jednaka je

$$P = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|BD|\cdot\sin\angle ABD\,,$$

pa uvrštavanjem podataka $P = 3$ i $|AB| = |BD| = 2\sqrt{3}$ dobivamo:

$$\sin\angle ABD = \frac{1}{2}.$$

Odatle slijedi da je $\angle ABD = 30°$, pa je traženi kut jednak

$$\angle CBD = \angle ABC - \angle ABD = 60° - 30° = 30°.$$

1264. *Prostorna dijagonala kvadra duga je* $\sqrt{29}$ cm, *a duljine dijagonala dviju bočnih strana su* 5 cm *i* $\sqrt{13}$ cm. *Izračunajte obujam kvadra.*

<u>Rješenje:</u> Označimo duljine bridova kvadra s a, b i c. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su ti bridovi označeni tako da jedna bočna strana (to je pravokutnik) ima duljinu a, širinu c i dijagonalu dugu 5 cm, a njoj susjedna bočna strana duljinu b, širinu c i dijagonalu dugu $\sqrt{13}$ cm. Prema Pitagorinu poučku vrijede sljedeće jednakosti:

$$\begin{gathered} a^2 + b^2 + c^2 = 29 \\ a^2 + c^2 = 25 \\ b^2 + c^2 = 13 \end{gathered}$$

Zbrojimo li drugu i treću jednakost, pa od nje oduzmemo prvu, dobit ćemo $c^2 = 9$, a odavde je $c = 3$ cm. Sada iz druge jednakosti slijedi $a = 4$ cm, a iz treće $b = 2$ cm. Stoga je traženi obujam jednak $V = abc = 24$ cm³.

1265. *Odredite skup svih realnih rješenja nejednadžbe* $\log_x(x + 2) < 2$.

Rješenje: Lijeva strana nejednadžbe će biti definirana ako i samo ako istodobno vrijede nejednakosti $x > 0$, $x \neq 1$ i $x + 2 > 0$. Lako se vidi da prve dvije nejednakosti povlače treću, pa ćemo u nastavku razlikovati dva slučaja:

1.) $0 < x < 1$, tj. $x \in \langle 0, 1\rangle$
U ovom je slučaju baza logaritma strogo manja od 1, pa se antilogaritmiranjem mijenja znak nejednakosti. Tako dobivamo:

$$x^2 < x + 2,$$

tj.

$$x^2 - x - 2 < 0.$$

Skup svih realnih rješenja ove kvadratne nejednadžbe je otvoreni interval $\langle -1, 2\rangle$. Tako je skup rješenja polazne nejednadžbe u ovom slučaju presjek skupova $\langle 0, 1\rangle$ i $\langle -1, 2\rangle$, a to je očito otvoreni interval $\langle 0, 1\rangle$.

2.) $x > 1$, tj. $x \in \langle 1, +\infty\rangle$
U ovom je slučaju baza logaritma strogo veća od 1, pa se antilogaritmiranjem ne mijenja znak nejednakosti. Tako dobivamo kvadratnu nejednadžbu

$$x^2 - x - 2 > 0$$

čiji je skup svih realnih rješenja $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$. Tako je skup rješenja polazne nejednadžbe u ovom slučaju presjek skupova $\langle 1, +\infty\rangle$ i $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$, a to je očito interval $\langle 2, +\infty\rangle$.

Preostaje nam zaključiti da je traženi skup svih realnih rješenja polazne nejednadžbe jednak uniji skupova dobivenih u 1. i 2. slučaju, a to je skup $\langle 0, 1\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$.

1266. *Izračunajte zbroj svih rješenja jednadžbe* $\sin^2 x + \sin^2(120° + x) = \sin^2(120° - x)$ *na segmentu* $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

Rješenje: Polaznu jednadžbu možemo zapisati u obliku :

$$\sin^2 x = \sin^2(120° - x) - \sin^2(120° + x),$$

odnosno u obliku

$$\sin^2 x = [\sin(120° - x) + \sin(120° + x)] \cdot [\sin(120° - x) - \sin(120° + x)].$$

Koristeći formule za pretvorbe zbroja trigonometrijskih funkcija u umnožak, desnu stranu gornje jednadžbe možemo dalje transformirati na sljedeći način:

$$[\sin(120° - x) + \sin(120° + x)] \cdot [\sin(120° - x) - \sin(120° + x)] = [2 \sin 120° \cos(-x)] \cdot [2 \cos 120° \sin(-x)] =$$
$$= -(2 \sin 120° \cos 120°) \cdot (2 \sin x \cos x) = -2 \cdot \sin 240° \cdot \sin x \cdot \cos x = \sqrt{3} \cdot \sin x \cdot \cos x.$$

Zbog toga je polazna jednadžba ekvivalentna jednadžbi

$$\sin x \cdot (\sin x - \sqrt{3} \cdot \cos x) = 0,$$

pa razlikujemo dva podslučaja:

1.) $\sin x = 0$

U zadanom segmentu ova jednadžba ima točno dva rješenja: $x_1 = 0$ i $x_2 = \pi$.

2.) $\sin x - \sqrt{3} \cdot \cos x = 0$, tj. $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

U zadanom segmentu ova jednadžba ima točno jedno rješenje: to je $x_3 = \frac{\pi}{3}$.

Tako zaključujemo da je traženi zbroj jednak $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{4\pi}{3}$.

1267. *Pravilnom deveterokutu čija je površina* $P = 289.25\ \text{cm}^2$ *opisana je kružnica. Izračunajte njezin polumjer.*

Rješenje: Koristit ćemo formulu

$$P = \frac{1}{2} n r^2 \sin\frac{2\pi}{n}$$

koja opisuje vezu površine pravilnoga mnogokuta s n stranica i polumjera tom mnogokutu opisane kružnice. Iz te je formule

$$r = \sqrt{\frac{2P}{n \sin\frac{2\pi}{n}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 289.25}{9 \sin\frac{2\pi}{9}}} \approx 10\ \text{cm}.$$

1268. *Tri vrha jedne osnovke pravilnoga tetraedra spojene su s polovištem njegove visine. Izračunajte kut koji zatvaraju dvije takve spojnice.*

Rješenje: Označimo s a duljinu brida tetraedra. Tada je duljina visine tetraedra $v = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Izračunajmo najprije duljinu jedne od tih spojnica. Projicirajmo polovište visine na promatranu osnovku, pa uočimo pravokutan trokut kojemu je hipotenuza jedna spojnica, duljina jedne katete $\frac{1}{2} v = \frac{a\sqrt{6}}{6}$, a duljina druge katete polumjer osnovki opisane kružnice, tj. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Primjenom Pitagorina poučka dobivamo da je duljina jedne spojnice jednaka:

$$d = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Dvije spojnice zajedno s jednim bridom osnovke tvore jednakokračan trokut kojemu je duljina kraka jednaka d, a duljina osnovice a. Označimo li traženi kut s α, onda iz navedenoga jednakokračnoga trokuta slijedi

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{d} = \frac{a}{2d} = \frac{a}{2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

pa odatle lako dobivamo $\alpha = 90°$.

1269. *Poprečni presjek kanala dubokog* 1 m *i dugog* 200 m *je jednakokračan trapez čije su osnovice duge* 4 m *i* 2 m. *Ako se manja osnovica trapeza nalazi na dnu kanala i ako je kanal ispunjen vodom do polovice svoje dubine, izračunajte koliko najviše kubičnih metara vode još može stati u taj kanal.*

Rješenje: Kanal možemo shvatiti kao prizmu čija je osnovka jednakokračan trapez s osnovkama 4 m i 2 m, te visinom 1 m, a visina 200 m. Površina osnovke te prizme je $B = \frac{4+2}{2} \cdot 1 = 3\ \text{m}^2$, pa je obujam prizme $V = B \cdot v =$

600 m^3. Izračunajmo sada obujam vode u kanalu. Ta voda ima "oblik" manje prizme čija je osnovica jednakokračan trapez s jednom osnovicom 2 m i visinom 0.5 m, a visina ponovno 200 m. Da bismo mogli izračunati obujam vode, moramo izračunati duljinu dulje osnovice osnovke manje prizme. Označimo tu duljinu s a_1. Iz karakterističnoga trokuta polaznoga jednakokračnoga trapeza slijedi:

$$\frac{4-2}{2}:1=\frac{a_1-2}{2}:0.5,$$

odnosno

$$a_1 = 3 \text{ m}.$$

Stoga je obujam vode u kanalu jednak $V_1 = \frac{3+2}{2}\cdot 0.5\cdot 200 = 250$ m^3, pa u taj kanal može stati još najviše $V - V_1$ = 350 m^3 vode.

1270. *Osnovka uspravne prizme je romb površine* 20 cm^2. *Dijagonalni presjeci prizme okomiti na ravninu njezine osnovke imaju površinu* 30 cm^2 *i* 48 cm^2. *Izračunajte oplošje ove prizme.*

Rješenje: Neka su e i f, $e > f$, duljine dijagonala osnovke prizme, a v visina prizme. Iz podataka iskazanih u zadatku možemo postaviti sljedeći sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}ef &= 20\\ ev &= 48\\ fv &= 30\end{aligned}$$

Iz prve je jednadžbe $ef = 40$. Nadalje, množenjem druge i treće jednadžbe dobivamo

$$(ef)\cdot v^2 = 48\cdot 30$$

pa zbog $ef = 40$ slijedi

$$v^2 = 36,$$

odnosno $v = 6$ cm. Tako je $e = 8$ cm i $f = 5$ cm, pa je duljina osnovke prizme jednaka

$$a=\sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2+\left(\frac{f}{2}\right)^2}=\sqrt{4^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{16+\frac{25}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{89}.$$

Prema tome, traženo je oplošje prizme jednako

$$O = 2B + P = ef + 4\cdot a\cdot v = 40 + 12\sqrt{89}\ \text{cm}^2.$$

1271. *Neka je* $a \in \mathbf{Z}$ *najveći cijeli broj takav da za svaki realan broj* $x \in \mathbf{R}$ *vrijedi nejednakost* $\frac{x^2+ax+4}{x^2-x+4} < 2$. *Odredite ukupan broj svih međusobno različitih cjelobrojnih rješenja nejednadžbe* $\log_x \sqrt{63-2x} \le a$.

Rješenje: Najprije primijetimo da za svaki realan broj $x \in \mathbf{R}$ vrijedi nejednakost $x^2 - x + 4 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4} > 0$. Stoga prvu nejednakost smijemo pomnožiti s $x^2 - x + 4$. Nakon reduciranja dobit ćemo kvadratnu nejednadžbu

$$x^2 - (a + 2)x + 4 > 0$$

čiji skup rješenja treba biti skup **R**. Taj zahtjev će biti zadovoljen ako i samo ako vrijedi nejednakost $(a + 2)^2 - 4 \cdot 4 < 0$, odnosno nejednakost $a^2 + 4a - 12 < 0$. Skup svih realnih rješenja ove nejednadžbe (po a) je otvoreni interval $\langle -6, 2\rangle$, pa zaključujemo da je $a = 1$ najveći cijeli broj koji pripada navedenom intervalu. Tako u nastavku rješavamo nejednadžbu

$$\log_x \sqrt{63-2x} \le 1.$$

Ta nejednadžba ima smisla za $x > 0$, $x \neq 1$ i $63 - 2x > 0$, tj. za $x \in \langle 0, \frac{63}{2}\rangle \setminus \{1\}$. Formalno ćemo razlikovati dva podslučaja:

1.) $x \in \langle 0, 1\rangle$
Uobičajeno bismo sad antilogaritmirali nejednadžbu i promijenili znak nejednakosti. No, pogledajmo što zadatak traži od nas. Mi želimo odrediti ukupan broj cjelobrojnih rješenja navedene nejednadžbe. U otvorenom intervalu $\langle 0, 1\rangle$ nema cijelih brojeva, a budući da svako rješenje polazne nejednadžbe u ovom podslučaju mora biti neki podskup intervala $\langle 0, 1\rangle$, ovaj slučaj možemo zanemariti.

2.) $x \in \langle 1, \frac{63}{2}\rangle$
Uz navedeni je uvjet baza logaritma strogo veća od 1, pa se antilogaritmiranjem ne mijenja znak nejednakosti. Tako dobivamo iracionalnu nejednadžbu $\sqrt{63-2x} \le x$. Zbog pretpostavke $x \in \langle 0, \frac{63}{2}\rangle$ obje su strane te nejednadžbe strogo pozitivni realni brojevi, pa navedenu nejednadžbu smijemo kvadrirati. Nakon kvadriranja i sređivanja dobivamo kvadratnu nejednadžbu

$$x^2 + 2x - 63 \ge 0$$

čiji je skup svih realnih rješenja $\langle -\infty, -9] \cup [7, +\infty\rangle$. Stoga je u ovom podslučaju skup svih realnih rješenja polazne nejednadžbe presjek skupova $\langle 1, \frac{63}{2}\rangle$ i $\langle -\infty, -9] \cup [7, +\infty\rangle$, a to je skup $[7, \frac{63}{2}\rangle$.

Tako smo dobili da je skup svih realnih rješenja promatrane nejednadžbe $[7, \frac{63}{2}\rangle$. U tom se skupu nalazi ukupno točno 25 cijelih brojeva: 7, 8, 9, …, 29, 30, 31, pa je traženi broj jednak 25.

1272. *Neki rječnik sadrži sve peteroslovne riječi sastavljene od točno tri različita elementa skupa $\{A, B, C, D, E, F\}$. Koliko ukupno riječi ima taj rječnik?*

Rješenje: Tri slova od kojih ćemo sastaviti peteroslovnu riječ možemo odabrati na $\binom{6}{3}$ načina. Pretpostavimo da smo odabrali slova A, B i C. Razlikovat ćemo sljedeća dva podslučaja:

1) Riječ sadrži dva slova A i dva slova B, te jedno slovo C.
Ovakvih riječi ima ukupno $\binom{5}{2,2,1} = 30$. Toliko riječi dobivamo i u slučajevima kad riječ sadrži dva slova A i dva slova C, te dva slova B i dva slova C. Time smo ukupno izbrojali 90 različitih riječi.

2.) Riječ sadrži 3 slova A, te po jedno od slova B i C.
Ovakvih riječi ima ukupno $\binom{5}{3,1,1} = 20$. Toliko riječi dobivamo i u slučajevima kad riječ sadrži tri slova B, odnosno tri slova C. Time smo ukupno izbrojali 60 različitih riječi.

Kako drugih mogućnosti očito nema, za fiksirani izbor slova dobili smo ukupno 90 + 60 = 150 različitih riječi. Prema načelu umnoška, traženi je broj jednak $\binom{6}{3} \cdot 150 = 3000$.

1273. *U sferu polumjera R upisan je valjak najvećega mogućega obujma. Izrazite polumjer njegove osnovke kao funkciju varijable R.*

Rješenje: Označimo s r polumjer osnovke, a s v visinu valjka. Promotrimo poprečni presjek sfere i valjka ravninom okomitom na ravninu njegove osnovke. Riječ je o pravokutniku kojemu su duljine stranica $2r$ i v, a polumjer opisane kružnice R. Prema Pitagorinu poučku mora vrijediti jednakost:

$$(2r)^2 + v^2 = (2R)^2.$$

Budući da je obujam valjka dan formulom

$$V = r^2\pi \cdot v,$$

rješavamo sljedeći problem optimizacije:

$$\max.\ V = r^2\pi \cdot v$$

p.u. (pod uvjetom)

$$4r^2 + v^2 = 4R^2$$

Iz uvjeta odmah slijedi

$$r^2 = R^2 - \frac{1}{4}v^2,$$

pa tražimo maksimum funkcije

$$V = V(v) = (R^2 - \frac{1}{4}v^2) \cdot \pi \cdot v.$$

Prva derivacija te funkcije (po varijabli v) je

$$V'(v) = \left(R^2 - \frac{3}{4}v^2\right) \cdot \pi,$$

pa njezinim izjednačavanjem s nulom dobivamo $v_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$. Nadalje, druga derivacija funkcije $V(v)$ je

$$V''(v) = -\frac{3}{2} \cdot \pi \cdot v,$$

pa je očito $V''(v_0) < 0$, tj. za $v = v_0$ funkcija $V(v)$ ima lokalni maksimum. Preostaje nam odrediti traženi polumjer r_0 iz jednadžbe

$$r^2 = R^2 - \frac{1}{4}v_0^2.$$

Uvrštavanjem $v_0^2 = \frac{4}{3}R^2$ dobivamo $r_{max} = \frac{R\sqrt{6}}{3}$.

1274. *Odredite ukupan broj svih međusobno različitih cjelobrojnih rješenja jednadžbe*

$$\sqrt{\log_2^2(1-x)-4\log_2(1-x)+4} = 2 - \log_2(1-x).$$

Rješenje: Uočimo da je izraz pod korijenom jednak $[2 - \log_2(1 - x)]^2$, pa je polazna jednadžba ekvivalentna jednadžbi

$$|2 - \log_2(1 - x)| = 2 - \log_2(1 - x).$$

Prije negoli prijeđemo na sâmo rješavanje jednadžbe moramo postaviti određene uvjete na vrijednost nepoznanice x. Lijeva strana dobivene jednadžbe je nenegativna, pa takva mora biti i desna strana, tj. mora vrijediti nejednakost

$$2 - \log_2(1 - x) \geq 0$$

iz koje je

$$1 - x \leq 4,$$

odnosno

$$x \geq -3.$$

Nadalje, $\log_2(1 - x)$ je definiran ako i samo ako je $1 - x > 0$, odnosno $x < 1$. Tako zaključujemo da dobivenu jednadžbu rješavamo na intervalu $[-3, 1\rangle$. Na tom je intervalu, prema gornjem razmatranju, $2 - \log_2(1 - x) \geq 0$, pa izravno iz definicije funkcije apsolutne vrijednosti slijedi $|2 - \log_2(1 - x)| = 2 - \log_2(1 - x)$. Stoga je skup svih realnih rješenja polazne jednadžbe interval $[-3, 1\rangle$. U tom intervalu nalaze se ukupno 4 cijela broja: -3, -2, -1 i 0, pa je traženi broj jednak 4.

1275. *Izračunajte zbroj kvadrata najmanjega strogo pozitivnoga i najvećega strogo negativnoga realnoga rješenja jednadžbe* $\cos 2x + \sin^4 \dfrac{x}{2} = \cos^4 \dfrac{x}{2}$.

Rješenje: Zadanu jednadžbu najprije ćemo zapisati u obliku:

$$\cos 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}.$$

Desnu stranu dobivene jednadžbe transformiramo na sljedeći način:

$$\cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2} = \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right) \cdot \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}\right) = \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right) \cdot 1 = \cos(2 \cdot \frac{x}{2}) = \cos x.$$

Stoga je polazna jednadžba ekvivalentna jednadžbi

$$\cos 2x - \cos x = 0,$$

a ova – prema formulama pretvorbe razlike trigonometrijskih funkcija u umnožak – jednadžbi

$$\sin \frac{3x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2} = 0.$$

Iz identiteta $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x = \sin x \cdot (3 - 4 \sin^2 x)$ slijedi da su sva realna rješenja jednadžbe $\sin \frac{x}{2} = 0$ ujedno i rješenja jednadžbe $\sin \frac{3x}{2} = 0$, pa je za određivanje skupa svih rješenja polazne jednadžbe dovoljno riješiti jednadžbu $\sin \frac{3x}{2} = 0$. Iz te je jednadžbe

$$\frac{3x}{2} = k \cdot \pi, k \in \mathbf{Z},$$

a odavde slijedi da su sva rješenja polazne jednadžbe

$$x_k = k \cdot \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}.$$

Najveće strogo negativno rješenje dobivamo za $k = -1$, a najmanje strogo pozitivno za $k = 1$. Ta su rješenja $x_{-1} = -\frac{2\pi}{3}$ i $x_1 = \frac{2\pi}{3}$, pa je traženi zbroj njihovih kvadrata jednak $2 \cdot \frac{4\pi^2}{9} = \frac{8\pi^2}{9}$.

1276. *Jedan kut trokuta iznosi* $120°$, *a duljina stranice nasuprot njemu* $2\sqrt{7}$ cm. *Ako površina toga trokuta iznosi* $2\sqrt{3}$ cm^2, *izračunajte zbroj duljina preostalih dviju stranica trokuta.*

Rješenje: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\gamma = 120°$, što, uz standardne oznake u trokutu, povlači da je $c = 2\sqrt{7}$ cm. Prema kosinusovu je poučku tada

$$(2\sqrt{7})^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 120°,$$

a odavde je

$$a^2 + b^2 + ab = 28.$$

Nadalje, iz sinusova poučka slijedi

$$ab = \frac{2P}{\sin\gamma} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{\sin 120°} = \frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 8.$$

Stoga je

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a^2 + ab + b^2) + ab = 28 + 8 = 36,$$

pa je traženi zbroj jednak $a + b = 6$ cm.

1277. *Ako je polinom* $p(x) = x^5 - 3x^4 + ax^3 + x^2 + b$ ($a, b \in \mathbf{R}$ *su realni parametri*) *djeljiv polinomom* $q(x) = (x - 2)^2$, *izračunajte* $a^2 + b^2$.

Rješenje: Budući da je $x_0 = 2$ dvostruka realna nultočka polinoma $q(x)$, ona mora biti nultočka i polinoma $p(x)$ i njegove prve derivacije $p'(x)$. Budući da je $p(2) = 8a + b - 12$, iz uvjeta $p(2) = 0$ slijedi

$$8a + b = 12.$$

Nadalje je $p'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 3ax^2 + 2x$, pa je $p'(2) = 12a - 12$. Budući da mora vrijediti $p'(2) = 0$, dobivamo jednadžbu

$$12a - 12 = 0.$$

Iz ove je jednadžbe $a = 1$, pa je $b = 4$. Stoga je $a^2 + b^2 = 1 + 16 = 17$.

1278. *Izračunajte zbroj svih troznamenkastih prirodnih brojeva djeljivih sa* 7.

Rješenje: Prvi troznamenkasti prirodan broj djeljiv sa 7 je $a_1 = 105$, a posljednji $a_n = 994$. Budući da svi oni tvore konačni aritmetički niz s razlikom $d = 7$, njihov ukupan broj odredit ćemo tako da u formulu za n – ti član aritmetičkoga niza

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

uvrstimo $a_n = 994$, $a_1 = 105$ i $d = 7$. Tako dobivamo $n = 128$. Traženi ćemo zbroj izračunati tako da u formulu za zbroj prvih n članova aritmetičkoga niza

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

uvrstimo $n = 128$, $a_1 = 105$ i $a_n = 994$:

$$S_{128} = \frac{128}{2}(105 + 994) = 70\,336.$$

1279. *Odredite koeficijent uz* x^3 *u razvoju binoma* $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^7$.

Rješenje: Opći član navedenoga razvoja je $\binom{7}{k}(\sqrt{x})^k(\sqrt[3]{x})^{7-k} = \binom{7}{k}x^{\frac{k}{2}}x^{\frac{7-k}{3}} = \binom{7}{k}x^{\frac{k+14}{6}}$. Član x^3 dobivamo tako da u razlomak $\frac{k+14}{6}$ uvrstimo $k = 4$ jer iz $\frac{k+14}{6} = 3$ slijedi $k = 4$. Stoga je traženi koeficijent jednak $\binom{7}{4} = 35$.

1280. *Izračunajte zbroj svih rješenja jednadžbe* $\frac{3\cdot 2^x - 1}{2\cdot 2^x - 1} + \frac{2\cdot 2^x - 1}{3\cdot 2^x - 1} = \frac{5}{2}$.

Rješenje: Stavimo $t = \frac{3\cdot 2^x - 1}{2\cdot 2^x - 1}$, pa dobivamo jednadžbu $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$, odnosno kvadratnu jednadžbu $2t^2 - 5t + 2 =$ $= 0$. Sva rješenja te jednadžbe su $t_1 = \frac{1}{2}$ i $t_2 = 2$.

Iz $\frac{3\cdot 2^x - 1}{2\cdot 2^x - 1} = \frac{1}{2}$ dobivamo eksponencijalnu jednadžbu $2^x = \frac{1}{4}$ tj. $2^x = 2^{-2}$, a odavde je $x_1 = -2$.

Slično, iz $\frac{3\cdot 2^x - 1}{2\cdot 2^x - 1} = 2$ dobivamo eksponencijalnu jednadžbu $2^x = 1$, tj. $2^x = 2^0$, otkuda je $x_2 = 0$.

Stoga je traženi zbroj jednak $x_1 + x_2 = -2$.

1281. *Odredite ukupan broj različitih realnih rješenja jednadžbe* $\frac{\left(3^{x^2-5x} - \frac{1}{81}\right)\log(x-2)}{\sqrt{4+3x-x^2}} = 0$.

Rješenje: Razlomak na lijevoj strani jednadžbe bit će jednak nuli ako i samo ako mu je brojnik jednak nuli, a nazivnik različit od nule. U njegovu brojniku imamo dva faktora, pa svaki od njih moramo izjednačiti s nulom.

Izjednačavanje prvoga faktora s nulom daje eksponencijalnu jednadžbu $3^{x^2-5x} = \frac{1}{81}$, odnosno $3^{x^2-5x} = 3^{-4}$, a odavde izjednačavanjem eksponenata dobivamo kvadratnu jednadžbu $x^2 - 5x + 4 = 0$ čija su rješenja $x_1 = 1$ i $x_2 = 4$. No, za $x = 1$ nije definiran izraz $\log(x - 2)$, a za $x_2 = 4$ vrijednost nazivnika jednaka je nuli, pa ti brojevi nisu rješenja polazne jednadžbe.

Izjedanačavanje drugoga faktora s nulom daje logaritamsku jednadžbu $\log(x - 2) = 0$, odnosnoi linearnu jednadžbu $x - 2 = 1$, a odavde je $x = 3$. Za $x = 3$ vrijednost nazivnika jednaka je 2, pa je taj broj rješenje polazne jednadžbe.
Budući da drugih mogućnosti nema, zaključujemo da polazna jednadžba ima točno jedno rješenje: $x = 3$.

1282. *Za koju je vrijednost realnoga parametra* $m \in \mathbf{R}$ *zbroj kvadrata svih rješenja jednadžbe* $x^2 + 2mx + m - 3 = 0$ *najmanji mogući*?

Rješenje: Označimo rješenja navedene jednadžbe s x_1 i x_2. Prema Vièteovim formulama vrijede jednakosti:

$$x_1 + x_2 = -2m$$
$$x_1 \cdot x_2 = m - 3$$

Zbroj njihovih kvadrata je

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 \cdot x_2) = (-2m)^2 - 2(m - 3) = 4m^2 - 2m + 6.$$

Taj izraz (kao kvadratna funkcija varijable m) poprima najmanju vrijednost za $m = \frac{2}{2 \cdot 4} = \frac{1}{4}$ i to je tražena vrijednost parametra m.

1283. *Izračunajte vrijednost izraza* $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2008}$.

Rješenje: Uočimo da je $(1 + i)^2 = 1^2 + 2i + i^2 = 1 + 2i + (-1) = 2i$. Stoga je tražena vrijednost zadanoga izraza jednaka

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2008} = \left[\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right]^{1004} = \left(\frac{2i}{2}\right)^{1004} = i^{1004} = (i^4)^{251} = 1^{251} = 1.$$

1284. *Dijagonala AC pravokutnoga trapeza ABCD okomita je na krak BC. Ako je pravi kut trapeza kod vrha A i ako su duljine kraka AD i manje osnovice CD redom jednake* 8 cm *i* 6 cm, *izračunajte duljinu veće osnovice AB toga trapeza.*

Rješenje: Trokut ACD je pravokutan s pravim kutom kod vrha C jer iz pretpostavke da je $ABCD$ trapez slijedi $CD \parallel AB$, a također znamo da je $AD \perp AB$. Primjena Pitagorina poučka na taj trokut daje

$$|AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2 = 8^2 + 6^2 = 100,$$

odnosno $|AC| = 10$ cm. Povucimo sada iz točke C okomicu na osnovicu AB i označimo njezino nožište s E. Promotrimo trokutove ABC i BCE. Ti trokutovi su pravokutni jer su im pravi kutovi kod vrha C, odnosno vrha E. Oni imaju jednu zajedničku stranicu: to je BC. Izrazimo iz svakoga od tih trokutova kvadrat duljine dužine BC.
U trokutu ABC dužina BC je kateta, pa prema Pitagorinu poučku slijedi:

$$|BC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2.$$

U trokutu BCE dužina BC je hipotenuza, pa prema Pitagorinu poučku slijedi:

$$|BC|^2 = |CE|^2 + |EB|^2.$$

No, $|CE| = |AD|$ jer je četverokut $AECD$ pravokutnik (ima dva prava kuta i dvije usporedne stranice), a iz istoga je razloga i $|AE| = |CD|$, pa je $|EB| = |AB| - |AE| = |AB| - |CD|$. Tako posljednju jednakost možemo zapisati u obliku:

$$|BC|^2 = |AD|^2 + (|AB| - |CD|)^2.$$

Na taj smo način kvadrat duljine stranice $|BC|$ izrazili na dva načina:

$$|BC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2$$
$$|BC|^2 = |AD|^2 + (|AB| - |CD|)^2$$

Lijeve strane tih jednakosti su jednake, pa takve moraju biti i desne strane. Odatle slijedi:

$$|AB|^2 - |AC|^2 = |AD|^2 + (|AB| - |CD|)^2,$$

tj., zbog $|AD|^2 + |CD|^2 = |AC|^2$,

$$2 \cdot |AB| \cdot |CD| = 2 \cdot |AC|^2.$$

Uvrštavanjem $|CD| = 6$ i $|AC| = 10$ izračunavamo traženu duljinu veće osnovice:

$$|AB| = \frac{50}{3} \text{ cm.}$$

1285. *Izračunajte vrijednost izraza* $\dfrac{\cos 80° \cdot \cos 350° \cdot \operatorname{ctg} 20°}{\sin 110°}$.

<u>Rješenje:</u> Uočimo da vrijede sljedeće jednakosti:

$\cos 80° = \cos(90° - 10°) =$ (prema adicionom poučku za kosinus razlike kutova) $= \sin 10°$;
$\cos 350° = \cos(360° - 10°) =$ (jer je $360°$ period funkcije kosinus) $= \cos(-10°) =$ (jer je funkcija kosinus parna funkcija) $= \cos 10°$;
$\sin 110° = \sin(90° + 20°) =$ (prema adicionom poučku za sinus zbroja dvaju kutova) $= \cos 20°$.

Stoga je tražena vrijednost zadanoga izraza jednaka:

$$\frac{\cos 80° \cdot \cos 350° \cdot \operatorname{ctg} 20°}{\sin 110°} = \frac{\sin 10° \cdot \cos 10° \cdot \dfrac{\cos 20°}{\sin 20°}}{\cos 20°} = \frac{\sin 10° \cos 10°}{\sin 20°} = \frac{\sin 10° \cos 10°}{\sin(2 \cdot 10°)} = \frac{\sin 10° \cos 10°}{2 \cdot \sin 10° \cos 10°} = \frac{1}{2}.$$

1286. *Pravac p prolazi točkom* $A = (8, 15)$ *i u točki B siječe pravac* $q \ldots\ 7x - y + 9 = 0$ *pod pravim kutom. Izračunajte zbroj koordinata točke B.*

<u>Rješenje:</u> Koeficijent smjera pravca q je $k_q = 7$. Koeficijent smjera pravca p je recipročan i suprotan koeficijentu k_q, pa je $k_p = -\dfrac{1}{7}$. Stoga je jednadžba pravca p (jednadžba pravca kroz jednu zadanu točku sa zadanim koeficijentom smjera)

$$p \ldots\ y - 15 = -\frac{1}{7}(x - 8),$$

odnosno

$$p \ldots\ x + 7y - 113 = 0.$$

Sjecište pravaca p i q odredit ćemo rješavajući sljedeći sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$7x - y + 9 = 0$$
$$x + 7y - 113 = 0$$

Odavde je $x = 1$, $y = 16$, pa je traženi zbroj jednak $x + y = 1 + 16 = 17$.

1287. *Neka su* $a = 4^{1-\log_2 5}$ i $b = \sqrt{(-1)^2} - \sqrt[3]{-1}$. *Izračunajte* a^b.

Rješenje: Izračunajmo najprije vrijednosti brojeva a i b. Imamo redom:

$$a = (2^2)^{1-\log_2 5} = 2^{2-2\log_2 5} = 2^{\log_2(2^2)-\log_2(5^2)} = 2^{\log_2 \frac{2^2}{5^2}} = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$$
$$b = \sqrt{1} - (-1) = 1 + 1 = 2$$

Stoga je $a^b = \left(\frac{4}{25}\right)^2 = \frac{16}{625}$.

1288. *Izračunajte vrijednost izraza* $\left[\frac{1}{a^2+2a+1} - \frac{a^2-a}{a^3-1} \cdot \left(\frac{1}{a^2-a} - \frac{a}{1-a^2}\right)\right] \cdot \frac{a^2-1}{2}$ *za* $a = -1.5$

Rješenje: Zadani ćemo izraz najprije pojednostavniti na sljedeći način:

$$\left[\frac{1}{a^2+2a+1} - \frac{a^2-a}{a^3-1} \cdot \left(\frac{1}{a^2-a} - \frac{a}{1-a^2}\right)\right] \cdot \frac{a^2-1}{2} =$$
$$= \left[\frac{1}{(a+1)^2} - \frac{a\cdot(a-1)}{(a-1)(a^2+a+1)} \cdot \left(\frac{1}{a\cdot(a-1)} - \frac{a}{(1-a)(1+a)}\right)\right] \cdot \frac{(a-1)(a+1)}{2} =$$
$$= \left[\frac{1}{(a+1)^2} - \frac{a}{a^2+a+1} \cdot \left(\frac{1}{a\cdot(a-1)} + \frac{a}{(a-1)(a+1)}\right)\right] \cdot \frac{(a-1)(a+1)}{2} =$$
$$= \left[\frac{1}{(a+1)^2} - \frac{a}{a^2+a+1} \cdot \left(\frac{a+1+a^2}{a\cdot(a-1)\cdot(a+1)}\right)\right] \cdot \frac{(a-1)(a+1)}{2} =$$
$$= \left[\frac{1}{(a+1)^2} - \frac{1}{(a-1)(a+1)}\right] \cdot \frac{(a-1)(a+1)}{2} = \left[\frac{a-1-(a+1)}{(a+1)^2(a-1)}\right] \cdot \frac{(a-1)(a+1)}{2} =$$
$$= -\frac{2}{(a+1)^2(a-1)} \cdot \frac{(a-1)(a+1)}{2} = -\frac{1}{a+1}$$

Stoga je tražena vrijednost zadanoga izraza za $a = -1.5$ jednaka $-\frac{1}{-1.5+1} = -\frac{1}{-0.5} = 2$.

1289. *Cijena neke knjige je povećana za* 60%. *Za koliko postotaka treba sniziti novu cijenu da se dobije stara*?

Rješenje: Primijenit ćemo formulu

$$R = 100 \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) - 100$$

u koju ćemo uvrstiti $R = 0$ (jer krajnja cijena treba biti jednaka početnoj) i $p_1 = 60$. Tako ćemo dobiti linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom

$$0 = 100 \cdot \left(1 + \frac{60}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) - 100$$

iz koje je $p_2 = -37.5$. Stoga novu cijenu treba sniziti za 37.5%.

1290. *Ako je* $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$, *odredite* $(f\circ f)(\frac{1}{x})$.

Rješenje: Imamo redom:

$$(f\circ f)\left(\frac{1}{x}\right)=f\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]=f\left(\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1}\right)=f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{\frac{1-x}{1+x}-1}{\frac{1-x}{1+x}+1}=\frac{-2x}{2}=-x\,.$$

1291. *Ako za svaki realan broj* $x\in\mathbf{R}$ *vrijedi jednakost* $f(e^x-1)=1-x$, *odredite* $(f\circ f)(0)$.

Rješenje: Odredimo najprije propis funkcije $f(x)$. Stavimo $t=e^x-1$. Otuda slijedi $x=\ln(t+1)$, pa je $f(t)=1-\ln(t+1)$, odnosno $f(x)=1-\ln(x+1)$. Tako je $f(0)=1-\ln 1=1$, te konačno $(f\circ f)(0)=f(f(0))=f(1)=1-\ln 2$.

1292. *Ako za neki strogo pozitivan realan broj* $p\in\mathbf{R}$ p*% od* p *iznosi* $11-p$, *izračunajte* $(11-p)$*% od* p.

Rješenje: Na temelju podataka iskazanih u zadatku možemo postaviti jednadžbu

$$\frac{p}{100}\cdot p=11-p$$

koja je ekvivalentna kvadratnoj jednadžbi $p^2+100p-1\,100=0$. Jedino strogo pozitivno rješenje te jednadžbe je $p=10$. Stoga je traženi broj jednak

$$\frac{11-10}{100}\cdot 10=\frac{1}{10}=0.1\,.$$

1293. *Ako za neki strogo pozitivan realan broj* $p\in\mathbf{R}$ $(p-15)$*% od* p *iznosi* $50-p$, *izračunajte* $(50-p)$*% od* $(p-15)$.

Rješenje: Na temelju podataka iskazanih u zadatku možemo postaviti jednadžbu

$$\frac{p-15}{100}\cdot p=50-p$$

koja je ekvivalentna kvadratnoj jednadžbi $p^2+85p-5\,000=0$. Jedino strogo pozitivno rješenje te jednadžbe je $p=40$. Stoga je traženi broj jednak

$$\frac{50-40}{100}\cdot(40-15)=\frac{1}{10}\cdot 25=2.5\,.$$

1294. *Izračunajte zbroj svih cijelih brojeva* $m\in\mathbf{Z}$ *za koje jednadžba* $m(mx-3)=2(3+2x)$ *ima barem jedno rješenje barem jednako* 1.

Rješenje: Zadanu jednadžbu najprije zapišimo u obliku $(m^2-4)x=3m+6$. Uz uvjet $m^2-4\neq 0$, tj. $m\in\mathbf{Z}\setminus\{-2,2\}$ polazna jednadžba ima jedinstveno rješenje

$$x=\frac{3m+6}{m^2-4}\,.$$

Želimo li da to rješenje bude barem jednako 1, mora vrijediti nejednakost

$$\frac{3m+6}{m^2-4} \ge 1$$

koja je ekvivalentna nejednakosti

$$\frac{m^2-3m-10}{m^2-4} \le 0\,,$$

a ova je – zbog uvjeta $m \in \mathbf{Z} \setminus \{-2, 2\}$ – ekvivaletna nejednadžbi

$$(m^2 - 3m - 10)(m^2 - 4) \le 0.$$

Razlikujemo dva slučaja:

1.) $m^2 - 3m - 10 \le 0$, $m^2 - 4 > 0$

Iz prve nejednadžbe je $m \in [-2, 5]$, a iz druge $m \in \mathbf{R} \setminus [-2, 2]$. Stoga je u ovom slučaju skup rješenja polazne nejednadžbe $\langle 2, 5]$.

2.) $m^2 - 3m - 10 \ge 0$, $m^2 - 4 < 0$

Iz prve nejednadžbe je $m \in \mathbf{R} \setminus \langle -2, 5\rangle$, a iz druge $m \in \langle -2, 2\rangle$. Stoga u ovom slučaju polazna nejednadžba nema rješenja.

Dakle, skup svih realnih rješenja nejednadžbe $\frac{3m+6}{m^2-4} \ge 1$ je $\langle 2, 5]$. Svi cjelobrojni elementi toga skupa su 3, 4 i 5, pa je traženi zbroj jednak $3 + 4 + 5 = 12$.

1295. *Izračunajte* $\cos^4 105° + \sin^4 75°$.

<u>Rješenje:</u> Kako je $\cos 105° = \cos(180° - 75°)$ = (adicioni poučak za funkciju kosinus) = $-\cos 75°$, zadani izraz je jednak:

$(-\cos 75°)^4 + \sin^4 75° = \cos^4 75° + \sin^4 75° = (\cos^2 75° + \sin^2 75°) - 2 \cdot (\cos^2 75° \cdot \sin^2 75°) = 1 - 2 \cdot (\cos 75° \cdot \sin 75°)^2 = 1 - 2 \cdot [\frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot 75°)]^2 = 1 - \frac{1}{2}(\sin 150°)^2 = 1 - \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2})^2 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

1296. *U trokutu ABC stranice AC i BC imaju duljine redom* 5 *i* 7, *a zatvaraju kut od* 60°. *Izračunajte umnožak sinusa preostalih dvaju kutova toga trokuta.*

<u>Rješenje:</u> Sukladno standardnim oznakama u trokutu, možemo zapisati: $a = 7$, $b = 5$ i $\gamma = 60°$. Zadatak traži izračunavanje umnoška $\sin \alpha \cdot \sin \beta$. Prema kosinusovu poučku

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

slijedi da je duljina stranice c jednaka $c = \sqrt{39}$. Stoga je polumjer R tome trokutu opisane kružnice jednak

$$R = \frac{c}{2\sin\gamma} = \frac{\sqrt{39}}{2\sin 60°} = \frac{\sqrt{39}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{13}\,,$$

pa je traženi umnožak – opet prema sinusovu poučku – jednak:

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{a}{2R}\cdot\frac{b}{2R}=\frac{ab}{4R^2}=\frac{7\cdot 5}{4\cdot 13}=\frac{35}{52}.$$

1297. *Odredite ukupan broj međusobno različitih cijelih brojeva iz segmenta* [–20, 20] *za koje je definirana realna funkcija* $f(x)=\sqrt{1-\frac{|3x-4|+x}{x^2-3x+2}}$.

Rješenje: Zadana funkcija je definirana za sve $x\in\mathbf{R}$ za koje je vrijednost radikanda nenegativna. Stoga možemo postaviti uvjet:

$$1-\frac{|3x-4|+x}{x^2-3x+2}\geq 0,$$

a odavde je

$$\frac{x^2-4x+2-|3x-4|}{x^2-3x+2}\geq 0.$$

Primijetimo da razlomak na lijevoj strani nejednadžbe nije definiran za nultočke polinoma $p(x)=x^2-3x+2$, odnosno za rješenja kvadratne jednadžbe $x^2-3x+2=0$, a to su $x_1=1$ i $x_2=2$. Također, prema definiciji funkcije apsolutne vrijednosti, vrijedi:

$$|3x-4| = \begin{cases}3x-4, & \text{za } x\geq\frac{4}{3}\\ 4-3x, & \text{za } x<\frac{4}{3}\end{cases}.$$

Stoga ćemo dobivenu nejednadžbu razmatrati na ukupno dva intervala: $[-20, \frac{4}{3}]$ i $\langle\frac{4}{3}, 20]$.

1.) $x\in[-20, \frac{4}{3}]$

Za te je vrijednosti x brojnik jednak $x^2-4x+2-(4-3x)=x^2-x-2$, pa dobivamo nejednadžbu

$$\frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}\geq 0.$$

Razlikovat ćemo dva podslučaja:

a) $x^2-x-2\geq 0$, $x^2-3x+2>0$.

Iz prve je nejednakosti $x\in\mathbf{R}\setminus\langle-1, 2\rangle$, a iz druge $x\in\mathbf{R}\setminus\langle 1, 2\rangle$. Stoga je u ovom podslučaju skup rješenja polazne nejednadžbe na segmentu [–20, 20] jednak presjeku skupova $\mathbf{R}\setminus\langle-1, 2\rangle$, $\mathbf{R}\setminus\langle 1, 2\rangle$ i $[-20, \frac{4}{3}]$, a to je skup [–20, –1].

b) $x^2-x-2\leq 0$, $x^2-3x+2<0$.
Iz prve je nejednakosti [–1, 2], a iz druge $x\in\langle 1, 2\rangle$. Stoga je u ovom podslučaju skup rješenja polazne nejednadžbe na segmentu [–20, 20] jednak presjeku skupova [–1, 2], $\langle 1, 2\rangle$ i $[-20, \frac{4}{3}]$, a to je skup $\langle 1, \frac{4}{3}]$.

2.) $x\in[\frac{4}{3}, 20]$

Za te je vrijednosti x brojnik jednak $x^2 - 4x + 2 - (3x - 4) = x^2 - 7x + 6$, pa dobivamo nejednadžbu

$$\frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 3x + 2} \geq 0 .$$

Razlikovat ćemo dva podslučaja:

a) $x^2 - 7x + 6 \geq 0$, $x^2 - 3x + 2 > 0$.

Iz prve je nejednakosti $x \in \mathbf{R} \setminus \langle 1, 6\rangle$, a iz druge $x \in \mathbf{R} \setminus \langle 1, 2\rangle$. Stoga je u ovom podslučaju skup rješenja polazne nejednadžbe na segmentu $[-20, 20]$ jednak presjeku skupova $\mathbf{R} \setminus \langle 1, 6\rangle$, $\mathbf{R} \setminus \langle 1, 2\rangle$ i $[\frac{4}{3}, 20]$, a to je skup $[6, 20]$.

b) $x^2 - 7x + 6 \leq 0$, $x^2 - 3x + 2 < 0$.

Iz prve je nejednakosti $x \in [1, 6]$, a iz druge $\langle 1, 2\rangle$. Stoga je u ovom podslučaju skup rješenja polazne nejednadžbe na segmentu $[-20, 20]$ jednak presjeku skupova $[1, 6]$, $\langle 1, 2\rangle$ i $[\frac{4}{3}, 20]$, a to je skup $[\frac{4}{3}, 2\rangle$.

Tako zaključujemo da je skup svih rješenja polazne nejednadžbe na segmentu $[-20, 20]$ jednak uniji skupova $[-20, -1]$, $\langle 1, \frac{4}{3}]$, $[\frac{4}{3}, 2\rangle$ i $[6, 20]$, tj. skupu $[-20, 20] \setminus (\langle -1, 1] \cup [2, 6\rangle)$. U segmentu $[-20, 20]$ nalazi se ukupno 41 cijeli broj, a u skupu $\langle -1, 1] \cup [2, 6\rangle$ njih 6 (to su 0, 1, 2, 3, 4 i 5) Stoga je traženi broj jednak $41 - 6 = 35$.

1297. *Izračunajte zbroj svih rješenja jednadžbe* $\sqrt{2}\,(\cos^3 x - \sin^3 x)[1 + 2\cos^2(x - \frac{\pi}{4})] = (2 + \sin 2x)^2$ *koja pripadaju segmentu* $[-2\pi, 2\pi]$.

<u>Rješenje:</u> Najprije primijetimo da za svaki realan broj $x \in \mathbf{R}$ vrijede sljedeći trigonometrijski identiteti:

$\cos^3 x - \sin^3 x$ = (prema formuli za razliku kubova) $= (\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \sin x \cos x + \sin^2 x) = (\cos x - \sin x) \cdot (1 + \sin x \cos x) = (\cos x - \sin x) \cdot (1 + \frac{1}{2}\sin 2x) = \frac{1}{2}(\cos x - \sin x)(2 + \sin 2x)$;

$1 + 2\cos^2(x - \frac{\pi}{4})$ = (prema formuli za kosinus dvostrukoga kuta) $= 1 + 2 \cdot \frac{1 + \cos\left[2 \cdot (x - \frac{\pi}{4})\right]}{2} = 2 + \cos(2x - \frac{\pi}{2}) = 2 + \sin 2x$.

Stoga zadanu jednadžbu možemo napisati u obliku:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)(2 + \sin 2x)^2 = (2 + \sin 2x)^2.$$

Zbog nejednakosti $-1 \leq \sin 2x \leq 1$, odnosno $1 \leq 2 + \sin 2x \leq 3$, izraz $2 + \sin 2x$ ne može biti jednak nuli, pa cijelu jednadžbu smijemo podijeliti s $(2 + \sin 2x)^2$. Tako ćemo dobiti:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x) = 1.$$

Lijevu stranu te jednadžbe možemo zapisati u obliku

$$\sin\frac{\pi}{4}\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\sin x = 1,$$

odnosno u obliku

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1.$$

Odavde je

$$\frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi,$$

odnosno

$$x_k = -\frac{\pi}{4} - k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Sada tebamo odrediti koja od dobivenih rješenja pripadaju segmentu $[-2\pi, 2\pi]$. Lako se vidi da su to rješenja $x_0 = -\frac{\pi}{4}$ i $x_{-1} = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$. Njihov je zbroj jednak $\frac{7\pi}{4} + (-\frac{\pi}{4}) = \frac{3\pi}{2}$.

1298. *Odredite skup svih realnih rješenja nejednadžbe* $\log_{\frac{1}{3}}(\log_{x^2-2x+1} x^2) \geq 0.$

Rješenje: Najprije postavimo uvjete na vrijednost nepoznanice x. Baza logaritma mora biti strogo pozitivan realan broj različit od 1, a logaritmand strogo pozitivan realan broj. Tako dobivamo nejednakosti:

$$x^2 - 2x + 1 > 0$$
$$x^2 - 2x + 1 \neq 1$$
$$x^2 > 0$$

iz kojih se dobiva $x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1, 2\}$. Uvažavajući taj uvjet antilogaritmiranjem polazne jednadžbe dobivamo:

$$\log_{x^2-2x+1} x^2 \leq 1.$$

U nastavku moramo razlikovati dva podslučaja:

1.) $0 < x^2 - 2x + 1 < 1$

Zbog identiteta

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

i ranije navedenoga uvjeta $x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1, 2\}$, nejednakost $x^2 - 2x + 1 > 0$ vrijedi za svaki $x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1, 2\}$. Stoga jedino preostaje razmotriti nejednakost $x^2 - 2x + 1 < 1$, odnosno nejednadžbu $x^2 - 2x < 0$. Skup svih realnih rješenja ove nejednadžbe je otvoreni interval $\langle 0, 2\rangle$, pa je skup svih realnih brojeva koji zadovoljavaju uvjete $x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1, 2\}$ i $0 < x^2 - 2x + 1 < 1$ jednak $(\mathbf{R} \setminus \{0, 1, 2\}) \cap \langle 0, 2\rangle = \langle 0, 2\rangle \setminus \{1\}$.
Tek sada možemo antilogaritmirati nejednadžbu $\log_{x^2-2x+1} x^2 \leq 1$ i uz ponovnu promjenu znaka nejednakosti dobiti

$$x^2 \geq x^2 - 2x + 1,$$

odnosno

$$x \geq \frac{1}{2}.$$

Tako je skup rješenja polazne nejednadžbe u ovom podslučaju jednak $(\langle 0, 2\rangle \setminus \{1\}) \cap [\frac{1}{2}, +\infty\rangle = [\frac{1}{2}, 2\rangle \setminus \{1\}$.

2.) $x^2 - 2x + 1 > 1$

U ovom podslučaju dobivamo nejednadžbu $x^2 - 2x > 0$. Skup svih realnih rješenja ove nejednadžbe je $\mathbf{R} \setminus [0, 2]$, pa je skup svih realnih brojeva koji zadovoljavaju uvjete $x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1, 2\}$ i $x^2 - 2x + 1 > 1$ jednak $(\mathbf{R} \setminus \{0, 1, 2\}) \cap (\mathbf{R} \setminus [0, 2]) = \mathbf{R} \setminus [0, 2]$.

Tek sada možemo antilogaritmirati nejednadžbu $\log_{x^2-2x+1} x^2 \le 1$ i dobiti

$$x^2 \le x^2 - 2x + 1,$$

odnosno

$$x \le \frac{1}{2}.$$

Tako je skup rješenja polazne nejednadžbe u ovom podslučaju jednak $(\mathbf{R} \setminus [0, 2]) \cap \langle -\infty, \frac{1}{2}] = \langle -\infty, 0\rangle$.

Dakle, skup svih realnih rješenja polazne nejednadžbe je unija skupova $\langle -\infty, 0\rangle$ i $[\frac{1}{2}, 2\rangle \setminus \{1\}$, a taj skup možemo zapisati u obliku $\langle -\infty, 0\rangle \cup [\frac{1}{2}, 1\rangle \cup \langle 1, 2\rangle$.

1299. *Odredite ukupan broj svih međusobno različitih četveroznamenkastih prirodnih brojeva djeljivih s 5 koji se sastoje od četiri međusobno različite znamenke.*

Rješenje: Prirodan broj je djeljiv s 5 ako i samo ako mu je posljednja znamenka element skupa {0, 5}. Stoga moramo razlikovati dva podslučaja:

1.) Posljednja znamenka jednaka je 0.

Tada prvu znamenku možemo odabrati na 9 različitih načina (ona je bilo koji broj iz skupa {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}), drugu na 8, a treću na 7. Prema načelu umnoška zaključujemo da dobivamo ukupno $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ različita prirodna broja.

2.) Posljednja znamenka jednaka je 5.

Tada prvu znamenku možemo odabrati na 8 različitih načina (ona je bilo koji broj iz skupa {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} \ {0, 5}), drugu također na 8 različitih načina (ona je bilo koji broj iz skupa {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} \ {prva znamenka, 5}), a treću na 7 različitih načina. Prema načelu umnoška zaključujemo da dobivamo ukupno $8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$ različitih prirodnih brojeva.

Budući da drugih mogućnosti nema, preostaje nam primijeniti načelo zbroja i zaključiti da je traženi broj jednak $504 + 448 = 952$.

1300. *Prvi članovi strogo rastućega aritmetičkoga i geometrijskoga niza jednaki su 2. I treći članovi tih nizova su također međusobno jednaki. Ako je drugi član aritmetičkoga niza za 4 veći od drugoga člana geometrijskoga niza, izračunajte zbroj četvrtih članova tih nizova.*

Rješenje: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su 2, b i c pva tri člana aritmetičkoga niza, pri čemu, zbog činjenice da je aritmetički niz strogo rastući, nužno vrijedi nejednakost $2 < b < c$. Prema osnovnom svojstvu aritmetičkoga niza mora vrijediti jednakost

$$2b = 2 + c.$$

Nadalje, iz uvjeta da se treći članovi nizova podudaraju, te da je drugi član aritmetičkoga niza za 4 veći od drugoga člana geometrijskoga niza, slijedi da su prva tri člana geometrijskoga niza

$$2,\ b - 4,\ c.$$

Prema osnovnom svojstvu geometrijskoga niza mora vrijediti jednakost

$$(b - 4)^2 = 2 \cdot c.$$

Tako smo dobili sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} 2b &= 2 + c \\ (b - 4)^2 &= 2 \cdot c \end{aligned}$$

Iz prve jednadžbe je $c = 2b - 2$, pa uvrštavanjem u drugu dobivamo:

$$(b - 4)^2 = 2 \cdot (2b - 2),$$

odnosno kvadratnu jednadžbu

$$b^2 - 12b + 20 = 0.$$

Sva realna rješenja ove jednadžbe su $b_1 = 2$ i $b_2 = 10$. Rješenje $b_1 = 2$ povlači da je aritmetički niz 2, 2, 2, a taj niz nije strogo rastući. Stoga to rješenje zanemarujemo, pa preostaje $b = 10$, te je $c = 18$. Dakle, riječ je o nizovima 2, 10, 18 i 2, 6, 18. Razlika aritmetičkoga niza jednaka je $d = 18 - 10 = 10 - 2 = 8$, a količnik geometrijskoga niza $q = \frac{18}{6} = \frac{6}{2} = 3$, pa su četvrti članovi tih nizova $18 + 8 = 26$ i $18 \cdot 3 = 54$. Njihov je zbroj jednak $26 + 54 = 80$.

1301. *Izračunajte vrijednost izraza* $\left(1 + \log_{\sqrt[5]{81}} \frac{1}{3}\right) \cdot \left(5^{-2\log_{\frac{1}{5}} 5} + 4^{\frac{1}{\log_{25} 16}} - 2\right)$.

Rješenje: Izračunajmo najprije vrijednosti pojedinih pribrojnika. Imamo redom:

$$\log_{\sqrt[5]{81}} \frac{1}{3} = \log_{\sqrt[5]{3^4}} \frac{1}{3} = \log_{3^{\frac{4}{5}}} \frac{1}{3} = \frac{1}{\frac{4}{5}} \log_3 \frac{1}{3} = \frac{5}{4} \log_3 (3^{-1}) = -\frac{5}{4} \log_3 3 = -\frac{5}{4};$$

$$5^{-2\log_{\frac{1}{5}} 5} = 5^{-2\log_{5^{-1}} 5} = 5^{2\log_5 5} = 5^2 = 25;$$

$$4^{\frac{1}{\log_{25} 16}} = 4^{\log_{16} 25} = 4^{\log_{4^2} 25} = 4^{\frac{1}{2}\log_4 25} = 4^{\log_4 (5^2)^{\frac{1}{2}}} = 4^{\log_4 5} = 5.$$

Stoga je tražena vrijednost izraza jednaka

$$\left(1 - \frac{5}{4}\right) \cdot (25 + 5 - 2) = -7.$$

1302. *Izračunajte vrijednost izraza* $\left[\frac{1}{a-2} - \frac{a}{(a-1)^2 + 3}\right] : \left(\frac{1 - a^2}{a^3 + 8} + \frac{1 + a}{a^2 - 4}\right)$ *za* $a = -1.25$.

Rješenje: Najprije primijetimo da vrijede jednakosti

$$\begin{aligned} (a - 1)^2 + 3 &= a^2 - 2a + 1 + 3 = a^2 - 2a + 4, \\ a^3 + 8 &= (a + 2)(a^2 - 2a + 4), \\ a^2 - 4 &= (a - 2)(a + 2). \end{aligned}$$

Tako je zadani izraz jednak

$$\left(\frac{1}{a-2}-\frac{a}{a^2-2a+4}\right):\left(\frac{1-a^2}{(a+2)(a^2-2a+4)}+\frac{1+a}{(a-2)(a+2)}\right)=$$
$$=\frac{a^2-2a+4-a(a-2)}{(a-2)(a^2-2a+4)}:\frac{(1-a^2)(a-2)+(1+a)(a^2-2a+4)}{(a+2)(a-2)(a^2-2a+4)}=$$
$$=\frac{4}{(a-2)(a^2-2a+4)}:\frac{a^2+3a+2}{(a+2)(a-2)(a^2-2a+4)}=$$
$$=\frac{4}{(a-2)(a^2-2a+4)}\cdot\frac{(a+2)(a-2)(a^2-2a+4)}{(a+1)(a+2)}=\frac{4}{a+1}$$

pa je tražena vrijednost jednaka $\frac{4}{-1.25+1}=-\frac{4}{0.25}=-16.$

1303. *Odredite apsolutnu vrijednost* (*modul*) *kompleksnoga broja* $z=\frac{(1+i)^{12}}{i^{2007}+2}$.

Rješenje:

Budući da vrijede jednakosti

$$(1+i)^{12}=[(1+i)^2]^6=(1+2i+i^2)^6=(2i)^6=2^6i^6=64\cdot(i^2)^3=64\cdot(-1)^3=-64,$$
$$i^{2007}=i^{4\cdot 501+3}=(i^4)^{501}\cdot i^3=1^{501}\cdot i^3=1\cdot(-i)=-i,$$

tražena apsolutna vrijednost jednaka je:

$$|z|=\frac{|(1+i)^{12}|}{|i^{2007}+2|}=\frac{|-64|}{|2-i|}=\frac{64}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{64}{\sqrt{5}}=\frac{64}{5}\sqrt{5}.$$

1304. *Izračunajte udaljenost sjecišta pravaca* $p_1\ldots\ 2x+y-1=0$ *i* $p_2\ldots\ \frac{x}{-4}+\frac{y}{4}=1$ *od pravca* $p_3\ldots\ y=-\frac{1}{2}x$.

Rješenje: Sjecište pravaca p_1 i p_2 dobivamo kao rješenje sustava

$$2x+y=1$$
$$x-y=-4$$

Odavde je $x=-1$, $y=3$, pa je tražena udaljenost od pravca $p_3\ldots\ x+2y=0$ jednaka

$$d=\frac{|-1+2\cdot 3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}.$$

1305. *Odredite ukupan broj svih različitih cjelobrojnih vrijednosti parametra* $a\in\mathbf{Z}$ *za koje nejednakost* $(5-a^2)x^2+2(a-\sqrt{5})x+a+1>0$ *vrijedi za svaki realan broj* $x\in\mathbf{R}$.

Rješenje: Graf kvadratne funkcije $f(x)=(5-a^2)x^2+2(a-\sqrt{5})x+a+1$ je parabola. Mi želimo da za parabola bude strogo iznad osi apscisa. Nužni i dovoljni uvjeti za ispunjenje toga zahtjeva su:

$$5-a^2>0$$
$$[-2(a-\sqrt{5})]^2-4\cdot(5-a^2)\cdot(a+1)<0.$$

Iz prve nejednadžbe je $a\in\langle-\sqrt{5},\ \sqrt{5}\rangle$, a druga je ekvivalentna nejednadžbi

$$4a \cdot (a^2 + 2a - 5 - 2\sqrt{5}) < 0,$$

odnosno, nakon rastava u faktore, nejednadžbi

$$a \cdot (a - \sqrt{5})(a + \sqrt{5} + 2) < 0.$$

Za $a \in \langle -\sqrt{5}, \sqrt{5} \rangle$ je očito $a + \sqrt{5} + 2 > 0$, pa dijeljenjem dobivene nejednadžbe tim izrazom preostaje

$$a \cdot (a - \sqrt{5}) < 0.$$

Skup svih realnih rješenja te nejednadžbe je $\langle 0, \sqrt{5} \rangle$, pa je skup svih realnih vrijednosti parametra a za koje polaznu nejednadžbu zadovoljava svaki realan broj $x \in \mathbf{R}$ jednak $\langle -\sqrt{5}, \sqrt{5} \rangle \cap \langle 0, \sqrt{5} \rangle = \langle 0, \sqrt{5} \rangle$. U tom se skupu nalaze točno dva cijela broja: 1 i 2. Stoga je traženi broj jednak 2.

1306. *Pojednostavnite izraz*: $\dfrac{4a^2}{10ab - 25b^2} - \dfrac{25b^2}{4a^2 - 10ab} - \dfrac{2a}{5b} - \dfrac{5b}{2a}$.

Rješenje: Najprije pimijetimo da vrijede identiteti:

$$10ab - 25b^2 = 5b \cdot (2a - 5b),$$
$$4a^2 - 10ab = 2a \cdot (2a - 5b).$$

Stoga je zadani izraz jednak:

$$\frac{4a^2}{10ab - 25b^2} - \frac{25b^2}{4a^2 - 10ab} - \frac{2a}{5b} - \frac{5b}{2a} = \frac{4a^2}{5b(2a - 5b)} - \frac{25b^2}{2a(2a - 5b)} - \frac{2a}{5b} - \frac{5b}{2a} =$$
$$= \frac{8a^3 - 125b^3 - 2a \cdot 2a(2a - 5b) - 5b \cdot 5b(2a - 5b)}{10ab(2a - 5b)} = \frac{8a^3 - 125b^3 - 8a^3 + 20a^2b - 50ab^2 + 125b^3}{10ab(2a - 5b)} =$$
$$= \frac{20a^2b - 50ab^2}{20a^2b - 50ab^2} = 1$$

1307. *Zadani su kompleksni brojevi* $z_1 = 3 + 2i$ *i* $z_2 = 2 + i$. *Odredite kompleksan broj* $z_3 \in \mathbf{C}$ *takav da vrijede jednakosti* $\mathrm{Re}(z_3 \cdot \overline{z_1}) = -1$ *i* $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z_3}{z_2}\right) = \dfrac{3}{5}$.

Rješenje: Stavimo $z_3 = a + b \cdot i$, gdje su $a, b \in \mathbf{R}$. Tada je:

$$\mathrm{Re}(z_3 \cdot \overline{z_1}) = \mathrm{Re}\left[(a + bi) \cdot (3 - 2i)\right] = \mathrm{Re}\left[(3a + 2b) + (3b - 2a) \cdot i\right] = 3a + 2b$$
$$\mathrm{Im}\left(\frac{z_3}{z_2}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{a + bi}{2 + i}\right) = \mathrm{Im}\left[\frac{(a + bi)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)}\right] = \mathrm{Im}\left(\frac{2a + b}{5} + \frac{2b - a}{5} \cdot i\right) = \frac{2b - a}{5}$$

pa dobivamo sljedeći sustav dviju lineanih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$3a + 2b = -1$$
$$\frac{2b - a}{5} = \frac{3}{5}$$

Njegovo je rješenje $a = -1$, $b = 1$, pa je traženi broj $z_3 = -1 + i$.

1308. *Odredite strogo pozitivno cjelobrojno rješenje jednadžbe* $(3 + 4i)^{x-1} - (1 + i)^4 = 5^x$.

Rješenje: Najprije primijetimo da je $(1 + i)^4 = [(1 + i)^2]^2 = (1 + 2i + i^2)^2 = (2i)^2 = -4$. Stoga zadanu jednadžbu možemo zapisati u obliku:

$$(3 + 4i)^{x-1} = 5^x - 4.$$

Desna strana te jednadžbe je strogo pozitivan realan broj, pa takva mora biti i lijeva strana jednadžbe. Stoga realni dio kompleksnoga broja na lijevoj strani jednadžbe treba biti strogo veći od 0, a imaginarni dio treba biti identički jednak nuli. Stoga zapišimo kompleksan broj $z = 3 + 4i$ u trigonometrijskom obliku, tj. izračunajmo modul i argument toga broja:

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4}{3} \Rightarrow \varphi \approx 53°13'$$

pa je

$$z = 5 \cdot (\cos 53°13' + i \cdot \sin 53°13').$$

Primjenom Moivrèove formule dobivamo:

$$(3 + 4i)^{x-1} = [5 \cdot (\cos 53°13' + i \cdot \sin 53°13')]^{x-1} = 5^{x-1} \cdot \{\cos [53°13' \cdot (x - 1)] + i \cdot \sin [53°13' \cdot (x - 1)]\}.$$

Izjednačavanjem imaginarnoga dijela toga broja s nulom dobivamo:

$$\sin [53°13' \cdot (x - 1)] = 0,$$

odnosno

$$53°13' \cdot (x - 1) = k \cdot 180°,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Odavde slijedi

$$\frac{k}{x-1} = \frac{53°13'}{180°}$$

što je kontradikcija jer je desna strana te jednakosti iracionalan broj, a lijeva racionalan. Jedina moguća pogreška koja je mogla dovesti dok kontadikcije bila je dijeljenje pretposljednje jednakosti s $x - 1$. Taj će postupak biti pogrešan ako i samo ako je $x - 1 = 0$. Odavde je $x = 1$. Budući da doista vrijedi jednakost:

$$(3 + 4i)^{1-1} = 5^1 - 4,$$

tj. jednakost

$$1 = 5 - 4,$$

$x = 1$ je traženo strogo pozitivno cjelobrojno rješenje polazne jednadžbe.

1309. *Odredite propis realne funkcije $f(x)$ ako za sve dopustive $x \in \mathbf{R}$ vrijedi jednakost*

$$f(x + \frac{\pi}{2}) = 2 \sin x + 3 \operatorname{tg} 2x.$$

Rješenje: Stavimo $t = x + \frac{\pi}{2}$. Odavde je $x = t - \frac{\pi}{2}$, pa uvrštavanjem u gornju jednakost slijedi:

$f(t) = 2 \sin (t - \frac{\pi}{2}) + 3 \text{ tg } (2t - \pi) = 2 (\sin t \cos \frac{\pi}{2} - \cos t \sin \frac{\pi}{2}) + 3 \cdot \frac{\text{tg } 2t - \text{ tg } \pi}{1 + \text{tg } 2t \cdot \text{ tg } \pi} = -2 \cos t + 3 \text{ tg } 2t.$

Preimenovanjem nezavisne varijable konačno dobivamo:

$$f(x) = 3 \text{ tg } 2x - 2 \cos x.$$

1310. *Odredite skup svih realnih rješenja jednadžbe* $|\cos x| = \cos x + 1$ *koja se nalaze u segmentu* $[0, 2\pi]$.

Rješenje: Tražena rješenja očito ne mogu zadovoljavati nejednakost $\cos x \geq 0$ jer, prema definiciji funkcije apsolutne vrijednosti, tada dobivamo trigonometrijsku jednadžbu $\cos x = \cos x + 1$ koja nema rješenja. Stoga mora vrijediti nejednakost $\cos x < 0$, tj. sva rješenja polazne jednadžbe nalaze se u II. i III. kvadrantu. U tom je slučaju polazna jednadžba ekvivalentna jednadžbi

$$-\cos x = \cos x + 1,$$

otkuda je

$$\cos x = -\frac{1}{2}.$$

U drugom kvadrantu ova jednadžba ima rješenje $x_1 = \frac{2\pi}{3}$, a u trećem $x_2 = 2\pi - x_1 = \frac{4\pi}{3}$. Stoga je traženi skup $S = \{ \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \}$.

1311. *Prva tri člana nekoga aritmetičkoga niza imaju svojstvo da je zbroj četvrtine prvoga člana i petine drugoga člana za 2 manji od polovine trećega člana. Odredite sedamnaesti član toga niza.*

Rješenje: Neka je a_1 prvi član niza, a d njegova razlika. Tada je drugi član toga niza $a_2 = a_1 + d$, treći $a_3 = a_1 + 2d$, a sedamnaesti $a_{17} = a_1 + 16d$. Prema prvom uvjetu zadatka mora vrijediti jednakost

$$\frac{1}{4} a_1 + \frac{1}{5}(a_1 + d) + 2 = \frac{1}{2}(a_1 + 2d),$$

odnosno

$$a_1 + 16d = 40.$$

Odatle izravno slijedi $a_{17} = 40$, pa je sedamnaesti član zadanoga niza jednak 40. Primijetite da postoji beskonačno mnogo aritmetičkih nizova kojima prva tri člana imaju zadano svojstvo, ali svim tim nizovima je sedamnaesti član jednak 40.

1312. *Krivulja* $y^2 = 3x$ *dijeli kružnicu* $x^2 + y^2 = 4$ *na dva luka. Izračunajte omjer duljina tih lukova.*

Rješenje: Odredimo najprije koordinat sjecišta zadanih krivulja. U tu svrhu, riješimo sustav

$$\begin{aligned} y^2 &= 3x \\ x^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$

Uvrštavanjem prve jednadžbe u drugu dobije se kvadratna jednadžba $x^2 + 3x - 4 = 0$ čija su rješenja $x_1 = -4$ i $x_2 = 1$. Rješenje $x_1 = -4$ ne dolazi u obzir jer iz $y^2 = 3x$ zaključujemo da x mora biti nenegativan realan broj (jer su

y^2 i 3 nenegativni realni brojevi). Stoga preostaje $x = 1$, pa iz $y^2 = 3x$ slijedi $y_1 = -\sqrt{3}$ i $y_2 = \sqrt{3}$. Dakle, riječ je o točkama $S_1 = (4, -2\sqrt{3})$ i $S_2 = (4, 2\sqrt{3})$.
Pogledajmo sada koji nam sve podaci trebaju za određivanje traženoga omjera. Označimo li s l_1 i l_2 duljine tih lukova, onda je

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{\frac{r\pi\alpha_1}{180°}}{\frac{r\pi\alpha_2}{180°}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Dakle, traženi je omjer jednak omjeru pripadnih središnjih kutova. Budući da je središte kružnice $x^2 + y^2 = 4$ ishodište, tj. $S = (0, 0)$, pripadne kutove najlakše ćemo izračunati rabeći skalarni umnožak vektora. Naime, možemo zapisati:

$$\overrightarrow{SS_1} = \vec{i} - \sqrt{3}\,\vec{j}$$
$$\overrightarrow{SS_2} = \vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}$$

pa je

$$\cos\alpha_1 = \frac{\overrightarrow{SS_1}\cdot\overrightarrow{SS_2}}{|\overrightarrow{SS_1}|\cdot|\overrightarrow{SS_2}|\cdot} = \frac{1\cdot 1 + \sqrt{3}\cdot(-\sqrt{3})}{2\cdot 2} = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Odatle je $\alpha_1 = 120°$, pa je $\alpha_2 = 360° - 120° = 240°$. Stoga je traženi omjer jednak

$$l_1 : l_2 = 120° : 240° = 1 : 2.$$

<u>**Opaska**</u>: Navedene smo kutove mogli izračunati i koristeći formulu za kut između dvaju pravaca. No, navedeni je način brži jer iz činjenice da točke S_1 i S_2 pripadaju kružnici polumjera $r = 2$ sa središtem u S izravno slijedi da je $\left|\overrightarrow{SS_1}\right| = \left|\overrightarrow{SS_1}\right| = 2$, pa se može primijeniti neovisno o koordinatama točke S, što znači da praktički samo treba izračunati skalarni produkt navedenih vektora.

1313. *Duljine stranica usporednika su* $a = 6.8$ cm *i* $b = 8.4$ cm. *Ako je duljina veće dijagonale* $d = 14$ cm, *izračunajte veći kut toga usporednika.*

<u>**Rješenje:**</u> Promotrimo trokut kojega tvore dvije susjedne stranice usporednika i veća dijagonala. Traženi je kut jednak kutu nasuprot većoj dijagonali u navedenom trokutu. Označimo li ga s α, primjenom kosinusova poučka dobivamo:

$$\cos\alpha = \frac{6.8^2 + 8.4^2 - 14^2}{2\cdot 6.8\cdot 8.4} = -0.69327731092436974789915966386554\,6.$$

Odavde je $\alpha = 133.89009962579578594170903406230 9°$, odnosno $\alpha \approx 133°53'24''$.

1314. *Pravci* $p_1\ldots\ 2x + y - 12 = 0$ *i* $p_2\ldots\ \frac{x}{1} + \frac{y}{-3} = 1$ *sijeku se na paraboli* $y^2 = 2px$. *Odredite jednadžbu ravnalice te parabole.*

<u>**Rješenje:**</u> Sjecište zadanih pravaca dobivamo rješavajući sustav

$$2x + y = 12$$
$$3x - y = 3$$

Odavde je $x = 3$, $y = 6$, tj. $S = (3, 6)$. Ta točka mora pripadati paraboli $y^2 = 2px$ pa uvrštavanjem $x = 3$ i $y = 6$ u jednadžbu parabole dobivamo

$$6^2 = 2p \cdot 3,$$

a otuda je $p = 6$. Jednadžba ravnalice parabole $y^2 = 2px$ je $r\ldots\ x = -\frac{p}{2}$, pa uvrštavanjem $p = 6$ konačno dobivamo traženu jednadžbu: $d\ldots\ x = -3$.

1315. *Odredite skup svih realnih rješenja nejednadžbe* $1 < \frac{x}{x-1}$.

Rješenje: Zadanu nejednadžbu najprije zapišimo u obliku

$$1 < 1 + \frac{1}{x-1},$$

a odavde je

$$\frac{1}{x-1} > 0 .$$

Brojnik razlomka na lijevoj strani dobivene nejednadžbe je strogo pozitivan realan broj, pa takav mora biti i nazivnik:

$$x - 1 > 0.$$

Odavde je $x > 1$, pa je traženi skup $S = \langle 1, +\infty \rangle$.

1316. *Odredite skup svih vrijednosti realnoga parametra* $m \in \mathbf{R}$ *za koje kvadratna jednadžba* $(3 - m)x^2 - 2 - m = 0$ *ima realna rješenja.*

Rješenje: Navedena jednadžba ima realna rješenja ako i samo ako istodobno vrijede sljedeće tvrdnje:

1.) koeficijent uz x^2 je različit od nule;
2.) diskriminanta D je nenegativan realan broj.

Iz prvoga uvjeta odmah slijedi $m \neq 3$. Budući da je

$$D = 0^2 - (3 - m)(-2 - m) = (m + 2)(3 - m),$$

iz nejednadžbe $D \geq 0$ slijedi $m \in [-2, 3]$. Zbog uvjeta $m \neq 3$, traženi je skup $[-2, 3\rangle$.

1317. *Opseg pravilnoga mnogokuta koji ima ukupno* 54 *dijagonale iznosi* 108 cm. *Izračunajte njegovu površinu.*

Rješenje: Neka su n ukupan broj stranica, d ukupan broj dijagonala, a duljina bilo koje stranice i α središnji kut toga mnogokuta. Ukupan broj dijagonala računamo prema formuli $d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$. Uvrstimo li u tu formulu d = 54, dobit ćemo kvadratnu jednadžbu

$$n^2 - 3n - 108 = 0$$

čija su rješenja $n_1 = -9$ i $n_2 = 12$. Broj stranica mnogokuta je uvijek prirodan broj, pa rješenje n_1 zanemarujemo, što znači da je $n = 12$. Sada u formulu za opseg pravilnoga n – terokuta

$$O = n \cdot a$$

uvrstimo $O = 108$ i $n = 12$, pa dobijemo $a = 9$ cm. Središnji kut mnogokuta izračunat ćemo iz formule

$$\alpha = \frac{360°}{n}$$

pa uvrštavanjem $n = 12$ dobivamo $\alpha = 30°$. Tako je tražena površina jednaka

$$P = \frac{1}{4} n a^2 \text{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} \cdot 12 \cdot 9^2 \text{ctg} \frac{30°}{2} = 243 \cdot \text{ctg } 15°.$$

Zbog

$$\text{ctg } 15° = \frac{\text{ctg}45° \text{ctg}30° + 1}{\text{ctg}30° - \text{ctg}45°} = \frac{1 \cdot \sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3},$$

slijedi $P = 243 \cdot (2 + \sqrt{3}) \approx 906.89 \text{ cm}^2$.

1318. *Uspravni kružni stožac čiji je promjer osnovke jednak R i kugla polumjera R imaju jednaka oplošja. Odredite omjer obujma stošca i obujma kugle.*

<u>Rješenje:</u> Oplošje kugle je $O_k = 4R^2\pi$. Polumjer osnovke stošca je $r_s = \frac{1}{2}R$, pa je oplošje stošca jednako

$$O_s = r_s \cdot \pi \cdot (r + s) = \frac{1}{2} R \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2} R + s\right).$$

Iz uvjeta $O_k = O_s$ dobivamo jednakost

$$4R^2\pi = \frac{1}{2} R \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2} R + s\right)$$

iz koje je $s = \frac{15}{2} R$. Izračunajmo sada duljinu visine v stošca kao funkciju varijable R. Imamo:

$$v = \sqrt{s^2 - r_s^2} = \sqrt{\left(\frac{15}{2} R\right)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \sqrt{56R^2} = 2 \cdot R \cdot \sqrt{14},$$

pa je obujam stošca jednak

$$V_s = \frac{1}{3} B v = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 2R \cdot \sqrt{14} = \frac{\sqrt{14}}{6} R^3 \pi.$$

Tako je traženi omjer jednak

$$V_s : V_k = \frac{\frac{\sqrt{14}}{6} R^3 \pi}{\frac{4}{3} R^3 \pi} = \sqrt{14} : 8.$$

1319. *Duljine veće osnovice i kraka jednakokračnoga trapeza su redom $a = 12$ cm i $b = 9$ cm. Ako je kosinus kuta među njima jednak $\frac{1}{3}$, izračunajte površinu trapeza.*

<u>Rješenje:</u> Neka je c duljina manje osnovice trapeza. Tada je kosinus kuta između veće osnovice i kraka jednak

$$\cos\alpha = \frac{\frac{a-c}{2}}{b} = \frac{a-c}{2b}.$$

Odavde je

$$c = a - 2b\cos\alpha = 12 - 2\cdot 9\cdot \frac{1}{3} = 6,$$

pa je duljina visine v zadanoga trapeza

$$v = b\sin\alpha = b\sqrt{1-\cos^2\alpha} = 9\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 9\cdot\frac{2}{3}\sqrt{2} = 6\sqrt{2}\text{ cm}.$$

Stoga je tražena površina P jednaka

$$P = \frac{a+c}{2}\cdot v = \frac{12+6}{2}\cdot 6\sqrt{2} = 54\sqrt{2}\text{ cm}^2.$$

1320. *Duljine kateta pravokutnoga trokuta su* $a = 10$ cm *i* $b = 24$ cm. *U trokut je smješten kvadrat stranice* $d = 9$ cm *tako da mu se jedan vrh podudara s vrhom pravoga kuta trokuta, a dvije stranice leže na katetama. Izračunajte površinu presjeka kvadrata i trokuta.*

Rješenje: Presjek kvadrata i trokuta je konveksni peterokut. Njegovu ćemo površinu izračunati tako da od ukupne površine zadanoga pravokutnoga trokuta oduzmemo površinu dijela trokuta koji ne pripada kvadratu, a kojega tvore dva pravokutna trokuta slična zadanom trokutu. Prvi od tih trokuta ima jednu katetu duljine $a_1 = a - d = 10 - 9 = 1$ cm, a duljinu b_1 druge katete izračunat ćemo iz razmjera:

$$a : b = (a - d) : b_1.$$

Odatle je $b_1 = \frac{(a-d)\cdot b}{a} = \frac{1\cdot 24}{10} = \frac{12}{5} = 2.4$ cm. Površina toga trokuta je $P_1 = \frac{a_1\cdot b_1}{2} = \frac{1\cdot\frac{12}{5}}{2} = \frac{6}{5}\text{ cm}^2$. Nadalje, drugi od tih trokuta ima jednu katetu duljine $a_2 = b - d = 24 - 9 = 15$ cm, a duljinu b_2 druge njegove katete izračunat ćemo iz razmjera:

$$a : b = b_2 : (b - d).$$

Odavde je $b_2 = \frac{(b-d)\cdot a}{b} = \frac{15\cdot 10}{24} = \frac{25}{4}$ cm, pa je površina toga trokuta jednaka $P_2 = \frac{a_2\cdot b_2}{2} = \frac{15\cdot\frac{25}{4}}{2} = \frac{375}{8}\text{ cm}^2$. Tako konačno dobivamo da je tražena površina presjeka jednaka

$$P_p = P_\Delta - (P_1 + P_2) = \frac{a\cdot b}{2} - (P_1 + P_2) = \frac{10\cdot 24}{2} - \left(\frac{6}{5} + \frac{375}{8}\right) = \frac{2877}{40} = 71.925\text{ cm}^2.$$

1321. *Pojednostavnite izraz* $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$ *za* $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$.

Rješenje: Imamo redom:

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - 2\cdot(\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha) = \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 - 2\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \left(\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)^2 - 2 =$$

$$=\left(\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}\right)^2-2=\left(\frac{2}{\sin 2\alpha}\right)^2-2=\frac{4}{\sin^2 2\alpha}-2=\frac{4}{\frac{1-\cos 4\alpha}{2}}-2=\frac{8}{1-\cos 4\alpha}-2.$$

1322. *Izračunajte duljinu najveće stranice trokuta ABC zadanoga koordinatama svojih vrhova* $A = (1, -1)$, $B = (4, 1)$ *i* $C = (7, 7)$.

Rješenje: Izračunajmo redom duljine dužina AB, BC i AC, pa ih usporedimo:

$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(4-1)^2+[1-(-1)]^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13},$$
$$\left|\overline{BC}\right|=\sqrt{(7-4)^2+(7-1)^2}=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{45},$$
$$\left|\overline{AC}\right|=\sqrt{(7-1)^2+[7-(-1)]^2}=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{100}=10.$$

Odavde izravno slijedi da je tražena duljina jednaka 10.

1323. *Izračunajte* $f(200)$ *ako za svaki dopustivi realan broj* $x \in \mathbf{R}$ *vrijedi jednakost*

$$f\left(\frac{2+x}{x}\right)=x.$$

Rješenje: Uočimo odmah da iz navedene jednakosti izravno slijedi da je traženi broj rješenje jednadžbe $\frac{2+x}{x}=200$. Odatle je $x = \frac{2}{199}$, pa je $f(200) = \frac{2}{199}$.

1324. *Izračunajte površinu trokuta kojega omeđuju asimptote hiperbole* $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ *i pravac okomit na os Ox koji prolazi desnim žarištem te hiperbole.*

Rješenje: Iz jednadžbe hiperbole odmah slijedi $a^2 = 16$, $b^2 = 9$ i $e^2 = a^2 + b^2 = 25$. Stoga su jednadžbe asimptota hiperbole $p_1 \ldots\ y = -\sqrt{\frac{b^2}{a^2}}x=-\frac{3}{4}x$ i $p_2 \ldots\ y = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}}x=\frac{3}{4}x$, a desno žarište hiperbole $F_2 = (\sqrt{e^2}, 0) = (5, 0)$. Odatle slijedi da je jednadžba treće stranice trokuta $p_3 \ldots\ x = 5$. Pravci p_1 i p_2 se sijeku u ishodištu (jer se asimptote svake hiperbole sijeku u ishodištu), a sjecišta pravaca p_1 i p_3, odnosno p_2 i p_3 su rješenja sustava

$$\begin{aligned} y&=-\frac{3}{4}x \\ x&=5 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} y&=\frac{3}{4}x \\ x&=5 \end{aligned}$$

Stoga su vrhovi trokuta čiju površinu tražimo $S_1 = (0, 0)$, $S_2 = (5, -\frac{15}{4})$ i $S_3 = (5, \frac{15}{4})$. Duljina osnovice S_2S_3 toga trokuta jednaka je $\frac{15}{4}+\frac{15}{4}=\frac{15}{2}$, a duljina visine na tu osnovicu jednaka je 5. Stoga je tražena površina jednaka

$$P=\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{2}\cdot 5=\frac{75}{4}=18.75 \text{ kv. jed.}$$

1325. *Izračunajte zbroj svih prirodnih brojeva djeljivih s* 9 *koji pripadaju skupu* [1000].

Rješenje: Ti prirodni brojevi tvore aritmetički niz kojemu je prvi član jednak $a_1 = 9$, razlika $d = 9$, a posljednji član $a_n = 999$. Njihov broj n odredit ćemo iz formule za opći član aritmetičkoga niza

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

u koju ćemo uvrstiti $a_n = 999$, $a_1 = d = 9$. Tako ćemo dobiti linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom

$$999 = 9 + (n - 1) \cdot 9$$

iz koje je $n = 111$. Preostaje nam u formulu za zbroj prvih n članova aritmetičkoga niza

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

uvrstiti $n = 111$, $a_1 = 9$ i $a_n = 999$. Dobiva se $S_{111} = 55\,944$ i to je traženi zbroj.

1326. *Odredite prikloni kut pravilne uspravne četverostrane piramide čije su sve pobočke jednakostranični trokutovi.*

Rješenje: Neka je a duljina osnovnoga brida te piramide. Tada je i duljina bočnoga brida te piramide jednaka a. Uočimo pravokutan trokut kojega tvore bočni brid, polovica dijagonale osnovke i visina piramide. Njegova je hipotenuza jednaka a, a jedna kateta $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. Označimo li traženi kut s α, slijedi:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Odatle je $\alpha = 45°$.

1327. *Odredite skup svih realnih rješenja jednadžbe* $\log^3 x + 3\log^2 x + 3\log x + 2 = 0$.

Rješenje: Zadanu jednadžbu možemo zapisati u obliku $(\log x + 1)^3 + 1 = 0$, a odavde je $\log x + 1 = -1$, odnosno $\log x = -2$. Stoga je jedino realno rješenje polazne jednadžbe $x = 10^{-2} = \frac{1}{100} = 0.01$. Dakle, traženi je skup $S = \{0.01\}$.

1328. *Puni li se neka posuda jednom slavinom, bit će napunjena za* 18 minuta, *a puni li se drugom, napunit će se za* 9 minuta *dulje. Koliko je minuta potrebno za punjenje pet devetina obujma posude otvore li se obje slavine?*

Rješenje: Prva slavina u jednoj minuti napuni $\frac{1}{18}$ posude, a druga $\frac{1}{18+9} = \frac{1}{27}$ posude. Stoga obje slavine u jednoj minuti napune $\frac{1}{18} + \frac{1}{27} = \frac{5}{54}$ posude, pa je za punjenje $\frac{5}{9}$ posude potrebno $\frac{5}{9} : \frac{5}{54} = \frac{5}{9} \cdot \frac{54}{5} = 6$ minuta.

1329. *U prvom je tjednu neka robna kuća prodala* 15% *ukupne pošiljke televizora na rasprodaji, a u drugom tjednu* 40% *ostatka pošiljke. Izračunajte ukupni postotak rasprodanih televizora te pošiljke u prva dva tjedna.*

Rješenje: Označimo li s x ukupan broj televizora u toj pošiljki, onda je traženi postotak jednak $p = \frac{\frac{15}{100} \cdot x + \frac{40}{100} \cdot (x - \frac{15}{100} \cdot x)}{x} = \frac{49}{100} = 49\%$.

1330. *Graf realne funkcije* $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in$ **R**, $a \neq 0)$ *dodiruje os* Ox, *siječe os* Oy *u točki s ordinatom* 3, *te prolazi točkom* $T(2, 3)$. *Odredite vrijednost parametra* a.

Rješenje: To što graf realne funkcije dodiruje os Ox znači da je jednadžba $f(x) = 0$ ima točno jedno realno rješenje, pa zadanu funkciju možemo zapisati u obliku $f(x) = a(x - x_0)^2$, gdje je x_0 spomenuta jedina realna nultočka zadane funkcije. Nadalje, činjenica da graf zadane funkcije siječe os Oy u točki s ordinatom 3 znači da je $f(0) = 3$, a ćinjenica da graf prolazi točkom (2, 3) znači da je $f(2) = 3$. Tako u izraz $f(x) = a(x - x_0)^2$ uvrstimo najprije $x = 0$, a potom $x = 2$. Dobit ćemo:

$$f(0) = a(0 - x_0)^2,$$
$$f(2) = a(2 - x_0)^2,$$

a te jednakosti – zbog $f(0) = f(2) = 3$ – možemo zapisati u obliku:

$$3 = a \cdot \ x_0^2$$
$$3 = a(2 - x_0)^2$$

Dijeljenjem tih jednadžbi dobivamo:

$$\left(\frac{2-x_0}{x_0}\right)^2 = 1$$

Odavde je

$$\frac{2-x_0}{x_0} = 1$$

($\frac{2-x_0}{x_0} = -1$ vodi na kontradikciju $0 = 2$), pa je $x_0 = 1$. Uvrštavanjem dobivene vrijednosti u izraz

$$3 = a \cdot \ x_0^2$$

odmah dobivamo $a = 3$.

1331. *Izračunajte vrijednost izraza* $\left(\log_{\frac{3}{2}} \frac{4}{9} - \log_{\frac{4}{25}} \frac{125}{8}\right) \cdot \log_5 \frac{1}{25}$.

Rješenje: Koristit ćemo jednakost

$$\log_{a^k}(b^n) = \frac{n}{k} \log_a b$$

koja vrijedi za sve dopustive brojeve $a, b \in$ **R** i sve cijele brojeve $k, n \in$ **Z**. Tako redom imamo:

$$\left(\log_{\frac{3}{2}} \frac{4}{9} - \log_{\frac{4}{25}} \frac{125}{8}\right) \cdot \log_5 \frac{1}{25} = \left[\log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{9}{4}\right)^{-1} - \log_{\left(\frac{2}{5}\right)^2} \left(\frac{8}{125}\right)^{-1}\right] \cdot \log_5 (25^{-1}) = \left[-\log_{\frac{3}{2}} \frac{9}{4} + \frac{1}{2} \log_{\frac{2}{5}} \frac{8}{125}\right] \cdot (-\log_5 25) =$$
$$= \left[-\log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \log_{\frac{2}{5}} \left(\frac{2}{5}\right)^3\right] \cdot \left[-\log_5 (5^2)\right] = \left(-2 \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3 \log_{\frac{2}{5}} \frac{2}{5}\right) \cdot (-2 \log_5 5) = \left(-2 \cdot 1 + \frac{3}{2} \cdot 1\right) \cdot (-2 \cdot 1) = 1.$$

1332. *Pravac* $p \ldots\ 3x + y + 10 = 0$ *je normala kružnice koja ima središte u trećem kvadrantu i dodiruje obje koordinatne osi. Odredite polumjer te kružnice.*

Rješenje: Neka je r ($r > 0$) traženi polumjer. Činjenica da kružnica ima središte u trećem kvadrantu i dodiruje obje koordinatne osi znači da je središte kružnice u točki $S = (-r, -r)$. Ta točka pripada pravcu p pa uvrštavanjem njezinih koordinata u jednadžbu pravca dobivamo:

$$-3r - r + 10 = 0,$$

a odavde je $r = \frac{5}{2} = 2.5$.

1333. *Vrhovi trokuta ABC su* $A = (2, 4)$, $B = (1, 1)$ *i* $C = (5, 3)$. *Izračunajte duljinu visine iz vrha A.*

Rješenje: Traženu duljinu izračunat ćemo prema formuli

$$v_a = \frac{2P}{\left|\overline{BC}\right|}.$$

Dvostruku vrijednost površine P trokuta ABC izračunat ćemo prema formuli:

$$2P = |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)| = |2 \cdot (1 - 3) + 1 \cdot (3 - 4) + 5 \cdot (4 - 1)| = 10,$$

a duljinu stranice BC prema formuli za udaljenost dviju točaka u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini:

$$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{(5-1)^2 + (3-1)^2} = 5.$$

Prema tome, $v_a = \frac{10}{5} = 2$.

1334. *Izračunajte*: $\left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i + \frac{3-i}{1+2i}\right)^{38}$.

Rješenje: Imamo redom:

$$\left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i + \frac{3-i}{1+2i}\right)^{38} = \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i + \frac{(3-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}\right)^{38} = \left(\frac{-1+2i}{5} + \frac{1-7i}{5}\right)^{38} = (-i)^{38} = (-1)^{38} \cdot i^{38} = 1 \cdot i^{4 \cdot 9 + 2} =$$
$$= (i^4)^9 \cdot i^2 = 1^9 \cdot (-1) = -1.$$

1335. *Razlika duljina stranica pravokutnika je* 4 cm. *Vrtnjom pravokutnika oko njegove dulje stranice dobije se tijelo čije je oplošje* 192π cm^2. *Izračunajte obujam tijela nastaloga vrtnjom pravokutnika oko njegove kraće stranice.*

Rješenje: Označimo duljine stranica pravokutnika s a i b. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a > b$. Podatak da je razlika duljina stranica pravokutnika jednaka 4 cm možemo zapisati u obliku jednadžbe

$$a - b = 4.$$

Vrtnjom pravokutnika oko njegove dulje stranice dobije se valjak kojemu je polumjer osnovke jednak b, a visina a. Njegovo je oplošje jednako:

$$O = 2b\pi(b + a),$$

pa na temelju podataka iz zadatka dobivamo jednadžbu

$$2b\pi(b + a) = 192\pi,$$

odnosno

$$b(b + a) = 96.$$

Tako smo dobili sustav

$$a - b = 4$$
$$b(b + a) = 96.$$

Iz prve jednadžbe je $a = b + 4$, što uvršteno u drugu jednadžbu daje

$$b(2b + 4) = 96,$$

odnosno kvadratnu jednadžbu

$$b^2 + 2b - 48 = 0.$$

Sva realna rješenja ove jednadžbe su $b_1 = -8$ i $b_2 = 6$. Rješenje $b_1 = -8$ ne dolazi u obzir jer duljina stranice pravokutnika ne može biti strogo negativan realan broj. Stoga je $b = 6$ cm, pa je $a = b + 4 = 10$ cm.
Vrtnjom pravokutnika oko njegove kraće stranice, tj. stranice b, nastaje valjak kojemu je polumjer osnovke jednak $a = 10$ cm, a visina $b = 6$ cm. Njegov je obujam $V = a^2\pi \cdot v = 600\pi$ cm^3.

1336. *U tupokutnom je trokutu kut nasuprot stranice* $a = 9$ cm *jednak* $\alpha = 37°$. *Izračunajte tupi kut nasuprot stranice* $b = 14$ cm.

Rješenje: Prema sinusovu je poučku

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a} = \frac{14\sin 37°}{9} \approx 0.93615670268096399098351977846454.$$

Odavde je $\beta = 110.5841701° \approx 110°35'3''$.

1337. *Odredite skup svih rješenja nejednadžbe* $\sin x > \cos x$ *u intervalu* $\langle 0, 2\pi\rangle$

Rješenje: U zadanom intervalu jednadžba $\sin x = \cos x$, odnosno njoj ekvivalentna jednadžba $\operatorname{tg} x = 1$, ima točno dva rješenja: $x_1 = \frac{\pi}{4}$ i $x_2 = \frac{5\pi}{4}$. Na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle$ funkcija $f(x) = \sin x$ strogo raste poprimajući sve međuvrijednosti od $\sin 0 = 0$ do $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, dok funkcija $g(x) = \cos x$ strogo pada poprimajući sve međuvrijednosti od $\cos 0 = 1$ do $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Stoga za svaki $x \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle$ vrijedi nejednakost $\sin x < \cos x$. Nadalje, na intervalu $\langle \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\rangle$ funkcija $f(x)$ najprije strogo raste poprimajući sve međuvrijednosti od $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ do $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, a potom strogo pada poprimajući sve međuvrijednosti od $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ do $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Na istom intervalu funkcija $g(x)$ strogo pada poprimajući sve međuvrijednosti od $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ do $\cos\pi = -1$, a potom strogo raste poprimajući sve međuvrijednosti od $\cos\pi = -1$ do $\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Stoga za svaki $x \in \langle \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\rangle$ vrijedi nejednakost $\sin x > \cos x$.

Napokon, na intervalu $\langle \frac{5\pi}{4}, 2\pi \rangle$ funkcija $f(x)$ strogo pada popimajući sve međuvrijednosti od $\sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ do $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$, a potom strogo raste poprimajući sve međuvrijednosti od $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$ do $\sin 2\pi = 0$. Na istom intervalu funkcija $g(x)$ strogo raste popimajući sve međuvrijednosti od $\cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ do $\cos 2\pi = 1$. Stoga za svaki $x \in \langle \frac{5\pi}{4}, 2\pi \rangle$ vrijedi nejednakost $\sin x < \cos x$.

Tako zaključujemo da je traženi skup rješenja jednak $S = \langle \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \rangle$.

1338. *Odredite apscisu sjecišta osi Ox i tangente na krivulju* $x^2 - y^2 = 9$ *povučene u točki* $T = (5, y > 0)$.

Rješenje: Odredimo najprije drugu koordinatu točke T. Ona pripada zadanoj krivulji, pa njezine koordinate moraju zadovoljavati jednadžbu krivulje. Uvrštavanjem $x = 5$ u jednadžbu krivulje dobivamo

$$5^2 - y^2 = 9,$$

odnosno

$$y^2 = 16.$$

Jedino strogo pozitivno realno rješenje ove jednadžbe je $y = 4$, pa je $T = (5, 4)$. Nadalje, uočimo da je zadana krivulja hiperbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$, pa jednadžba tangente povučene na hiperbolu u bilo kojoj točki $A = (x_1, y_1)$ hiperbole glasi:

$$\frac{x_1 x}{9} - \frac{y_1 y}{9} = 1,$$

odnosno u segmentnom obliku

$$\frac{x}{\frac{9}{x_1}} - \frac{y}{\frac{9}{y_1}} = 1.$$

Tražena apscisa jednaka je koeficijentu "ispod" varijable x za $x_1 = 5$, $y_1 = 4$. Taj je koeficijent jednak $\frac{9}{5}$ i to je rješenje postavljenoga zadatka.

1339. *Za koje vrijednosti strogo pozitivnoga realnoga parametra* $k \in \mathbf{R}$ *realna funkcija* $f(x) = \sqrt{x^2 - 2kx + 3}$ *ima točno jednu realnu nultočku*?

Rješenje: Zadana funkcija će imati točno jednu realnu nultočku ako i samo ako diskriminanta D kvadratne jednadžbe $x^2 - 2kx + 3 = 0$ bude jednaka nuli. Budući da je

$$D = (2k)^2 - 4 \cdot 3 = 4k^2 - 12,$$

dobiva se kvadratna jednadžba

$$4k^2 - 12 = 0$$

čije je jedino strogo pozitivno realno rješenje $k = \sqrt{3}$ i to je jedina tražena vrijednost.

1340. *Jedina realna nultočka realne funkcije $f(x)$ je $x_0 = 5$. Odredite barem jednu nultočku realne funkcije $g(x) = f\left(\frac{x-4}{5}\right)$.*

Rješenje: Iz činjenice da je $x_0 = 5$ jedina realna nultočka realne funkcije $f(x)$ slijedi $f(5) = 0$. Odaberemo li x_1 takav da je $\frac{x_1-4}{5} = 5$, onda je $g(x_1) = f(\frac{x_1-4}{5}) = f(5) = 0$, pa je x_1 nultočka funkcije $g(x)$. Preostaje nam, dakle, riješiti jednadžbu

$$\frac{x_1-4}{5} = 5.$$

Odavde je $x_1 = 29$ i to je nultočka funkcije $g(x)$.

1341. *Jednakokračan trapez ima visinu duljine 5 i međusobno okomite dijagonale. Izračunajte površinu toga trapeza.*

Rješenje: Neka je $ABCD$ zadani trapez tako da je $|AB| = a$ duljina veće osnovice, $|CD| = c$ duljina kraće osnovice, $|BC| = |AD| = b$ duljina kraka i $v = 5$ duljina visine trapeza. Koristit ćemo činjenice (dokažite ih za vježbu) da dijagonale jednakokračnoga trapeza imaju jednake duljine, te da njihovo sjecište S pripada zajedničkoj simetrali osnovica AB i CD. Potonja činjenica izravno povlači

$$|AS| = |BS|$$
$$|CS| = |DS|,$$

tj. trokutovi ABS i CDS su jednakokračni. Označimo $|AS| = e$, $|CS| = f$. Budući da im kut kod vrha S, prema uvjetu zadatka, pravi kut, riječ je o nesukladnim jednakokračnim pravokutnim trokutovima. Povucimo iz vrha S okomice na stranice AB i CD. Nožišta tih okomica su polovišta P_1 i P_2 stranica AB i CD. Trokut AP_1S je jednakokračan pravokutan trokut (kut P_1AS jednak je kutu BAS, a taj je jednak 45° jer je trokut ABS jednakokračan pravokutan trokut), pa zaključujemo da je $|AP_1| = |P_1S|$. Iz potpuno analognih razloga je $|CP_2| = |P_2S|$. Zbrojimo li te dvije jednakosti, dobit ćemo:

$$|AP_1| + |CP_2| = |P_1S| + |P_2S|.$$

U ovu jednakost uvrstimo:

$$|AP_1| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}a$$
$$|CP_2| = \frac{1}{2}|CD| = \frac{1}{2}c$$
$$|P_1S| + |P_2S| = |P_1P_2| = v,$$

pa dobivamo:

$$v = \frac{1}{2}(a+c),$$

tj.

$$a + c = 2v.$$

Stoga je tražena površina trapeza jednaka

$$P = \frac{a+c}{2}\cdot v = \frac{2v}{2}\cdot v = v^2 = 25 \text{ kv. jed.}$$

1342. *Polumjer osnovke uspravnoga kružnoga valjka jednak je R. Visina polaznoga valjka produljena je tako da plašt dobivenoga valjka ima površinu jednaku oplošju polaznoga valjka. Izrazite produljenje visine kao funkciju varijable R.*

Rješenje: Neka je v visina polaznoga valjka. Tada je njegovo oplošje

$$O = 2R\pi \cdot (R + v).$$

Označimo traženo produljenje s d. Visina v_1 dobivenoga valjka je

$$v_1 = v + d,$$

pa je površina njegova plašta

$$P_1 = 2R\pi \cdot v_1 = 2R\pi \cdot (v + d)$$

Prema uvjetu zadatka je $O = P_1$, pa izjednačavanjem desnih strana slijedi

$$2R\pi \cdot (R + v) = 2R\pi \cdot (v + d),$$

odnosno

$$R + v = v + d.$$

Odavde je $d = R$, pa je tražena funkcija $d = d(R) = R$.

1343. *Središte kružnice upisane jednakokračnomu trokutu dijeli visinu na osnovicu trokuta u omjeru* 12 : 5. *Ako je duljina kraka toga trokuta jednaka* 60, *izračunajte duljinu osnovice trokuta.*

Rješenje: Neka su a duljina osnovice, v duljina visine na osnovice i $b = 60$ duljina kraka zadanoga trokuta, a r polumjer trokutu upisane kružnice. Središte kružnice upisane jednakokračnomu trokutu općenito dijeli visinu na osnovicu toga trokuta na dva dijela: manji od njih ima duljinu r, a veći od njih ima duljinu $v - r$. Tako iz razmjera

$$(v - r) : r = 12 : 5$$

slijedi

$$5v - 5r = 12r,$$

odnosno

$$r = \frac{5}{17} v.$$

No, s druge je strane

$$r = \frac{P}{s} = \frac{\frac{1}{2} av}{\frac{1}{2}(a + 2b)} = \frac{av}{a + 2b},$$

pa izjednačavanjem desnih strana posljednjih dviju jednakosti dobivamo

$$\frac{av}{a + 2b} = \frac{5}{17} v,$$

a odavde je

$$a = \frac{5}{6} b = \frac{5}{6} \cdot 60 = 50.$$

1344. *Jedan vanjski kut trokuta iznosi* 104°, *a omjer njemu nesusjednih unutrašnjih kutova trokuta je* 3 : 5. *Odredite najmanji kut ovoga trokuta.*

Rješenje: Koristit ćemo činjenicu da je vanjski kut trokuta jednak zbroju njemu nesusjednih unutrašnjih kutova trokuta. Jedan unutrašnji kut trokuta jednak je 180° – 104° = 76°. Preostala dva dobit ćemo razdijelimo li kut od 104° u omjeru 3 : 5. Pripadni omjerni koeficijent jednak je

$$k = \frac{104}{3+5} = 13,$$

pa su ti kutovi jednaki 3 · 13 = 39° i 5 ·13 = 65°. Očito, najmanji kut trokuta iznosi 39°.

1345. *Duljine dviju stranica šiljastokutnoga trokuta su* 10 cm *i* 12 cm, *a površina trokuta iznosi* 48 cm^2. *Izračunajte duljinu treće stranice toga trokuta.*

Rješenje: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je a = 10 cm i b = 12 cm, te da tražimo duljinu stranice c. Uz standardne oznake u trokutu, primjenom sinusova poučka dobivamo

$$\sin \gamma = \frac{2P}{ab} = \frac{2 \cdot 48}{10 \cdot 12} = \frac{4}{5},$$

pa je, zbog pretpostavke o šiljastokutnosti trokuta, kosinus istoga kuta jednak

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}.$$

Preostaje primijeniti kosinusov poučak:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = \sqrt{10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \frac{3}{5}} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}.$$

1346. *Odredite jednadžbu pravca čija je svaka točka jednako udaljena od točaka* A = (2, 6) *i* B = (4, 4).

Rješenje: Traženi pravac je simetrala dužine AB. Njezin je koeficijent suprotan i recipročan koeficijentu smjera pravca kroz točke A i B, tj.

$$k = -\frac{1}{\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}} = \frac{x_A - x_B}{y_B - y_A} = \frac{2-4}{4-6} = 1,$$

a ona prolazi kroz polovište P dužine AB čije su koordinate

$$P = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{6+4}{2}\right) = (3, 5).$$

Stoga je njezina jednadžba

$$y - 5 = 1 \cdot (x - 3),$$

odnosno $s\ldots\ y = x + 2$.

1347. *Odredite realni dio kompleksnoga broja* $z = \frac{1-3i}{2+i} + \frac{1-4i}{3+i}$.

Rješenje: Imamo redom:

$$\mathrm{Re}\, z = \mathrm{Re}\left(\frac{1-3i}{2+i} + \frac{1-4i}{3+i}\right) = \mathrm{Re}\frac{(1-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} + \mathrm{Re}\frac{(1-4i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \mathrm{Re}\frac{-1+7i}{5} + \mathrm{Re}\frac{-1-13i}{10} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{10} = -\frac{3}{10}.$$

1348. *Kojoj vrsti krivulja pripada krivulja K…* $2x^2 = 5x - y^2 + 1$?

Rješenje: Jednadžbu krivulje K zapišimo u obliku

$$2x^2 - 5x + y^2 = 1,$$

odnosno u obliku

$$2(x - \frac{5}{4})^2 - \frac{25}{8} + y^2 = 1,$$

a odavde je

$$\frac{(x - \frac{5}{4})^2}{\frac{33}{16}} + \frac{y^2}{\frac{33}{8}} = 1$$

Zaključujemo da je zadana krivulja elipsa sa središtem u točki $S = (\frac{5}{4}, 0)$ čija velika poluos ima duljinu $a = \frac{1}{4}\sqrt{33}$, a mala poluos duljinu $b = \sqrt{\frac{33}{8}} = \frac{1}{4}\sqrt{66}$.

1349. *Odredite skup svih realnih rješenja jednadžbe* $\log x + \log(2x) + \log(3x) = \log 60 - 4$.

Rješenje: Zadanu jednadžbu možemo napisati u ekvivalentnom obliku

$$\log(x \cdot 2x \cdot 3x) = \log 60 - \log(10^4),$$

odnosno u obliku

$$\log(6x^3) = \log \frac{60}{10^4}.$$

Odavde je

$$6x^3 = \frac{60}{10^4},$$

odnosno

$$x^3 = \left(\frac{1}{10}\right)^3.$$

Jedino realno rješenje ove kubne jednadžbe je $x = \frac{1}{10}$. Dakle, traženi je skup $S = \{\frac{1}{10}\}$.

1350. *Razlike duljine prostorne dijagonale kvadra i duljine svakoga od njegovih bridova redom iznose* 20, 18 *i* 2. *Odredite duljinu prostorne dijagonale toga kvadra.*

Rješenje: Neka je d tražena duljina prostorne dijagonale. Tada su duljine bridova kvadra jednake $d – 20$, $d – 18$ i $d – 2$. Prema Pitagorinu je poučku kvadrat duljine prostorne dijagonale kvadra jednak zbroju kvadrata duljina bridova kvadra. Stoga mora vrijediti jednakost:

$$d^2 = (d-20)^2 + (d-18)^2 + (d-2)^2,$$

a odavde se kvadriranjem i reduciranjem dobije kvadratna jednadžba

$$d^2 - 40d + 364 = 0.$$

Sva realna rješenja ove jednadžbe su $d_1 = 14$ i $d_2 = 26$. Rješenje $d_1 = 14$ ne dolazi u obzir jer bi duljine dvaju bridova kvadra bili strogo negativni brojevi –6 i –4, a to je nemoguće. Stoga preostaje $d = d_2 = 26$.

1351. *Duljine stranica trokuta ABC su* $a = 9$ cm, $b = 14$ cm *i* $c = 19$ cm. *Svaka od tih stranica produljena je za jednak iznos tako da dobiveni trokut bude pravokutan. Za koliko se postotaka povećala površina trokuta ABC?*

Rješenje: Neka je $d > 0$ traženo produljenje. Zbog očite nejednakosti $a < b < c$ vrijedi nejednakost

$$9 + d < 14 + d < 19 + d,$$

pa $9 + d$ i $14 + d$ moaju biti duljine kateta, a $19 + d$ duljina hipotenuze novoga trokuta. Prema Pitagorinu poučku slijedi:

$$(9+d)^2 + (14+d)^2 = (19+d)^2,$$

a odavde se dobiva kvadratna jednadžba

$$d^2 + 8d - 84 = 0.$$

Jedino strogo pozitivno rješenje te jednadžbe je $d = 6$. Stoga svaku stranicu zadanoga trokuta treba produljiti za 6 cm, pa se dobije pravokutan trokut čije su duljine stranica $a_1 = 15$ cm, $b_1 = 20$ cm i $c_1 = 25$ cm. Prema Heronovoj je formuli površina trokuta ABC jednaka

$$P_{ABC} = \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\cdot\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\cdot\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\cdot\left(\frac{a+b-c}{2}\right)} = \sqrt{3528} = 42\sqrt{2}\ \text{cm}^2,$$

dok je površina dobivenoga pravokutnoga trokuta jednaka

$$P_1 = \frac{1}{2}a_1 b_1 = 150\ \text{cm}^2.$$

Stoga je traženo povećanje jednako

$$p = \frac{P_1 - P_{ABC}}{P_1} \approx 1.52538136138 \approx 152.54\%.$$

1352. *Neki je vozač trebao prijeći određen put u vremenu t vozeći cijelim putem prosječnom brzinom v. Umjesto toga, vozač je četvrtinu puta prešao za točno* 90 minuta *vozeći prosječnom brzinom v, potom se odmarao točno pola sata, a zatim prešao ostatak puta vozeći* *prosječnom brzinom $v_1 > v$ i pravodobno stigao na odredište. Za koliko je postotaka brzina v_1 veća od brzine v?*

Rješenje: Koristit ćemo osnovnu formulu jednolikoga gibanja po pravcu

$$v = \frac{s}{t}$$

gdje je v prosječna brzina, s prijeđeni put, a t ukupno vrijeme potrebno za prelazak puta s. Odavde je

$$t = \frac{s}{v} \qquad \text{i} \qquad s = v \cdot t.$$

Za prelazak prve četvrtine puta prosječnom brzinom v vozaču je trebalo točno 90 minuta. To znači da bi – vozeći prosječnom brzinom v – vozač prešao cijeli put s za točno 4 · 90 = 360 minuta. Budući da se odmarao točno 30 minuta, za prelazak preostale tri četvrtine puta vozač mora voziti prosječnom brzinom v_1 točno 360 – (90 + 30) = 240 minuta. Stoga vrijedi jednakost:

$$240 = \frac{\frac{3}{4}s}{v_1}$$

iz koje je

$$s = 320 \cdot v_1.$$

No, s druge je strane

$$s = 360 \cdot v$$

(jer bi vozač isti put prešao za 360 minuta vozeći prosječnom brzinom v), pa izjednačavanjem desnih strana posljednjih dviju jednakosti dobivamo:

$$320 \cdot v_1 = 360 \cdot v,$$

odnosno

$$v_1 = \frac{9}{8}v = v + \frac{1}{8}v = v + 12.5\% \cdot v\,,$$

pa je brzina v_1 veća od brzine v za 12.5%.

1353. *Pojednostavnite izraz*: $\left(\frac{1}{2-2\sqrt{a}} + \frac{1}{2+2\sqrt{a}} - \frac{1+a^2}{1-a^2}\right) \cdot (1+a^{-1})$.

Rješenje: Imamo redom:

$$\left(\frac{1}{2-2\sqrt{a}} + \frac{1}{2+2\sqrt{a}} - \frac{1+a^2}{1-a^2}\right) \cdot (1+a^{-1}) = \left[\frac{2+2\sqrt{a}+2-2\sqrt{a}}{(2-2\sqrt{a})(2+2\sqrt{a})} - \frac{1+a^2}{(1-a)(1+a)}\right] \cdot \left(1+\frac{1}{a}\right) =$$

$$= \left[\frac{4}{4-4a} - \frac{1+a^2}{(1-a)(1+a)}\right] \cdot \frac{a+1}{a} = \left[\frac{1}{1-a} - \frac{1+a^2}{(1-a)(1+a)}\right] \cdot \frac{a+1}{a} = \left[\frac{1+a}{(1-a)(1+a)} - \frac{1+a^2}{(1-a)(1+a)}\right] \cdot \frac{a+1}{a} =$$

$$\left[\frac{a-a^2}{(1-a)(1+a)}\right] \cdot \frac{a+1}{a} = \frac{a(1-a)}{(1-a)(1+a)} \cdot \frac{a+1}{a} = 1$$

1354. *Odredite zbroj svih realnih rješenja jednadžbe* $0.2^x + 5^{x+3} = 126$.

Rješenje: Zbog očite jednakosti $0.2 = 5^{-1}$ zadanu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$(5^x)^{-1} + 5^{x+3} = 126.$$

Uvedemo li zamjenu $t = 5^x$, dobivamo jednadžbu

$$t^{-1} + 5^3 \cdot t = 126,$$

odnosno, nakon množenja s t,

$$125t^2 - 126t + 1 = 0.$$

Sva realna rješenja ove jednadžbe su $t_1 = \frac{1}{125} = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = 5^{-3}$ i $t_2 = 1 = 5^0$. Tako iz $5^x = 5^{-3}$ slijedi $x_1 = -3$, a iz $5^x = 5^0$ slijedi $x_2 = 0$. Budući da su to sva realna rješenja polazne jednadžbe, njihov je zbroj jednak $x_1 + x_2 = -3$.

1355. *Geometrijski niz se sastoji isključivo od strogo pozitivnih članova. Ako je peti član niza* 162, *a sedmi* 1458, *koliko uzastopnih članova toga niza, počevši od prvoga, treba zbrojiti da se dobije broj* 242?

Rješenje: Neka je a_1 prvi član, a q količnik zadanoga niza. Tada je peti član niza

$$a_5 = a_1 \cdot q^4,$$

a sedmi

$$a_7 = a_1 \cdot q^6,$$

pa uvrštavanjem zadanih podataka u te jednakosti dobivamo jednadžbe

$$\begin{aligned} a_1 \cdot q^4 &= 162 \\ a_1 \cdot q^6 &= 1458 \end{aligned}$$

Dijeljenjem tih jednadžbi slijedi

$$q^2 = 9,$$

pa budući da se niz, prema pretpostavci, sastoji isključivo od strogo pozitivnih članova, jedino moguće rješenje je $q = 3$. Tako iz

$$a_1 \cdot q^4 = 162$$

uvrštavanjem $q = 3$ odmah slijedi $a_1 = 2$. Označimo li s n traženi broj uzastopnih članova, onda uvrštavanjem $S_n = 242$, $a_1 = 2$ i $q = 3$ u formulu za zbroj prvih n članova geometrijskoga niza

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

dobivamo eksponencijalnu jednadžbu

$$3^n = 243$$

čije je rješenje $n = 5$. Prema tome, treba zbrojiti prvih 5 članova zadanoga niza.

1356. *Odredite središte kružnice čije su normale pravci* $p_1 \ldots\ 2x - 3y - 1 = 0$ *i* $p_2 \ldots\ \dfrac{x}{\frac{11}{3}} + \dfrac{y}{\frac{11}{5}} =$ $= 1$.

Rješenje: Budući da svaka normala kružnice prolazi središtem kružnice, traženo je središte sjecište zadanih pravaca. Dakle, trebamo riješiti sustav

$$2x - 3y = 1$$
$$3x + 5y = 11$$

Odavde je $x = 2$, $y = 1$, pa je traženo središte $S = (2, 1)$.

1357. *Odredite zbroj svih rješenja jednadžbe* $\sin 2x = 2 \cos x$ *u segmentu* $[0, 8\pi]$.

Rješenje: Zbog identiteta

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

zadanu jednadžbu moženo zapisati u obliku

$$2 \cos x \cdot (\sin x - 1) = 0.$$

Odmah uočimo da, prema osnovnom trigonometrijskom identitetu, jednakost $\sin x - 1 = 0$, tj. $\sin x = 1$ povlači jednakost $\cos x = 0$. Stoga je skup svih rješenja jednadžbe $\sin x = 1$ podskup skupa svih rješenja jednadžbe $\cos x = 0$, pa će biti dovoljno riješiti jednadžbu

$$\cos x = 0.$$

Njezina rješenja u zadanom segmentu su $x_k = \frac{\pi}{2} \cdot (2k + 1)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 7$. Ona tvore konačan aritmetički niz osam realnih brojeva čiji je prvi član $\frac{\pi}{2}$, posljednji (osmi) $\frac{15\pi}{2}$, a razlika niza π. Prema formuli za broj prvih n članova aritmetičkoga niza slijedi traženi zbroj jednak

$$S_8 = \frac{8}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{15\pi}{2} \right) = 32\pi.$$

1358. *Zadane su realne funkcije* $f(x) = 2x + 1$ *i* $g(x) = x^2$. *Odredite skup svih realnih rješenja jednadžbe* $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

Rješenje: Budući da je

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^2) = 2x^2 + 1,$$
$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

izjednačavanjem tih dvaju izraza dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$2x^2 + 4x = 0.$$

Sva realna rješenja te jednadžbe su $x_1 = -2$ i $x_2 = 0$. Stoga je traženi skup $S = \{-2, 0\}$.

1359. *U kuglu je upisana kocka. Koliki dio (u %) kugle se nalazi izvan kocke?*

Rješenje: Neka su R polumjer kugle i a duljina brida kocke. Iz činjenice da je kocka upisana u kuglu slijedi da je duljina prostorne dijagonale kocke jednaka promjeru kugle, tj.

$$a\sqrt{3} = 2R.$$

Odavde je

$$a=\frac{2}{3}\sqrt{3}R\ ,$$

pa je obujam kocke

$$V_{kocke}=a^3=\frac{8}{9}\sqrt{3}R^3 .$$

Stoga je traženi postotak jednak

$$p=\frac{V_{kugle}-V_{kocke}}{V_{kugle}}=1-\frac{V_{kocke}}{V_{kugle}}=1-\frac{\frac{8}{9}\sqrt{3}R^3}{\frac{4}{3}R^3\pi}=1-\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}\approx 0.632447\approx 63.24\%.$$

1360. *Izračunajte* $\sin 2x$ *ako je* $\sin x-\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Rješenje: Kvadriramo li zadanu jednakost, dobit ćemo:

$$\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=\frac{1}{2},$$

odnosno

$$1-\sin 2x=\frac{1}{2}.$$

Odavde je izravno

$$\sin 2x=\frac{1}{2}.$$

1361. *Osnovka uspravne prizme je jednakokračan trapez čija dulja osnovica ima duljinu* $2a$, *a sve ostale stranice duljinu* a. *Prizmu presiječemo ravninom koja prolazi duljom osnovicom donje i kraćom osnovicom gornje osnovke. Ako je visina prizme* $\frac{5}{2}a$, *izrazite površinu presjeka prizme navedenom ravninom kao funkciju varijable* a.

Rješenje: Presjek zadane prizme i zadane ravnine je ponovno jednakokračan trapez kojemu je dulja osnovica $a_1 = 2a$, kraća osnovica $c_1 = a$, a kvadrat duljine kraka

$$b_1=b_1^2=a^2+\left(\frac{5}{2}a\right)^2=\frac{29}{4}a^2 .$$

Duljina visine v_1 toga trapeza jednaka je

$$v_1=\sqrt{b_1^2-\left(\frac{a_1-c_1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{29}{4}a^2-\left(\frac{2a-a}{2}\right)^2}=a\sqrt{7}\ ,$$

pa je tražena površina jednaka

$$P=\frac{a_1+c_1}{2}\cdot v_1=\frac{2a+a}{2}\cdot a\sqrt{7}=\frac{3}{2}\sqrt{7}\cdot a^2.$$

1362. *Duljine kateta pravokutnoga trokuta ABC su* $|AC|$ = 9 cm *i* $|BC|$ = 12 cm. *U točki koja dijeli hipotenuzu* $|AB|$ *u omjeru* 2 : 3 *računajući od vrha A povučena je okomica na hipotenuzu. Izračunajte duljinu onoga dijela te okomice koji se nalazi unutar trokuta ABC.*

Rješenje: Prena Pitagorinu poučku lako izračunamo duljinu hipotenuze *AB*:

$$|AB|=\sqrt{9^2+12^2}=15 \text{ cm}.$$

Neka su *D* točka koja hipotenuzu *AB* dijeli u omjeru 2 : 3 računajući od vrha *A* i *E* sjecište okomice povučene u točki *D* na hpotenuzu *AB* i katete *AC*. Podijelimo li vrijednost 15 u omjeru 2 : 3, dobit ćemo najprije omjerni koeficijent

$$k=\frac{15}{2+3}=3,$$

a potom i pojedine dijelove: $2k = 2\cdot 3 = 6$ i $3k = 3\cdot 3 = 9$. Stoga je duljina dužine *AD* jednaka

$$|AD| = 6 \text{ cm}.$$

Trokutovi *ADE* i *ABC* su slični (prema poučku K–K–K), pa postavljamo razmjer:

$$|AD| : |DE| = |AC| : |BC|$$

iz kojega je izravno

$$|DE|=\frac{|AD|\cdot|BC|}{|AC|}=\frac{6\cdot 12}{9}=8 \text{ cm}.$$

1363. *Zadani su vektori* $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$ *i* $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}$. *Odredite jedinični vektor* $\vec{x}$ *okomit na vektor* $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$.

Rješenje: Odredimo najprije vektor $\vec{c}$. Imamo:

$$\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}=2(2\vec{i}-3\vec{j})+3(-\vec{i}+2\vec{j})=\left[2\cdot 2+3\cdot(-1)\right]\vec{i}+\left[2\cdot(-3)+3\cdot 2\right]\vec{j}=1\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}=\vec{i}.$$

Stoga je traženi jedinični vektor $\vec{x}$ okomit na vektor $\vec{c}$ jednak $\vec{x}=\vec{j}$.

1364. *Zadani su vektori* $\vec{a}=-7\vec{i}+9\vec{j}$ *i* $\vec{b}=5\vec{i}-\vec{j}$. *Odredite duljinu vektora* $\vec{c}$ *takvoga da vektori* $\vec{a}$, $3\vec{b}$ *i* $2\vec{c}$ *zatvaraju trokut.*

Rješenje: Vektori $\vec{a}$, $3\vec{b}$ i $2\vec{c}$ zatvaraju trokut ako i samo ako vrijedi jednakost:

$$\vec{a}+3\vec{b}+2\vec{c}=\vec{0}.$$

Odavde je

$$\vec{c}=-\frac{1}{2}(\vec{a}+3\vec{b})=-\frac{1}{2}\left[-7\vec{i}+9\vec{j}+3\cdot(5\vec{i}-\vec{j})\right]=-\frac{1}{2}(-7\vec{i}+9\vec{j}+15\vec{i}-3\vec{j})=-\frac{1}{2}(8\vec{i}+6\vec{j})=-4\vec{i}-3\vec{j},$$

pa je tražena duljina vektora $\vec{c}$ jednaka:

$$\left|\vec{c}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = 5 .$$

1365. *Riješite sustav jednadžbi*: $2^{x+1} \cdot y = 24$, $3^{x-1} \cdot y^2 = 27$.

Rješenje: Izrazimo y iz prve jednadžbe:

$$y = \frac{24}{2^{x+1}} = \frac{24}{2 \cdot 2^x} = \frac{12}{2^x},$$

pa dobiveni izraz uvrstimo u drugu jednadžbu:

$$3^{x-1} \cdot \left(\frac{12}{2^x}\right)^2 = 27$$
$$3^x \cdot 3^{-1} \cdot \frac{144}{4^x} = 27$$
$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{9}{16}$$
$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

Odavde izravno slijedi $x = 2$, pa je $y = \frac{12}{2^x} = \frac{12}{2^2} = 3$. Stoga je rješenje sustava $(x, y) = (2, 3)$.

1366. *Polumjer osnovke kosoga kružnoga stošca je* $R = 1$ cm, *a najdulja izvodnica je dvostruko dulja od najkraće. Ako ortogonalna projekcija vrha stošca pripada kružnici osnovke, izračunajte obujam toga stošca.*

Rješenje: Promotrimo karakterističan presjek stošca ravninom okomitom na ravninu osnovke stošca. Riječ je o trokutu čije su dvije stranice najdulja i najkraća izvodnica stošca, a treća stranica promjer osnovke. Budući da se vrh stošca ortogonalno projicira na kružnicu osnovke, najkraća izvodnica stošca ujedno je i visina stošca, pa je navedeni karakterističan presjek pravokutan trokut. Jedna njegova kateta je v, druga je promjer osnovke stošca $2R$, a treća je najdulja izvodnica stošca čija je duljina, prema uvjetu zadatka, $2v$. Primjena Pitagorina poučka daje

$$v^2 + (2R)^2 = (2v)^2,$$

odnosno

$$v = \frac{2}{3}\sqrt{3}\, R = \frac{2}{3}\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Stoga je traženi obujam stošca jednak

$$V = \frac{1}{3} B v = \frac{1}{3} \cdot 1^2 \cdot \pi \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot \pi \text{ cm}^3.$$

1367. *Vrh nekoga bazena je pravokutnik dimenzija* $6 \text{ m} \times 20 \text{ m}$, *a najmanja i najveća dubina bazena iznose redom* 1 m *i* 3 m. *Odredite obujam vode u do vrha napunjenom bazenu.*

Rješenje: Obujam bilo kojega geometrijskoga tijela ne ovisi o tome kako je to tijelo postavljeno u prostoru. Stoga bazen možemo razmatrati "naopačke" i razložiti ga na dva geometrijska tijela: kvadar dimenzija $6 \times 20 \times 1$

i četverostranu piramidu čija je osnovka pravokutnik dimenzija 6 × 20, a visina 3 – 1 = 2. Stoga je obujam bazena jednak zbroju obujmova navedenih tijela:

$$V = 6 \cdot 20 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 20 \cdot 2 = 200 \text{ m}^3.$$

Dakle, u do vrha napunjenom bazenu ima 200 m^3 vode.

1368. *Zadana su četiri kruga u ravnini. Polumjeri prvih dvaju krugova su* $r_1 = 3$ cm *i* $r_2 = 5$ cm. *Opseg trećega kruga jednak je zbroju opsega dvaju zadanih krugova, a površina četvrtoga kruga jednaka je zbroju površina preostalih triju krugova. Odredite polumjer četvrtoga kruga.*

Rješenje: Izračunajmo najprije polumjer trećega kruga. Označimo li ga s r_3, onda iz jednadžbe

$$2r_3\pi = 2r_1\pi + 2r_2\pi$$

dobivamo $r_3 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = 4$ cm. Nadalje, označimo li polumjer četvrtoga kruga s r_4, onda iz jednadžbe

$$r_4^2\pi = r_1^2\pi + r_2^2\pi + r_3^2\pi$$

dobivamo

$$r_4 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} = \sqrt{3^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ cm}.$$

1369. *Obujam kocke brojčano je jednak njezinu oplošju. Izračunajte obujam kugle koja ima oplošje* 6π *puta veće od oplošja zadane kocke.*

Rješenje: Neka je a duljina brida kocke, a R polumjer kugle. Iz činjenice da je obujam kocke brojčano jednak njezinu oplošju slijedi

$$a^3 = 6a^2,$$

a odavde dijeljenjem s a^2 dobivamo $a = 6$. Tako je oplošje kocke jednako $O_{kocke} = 6a^2 = 216$ kv. jed. Prema uvjetu zadatka, oplošje kugle je

$$O_{kugle} = 6\pi \cdot O_{kocke} = 1296\pi \text{ kv. jed.},$$

pa iz jednadžbe

$$4R^2\pi = 1296\pi$$

slijedi $R = 18$ cm. Tako je traženi obujam kugle jednak

$$V_{kugle} = \frac{4}{3}R^3\pi = 7776\pi \text{ kub. jed.}$$

1370. *Izračunajte* $\dfrac{2^{-3} + 4}{8^{-1} + 9 \cdot 2^{-1}} \cdot 37$.

Rješenje: Imamo redom:

$$\frac{2^{-3}+4}{8^{-1}+9\cdot 2^{-1}}\cdot 37=\frac{\frac{1}{2^3}+4}{\frac{1}{8}+9\cdot\frac{1}{2}}\cdot 37=\frac{\frac{1}{8}+4}{\frac{1}{8}+\frac{9}{2}}\cdot 37=\frac{\frac{33}{8}}{\frac{37}{8}}\cdot 37=\frac{33}{37}\cdot 37=33.$$

1371. *U nekoj tvornici* 35% *ukupnoga broja svih djelatnika čine žene i njih je za* 252 *manje nego muškaraca. Odredite ukupan broj djelatnika u toj tvornici.*

Rješenje: Označimo traženi broj s x. Tada je ukupan broj žena $\frac{35}{100}\cdot x=0.35\cdot x$, a ukupan broj muškaraca $x-0.35\cdot x=(1-0.35)\cdot x=0.65\cdot x$. Budući da je ukupan broj muškaraca, s druge strane, za 252 veći od ukupnoga broja žena, dobivamo jednadžbu:

$$0.65\cdot x=0.35\cdot x+252$$

iz koje je $x=840$. Dakle, u toj tvornici ima ukupno 840 djelatnika.

1372. *Izračunajte* $3^{-2+3\log_3 4}$.

Rješenje: Imamo redom:

$$3^{-2+3\log_3 4}=3^{\log_3(3^{-2})+\log_3(4^3)}=3^{\log_3\left(\frac{1}{3^2}\cdot 4^3\right)}=3^{\log_3\frac{64}{9}}=\frac{64}{9}.$$

1373. *Ako je* $f(x)=x^3$ *i* $g(x)=2^x$, *izračunajte* $f[g(1)]$.

Rješenje: Najprije je $g(1)=2^1=2$, a potom $f[g(1)]=f(2)=2^3=8$.

1374. *Odredite skup svih vrijednosti realnoga parametra* $m\in\mathbf{R}$ *za koje su sve vrijednosti polinoma* $p(x)=x^2-4mx+4$ *strogo pozitivne.*

Rješenje: Mi zapravo tražimo skup svih vrijednosti realnoga parametra $m\in\mathbf{R}$ takvih da za svaki realan broj $x\in\mathbf{R}$ vrijedi stroga nejednakost $p(x)>0$. Budući da je vodeći koeficijent (tj. koeficijent uz x^2) polinoma $p(x)$ jednak 1, jedini uvjet je da diskriminanta D kvadratne jednadžbe $p(x)=0$ bude strogo negativan realan broj. Budući da je

$$D=(4m)^2-4\cdot 1\cdot 4=16m^2-16,$$

iz nejednadžbe $D<0$ slijedi $m\in\langle -1,1\rangle$. Dakle, traženi je skup otvoreni interval $\langle -1,1\rangle$.

1375. *Odredite imaginarni dio kompleksnoga broja* $z=(1-i)^{2008}$.

Rješenje: Izračunajmo najprije $(1-i)^4$. Imamo redom:

$$(1-i)^4=[(1-i)^2]^2=(1^2-2i+i^2)^2=[1-2i+(-1)]^2=(2i)^2=4i^2=4\cdot(-1)=-4.$$

Tako je $(1-i)^{2008}=[(1-i)^4]^{502}=(-4)^{502}=4^{502}$, pa je imaginarni dio zadanoga kompleksnoga broja jednak 0.

1376. *Odredite najveće realno rješenje jednadžbe* $12x^2-17x+6=0$.

Rješenje: Zadana jednadžba ima točno dva realna rješenja: $x_1=\frac{2}{3}$ i $x_2=\frac{3}{4}$. Očito je $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}<\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$, pa je traženo rješenje $\frac{3}{4}$.

1377. *Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma* $p(x) = x^4 + 3x^2 - 2x + 7$ *polinomom* $q(x) = x +$ $+ 3$.

Rješenje: Polinom $q(x)$ je stupnja 1, pa traženi ostatak mora biti stupnja 0. To znači da je traženi ostatak neka realna konstanta r. Prema poučku o dijeljenju polinoma s ostatkom, za svaki realan broj $x \in \mathbf{R}$ vrijedi jednakost

$$p(x) = g(x) \cdot q(x) + r,$$

odnosno

$$x^4 + 3x^2 - 2x + 7 = g(x) \cdot (x + 3) + r$$

za neki polinom $g(x)$ stupnja $4 - 1 = 3$. Uvrstimo li u ovu jednakost $x = -3$ (nultočku polinoma $q(x)$), dobit ćemo:

$$(-3)^4 + 3 \cdot (-3)^2 - 2 \cdot (-3) + 7 = g(x) \cdot [(-3) + 3] + r,$$

a odavde je izravno $r = 121$. Dakle, traženi ostatak jednak je 121.

1378. *Izračunajte* 20% *od broja* $\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) \cdot \left(16 + \frac{36}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Rješenje: Imamo redom:

$$\frac{20}{100} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) \cdot \left(16 + \frac{36}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{5} \cdot \left[\frac{1}{10} \cdot \sqrt{16 + 9}\right] = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} \cdot 5 = \frac{1}{10}.$$

1379. *Tri su realna broja, poredana po veličini od najmanjega do najvećega, uzastopni članovi istoga aritmetičkoga niza, a njihov je zbroj jednak* 9. *Odredite srednji od tih triju brojeva.*

Rješenje: Označimo te brojeve s a, b i c, te bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $a < b < c$. To znači da su navedeni brojevi u danom poretku tri uzastopna člana aritmetičkoga niza, pa prema osnovnom svojstvu aritmetičkoga niza vrijedi jednakost

$$2b = a + c.$$

Objema stranama ove jednakosti pribrojimo b:

$$2b + b = a + c + b,$$

pa primijenimo činjenicu da je zbroj tih triju brojeva jednak 9. Dobivamo:

$$3b = 9,$$

a odavde je $b = 3$. S obzirom na poredak, $b = 3$ je srednji od tih triju brojeva i to je traženi broj.

1380. *Opseg kvadrata iznosi* 12 cm. *Izračunajte površinu toga kvadrata.*

Rješenje: Označimo s a duljinu stranice kvadrata. Tada je opseg kvadrata $O = 4a$, pa iz jednadžbe

$$4a = 12$$

slijedi $a = 3$. Stoga je tražena površina jednaka $P = a^2 = 3^2 = 9$ cm^2.

1381. *Duljina osnovice jednakokračnoga trokuta iznosi* 15 cm, *a duljina visine na nju* 10 cm. *Izračunajte duljinu visine na krak ovoga trokuta.*

Rješenje: Neka je a = 15 cm osnovica, a v = 10 cm duljina visine na osnovicu zadanoga trokuta. Označimo s b duljinu kraka trokuta, a s h traženu duljinu visine na krak. Izračunajmo najprije duljinu kraka b:

$$b = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + v^2} = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + 10^2} = \sqrt{\frac{225}{4} + 100} = \sqrt{\frac{625}{4}} = \frac{25}{2} \text{ cm.}$$

Površinu P zadanoga trokuta možemo izračunati na dva načina:

$$P = \frac{1}{2} av \text{ i } P = \frac{1}{2} bh.$$

Izjednačavanjem desnih strana ovih jednakosti (jer su lijeve jednake) dobivamo

$$av = bh,$$

a odavde je

$$h = \frac{av}{b} = \frac{15 \cdot 10}{\frac{25}{2}} = 12 \text{ cm.}$$

Dakle, tražena duljina visine na krak je h = 12 cm.

1382. *Tetiva kružnice duga je* 30 cm, *a njezina je udaljenost od središta kružnice za* 9 cm *manja od duljine polumjera kružnice. Odredite duljinu polumjera te kružnice.*

Rješenje: Označimo sa S središte kružnice, a s A i B krajnje točke promatrane tetive. Nadalje, neka je r traženi polumjer. Trokut ABS je jednakokračan jer je $|AS| = |BS| = r$. Njegova je osnovica $a = |AB| = 30$ cm, a krak $b = |AS| = |BS| = r$. Udaljenost tetive AB od središta S jednaka je duljini visine v na osnovicu jednakokračnoga trokuta. Prema uvjetu zadatka, ta je visina za 9 cm manja od polumjera kružnice, tj. vrijedi jednakost:

$$v = r - 9.$$

Uvrstimo li $b = r$, $a = 30$ i $v = r - 9$ u jednakost

$$b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + v^2$$

(koja vrijedi u svakom jednakokračnom trokutu), dobit ćemo kvadratnu jednadžbu

$$r^2 = 225 + (r - 9)^2$$

koja kvadriranjem i reduciranjem prelazi u linearnu jednadžbu

$$18r = 306.$$

Odavde je $r = 17$, pa je tražena duljina polumjera r = 17 cm.

1383. *Kut između dviju susjednih stranica nekoga pravilnoga mnogokuta iznosi* 120°. *Odredite ukupan broj stranica toga mnogokuta.*

Rješenje: Neka je n traženi broj. Koristit ćemo činjenicu da je zbroj kuta između dviju susjednih stranica pravilnoga mnogokuta i središnjega kuta α toga mnogokuta uvijek jednak 180°. Budući da u svakom pravilnom mnogokutu vrijedi jednakost

$$\alpha = \frac{360°}{n},$$

dobivamo jednadžbu:

$$120° + \frac{360°}{n} = 180°$$

iz koje lagano slijedi $n = 6$. Riječ je, dakle, o pravilnom šesterokutu i on ima ukupno $n = 6$ stranica.

1384. *Duljine dviju stranica usporednika su* 10 *i* 12, *a kut među njima iznosi* 30°. *Izračunajte površinu toga usporednika.*

Rješenje: Označimo: $a = 10$ cm, $b = 12$ cm i $\alpha = 30°$. Povucimo dijagonalu usporednika koja ne prolazi vrhom uočenoga kuta. Ta dijagonala dijeli usporednik na dva sukladna trokuta (prema poučku $S - K - S$: imaju dvije jednake stranice (a i b) i jednak kut (α) među njima), pa je površina usporednika jednaka dvostrukoj površini jednoga od tih trokutova. Primjenom sinusova poučka odmah dobivamo da je tražena površina P jednaka:

$$P = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha\right) = ab \sin\alpha = 10 \cdot 12 \cdot \sin 30° = 60 \text{ kv. jed.}$$

1385. *Duljine bridova pravokutnoga paralelepipeda odnose se kao* 3 : 4 : 5. *Ako je duljina prostorne dijagonale toga paralelepipeda jednaka* $10\sqrt{2}$ cm, *izračunajte njegov obujam.*

Rješenje: Označimo s a, b i c duljine bridova zadanoga paralelepipeda. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a : b : c = 1 : 2 : 3$. Prema definiciji produženoga omjera, postoji strogo pozitivan realan broj $k > 0$ takav da je $a = k$, $b = 2k$ i $c = 3k$. Te jednakosti zajedno s jednakosti $D = 10\sqrt{2}$ uvrstimo u formulu za izračun duljine D prostorne dijagonale paralelepipeda:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

pa dobivamo:

$$(10\sqrt{2})^2 = (3k)^2 + (4k)^2 + (5k)^2,$$

odnosno

$$50k^2 = 200.$$

Jedino strogo pozitivno rješenje ove kvadratne jednadžbe je $k = 2$. Dakle, duljine bridova paralelepipeda su $a = 3 \cdot 2 = 6$ cm, $b = 4 \cdot 2 = 8$ cm i $c = 5 \cdot 2 = 10$ cm, pa njegov obujam iznosi $V = abc = 480$ cm^3.

1386. *Izračunajte oplošje kocke čiji obujam iznosi* 8 cm^3.

Rješenje: Neka je a duljina brida kocke. Tada je obujam kocke $V = a^3$, pa dobivamo kubnu jednadžbu

$$a^3 = 8.$$

Jedino realno rješenje ove jednadžbe je $a = 2$. Stoga je traženo oplošje jednako $O = 6a^2 = 24$ cm^2.

1387. *Devet jednakih metalnih kuglica polumjera* $R = 1$ cm *pretopi se u jednu kuglu. Izračunajte obujam te kugle.*

Rješenje: Traženi je obujam jednak zbroju obujmova svih devet jednakih metalnih kuglica:

$$V = 9 \cdot \frac{4}{3} R^3\pi = 12R^3\pi = 12 \cdot 1^3 \cdot \pi = 12\pi \text{ cm}^3.$$

1388. *Zadan je kut* $\alpha = \frac{\pi}{3}$. *Izračunajte* tg α.

Rješenje: Prema definiciji funkcije tangens odmah imamo tg α = $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$. Ne znamo li vrijednosti sinusa i kosinusa kuta $\frac{\pi}{3}$, možemo promatrati polovicu jednakostraničnoga trokuta čija je duljina stranice *a*. Jedna kateta toga trokuta je $\frac{a}{2}$ (polovica osnovice), a druga $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ (visina jednakostraničnoga trokuta), pa iz definicije trigonometrijskih funkcija u pravokutnom trokut odmah slijedi

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}.$$

1389. *Odredite najveću vrijednost realne funkcije* $f(x) = \sin x$.

Rješenje: Za svaki realan broj $x \in \mathbf{R}$ vrijedi nejednakost: $-1 \le \sin x \le 1$. Stoga je tražena najveća vrijednost jednaka 1.

1390. *Izračunajte udaljenost točaka* $M = (7, 7)$ *i* $N = (1, -1)$.

Rješenje: Tražena je udaljenost jednaka

$$d = \sqrt{(1-7)^2 + (-1-7)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10.$$

1391. *Odredite vrijednost realnoga parametra* $k \in \mathbf{R}$ *tako da pravci* $p\ldots\ y = x$ *i* $q\ldots\ y = kx + 3$ *budu okomiti.*

Rješenje: Nužan i dovoljan uvjet da pravci *p* i *q* budu okomiti jest da umnožak njihovih koeficijenata smjerova bude jednak –1. Koeficijent smjera pravca *p* jednak je 1, a koeficijent smjera pravca *q* jednak je *k*. Tako iz uvjeta

$$1 \cdot k = -1$$

odmah slijedi $k = -1$.

1392. *Odredite jednadžbu središnje elipse kojoj je jedno tjeme* $T = (0, -3)$, *a udaljenost između žarišta elipse jednaka* 8.

Rješenje: Činjenica da je $T = (0, -3)$ jedno tjeme elipse znači da je duljina male poluosi elipse jednaka $b = |-3| = 3$. Označimo li s $e > 0$ linearni ekscentricitet elipse, onda žarišta elipse imaju koordinate $F_1 = (-e, 0)$ i $F_2 = (e, 0)$, pa je njihova udaljenost jednaka $2e$. Tako iz

$$2e = 8$$

slijedi $e = 4$, a iz

$$e^2 = a^2 - b^2$$

slijedi $a^2 = 4^2 + 3^2 = 25$. Stoga je tražena jednadžba elipse

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

1393. *Odredite središte kružnice zadane jednadžbom* $x^2 + (y-5)^2 = 1$.

Rješenje: Neka je $S = (p, q)$ središte bilo koje kružnice, a r njezin polumjer. Tada jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$

Budući da je zadana jednadžba ekvivalentna jednadžbi

$$(x-0)^2 + (y-5)^2 = 1,$$

odavde odmah slijedi $p = 0$, $q = 5$ i $r^2 = 1$. Dakle, traženo je središte $S = (0, 5)$.

1394. *Odredite razliku skupova* $A = \{\frac{1}{3}, 3, 5^{-1}\}$ *i* $B = \{\frac{1}{5}, 2, 3^{-1}\}$.

Rješenje: Budući da je $3^{-1} = \frac{1}{3}$ i $5^{-1} = \frac{1}{5}$, zadane skupove možemo zapisati u obliku

$$A = \{\frac{1}{3}, 3, \frac{1}{5}\},\ B = \{\frac{1}{5}, 2, \frac{1}{3}\}.$$

Stoga je $A \setminus B = \{3\}$ (jedini element skupa A koji ne pripada skupu B).

1395. *Izračunajte kut kojega pravac* $p\ldots -\sqrt{3}\,x + y + 3 = 0$ *zatvara s negativnim dijelom osi* Oy.

Rješenje: Jednadžbu pravca p najprije zapišimo u eksplicitnom obliku:

$$y = \sqrt{3}\,x - 3.$$

Označimo li s α kut koji zadani pravac zatvara s pozitivnim dijelom osi Ox, vrijedi jednakost:

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}.$$

Odavde je $\alpha = 60°$, pa je traženi kut jednak

$$\beta = 90° + \alpha = 150°.$$

1396. *Za koliko postotaka treba uvećati polumjer neke kružnice tako da se njezin opseg poveća za* 20%?

Rješenje: Funkcija koja iskazuje ovisnost opsega kružnice o polumjeru kružnice je linearna funkcija $O(r) = 2\pi \cdot r$. Jedno od osnovnih svojstava svake linearne funkcije jest: ako se vrijednost nezavisne varijable poveća ili smanji p puta, onda se vrijednost zavisne varijable poveća ili smanji p puta i obrnuto. U ovom zadatku imamo povećanje vrijednost zavisne varijable $O(r)$ za 20%. Izravno iz navedenoga svojstva slijedi da se tada i nezavisna varijabla – polumjer r – povećava za 20%. Dakle, polumjer kružnice treba povećati za 20%.

1397. *Za koliko postotaka treba smanjiti promjer neke kružnice tako da se njezina površina smanji za* 19%?

Rješenje: Neka je D početni promjer, a d smanjeni promjer. Prema uvjetima zadatka za odgovarajuće površine vrijedi jednakost:

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi - \frac{19}{100} \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi .$$

Kvadriranjem i dijeljenjem dobivene jednakosti s $\frac{\pi}{4}$ dobivamo

$$d^2 = (1 - 0.19) \cdot D^2,$$

tj.

$$d^2 = 0.81 \cdot D^2,$$

a odavde vađenjem drugoga korijena iz lijeve i desne strane jednakosti slijedi

$$d = 0.9 \cdot D,$$

tj.

$$d = (1 - 0.1) \cdot D = D - 0.1 \cdot D = D - 10\% \cdot D.$$

Dakle, početni promjer treba smanjiti za 10%. Uočite da isti odgovor vrijedi i za polumjere.

1398. *Odredite skup svih realnih rješenja nejednadžbe* $|x + 1| \cdot \sqrt{4 - x^2} \cdot (x - 1) < 0.$

Rješenje: Funkcije $f(x) = |x + 1|$ i $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ poprimaju isključivo nenegativne vrijednosti, i to prva za svaki $x \in \mathbf{R}$, a druga za svaki $x \in \mathbf{R}$ koji zadovoljava jednakost $4 - x^2 \geq 0$, tj. za $x \in [-2, 2]$. Stoga su uvjeti na vrijednost nepoznanice x:

$$\begin{gathered} x + 1 \neq 0 \\ 4 - x^2 > 0 \\ x - 1 < 0 \end{gathered}$$

(ne smijemo dozvoliti da ma koji od izraza bude jednak 0 jer je u tom slučaju lijeva strana nejednadžbe jednaka 0, pa imamo neistinitu jednakost 0 < 0). Iz prve nejednakost je $x \neq -1$, iz druge $x \in \langle -2, 2\rangle$, a iz treće $x \in \langle -\infty, 1\rangle$. Presjek tih triju skupova je skup $S = \langle -2, 1\rangle \setminus \{-1\}$ i to je traženi skup.

1399. *Zadane su realne funkcije* $f(x) = \cos \frac{\pi x}{1004}$ *i* $g(x) = \frac{2008x}{\pi}$. *Izračunajte* $(f \circ g)\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Rješenje: Izračunajmo najprije $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$:

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2008 \cdot \frac{\pi}{2}}{\pi} = 1004.$$

Tako je tražena vrijednost jednaka

$$(f \circ g)\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left[g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = f(1004) = \cos \frac{\pi \cdot 1004}{1004} = \cos \pi = -1.$$

1400. *Zadani su skupovi* $A = \mathbf{N}$, $B = [0, 2007]$ *i* $C = \langle -2007, 2007\rangle$. *Odredite ukupan broj međusobno različitih elemenata skupa* $A \cap B \cap C$.

Rješenje: Budući da za bilo koja tri skupa A, B i C vrijedi skupovna jednakost

$$A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C),$$

najprije ćemo odrediti presjek skupova B i C. To je očito interval $[0, 2007\rangle$. Tako je $A \cap B \cap C$ zapravo skup svih prirodnih brojeva koji pripadaju intervalu $[0, 2007\rangle$, a to su 1, 2, 3, …, 2004, 2005 i 2006. Tih prirodnih brojeva ima ukupno 2006 i to je traženi broj.

Opaska. Zapravo vrijedi skupovna jednakost $A \cap B \cap C = [2006]$, a taj skup, prema definiciji, ima točno 2006 različitih elemenata.

1401. *Izračunajte vrijednost brojevnoga izraza* $\left(\frac{1}{3}\right)^{-5} \cdot 27^3 + (0.25)^2 \cdot 2^5 - 125^{-\frac{1}{3}} \cdot 10^2$.

Rješenje: Imamo redom:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-5} \cdot 27^3 + (0.25)^2 \cdot 2^5 - 125^{-\frac{1}{3}} \cdot 10^2 = (3^{-1})^{-5} \cdot (3^3)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 2^5 - (5^3)^{-\frac{1}{3}} \cdot 10^2 =$$
$$= 3^5 \cdot 3^9 + \left(\frac{1}{2^2}\right)^2 \cdot 2^5 - 5^{-1} \cdot 10^2 = 3^{14} + \frac{1}{2^4} \cdot 2^5 - \frac{10^2}{5} = 3^{14} + 2 - \frac{100}{5} = 3^{14} + 2 - 20 =$$
$$= 3^{14} - 18 = 4\,782\,951$$

1402. *U nekoj je dvorani ukupan broj stolica u svakom redu jednak ukupnom broju redova. Udvostruči li se ukupan broj redova, a ukupan broj stolica u svakom redu smanji za* 10, *onda se ukupan broj stolica u dvorani poveća za* 300. *Odredite broj redova u toj dvorani.*

Rješenje: Neka je r traženi broj. Tada je broj stolica u jednom redu također r, pa u dvorani ima ukupno $r \cdot r = r^2$ stolica. Udvostruči li se broj redova, u dvorani će biti $2 \cdot r$ redova. Smanji li se istodobno broj stolica u svakom redu za 10, u svakom će redu biti $r - 10$ stolica. Stoga će nakon ovih promjena ukupan broj stolica u dvorani biti $2 \cdot r \cdot (r - 10)$. Prema uvjetima zadatka, taj broj mora biti za 300 veći od početnoga, pa dobivamo jednadžbu:

$$r^2 + 300 = 2 \cdot r \cdot (r - 10),$$

odnosno

$$r^2 - 20r - 300 = 0.$$

Sva realna rješenja ove kvadratne jednadžbe su $r_1 = -10$ i $r_2 = 30$. Budući da ukupan broj redova ne može biti strogo negativan realan broj, rješenje r_1 ne dolazi u obzir, pa preostaje $r = r_2 = 30$. Dakle, u dvorani ima ukupno 30 redova.

1403. *Dva realna rješenja jednadžbe* $x^3 + ax^2 + bx + 3 = 0$ ($a, b \in \mathbf{R}$ *su realni parametri*) *su prirodni brojevi* 1 *i* 2. *Izračunajte umnožak ab.*

Rješenje: Zadana jednadžba je jednadžba stupnja 3, pa ima točno 3 rješenja. Budući da su, prema podacima u zadatku, dva od njih (1 i 2) realni brojevi, i treće je rješenje realan broj, pa ga označimo s c. Prema osnovnom poučku algebre, polaznu jednadžbu možemo zapisati u obliku:

$$x^3 + ax^2 + bx + 3 = (x - 1)(x - 2)(x - c),$$

odnosno, nakon množenja i reduciranja desne strane, u obliku

$$x^3 + ax^2 + bx + 3 = x^3 + (-c - 2)x^2 + (3c + 2)x - 2c.$$

Prema poučku o jednakosti polinoma odavde dobivamo sljedeći sustav triju linearnih jednadžbi s tri nepoznanice:

$$a = -c - 3$$
$$b = 3c + 2$$
$$3 = -2c$$

Iz treće je jednadžbe $c = -\frac{3}{2}$, pa uvrštavanjem u pvu i drugu jednadžbu dobivamo $a = -\frac{3}{2}$, $b = -\frac{5}{2}$. Stoga je traženi umnožak jednak $ab = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{15}{4}$.

1404. *Odredite skup svih realnih rješenja nejednadžbe* $\frac{2x^2 - 1}{x^2} \le 1$.

__Rješenje:__ Očiti uvjet na vrijednost nepoznanice x je $x \ne 0$. Uz uvažavanje toga uvjeta, polaznu nejednadžbu smijemo pomnožiti s x^2 (taj je broj strogo veći od nule), pa dobivamo kvaratnu nejednadžbu

$$2x^2 - 1 \le x^2,$$

odnosno

$$x^2 - 1 \le 0.$$

Skup svih realnih rješenja ove kvadratne nejednadžbe je segment $[-1, 1]$. Budući da vrijedi relacija $0 \in [-1, 1]$, a vrijednost nepoznanice x ne može biti jednaka 0, traženi je skup $[-1, 1] \setminus \{0\} = [-1, 0\rangle \cup \langle 0, 1]$.

1405. *Neka je* $z \in \mathbf{C}$ *rješenje jednadžbe* $z^3 = 1$ *za koje je* $\operatorname{Im} z > 0$. *Izračunajte* z^{20}.

__Rješenje:__ Najprije iz $z^3 = 1$ slijedi $z^3 - 1 = 0$, odnosno, prema formuli za razliku kubova,

$$(z - 1)(z^2 + z + 1) = 0.$$

Sva rješenja ove jednadžbe su $z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ i $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$. Od svih njih, jedino za rješenje z_2 vrijedi nejednakost $\operatorname{Im} z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$. Dakle, $z = z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$. Zapišimo zasebno da vrijede sljedeće jednakosti:

$z^3 = 1$ (jer je $z = z_2$ rješenje polazne jednadžbe $z^3 = 1$)
$z^2 = -z - 1$ (jer je $z = z_2$ rješenje kvadratne jednadžbe $z^2 + z + 1 = 0$, a odavde je $z^2 = -z - 1$)

Tako odmah imamo:

$$z^{20} = z^{18} \cdot z^2 = (z^3)^6 \cdot (-z - 1) = 1^6 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i - 1\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

1406. *Odredite ukupan broj svih realnih rješenja jednadžbe* $\log_2(x^2 - 1) = 2 + \log_2 x$.

__Rješenje:__ Zadana jednadžba ima smisla za realne brojeve $x \in \mathbf{R}$ za koje istodobno vrijede nejednakosti $x^2 - 1 > 0$ i $x > 0$ jer su jedino u tom slučaju definirana oba logaritma $\log_2(x^2 - 1)$ i $\log_2 x$. Iz prve nejednadžbe je $x \in \mathbf{R} \setminus [-1, 1]$, a iz druge $x \in \mathbf{R}^+ = \langle 0, +\infty\rangle$. Presjek tih skupova je otvoreni interval $\langle 1, +\infty\rangle$, pa polaznu jednadžbu rješavamo isključivo na tom intervalu. Zapišimo je u obliku

$$\log_2(x^2 - 1) = \log_2(2^2) + \log_2 x,$$

odnosno u obliku

$$\log_2(x^2 - 1) = \log_2(2^2 \cdot x),$$

pa izjednačavanjem logaritmanada dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - 4x - 1 = 0.$$

Sva realna rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1 = 2 - \sqrt{5}$ i $x_2 = 2 + \sqrt{5}$. No, $x_1 = 2 - \sqrt{5} \approx -0.236068$ ne pripada intervalu $\langle 1, +\infty \rangle$, pa taj broj nije rješenje polazne jednadžbe. Stoga polazna jednadžba ima jedinstveno realno rješenje: $x = 2 + \sqrt{5}$.

1407. *Odredite zbroj svih realnih rješenja jednadžbe* $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$.

Rješenje: Polaznu jednadžbu najprije zapišimo u obliku

$$(2^2)^x - 12 \cdot 2^x + 32 = 0,$$

odnosno u obliku

$$(2^x)^2 - 12 \cdot 2^x + 32 = 0.$$

Stavimo $t = 2^x$, pa dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$t^2 - 12t + 32 = 0$$

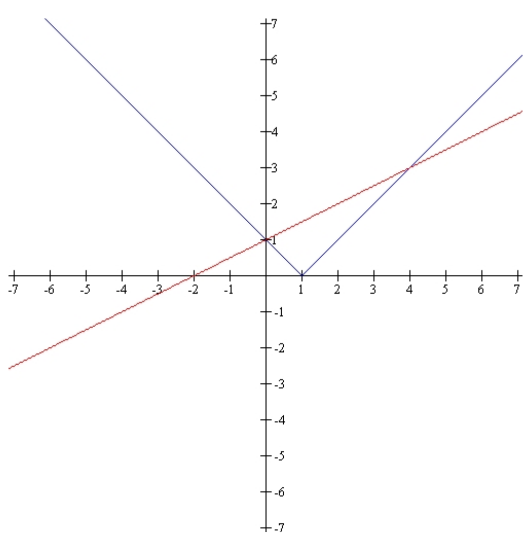
čija su sva realna rješenja $t_1 = 4$ i $t_2 = 8$. Tako iz $2^x = 4$, tj. $2^x = 2^2$ odmah slijedi $x_1 = 2$, a iz $2^x = 8$, tj. $2^x = 2^3$ slijedi $x_2 = 3$. Stoga je traženi zbroj jednak $x_1 + x_2 = 5$.

1408. *Izračunajte površinu ravninskoga lika kojega tvore grafovi realnih funkcija* $f(x) = |x - 1|$ *i* $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

Rješenje: Nacrtajmo navedene grafove u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini, pri čemu moramo paziti da je, prema definiciji apsolutne vrijednosti,

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{za } x \geq 1 \\ 1 - x, & \text{za } x \leq 1 \end{cases}.$$

Dobivamo sljedeću sliku:



(Plavom bojom je nacrtan graf realne funkcije $f(x)$, a crvenom graf realne funkcije $g(x)$.) Stoga je traženi ravninski lik trokut kojemu su vrhovi $A = (0, 1)$, $B = (1, 0)$ i $C = (4, 3)$. Njegova je površina jednaka:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |0 \cdot (0-3) + 1 \cdot (3-1) + 4 \cdot (1-0)| = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3 \text{ kv. jed.}$$

1409. *Zadana je realna funkcija* $f(x) = 2^{3x+5}$. *Izračunajte* $f^{-1}(4)$.

Rješenje: Prema definiciji inverzne funkcije, zapravo tražimo realan broj a takav da je $f(a) = 4$. Budući da je $f(a) = 2^{3a+5}$, dobivamo eksponencijalnu jednadžbu

$$2^{3a+5} = 4,$$

odnosno

$$2^{3a+5} = 2^2,$$

pa izjednačavanjem eksponenata odmah dobivamo $a = -1$. Dakle, $f^{-1}(4) = -1$.

1410. *Zbroj prvoga i* 2007. *člana aritmetičkoga niza jednak je* 2008. *Izračunajte zbroj* 1000. *i* 1008. *člana toga niza.*

Rješenje: Vidjeti rješenje zadatka 1234. Uz oznake iz toga rješenja, u ovom je slučaju $p = 1000$, $q = 1008$, $r = 1$ i $s = 2007$. Budući da je očito $1000 + 1008 = 1 + 2007$, odmah slijedi $a_{1000} + a_{1008} = a_1 + a_{2007} = 2008$.

1411. *Duljine kateta pravokutnoga trokuta su* $a = 6$ cm *i* $b = 8$ cm. *Izračunajte udaljenost sjecišta simetrale hipotenuze toga trokuta sa stranicama trokuta.*

Rješenje: Vidjeti rješenje zadatka 1362. Uz oznake iz toga zadatka, ovdje je duljina hipotenuze $c = 10$ cm, a D polovište hipotenuze (jer simetrala hipotenuze siječe hipotenuzu u njezinu polovištu), pa je tražena udaljenost jednaka

$$|DE| = \frac{|AD| \cdot |BC|}{|AC|} = \frac{5 \cdot 6}{8} = 3.75 \text{ cm.}$$

1412. *U romb opsega* 40 cm *upisana je kružnica opsega* 6π cm. *Izračunajte šiljasti kut romba.*

Rješenje: Označimo s α traženi kut, s a duljinu osnovice romba, s v visinu romba, a s d promjer rombu upisane kružnice. Iz podatka da je opseg romba $O_r = 40$ cm slijedi

$$4a = 40,$$

odnosno $a = 10$ cm. Nadalje, iz podatka da je opseg rombu upisane kružnice $O_k = 6\pi$ cm slijedi

$$d\pi = 6\pi,$$

odnosno $d = 6$ cm. Duljina visine romba jednaka je promjeru rombu upisane kružnice, tj.

$$v = d = 6 \text{ cm.}$$

Prema tome, sinus traženoga kuta jednak je

$$\sin\alpha = \frac{v}{a} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Otuda je $\alpha = 36°52'12''$.

1413. *Kružnica prolazi dvama vrhovima i težištem jednakostraničnoga trokuta. Ako je duljina stranice trokuta* a, *izrazite polumjer kružnice* R *kao funkciju argumenta* a.

Rješenje: Označimo sa S središte te kružnice, s A i B vrhove jednakostraničnoga trokuta koji pripadaju kružnici, a s T težište trokuta. Činjenica da kružnica prolazi dvama vrhovima jednakostraničnoga trokuta znači da je njezino središte S jednako udaljeno od vrhova A i B, tj. da središte S pripada simetrali dužine AB. Ta je simetrala u jednakostraničnom trokutu ujedno i težišnica. Označimo li s P polovište dužine AB, onda iz pravokutnoga trokuta SPA (ili SPB) slijedi

$$|SP|^2 + |PA|^2 = |SA|^2.$$

Duljina dužine PA jednaka je $\frac{a}{2}$ jer je P polovište jedne stranice trokuta. Duljina dužine SA jednaka je R jer kružnica sa središtem u S i polumjerom R prolazi točkom A. Odredimo duljinu dužine SP. U jednakostraničnom je trokutu težište T ujedno i središte trokutu upisane kružnice koja prolazi svim trima polovištima stranica trokuta. Stoga je duljina dužine TP jednaka polumjeru jednakostraničnom trokutu upisane kružnice, a taj je $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Duljina dužine ST jednaka je R jer težište T, kao i točka A, pripada kružnici sa središtem u S i polumjerom R. Točka S ne može pripadati unutrašnjosti jednakostraničnoga trokuta jer bi u suprotnom njezin polumjer R s jedne strane bio strogo manji od polumjera polaznom trokutu upisane kružnice ($\frac{a\sqrt{3}}{6}$), a s druge strogo veći od polovice duljine stranice $|AB|$ (hipotenuza trokuta uvijek je strogo veća od bilo koje katete), pa bismo imali očigledno neistinitu nejednakost

$$0.5 \cdot a = \frac{a}{2} < R < \frac{a\sqrt{3}}{6} \approx 0{,}288675 \cdot a.$$

Prema tome, točka S mora biti izvan trokuta, pa je

$$|SP| = |ST| - |TP|,$$

odnosno

$$|SP| = R - \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Preostaje nam uvrstiti $|SP| = R - \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $|PA| = \frac{a}{2}$ i $|SA| = R$ u jednakost

$$|SP|^2 + |PA|^2 = |SA|^2,$$

pa ćemo dobiti:

$$\left(R - \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = R^2.$$

Kvadriranjem i reduciranjem dobiva se

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot R = \frac{1}{3} a^2,$$

a odatle slijedi

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

i to je traženi izraz.

1414. *Duljina brida kocke iznosi a. Kroz tri susjedna vrha nekog vrha kocke položena je ravnina. Izračunajte najveću moguću udaljenost nekog vrha kocke od te ravnine.*

Rješenje: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da smo odabrali vrh A kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Tri susjedna vrha odabranoga vrha su B, D i A_1. Presjek ravnine položene koz vrhove B, D i A_1 je očito trokut BDA_1 i taj trokut je jednakostraničan jer je $|BD| = |DA_1| = |A_1B| = a\sqrt{2}$ (riječ je o trima plošnim dijagonalama kocke). Lako se vidi da je od svih preostalih vrhova kocke najdalje od promatrane ravnine vrh D_1. Taj vrh zajedno s vrhovima B, D i A_1 određuje pravilan tetraedar stranice $a\sqrt{2}$ (bočni bridovi tetraedra su tri preostale plošne dijagonale kocke čija je duljina također $a\sqrt{2}$, pa otuda zaključak da je riječ o pravilnom tetradedru). Stoga je tražena udaljenost jednaka visini pravilnoga tetraedra, a ta je jednaka $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$.

1415. *Uspravni kružni stožac ima osnovku površine* 36π *kv. jed. i obujam* 96π *kub.jed. Izračunajte obujam tom stošcu upisane kugle.*

Rješenje: Odredimo najprije polumjer osnovke (r) i visinu (v) zadanoga stošca. Površina osnovke je

$$B = r^2\pi,$$

pa iz jednadžbe

$$r^2\pi = 36\pi$$

slijedi $r = 6$. Nadalje, obujam stošca jednak je

$$V = \frac{1}{3}Bv,$$

a odavde je

$$v = \frac{3V}{B} = \frac{3\cdot 96}{36} = 8.$$

Karakterističan presjek uspravnoga kružnoga stošca ravninom okomitom na ravninu osnovke je jednakokračan trokut. Duljina osnovice toga trokuta je $a = 2r = 12$, a duljina visine na osnovicu $v_a = v = 8$. Duljina kraka b toga trokuta jednaka je duljini bilo koje izvodnice s zadanoga stošca, a ta je

$$s = \sqrt{r^2 + v^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

Polumjer zadanom stošcu upisane kugle jednak je polumjeru kružnice upisane jednakokračnom trokutu čije su stranice $a = 12$, $b = 10$ i visina na osnovicu $v_a = 8$. Taj je polumjer jednak

$$r = \frac{P}{s} = \frac{\frac{1}{2}av_a}{\frac{1}{2}(a+2b)} = \frac{av_a}{a+2b} = \frac{12\cdot 8}{12+2\cdot 10} = \frac{96}{32} = 3.$$

Tako konačno dobivamo da je obujam zadanom stošcu upisane kugle jednak

$$V_k = \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{4}{3}3^3\pi = 36\pi.$$

1416. *Spremnik za naftu ima oblik uspravnoga kružnoga valjka čiji je polumjer osnovke* 2 m, *a visina* 9 m. *Spremnik je polegnut tako da su osnovke valjka okomite na tlo, a izvedenice plašta usporedne s tlom. Ako je visina nafte u spremniku* 1 m, *odredite njezin obujam.*

Rješenje: Nafta u spremniku ima oblik uspravnoga geometrijskoga tijela čija je osnovka kružni odsječak polumjera $r = 2$ m i visine $v = 1$ m, a visina $h = 9$ m. Središnji kut α toga odsječka dobijemo iz jednakosti

$$v = 2r \sin^2 \frac{\alpha}{4},$$

otkuda je

$$\alpha = 4 \cdot \arcsin \sqrt{\frac{v}{2r}} = 4 \cdot \arcsin \frac{1}{2} = 120°.$$

Tako dobivamo da je obujam nafte u spremniku jednak

$$V_{nafta} = B_1 \cdot h = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\pi \cdot \alpha}{180°} - \sin \alpha \right) \cdot h = \frac{1}{2} 2^2 \left(\frac{\pi \cdot 120°}{180°} - \sin 120° \right) \cdot 9 = 18 \cdot \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 12\pi - 9\sqrt{3} \text{ m}^3,$$

odnosno približno

$$V_{nafta} \approx 22.111 \text{ m}^3.$$

1417. *Dvije stranice trokuta imaju duljine* 25 cm *i* 36 cm, *a zatvaraju kut od* 51°. *Izračunajte duljinu težišnice na treću stranicu ovoga trokuta.*

Rješenje: Dopunimo zadani trokut do usporednika osnom simetrijom s obzirom na treću stranicu trokuta. Tako dobivamo usporednik čije su dvije stranice 25 cm i 36 cm, a tupi kut $\alpha = 180° - 51° = 129°$. Tražimo polovicu duljine dulje dijagonale toga usporednika (jer je ta polovica upravo tražena težišnica). Primijenimo kosinusov poučak, pa odmah dobijemo:

$$t = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{25^2 + 36^2 - 2 \cdot 25 \cdot 36 \cdot \cos 129°} \approx 27.63 \text{ cm}.$$

1418. *Kružnica polumjera* 8 *je četirima točkama – A, B, C i D – podijeljena u omjeru* 1:3:4:7. *Odredite površinu četverokuta ABCD.*

Rješenje: Podijeliti kružnicu na četiri dijela u određenom omjeru zapravo znači podijeliti kut od 360° u navedenom omjeru. Omjerni koeficijent jednak je $k = \frac{360°}{1+3+4+7} = 24°$, pa su kutovi odgovarajućih dijelova jednaki $\alpha_1 = 1 \cdot 24° = 24°$, $\alpha_2 = 3 \cdot 24° = 72°$, $\alpha_3 = 4 \cdot 24° = 96°$ i $\alpha_4 = 7 \cdot 24° = 168°$. Označimo li sa S središte kružnice, lako vidimo da je tražena površina jednaka zbroju površina jednakokračnih trokutova SAB, SBC, SCD i SDA (svaki od njih je jednakokračan jer su mu dvije stranice polumjeri kružnice). Prema sinusovu poučku odmah dobivamo:

$$P = \frac{1}{2} r^2 \cdot (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \sin \alpha_3 + \sin \alpha_4) = \frac{1}{2} 8^2 \cdot (\sin 24° + \sin 72° + \sin 96° + \sin 168°) \approx 81.93 \text{ kv. jed.}$$

1419. *Za kut* $x \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$ *vrijedi jednakost* $\frac{1}{\text{tg } x} + \frac{1}{\text{ctg } x} = 3$. *Izračunajte* $\cos 2x$.

Rješenje: Odmah primijetimo da je – prema definicijama trigonometrijskih funkcija tg x i ctg x – zadana jednakost ekvivalentna s

$$\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 3,$$

a odavde je

$$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x} = 3,$$

odnosno, zbog $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$,

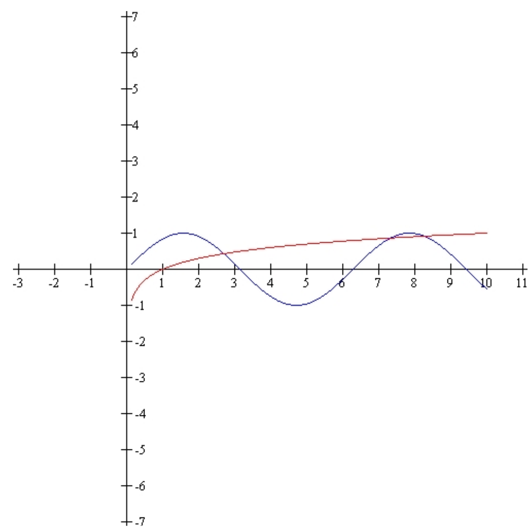
$$\sin x \cos x = \frac{1}{3}.$$

Koristeći formulu za sinus dvostrukoga kuta i osnovni trigonometrijski identitet dobivamo da je tražena vrijednost $\cos 2x$ jednaka:

$$\cos 2x = \sqrt{1 - \sin^2 2x} = \sqrt{1 - (2 \sin x \cos x)^2} = \sqrt{1 - 4 \cdot (\sin x \cos x)^2} = \sqrt{1 - 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

1420. *Odredite ukupan broj različitih realnih rješenja jednadžbe* $\sin x = \log x$.

Rješenje: Strogo rastuća logaritamska funkcija $f(x) = \log x$ definirana je na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$, pa polaznu jednadžbu ima smisla rješavati isključivo na tom intervalu. Funkcija $g(x) = \sin x$ poprima vrijednosti između -1 i 1, pa – zbog svojstva strogoga rasta funkcije $f(x)$ – jednadžba sigurno nema rješenja kad je $\log x > 1$, tj. $x > 10$ i kad je $\log x < -1$, tj. $x < 10^{-1} = \frac{1}{10}$. Stoga polaznu jednadžbu rješavamo na segmentu $[\frac{1}{10}, 10]$, a to je najlakše učiniti grafički:



(Crvena krivulja je graf funkcije $f(x)$, a plava graf funkcije $g(x)$.) Tako zaključujemo da zadana jednadžba ima točno tri različita realna rješenja, pa je traženi broj jednak 3.

1421. *Dva vrha jednakostraničnoga trokuta su* $A = (1, 2)$ *i* $B = (3, 1)$. *Odredite eksplicitni oblik jednadžbe visine toga trokuta povučene iz vrha* C.

Rješenje: Traženi pravac prolazi polovištem dužine AB – to je točka $P = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = (2, \frac{3}{2})$ – i ima koeficijent smjera suprotan i recipročan koeficijentu smjera pravca kroz točke A i B:

$$k=-\frac{1}{k_{AB}}=-\frac{1}{\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}}=\frac{x_A-x_B}{y_B-y_A}=\frac{1-3}{1-2}=2.$$

Stoga je tražena jednadžba

$$v\ldots\ y-\frac{3}{2}=2\cdot(x-2),$$

odnosno

$$v\ldots\ y=2x-\frac{5}{2}.$$

1422. *Izračunajte duljinu tetive krivulje $K\ldots\ x^2+y^2=36$ čije je polovište točka $A=(4,\ 1)$.*

Rješenje: Zadana krivulja je kružnica sa središtem u ishodištu i polumjerom 6, tj. $K((0,\ 0),\ 6)$. Zadana tetiva zajedno s dvama polumjerima kružnice tvori jednakokračan trokut. Duljine krakova toga trokuta jednake su polumjeru kružnice, tj. $b=6$, a polovište osnovice je točka A. Stoga je kvadrat duljine visine na osnovicu jednak kvadratu udaljenosti točaka $S=(0,\ 0)$ i A, a taj je jednak

$$d^2=(0-4)^2+(0-1)^2=17.$$

Tako je tražena duljina tetive jednaka duljini osnovice jednakokračnoga trokuta s krakom $b=6$ i visinom na osnovicu $v=\sqrt{17}$:

$$a=2\cdot\sqrt{b^2-v^2}=2\sqrt{6^2-17}=2\sqrt{19}\ .$$

1423. *Izračunajte površinu trokuta kojega s koordinatnim osima zatvara normala krivulje $\Gamma\ldots\ 3x^2+4y^2=48$ povučena u točki $A=(2,\ y>0)$.*

Rješenje: Zapišimo jednadžbu zadane krivulje u obliku $\frac{x^2}{\frac{48}{3}}+\frac{y^2}{\frac{48}{4}}=1$, tj. u obliku $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$, pa vidimo da je Γ središnja elipsa čija je mala poluos $a=\sqrt{16}=4$, a velika $b=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$. Odredimo drugu koordinatu točke A tako da u jednadžbu elipse uvrstimo $x=2$. Dobit ćemo kvadratnu jednadžbu

$$3\cdot 2^2+4\cdot y^2=48,$$

tj.

$$y^2=9.$$

Jedino strogo pozitivno rješenje ove jednadžbe je $y=3$, pa je $A=(2,\ 3)$. Koeficijent smjera tangente na elipsu povučene u točki $T=(x_1,\ y_1)$ dan je izrazom

$$k_t=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_T}{y_T},$$

pa je koeficijent smjera normale u istoj točki suprotan i recipročan:

$$k_n=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y_T}{x_T}.$$

U tu jednakost uvrstimo $a^2=16$, $b^2=12$, $y_T=y_A=3$, $x_T=x_A=2$, pa dobijemo da je koeficijent smjera normale na zadanu krivulju u točki A jednak

$$k_A = \frac{16}{12} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 2.$$

Stoga je jednadžba te normale

$$n \ldots y - 3 = 2 \cdot (x - 2),$$

odnosno

$$n \ldots\ y = 2x - 1,$$

odnosno u segmentnom obliku

$$n \ldots\ \frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{-1} = 1\,.$$

Odavde očitamo $m = \frac{1}{2}$, $n = -1$, pa odmah dobivamo da je tražena površina jednaka

$$P = \frac{1}{2}|mn| = \frac{1}{2} \cdot \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ kv jed.}$$

1424. *Odredite kanonsku jednadžbu središnje elipse čija velika poluos ima duljinu* 5, *a žarišta se podudaraju sa žarištima hiperbole* $x^2 - y^2 = 8$.

Rješenje: Najprije zapišimo jednadžbu zadane hiperbole u obliku

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1\,,$$

pa otuda "očitamo": $a^2 = b^2 = 8$. Stoga je linearni ekscentricitet hiperbole jednak linearnom ekscentricitetu tražene elipse. Označimo li s $a_e = 5$ duljinu velike poluosi, a s b_e duljinu male poluosi elipse, onda uvrštavanjem $a^2 = b^2 = 8$ i $a_e = 5$ u jednakost

$$a_e^2 - b_e^2 = a^2 + b^2,$$

dobivamo

$$25 - b_e^2 = 8 + 8,$$

odnosno $b_e^2 = 9$. Stoga je tražena kanonska jednadžba elipse (oblik $b_e^2\, x^2 + a_e^2\, y^2 = a_e^2 b_e^2$)

$$9x^2 + 25y^2 = 9 \cdot 25,$$

tj.

$$9x^2 + 25y^2 = 225.$$

1425. *Dijagonale jednakokračnoga trapeza su međusobno okomite. Ako su duljine osnovica trapeza* 8 *i* 5, *izračunajte njegovu površinu.*

Rješenje: Vidjeti rješenje zadatka 1341. U rješenju toga zadatka pokazali smo da za duljine obiju osnovica (a i c) i duljinu visine (v) jednakokračnoga trapeza s međusobno okomitim dijagonalama vrijedi jednakost

$$v = \frac{1}{2}(a + c),$$

pa je površina trapeza jednaka

$$P=\frac{a+c}{2}\cdot v=\frac{a+c}{2}\cdot\frac{1}{2}(a+c)=\frac{1}{4}(a+c)^2=\left[\frac{1}{2}(a+c)\right]^2=6.5^2=42.25\text{ cm}^2.$$

1426. *Pojednostavnite izraz*: $\frac{2^x\cdot(2^x-2\cdot 3^x)}{2^x+3^x}-\frac{2^{3x}+2^{2x}\cdot 3^x}{4^x+2\cdot 6^x+9^x}+\frac{3\cdot 2^x\cdot 3^x}{2^x+3^x}-\frac{2^{2x}\cdot 3^x-2^x\cdot 3^{2x}}{4^x-9^x}$.

Rješenje: Zbrojimo prvi i treći pribrojnik. Dobivamo:

$$\frac{2^x\cdot(2^x-2\cdot 3^x)}{2^x+3^x}+\frac{3\cdot 2^x\cdot 3^x}{2^x+3^x}=\frac{2^x\cdot 2^x-2\cdot 2^x\cdot 3^x+3\cdot 2^x\cdot 3^x}{2^x+3^x}=\frac{2^x\cdot 2^x+2^x\cdot 3^x}{2^x+3^x}=\frac{2^x\cdot(2^x+3^x)}{2^x+3^x}=2^x$$

Nadalje, uočimo da vrijede identiteti:

$2^{3x}+2^{2x}\cdot 3^x=2^{2x}\cdot(2^x+3^x)$;
$4^x+2\cdot 6^x+9^x=(2^2)^x+2\cdot(2\cdot 3)^x+(3^2)^x=(2^x)^2+2\cdot(2^x)\cdot(3^x)+(3^x)^2=(2^x+3^x)^2$;
$2^{2x}\cdot 3^x-2^x\cdot 3^{2x}=2^x\cdot 3^x\cdot(2^x-3^x)$;
$4^x-9^x=(2^2)^x-(3^2)^x=(2^x)^2-(3^x)^2=(2^x-3^x)\,(2^x+3^x)$.

Tako je zadani izraz jednak

$$2^x-\frac{2^{2x}(2^x+3^x)}{(2^x+3^x)^2}-\frac{2^x\cdot 3^x\cdot(2^x-3^x)}{(2^x-3^x)(2^x+3^x)}=2^x-\frac{2^{2x}}{2^x+3^x}-\frac{2^x\cdot 3^x}{2^x+3^x}=2^x-\frac{2^{2x}+2^x\cdot 3^x}{2^x+3^x}=$$
$$=2^x-\frac{2^x(2^x+3^x)}{2^x+3^x}=2^x-2^x=0$$

1427. *Izračunajte vrijednost izraza* $\frac{2^{3x}-2^x\cdot 9^x}{2^x+3^x}$ *za* $x=-\frac{1}{2}$.

Rješenje: Pojednostavljivanjem zadanoga izraza dobivamo:

$$\frac{2^{3x}-2^x\cdot 9^x}{2^x+3^x}=\frac{2^x\cdot(2^{2x}-9^x)}{2^x+3^x}=\frac{2^x\cdot\left[2^{2x}-(3^2)^x\right]}{2^x+3^x}=\frac{2^x\cdot\left[(2^x)^2-(3^x)^2\right]}{2^x+3^x}=$$
$$=\frac{2^x\cdot(2^x-3^x)(2^x+3^x)}{2^x+3^x}=2^x\cdot(2^x-3^x)=2^{2x}-(2\cdot 3)^x=2^{2x}-6^x$$

Stoga je vrijednost zadanoga izraza za $x=-\frac{1}{2}$ jednaka

$$2^{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}-6^{-\frac{1}{2}}=2^{-1}-\frac{1}{6^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{3-\sqrt{6}}{6}.$$

1428. *Niz realnih brojeva* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *ima svojstva*:

$$a_1=3,$$
$$a_n-a_{n-1}=5,\ \textit{za svaki } n=2, 3, \ldots 98, 99, 100.$$

Izračunajte zbroj prvih 100 *članova ovoga niza.*

Rješenje: Iz druge jednakosti izravno slijedi da je razlika svakoga člana niza (osim prvoga) i njemu neposredno prethodnoga člana niza konstantna i jednaka 5, što, prema definiciji, znači da je zadani niz artimetički s prvim članom $a_1 = 1$ i razlikom $d = 5$. Da izračunamo zbroj prvih 100 članova ovoga niza, u formulu

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d]$$

uvrstimo $n = 100$, $a_1 = 1$ i $d = 5$. Tako odmah dobivamo:

$$S_{100} = 50 \cdot (2 + 99 \cdot 5) = 24\,850.$$

1429. *Realne funkcije f, g : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definirane su formulama $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ i $g(x) = |x|$. Odredite najveću vrijednost funkcije $h(x) = (f \circ g)(x)$.*

Rješenje: Uočimo odmah da je prirodno područje definicije funkcije $h(x)$ skup $\mathbf{R}$ jer je taj skup prirodno područje definicije i funkcije $g(x)$ i funkcije $f(x)$. Da bismo odredili traženu vrijednost, moramo odrediti sliku funkcije $h(x)$, tj. skup $\mathrm{Im}(h) = \{h(x)\colon x \in \mathbf{R}\}$. Funkcija $g(x)$ preslika skup $\mathbf{R}$ u interval $[0, +\infty\rangle$. Nakon toga funkcija $f(x)$ preslika interval $[0, +\infty\rangle$ u interval $\langle -\infty, 1]$ jer je $f(x)$ strogo padajuća funkcija na cijelom skupu $\mathbf{R}$. Stoga je slika funkcije $h(x)$ interval $\langle -\infty, 1]$, pa je tražena najveća vrijednost te funkcije jednaka 1.

1430. *U jednoj točki središnje jedinične kružnice u 1. kvadrantu povučena je tangenta na kružnicu koja na osi Oy odsijeca odsječak dvostruko veći od odsječka na osi Ox. Odredite eksplicitni oblik jednadžbe te tangente.*

Rješenje: Neka je $m \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ realan broj takav da je $|m|$ duljina odsječka navedene tangente na osi x. Tada je duljina odsječka na osi y te tangente jednaka $2|m|$. Zbog uvjeta da je tangenta povučena na kružnicu u točki kružnice u 1. kvadrantu, tangenta siječe koordinatne osi na njihovim pozitivnim dijelovima, što znači da broj m mora biti strogo pozitivan, tj. $m > 0$, pa je $|m| = m$ i $2|m| = 2m$. Stoga jednadžba tangente u segmentnom obliku glasi:

$$t \ldots\ \frac{x}{m} + \frac{y}{2m} = 1,$$

odnosno, u eksplicitnom obliku,

$$t \ldots\ y = -2x + 2m.$$

Koeficijent smjera tangente je $k = -2$, a odsječak na osi y, kako smo već utvrdili, $l = 2m$. Uvrstimo te podatke, zajedno s $r = 1$, u uvjet tangencijalnosti za središnju kružnicu:

$$r^2 \cdot (1 + k^2) = l^2.$$

Dobivamo:

$$1 \cdot [1 + (-2)^2] = (2m)^2,$$

a otuda, zbog uvjeta $m > 0$, slijedi $2m = \sqrt{5}$. Prema tome, tražena jednadžba je

$$t \ldots\ y = -2x + \sqrt{5}.$$

1431. *Odredite površinu trokuta kojega sa žarištem parabole $y^2 = x$ tvore sjecišta te parabole s pravcem $p \ldots\ x = 3$.*

Rješenje: Iz jednadžbe zadane parabole slijedi $2p = 1$, otkuda dijeljenjem lijeve i desne strane s 4 dobivamo $\frac{1}{2}p = \frac{1}{4}$. Stoga je žarište parabole točka $F = (\frac{1}{4}, 0)$. Sjecišta zadane parabole i pravca $x = 3$ dobivamo rješavajući sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice

$$\begin{aligned} y^2 &= x \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Njegova su rješenja $x_1 = 3$, $y_1 = -\sqrt{3}$ i $x_2 = 3$, $y_2 = \sqrt{3}$, što znači da su sjecišta točke $S_1 = (3, -\sqrt{3})$ i $S_2 = (3, \sqrt{3})$. Tražena površina trokuta S_1S_2F jednaka je polovici umnoška duljine stranice S_1S_2 i visine v na tu stranicu. Lako se vidi da je $|S_1S_2| = 2\sqrt{3}$, te $v = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$, pa je

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{11}{4} = \frac{11}{4}\sqrt{3} \text{ kv. jed.}$$

1432. *Cijene roba R_1 i R_2 na početku godine iznosile su redom C_1 i C_2. Tijekom godine roba R_1 poskupjela je četiri puta, i to svaki put za p%, a roba R_2 pojeftinila je dva puta, i to jednom za 10%, a drugi put za 5%. Ako su cijene roba R_1 i R_2 na kraju godine bile redom C_2 i C_1, odredite vrijednost broja p.*

Rješenje: Zadatak možemo shvatiti kao da je cijena robe R_1 promijenjena ukupno 6 puta: 4 puta je cijena povećana za po p%, peti put je cijena snižena za 10%, a šesti put je cijena snižena za 5%. Koristimo formulu za izračunavanje ukupne promjene koja u ovom slučaju glasi:

$$R = 100 \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_3}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_4}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_5}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_6}{100}\right) - 100 .$$

U ovu formulu uvrstimo $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p$ (pri čemu je $p > 0$ jer se radi o poskupljenjima), $p_5 = -10$, $p_6 = -5$ (jer se radi o sniženjima) i $R = 0$ (jer je krajnja cijena jednaka početnoj: u prve četiri promjene cijenu C_1 smo povećali na C_2, a u posljednje dvije promjene cijenu C_2 smanjili na C_1). Tako dobivamo jednadžbu

$$100 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^4 \cdot \left(1 - \frac{10}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{5}{100}\right) - 100 = 0 ,$$

odnosno jednadžbu

$$\frac{171}{2} \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^4 = 100$$

iz koje je

$$p = 100 \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{200}{171}} - 1\right) \approx 3.994.$$

1433. *Učinak triju poskupljenja od kojih svako iznosi p% jednak je učinku dvaju poskupljenja po 20%. Odredite vrijednost broja p.*

Rješenje: Vidjeti rješenje prethodnoga zadatka. Najprije izračunamo ukupni učinak dvaju poskupljenja po 20%. U formulu

$$R = 100 \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) - 100$$

uvrstimo $p_1 = p_2 = 20$, pa dobijemo $R = 44$. Preostaje nam u formulu

$$R = 100 \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_3}{100}\right) - 100$$

uvrstiti $R = 44$ i $p_1 = p_2 = p_3 = p$. Dobivamo eksponencijalnu jednadžbu

$$100 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 - 100 = 44$$

iz koje je

$$p = 100 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{36}{25}} - 1\right) \approx 12{,}92.$$

1434. *Prostorna dijagonala kvadra duga je* $10\sqrt{2}$ cm *i s osnovkom kvadra zatvara kut od* 45°. *Ako je razlika duljina bridova osnovke* 2 cm, *izračunajte obujam toga kvadra.*

Rješenje: Neka su a i b duljine bridova osnovke kvadra, a c visina kvadra. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a > b$, pa iz uvjeta da je razlika duljina bridova osnovke 2 cm slijedi

$$a - b = 2.$$

Nadalje, prostorna dijagonala kvadra, dijagonala uočene osnovke i visina kvadra tvore pravokutan trokut kojemu je prostorna dijagonala kvadra hipotenuza. Prema uvjetu zadatka, jedan kut toga trokuta je 45°, što znači da je taj trokut jednakokračan pravokutan trokut, odnosno da je duljina visine kvadra jednaka duljini dijagonale uočene osnovke:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Tako u izraz za izračun duljine prostorne dijagonale kvadra

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

uvrstimo $D = 10\sqrt{2}$ i $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, pa dobivamo:

$$10\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + b^2 + (\sqrt{a^2 + b^2})^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + a^2 + b^2} = \sqrt{2(a^2 + b^2)} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{2},$$

a otuda je najprije

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = 10,$$

a potom

$$a^2 + b^2 = 100,$$

Tako smo dobili sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice

$$a - b = 2$$
$$a^2 + b^2 = 100.$$

Kvadriramo li prvu jednadžbu toga sustava i od nje oduzmemo drugu, dobit ćemo:

$$-2ab = -96,$$

odnosno

$$ab = 48.$$

Tako je traženi obujam kvadra jednak

$$V = abc = (ab)c = 48 \cdot 10 = 480 \text{ cm}^3.$$

1435. *Jednakokračan trokut ima osnovicu duljine* 6 cm *i krakove duljine* 8 cm. *U kojem omjeru simetrala kuta uz osnovicu dijeli krak trokuta*?

<u>Rješenje:</u> Koristit ćemo poučak o simetrali unutarnjega kuta u trokutu koji tvrdi da svaka simetrala unutarnjega kuta trokuta dijeli kutu nasuprotnu stranicu u omjeru preostalih dviju stranica trokuta. U ovom je slučaju taj omjer jednak omjeru duljina osnovice i jednoga kraka, tj. 6 : 8, odnosno 3 : 4.

<u>Opaska</u> Dokažimo gore navedeni poučak. Neka je ABC bilo kakav trokut i neka su sve oznake u trokutu standardne. Povucimo iz vrha A simetralu kuta pi vrhu A i neka ona siječe stranicu BC u točki D. Označimo $|AD| = s$. Tada je površina trokuta ABC s jedne strane jednaka

$$P_{ABC} = P_{ABD} + P_{ADC} = \frac{1}{2} s \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot (|AB + |AC|),$$

a s druge

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB \cdot |AC| \cdot \sin \alpha,$$

pa izjednačavanjem desnih strana dobivamo:

$$s \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot (|AB + |AC|) = |AB \cdot |AC| \cdot \sin \alpha,$$

odnosno, zbog $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$,

$$s \cdot (|AB| + |AC|) = 2 \cdot |AB \cdot |AC| \cdot \cos \frac{\alpha}{2},$$

a otuda je

$$2 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{s \cdot (|AB| + |AC|)}{|AB| \cdot |AC|}.$$

Primijenimo li kosinusov poučak na trokutove ABD i ADC, dobit ćemo:

$$|BD|^2 = |AB|^2 + s^2 - 2 \cdot |AB| \cdot s \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = |AB| + s^2 - s \cdot \frac{s \cdot (|AB| + |AC|)}{|AC|} = |AB|^2 - \frac{s^2 \cdot |AC| - s^2 \cdot (|AB| + |AC|)}{|AC|} = |AB|^2 - \frac{s^2 \cdot |AB|}{|AC|}$$

$$|CD|^2 = |AC|^2 + s^2 - 2 \cdot |AC| \cdot s \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \text{(kao i gore)} = |AC|^2 - \frac{s^2 \cdot |AC|}{|AB|}$$

Iz ovih jednakosti je

$$s^2 = \frac{|AC| \cdot (|AB|^2 - |BD|^2)}{|AB|} \text{ i}$$

$$s^2 = \frac{|AB| \cdot (|AC|^2 - |CD|^2)}{|AC|},$$

pa izjednačavanjem desnih strana dobivamo:

$$|AC|^2 \cdot (|AB|^2 - |BD|^2) = |AB|^2 \cdot (|AC|^2 - |CD|^2),$$

odnosno, nakon množenja, reduciranja i korjenovanja (koje smijemo provesti jer su duljine stranica trokuta strogo pozitivni realni brojevi),

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD|,$$

a tu jednakost možemo napisati u obliku

$$|BD| : |CD| = |AB| : |AC|,$$

otkuda izravno slijedi tvrdnja poučka.

1436. *Odredite ukupan broj različitih nultočaka realne funkcije* $f(x) = \sin(3x + 7\pi)$ *koje pripadaju segmentu* $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$.

Rješenje: Najprije uočimo da zadanu funkciju možemo transformirati na sljedeći način:

$f(x) = \sin(3x + 7\pi)$ = (adicioni poučak za sinus) = $\sin 3x \cos 7\pi + \cos 3x \sin 7\pi = -\sin 3x$

Stoga nultočke funkcije $f(x)$ dobivamo iz jednadžbe

$$\sin 3x = 0$$

Sva realna rješenja te jednadžbe dana su s

$$x_k = k \cdot \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}.$$

Rješenja koja pripadaju zadanom segmentu dobit ćemo iz uvjeta

$$-\frac{\pi}{2} \leq k \cdot \frac{\pi}{3} \leq \pi$$

koji je ekvivalentan nejednadžbi

$$-\frac{3}{2} \leq k \leq 3.$$

Tu nejednadžbu zadovoljava ukupno 5 cijelih brojeva: –1, 0, 1, 2 i 3. Stoga je traženi broj jednak 5.

1437. *U kojem je brojevnom sustavu valjana jednakost* $136 + 53 = 211$?

Rješenje: Označimo bazu toga sustava s b, pri čemu je $b \in \mathbf{N}$. Najveća znamenka u gornjoj jednakosti je 6, pa baza b mora biti jednaka barem 7, tj. $b \geq 7$. Tako iz

$$(136)_b + (53)_b = (211)_b$$

slijedi

$$b^2 + 3b + 6 + 5b + 3 = 2b^2 + b + 1,$$

odnosno

$$b^2 - 7b - 8 = 0.$$

Sva realna rješenja ove jednadžbe su $b_1 = -1$ i $b_2 = 8$. Rješenje $b_1 = -1$ ne dolazi u obzir jer nije riječ o prirodnom broju, pa preostaje $b = b_2 = 8$. Taj broj zadovoljava uvjet $b \geq 7$, pa zaključujemo da je jednakost valjana u oktalnom brojevnom sustavu.

1438. *Odredite površinu onoga dijela lika* $x^2 - 2x + y^2 - 2y - 2 \leq 0$ *koji se nalazi u prvom kvadrantu.*

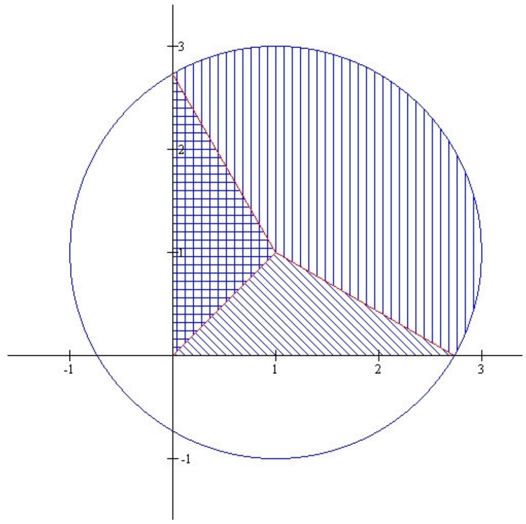
Rješenje: Lijevu stranu zadane nejednakosti možemo zapisati u obliku

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 - 2 - 2 \leq 0,$$

a odavde je

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4.$$

Dakle, riječ je o krugu sa središtem u točki (1, 1) i polumjerom $r = 2$. Površina lika kojega promatramo išrafirana je na donjoj slici.



Tražena se površina sastoji iz tri dijela: dvaju trokutova i jednoga kružnoga isječka. Uočimo odmah da su sjecišta kružnice sa pozitivnim dijelovima koordinatnih osi točke $S_1 = (\sqrt{3}+1, 0)$ i $S_2 = (0, \sqrt{3}+1)$. Površine trokutova OSS_1 i OSS_2 su jednake jer je $|OS_1| = |OS_2| = \sqrt{3}+1$, a duljine visine na te stranice su također međusobno jednake i jednake 1. Stoga je njihov zbroj

$$P_{\underline{1}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3}+1) \cdot 1 = \sqrt{3}+1 \approx 2.73205 \text{ kv. jed.}$$

Da bismo odredili kut kružnoga isječka, moramo odrediti kutove pri vrhu S u trokutovima OSS_1 i OSS_2. Njih je najlakše izračunati koristeći vektore:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OS} &= (1-0)\vec{i} + (1-0)\vec{j} = \vec{i} + \vec{j} \\
\overrightarrow{SS_1} &= (0-1)\vec{i} + \left[(\sqrt{3}+1)-1\right]\vec{j} = -\vec{i} + \sqrt{3}\cdot\vec{j} \\
\overrightarrow{SS_2} &= \left[(\sqrt{3}+1)-1\right]\vec{i} + (0-1)\vec{j} = \sqrt{3}\cdot\vec{i} - \vec{j}
\end{aligned}$$

Kutove $\alpha_1 = \angle OSS_1$ i $\alpha_2 = \angle OSS_2$ izračunamo iz

$$\begin{aligned}
\cos\alpha_1 &= \frac{\overrightarrow{OS}\cdot\overrightarrow{SS_1}}{\left|\overrightarrow{OS}\right|\cdot\left|\overrightarrow{SS_1}\right|} = \frac{1\cdot(-1)+1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot 2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}-2}{4} \\
\cos\alpha_2 &= \frac{\overrightarrow{OS}\cdot\overrightarrow{SS_2}}{\left|\overrightarrow{OS}\right|\cdot\left|\overrightarrow{SS_1}\right|} = \frac{1\cdot\sqrt{3}+1\cdot(-1)}{\sqrt{2}\cdot 2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}-2}{4}
\end{aligned}$$

Odatle slijedi $\alpha_1 = \alpha_2 = 68°31'45''$, pa je središnji kut kružnoga isječka jednak

$$\alpha = 360° - (\alpha_1 + \alpha_2) = 222°56'30''.$$

Stoga je površina isječka jednaka

$$P_2 = \frac{r^2 \pi \alpha}{360°} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 222°56'30''}{360°} \approx 7.78213 \text{ kv.jed.}$$

Prema tome, tražena je površina jednaka

$$P = P_1 + P_2 = 10.51418 \text{ kv. jed.}$$

1439. *Majstor i njegov šegrt radeći zajedno obave neki posao za točno* 5 dana. *Ako bi šegrt radio na istom poslu* 10 dana, *onda bi majstoru trebala još* 4 dana *da sam završi posao. Koliko puta brže majstor sâm obavi taj posao od šegrta*?

Rješenje: Neka je m vrijeme potrebno da majstor sam obavi posao, a $š$ vrijeme potrebno da šegrt sam obavi posao. U jednom danu majstor sâm napravi $\frac{1}{m}$ – ti dio posla, a šegrt $\frac{1}{š}$ –ti dio posla, pa radeći zajedno u jednom danu obave $(\frac{1}{m} + \frac{1}{š})$ – ti dio posla. Budući da zajednički mogu završiti cijeli posao za 5 dana, vrijedi jednakost:

$$5 \cdot (\frac{1}{m} + \frac{1}{š}) = 1.$$

Nadalje, radeći sam 10 dana, šegrt će napraviti $(10 \cdot \frac{1}{š})$ – ti dio posla, pa će majstor za preostala 4 dana napraviti $(4 \cdot \frac{1}{m})$ – ti dio posla. Budući da će po isteku toga vremena posao biti obavljen, vrijedi jednakost:

$$10 \cdot \frac{1}{š} + 4 \cdot \frac{1}{m} = 1$$

Tako smo dobili sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice

$$5 \cdot (\frac{1}{m} + \frac{1}{š}) = 1$$
$$10 \cdot \frac{1}{š} + 4 \cdot \frac{1}{m} = 1$$

Oduzimanjem druge jednadžbe od prve dobijemo:

$$\frac{1}{m} - 5 \cdot \frac{1}{š} = 0,$$

a odavde lagano slijedi

$$m = \frac{1}{5} š,$$

tj. promatrani posao majstor sâm obavi 5 puta brži od šegrta.

1440. *Odredite skup svih realnih rješenja nejednadžbe* $\sqrt{x^2 + 2x - 3} > x$.

Rješenje: Lijeva strana nejednadžbe definirana je za sve realne brojeve $x \in \mathbf{R}$ koji zadovoljavaju uvjet

$$x^2 + 2x - 3 \geq 0.$$

Odavde je $x \in \langle -\infty, -3] \cup [1, +\infty\rangle$. Razmatramo dva moguća slučaja:

1.) $x \in \langle -\infty, -3]$

U ovome je slučaju lijeva strana polazne nejednadžbe nenegativan realan broj, a desna strogo negativan realan broj, pa vrijedi znak nejednakosti. Dakle, skup rješenja polazne nejednadžbe u ovom je slučaju $\langle -\infty, -3]$.

2.) $x \in [1, +\infty\rangle$

U ovome su slučaju i lijeva i desna strana polazne nejednadžbe nenegativni realni brojevi, pa nejednadžbu smijemo kvadrirati. Dobit ćemo:

$$x^2 + 2x - 3 > x^2,$$

a odavde je $x \in \langle \frac{3}{2}, +\infty\rangle$. Presjek skupova $\langle \frac{3}{2}, +\infty\rangle$ i $[1, +\infty\rangle$ je skup $\langle \frac{3}{2}, +\infty\rangle$ i u ovome je slučaju taj skup skup rješenja polazne nejednadžbe.

Preostaje nam zaključiti da je skup svih realnih rješenja polazne nejednadžbe $S = \langle -\infty, -3] \cup \langle \frac{3}{2}, +\infty\rangle$. Taj skup možemo zapisati i kraće kao $S = \mathbf{R} \setminus \langle -3, \frac{3}{2}]$.

1441. *Realni brojevi a, b, $c \in$ **R** zadovoljavaju razmjere $a : b = 5 : 2$, $b : c = 4 : 7$. Odredite omjer* $\frac{a-c}{a+c} : \frac{b-c}{b+c}$.

<u>Rješenje:</u> Pomnožimo svaki član desne strane prvoga razmjera s 2 Dobivamo $a : b = 10 : 4$, što zajedno s drugim zadanim razmjerom daje $a : b : c = 10 : 4 : 7$. Prema definiciji produženoga razmjera, postoji realan broj $k \in \mathbf{R}$ takav da je $a = 10 \cdot k$, $b = 4 \cdot k$ i $c = 7 \cdot k$. Te jednakosti uvrstimo u omjer koji želimo izračunati, pa dobijemo:

$$\frac{a-c}{a+c} : \frac{b-c}{b+c} = \frac{10k-7k}{10k+7k} : \frac{4k-7k}{4k+7k} = \frac{3k}{17k} : \frac{(-3)k}{11k} = \frac{3}{17} \cdot (-\frac{11}{3}) = -\frac{11}{17} = (-11) : 17 .$$

1442. *Polinom $p(x) \in$ **R**$[x]$ stupnja 2 poprima najmanju vrijednost -8 za $x = 1$, dok za $x = 3$ poprima vrijednost 0. Odredite $p(x + 1)$.*

<u>Rješenje:</u> To što je polinom $p(x) \in \mathbf{R}[x]$ stupnja 2 znači da postoje realni brojevi a, b, $c \in \mathbf{R}$ takvi da je $a \neq 0$ i $p(x) = ax^2 + bx + c$. To što polinom $p(x)$ poprima najmanju vrijednost -8 za $x = 1$ znači da vrijede jednakosti

$$-\frac{b}{2a} = 1$$
$$\frac{4ac-b^2}{4a} = -8$$

a činjenica da za $x = 3$ polinom $p(x)$ poprima vrijednost 0 znači da je $p(3) = 0$, odnosno

$$a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 0,$$

tj.

$$9a + 3b + c = 0.$$

Tako smo dobili sustav triju jednadžbi s tri nepoznanice:

$$-\frac{b}{2a}=1$$
$$\frac{4ac-b^2}{4a}=-8$$
$$9a+3b+c=0.$$

Iz prve jednadžbe je $b = -2a$, pa uvrštavanjem u drugu odmah slijedi $c = a - 8$. Obje navedene jednakosti uvrstimo u treću jednadžbu, pa dobivamo:

$$9a + 3 \cdot (-2a) + a - 8 = 0,$$

a otuda je $a = 2$, pa je $b = -4$ i $c = -6$. Dakle, $p(x) = 2x^2 - 4x - 6$, pa je konačno

$$p(x + 1) = 2(x + 1)^2 - 4(x + 1) - 6 = 2x^2 - 8.$$

1443. *Odredite vrijednost realnoga parametra $b \in \mathbf{R}$ tako da pravac $p \ldots 2x - y + b = 0$ dodiruje krivulju $y = x^2$.*

Rješenje: Pravac p dodiruje zadanu krivulju ako i samo ako sustav jednadžbi

$$2x - y + b = 0$$
$$y = x^2$$

ima točno jedno realno rješenje. Uvrštavanjem druge jednadžbe u prvu dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - 2x - b = 0$$

koja ima točno jedno realno rješenje ako i samo ako je njezina diskriminanta jednaka 0. Ta je diskriminanta

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot b = 4 - 4b,$$

pa iz jednadžbe

$$4 - 4b = 0$$

slijedi $b = 1$, i to je jedina vrijednost realnoga parametra b za koju pravac p dodiruje zadanu krivulju.

1444. *Duljine osnovice trapeza su* 9 *i* 3, *a krakova* 3 i 5. *Odredite manji kut uz veću osnovicu toga trapeza.*

Rješenje: Radi određenosti, neka je $ABCD$ trapez takav da je $|AB| = 9$, $|BC| = 3$, $|CD| = 3$ i $|DA| = 5$. Povucimo vrhom C usporednicu s krakom AD, a vrhom D usporednicu s krakom BC i neka te usporednice sijeku osnovicu AB redom u točkama E i F. Prema toj konstrukciji, četverokuti $AECD$ i $FBCD$ su usporednici, te vrijede jednakosti:

$$|AE| = |CD| = 3,\ |EC| = |AD| = 5,$$
$$|FB| = |BC| = |CD| = |DF| = 3.$$

Promotrimo trokutove ADF i EBC. Duljine stranica tih trokutova su $|AD| = 5$, $|DF| = 3$, $|AF| = |AB| - |FB| = 9 - 3 = 6$, te $|EB| = |AB| - |AE| = 9 - 3 = 6$, $|BC| = 3$ i $|EC| = 5$. Stoga su ti trokutovi sukladni prema poučku $S - S - S$. Kutovi kod vrhova A i B u tim trokutovima su ujedno i kutovi uz veću osnovicu trapeza, pa utvrdimo koji od njih je manji. Kut kod vrha A nalazi se nasuprot stranici DF duljine 3, a kut kod vrha B nasuprot stranici EC duljine 5. Budući da se nasuprot većoj stranici nalazi veći kut i obrnuto, rješenje zadatka je kut kod vrha A. Označimo taj kut s α i primijenimo kosinusov poučak na trokut AFD:

$$\cos\alpha = \frac{5^2+6^2-3^2}{2\cdot 5\cdot 6} = \frac{13}{15}.$$

Odavde je $\alpha = 29.926435° = 29°55''35''$.

1445. *U pravokutnom trokutu simetrala kuta* α *dijeli tom kutu nasuprotnu stranicu na dva dijela. Odredite omjer većega i manjega dijela kao funkciju argumenta* α.

Rješenje: Vidjeti rješenje zadatka 1435. Uz uobičajenu pretpostavku standardnih oznaka u pravokutnom trokutu, simetrala kuta α dijeli katetu a na dijelove koji se odnose kao duljine preostalih dviju stranica trokuta, tj. u omjeru $b : c$. Budući da u svakom pravokutnom trokutu vrijedi nejednakost $b < c$, traženi je omjer jednak:

$c : b = 1 : (b : c) =$ (prema definiciji trigonometrijskih funkcija u pravokutnom trokutu) $= 1 : \cos \alpha$.

1446. *Neka je* $x \in \mathbf{C}$ *kompleksan broj takav da vrijedi jednakost* $x^2 = 1 + x$. *Ako je* $x^{20} = a \cdot x + b$, *izračunajte* $a + b$.

Rješenje: Primijetimo da vrijede sljedeće jednakosti:

$$x^4 = (x^2)^2 = (1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 = 1 + 2x + 1 + x = 2 + 3x,$$
$$x^8 = (x^4)^2 = (2 + 3x)^2 = 4 + 12x + 9x^2 = 4 + 12x + 9 \cdot (1 + x) = 13 + 21x$$
$$x^{10} = x^8 \cdot x^2 = (13 + 21x)(1 + x) = 13 + 34x + 21x^2 = 13 + 34x + 21(1 + x) = 55x + 34.$$

Tako konačno imamo:

$$x^{20} = (x^{10})^2 = (55x + 34)^2 = 1156 + 3740x + 3025x^2 = 1156 + 3740x + 3025(1 + x) = 6765x + 4181.$$

Dakle, $a = 6765$, $b = 4181$, pa je $a + b = 10\,946$.

1447. *Unutrašnji kut pri vrhu B trokuta ABC iznosi* $\beta = 30°$. *Pod kojim se kutom stranica AC vidi iz središta tom trokutu upisane kružnice*?

Rješenje: Neka je S središte trokutu ABC upisane kružnice. Podsjetimo se, središte svakom trokutu upisane kružnice je sjecište simetrala svih triju unutrašnjih kutova trokuta. Uz standardne oznake u trokutu, promotrimo trokut ACS. Kut $\angle ASC$ toga trokuta je traženi kut i označimo ga s x. Druga dva kuta toga trokuta su $\angle CAS = \frac{\alpha}{2}$ i $\angle ACS = \frac{\gamma}{2}$ jer su pravci AS i CS simetrale kutova α, odnosno γ. Budući da je zbroj kutova u svakom trokutu jednak 180°, vrijedi jednakost:

$$x + \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = 180°.$$

Primjena iste činjenice na trokut ABC daje jednakost

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°,$$

a odavde je

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) = \frac{1}{2}(180° - \beta) = 90° - \frac{\beta}{2}$$

Dobivenu jednakost uvrstimo u jednakost

$$x + \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = 180°,$$

pa dobijemo:

$$x + 90° - \frac{\beta}{2} = 180°.$$

Otuda je

$$x = 90° + \frac{\beta}{2}.$$

Posebno, za $\beta = 30°$ dobivamo $x = 105°$.

1448. *Odredite ukupan broj međusobno različitih rješenja jednadžbe* $\cos 4x - \cos 2x = \sin 4x + \sin 2x$ *u segmentu* $[0, 2\pi]$.

Rješenje: Primjenom formula za pretvorbu razlike i zbroja trigonometrijskih funkcija u umnožak dobivamo:

$$-2 \sin 3x \sin x = 2 \sin 3x \cos x,$$

odnosno

$$\sin 3x \cdot (\cos x + \sin x) = 0.$$

Razlikujemo dva podslučaja:

1.) $\sin 3x = 0$

Sva rješenja ove trigonometrijske jednadžbe su

$$x_k = k \cdot \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}.$$

Njihov broj u zadanom segmentu dobivamo rješavajući nejednadžbu

$$0 \leq k \cdot \frac{\pi}{3} \leq 2\pi,$$

iz koje je

$$0 \leq k \leq 6.$$

Ovu nejednakost zadovoljava ukupno 7 različitih cijelih brojeva, pa imamo 7 različitih rješenja polazne jednadžbe.

2.) $\cos x - \sin x = 0$

Zbog osnovnog trigonometrijskog identiteta $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ lako vidimo da moraju vrijediti nejednakosti $\cos x \neq 0$, $\sin x \neq 0$ jer bismo u suprotnom dobili neistinitu jednakost $\pm 1 = 0$. Stoga navedenu jednadžbu smijemo podijeliti npr. s $\cos x$ i dobiti

$$1 - \operatorname{tg} x = 0.$$

Odavde je $\operatorname{tg} x = 1$, a sva rješenja te jednadžbe su

$$x_l = (2l + 1) \cdot \frac{\pi}{4}, l \in \mathbf{Z}.$$

Njihov ukupan broj u zadanom segmentu dobivamo rješavajući nejednadžbu

$$0 \leq (2l + 1) \cdot \frac{\pi}{4} \leq 2\pi.$$

Odavde je

$$-\frac{1}{2} \leq l \leq \frac{7}{2},$$

a tu jednakost zadovoljavaju ukupno 4 različita cijela broja, pa imamo 4 različita rješenja polazne jednadžbe.

Preostaje nam provjeriti ima li među dobivenih 7 + 4 = 11 rješenja polazne jednadžbe međusobno jednakih. Ako ima, onda postoje cijeli brojevi k_1, $l_1 \in \mathbf{Z}$ takvi da je

$$k_1 \cdot \frac{\pi}{3} = (2l_1 + 1) \cdot \frac{\pi}{4}.$$

Odavde je

$$k_1 = \frac{3}{4} \cdot (2l_1 + 1),$$

pa iz činjenice $k_1 \in \mathbf{Z}$ slijedi da očito neparan cijeli broj $2l_1 + 1$ mora biti višekratnik od 4, što je nemoguće. Stoga je početna pretpostavka bila pogrešna, tj. jednadžbe $\sin 3x = 0$ i $\cos x - \sin x = 0$ nemaju niti jedno zajedničko rješenje. Dakle, ukupan broj međusobno različitih rješenja polazne jednadžbe u zadanom segmentu jednak je 11.

1449. *Osnovica jednakokračnoga trokuta ima duljinu* 2, *a svaki od krakova duljinu* 3. *Kroz jedan vrh na osnovici povučena je dužina koja dijeli trokut na dva dijela jednakih površina. Izračunajte duljinu te dužine.*

Rješenje: Radi određenosti, neka je ABC zadani jednakokračan trokut takav da je $|AB| = a = 2$, $|AC| = |BC| = b = 3$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je vrh A jedan kraj dužine koja dijeli trokut na dva dijela jednakih površina. Označimo drugi kraj te dužine s D, a traženu duljinu s d. Nadalje, označimo: $|CD| = x$. Tada je $|BD| = |BC| - |CD| = 3 - x$. Izračunajmo najprije površinu trokuta ABC. Ona je jednaka

$$P = \frac{1}{4} a \cdot \sqrt{4b^2 - a^2} = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \sqrt{4 \cdot 3^2 - 2^2} = 2\sqrt{2} \text{ kv. jed.},$$

što znači da je površina svakoga od trokutova ABD i ACD jednaka $\sqrt{2}$ kv. jed. Kosinus α kuta nasuprot osnovici trokuta jednak je

$$\cos \alpha = \frac{3^2 + 3^2 - 2^2}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{7}{9},$$

pa je njegov sinus jednak

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{9}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

Zato je površina trokuta ACD s jedne strane

$$P_{ACD} = \sqrt{2} \text{ kv. jed},$$

a s druge

$$P_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |CD| \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot x \cdot \frac{4\sqrt{2}}{9} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot x$$

Izjednačavanjem desnih strana tih jednakosti dobivamo jednadžbu

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot x = \sqrt{2}$$

iz koje je $x = \frac{3}{2}$. Tako konačno dobivamo da je tražena duljina d, prema kosinusovu poučku, jednaka

$$d = \sqrt{|AC|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |CD| \cdot \cos\alpha} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{17}\,.$$

1450. *Uspravni kružni stožac ima osnovku polumjera* 4 cm *i visinu* 6 cm. *Ravnina usporedna s osnovkom stošca i udaljena* 2 cm *od osnovke dijeli stožac na dva dijela. Izračunajte omjer obujmova većega i manjega dijela.*

Rješenje: Površina osnovke stošca je $B = r^2\pi = 4^2\pi = 16\pi$ cm^2, pa je obujam stošca $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot \pi \cdot 6 = 32\pi$ cm^3. Jedan od dvaju dijelova na koje uočena ravnina dijeli zadani stožac jest također uspravan kružni stožac čija je visina $h_1 = 6$ cm – 2 cm = 4 cm, dok površinu B_1 njegove osnovke, prema Cavalierijevu načelu, računamo iz razmjera

$$B : B_1 = (h : h_1)^2,$$

Otuda se dobiva

$$B_1 = \frac{h_1^2}{h^2} \cdot B = \frac{4^2}{6^2} \cdot 16\pi = \frac{64}{9}\pi \text{ cm}^3,$$

pa je obujam uočenoga stošca

$$V_1 = \frac{1}{3}B_1 h_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{64}{9} \cdot \pi \cdot 4 = \frac{256}{27}\pi \text{ cm}^3,$$

a obujam drugoga dijela polaznoga stošca

$$V_2 = V - V_1 = 32\pi - \frac{256}{27}\pi = \frac{608}{27}\pi.$$

Očito je $V_2 > V_1$, pa je traženi omjer jednak $V_2 : V_1 = \frac{608}{27}\pi : \frac{256}{27}\pi = 19 : 8$.

1451. *Odredite skup svih realnih rješenja jednadžbe* $|x-2|^{x^2-9x+20} = 1$.

Rješenje: Broj 1 možemo dobiti kao potenciju realnih brojeva na sljedeća tri načina: 1^x, y^0 i $(-1)^{2z}$, gdje su $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ i $z \in \mathbf{Z}$. Stoga prigodom rješavanja jednadžbe moramo razmotriti svaki od tih načina.

1.) 1 se dobije kao potencija 1^x

U ovom je slučaju dovoljno izjednačiti bazu potencije na lijevoj strani s jedinicom (eksponent može biti bilo koji realan broj). To nam daje jednadžbu $|x - 2| = 1$ čija su sva realna rješenja $x_1 = 1$ i $x_2 = 3$. Budući da na eksponent ne postavljamo nikakve uvjete, oba navedena broja su rješenja polazne jednadžbe.

2.) 1 se dobije kao potencija y^0

U ovom slučaju eksponent izjednačavamo s nulom i za svako od dobivenih realnih rješenja provjeravamo je li baza različita od nule. Izjednačavanjem eksponenta s nulom dobivamo kvadratnu jednadžbu $x^2 - 9x + 20 = 0$ čija su sva realna rješenja $x_3 = 4$ i $x_4 = 5$. Za $x_3 = 4$ je $|x_3 - 2| = |4 - 2| = 2 \neq 0$, a za $x_4 = 5$ je $|x_4 - 2| = |5 - 2| = 3 \neq$ $\neq 0$, pa su oba ta broja ujedno i rješenja polazne jednadžbe.

3.) 1 se dobije kao potencija $(-1)^{2z}$

U ovom je zadatku ovaj podslučaj nemoguć jer za svaki realan broj $x \in \mathbf{R}$ vrijedi nejednakost $|x - 1| \geq 0 > -1$, pa za bazu ni za koji $x \in \mathbf{R}$ ne možemo dobiti broj -1.
Zaključimo: skup svih realnih rješenja polazne jednadžbe je $S = \{1, 3, 4, 5\}$.

1452. *Izračunajte zbroj* $\frac{1}{2\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 14}+\ldots+\frac{1}{2002\cdot 2006}$.

Rješenje: Primijetimo da za svaki prirodan broj k vrijedi jednakost $\frac{1}{k\cdot(k+4)}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+4}\right)$. Tu jednakost primijenimo na brojeve 2, 6, 10, …, 2002, pa dobivamo da je traženi zbroj jednak:

$$\frac{1}{2\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 14}+\ldots+\frac{1}{2002\cdot 2006}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{14}\right)+\ldots+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2002}-\frac{1}{2006}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{14}+\ldots+\frac{1}{2002}-\frac{1}{2006}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2006}\right)=\frac{501}{4012}$$

1453. *Četiri broja, od kojih je prvi jednak* 1, *tvore uzastopne članove nekonstantnoga aritmetičkoga niza. Izbacimo li drugi od tih brojeva, dobit ćemo tri uzastopna člana geometrijskoga niza. Odredite zbroj tih četiriju brojeva.*

Rješenje: Označimo preostala tri broja s a, b i c. Tada brojevi 1, a, b, c u danom poretku tvore aritmetički niz, što znači da moraju vrijediti sljedeće jednakosti:

$$2a = b + 1$$
$$2b = a + c$$

Izostavimo li drugi broj, tj. a, dobit ćemo niz 1, b, c. Taj niz će biti geometrijski ako i samo ako vrijedi jednakost

$$b^2 = 1 \cdot c.$$

Tako smo dobili sljedeći sustav triju jednadžbi s tri nepoznanice:

$$2a = b + 1$$
$$2b = a + c$$
$$b^2 = c$$

Iz prve je jednadžbe $a = \frac{1}{2}(b + 1)$, pa uvrštavanjem te jednakosti i treće jednadžbe u drugu jednadžbu dobivamo:

$$2b = \frac{1}{2}(b + 1) + b^2,$$

odnosno kvadratnu jednadžbu

$$2b^2 - 3b + 1 = 0.$$

Sva realna rješenja te jednadžbe su $b_1 = \frac{1}{2}$ i $b_2 = 1$. Lako se vidi da rješenje $b = 1$ povlači $a = c = 1$, pa dobivamo niz 1, 1, 1, 1 koji je konstantni aritmetički niz suprotno pretpostavci da zadani brojevi tvore nekonstantni aritmetički niz. Zato mora biti $b = \frac{1}{2}$, pa se uvrštavanjem toga rješenja u jednakosti

$$a = \frac{1}{2}(b+1)$$
$$c = b^2$$

dobiva $a = \frac{3}{4}$ i $c = \frac{1}{4}$. Tako je zbroj svih četiriju brojeva jednak $1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$.

1454. *Osni presjek uspravnoga kružnoga stošca je jednakostraničan trokut površine* $P = \sqrt{3}$ dm². *Na kojoj udaljenosti* (*u* cm) *od osnovke stošca treba presjeći stožac ravninom usporednom s ravninom njegove osnovke tako da navedena ravnina podijeli stožac na dva dijela jednakih obujmova*?

Rješenje: Neka je r polumjer osnovke stošca, h njegova visina, a s izvodnica. Iz podatka da je osni presjek stošca jednakostraničan trokut slijedi da je duljina izvodnice stošca jednaka promjeru osnovke, tj. $s = 2r$. Tako je površina osnoga presjeka stošca

$$P = \frac{1}{4}\cdot(2r)^2\cdot\sqrt{3} = r^2\sqrt{3},$$

pa iz jednadžbe

$$r^2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

slijedi $r = 1$ dm. Stoga je duljina visine stošca jednaka duljini visine jednakostraničnoga trokuta čija je osnovica $2r$:

$$h = \frac{2r}{2}\cdot\sqrt{3} = r\sqrt{3} = 1\cdot\sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ dm},$$

pa je obujam stošca

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi\cdot h = \frac{1}{3}1^2\pi\cdot\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi \text{ dm}^3.$$

Sada postupamo kao u zadatku 1450. Označimo s x traženu udaljenost. Ravnina usporedna s ravninom osnovke stošca dijeli stožac na dva dijela, od kojih je jedan opet uspravan kružni stožac s površinom osnovke B_1 i visinom $h_1 = h - x = \sqrt{3} - x$. Njegov obujam mora biti jednak polovici obujma zadanoga stošca, što znači da vrijedi jednakost:

$$\frac{1}{3}B_1h_1 = \frac{1}{2}V,$$

odnosno

$$B_1h_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi.$$

Nadalje, prema Cavalierijevu načelu, mora vrijediti razmjer

$$B : B_1 = (h : h_1)^2,$$

a odavde je

$$B_1 = \frac{B}{h^2} \cdot h_1^2 = \frac{\pi}{3} \cdot h_1^2 .$$

Tu jednakost uvrstimo u jednakost

$$B_1 h_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi ,$$

pa dobijemo kubnu jednadžbu

$$h_1^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{27}}{2}$$

čije je jedino realno rješenje

$$h_1 = \frac{\sqrt[6]{27}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{27} \cdot \sqrt[3]{2^2}}{2} = \frac{\sqrt[6]{27} \cdot \sqrt[6]{2^4}}{2} = \frac{\sqrt[6]{27 \cdot 2^4}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt[6]{432} \text{ dm.}$$

Stoga je tražena udaljenost jednaka

$$x = \sqrt{3} - h_1 = \sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt[6]{432} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt[6]{432}}{2} \text{ dm} \approx 0.357321 \text{ dm} \approx 3.6 \text{ cm.}$$

1455. *Izračunajte* $\frac{3}{4}$ *% od* $\frac{4}{3}$.

Rješenje: Odmah imamo: $\dfrac{\frac{3}{4}}{100} \cdot \dfrac{4}{3} = \dfrac{\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}}{100} = \dfrac{1}{100} = 0.01$.

1456. *Pojednostavnite izraz*: $\dfrac{2a+1}{2a+3} - \dfrac{a}{a-2} - \dfrac{7}{2a^2 - a - 6}$.

Rješenje: Primijetimo da vrijedi identitet $2a^2 - a - 6 = (2a + 3) \cdot (a - 2)$. Tako odmah dobivamo:

$$\frac{2a+1}{2a+3} - \frac{a}{a-2} - \frac{7}{2a^2 - a - 6} = \frac{(2a+1)(a-2) - a(2a+3) - 7}{(2a+3)(a-2)} = \frac{-6a-9}{(2a+3)(a-2)} = -\frac{3 \cdot (2a+3)}{(2a+3)(a-2)} = -\frac{3}{a-2} = \frac{3}{2-a}$$

1457. *Za svaki dopustiv realan broj* $x \in \mathbf{R}$ *realna funkcija* $f(x)$ *definirana je propisom* $f(x) = \dfrac{x^2 + \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x} - 1}$. *Izračunajte* $\dfrac{f(-1) + f^{-1}(1)}{2}$.

Rješenje: Najprije ćemo pojednostavniti propis funkcije $f(x)$:

$$f(x) = \frac{x^2 + \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x} - 1} = \frac{\frac{x^3 + 1}{x}}{\frac{x^2 - x + 1}{x}} = \frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{(x-1)(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} = x - 1$$

Tako je $f(-1) = -1 - 1 = -2$, dok je $f^{-1}(1)$, prema definiciji inverzne funkcije, rješenje jednadžbe $f(x) = 1$, odnosno jednadžbe $x - 1 = 1$. Otuda je $x = 2$, pa je $f^{-1}(1) = 2$. Stoga je tražena vrijednost jednaka

$$\frac{f(-1) + f^{-1}(1)}{2} = \frac{-2+2}{2} = 0.$$

1458. *Kokoš i pol snese jaje i pol za dan i pol. Koliko jaja snese* 7 *kokošiju za* 6 *dana*?

<u>Rješenje:</u> Jedna kokoš snese jedno jaje za dan i pol. Stoga za četiri puta više dana, tj. za $1.5 \cdot 4 = 6$ dana jedna kokoš snese 4 puta više jaja, tj. 4 jajeta. Dakle, jedna kokoš za 6 dana snese 4 jajeta, pa će 7 kokoši za 6 dana snesti $7 \cdot 4 = 28$ jaja.

1459. *Odredite skup svih realnih rješenja nejednadžbe* $\frac{4}{3-x} \le -2$.

<u>Rješenje:</u> Zadanu nejednadžbu najprije podijelimo s (-2), pa dobijemo:

$$\frac{-2}{3-x} \ge 1,$$

odnosno

$$\frac{2}{x-3} \ge 1.$$

Lijeva je strana ove nejednadžbe definirana ako i samo ako je $x \ne 3$. Uvažavajući taj zahtjev, nejednadžbu pomnožimo s $(x-3)^2$ (zbog uvjeta $x \ne 3$, taj je broj strogo pozitivan) i dobijemo:

$$2(x-3) \ge (x-3)^2$$

odnosno, nakon kvadriranja i reduciranja,

$$x^2 - 8x + 15 \le 0.$$

Skup svih realnih rješenja ove kvadratne nejednadžbe je segment $[3, 5]$. No, zbog uvjeta $x \ne 3$, skup svih realnih rješenja polazne nejednadžbe je $S = \langle 3, 5]$.

1460. *Odredite skup svih realnih rješenja nejednadžbe* $x^2 - 93|x| + 2006 > 0$.

<u>Rješenje:</u> Razlikovat ćemo dva slučaja:

1.) $x \ge 0$, tj. $x \in [0, +\infty\rangle$

U ovom je slučaju $|x| = x$, pa dobivamo kvadratnu nejednadžbu $x^2 - 93x + 2006 > 0$. Skup svih realnih rješenja te nejednadžbe je $\langle -\infty, 34\rangle \cup \langle 59, +\infty\rangle$. Presjek toga skupa i skupa $[0, +\infty\rangle$ je skup $[0, 34\rangle \cup \langle 59, +\infty\rangle$, i to je skup rješenja polazne nejednadžbe u ovom slučaju.

2.) $x \le 0$, tj. $x \in \langle -\infty, 0]$

U ovom je slučaju $|x| = -x$ pa dobivamo kvadratnu nejednadžbu $x^2 + 93x + 2006 > 0$. Skup svih realnih rješenja te nejednadžbe je $\langle -\infty, -59\rangle \cup \langle -34, +\infty\rangle$. Presjek toga skupa i skupa $\langle -\infty, 0]$ je skup $\langle -\infty, -59\rangle \cup \langle -34, 0]$, i to je skup rješenja polazne nejednadžbe u ovom slučaju.

Tako dobivamo da je skup svih rješenja polazne nejednadžbe $\langle -\infty, -59\rangle \cup \langle -34, 0] \cup [0, 34\rangle \cup \langle 59, +\infty\rangle =$ $= \langle -\infty, -59\rangle \cup \langle -34, 34\rangle \cup \langle 59, +\infty\rangle$, a taj skup kraće možemo zapisati kao $\mathbf{R} \setminus ([-59, -34] \cup [34, 59])$.

1461. *Za koliko postotaka treba uvećati polumjer kruga da se njegova površina uveća za 69%?*

Rješenje: Neka je r polumjer početnoga kruga, a r_1 polumjer uvećanoga kruga. Tada je površina početnoga kruga jednaka

$$P = r^2\pi,$$

a površina uvećanoga kruga

$$P_1 = r_1^2\,\pi.$$

Prema uvjetu zadatka, vrijedi jednakost:

$$P_1 = P + 69\% \cdot P$$

koju možemo zapisati u obliku

$$P_1 = (1 + 69\%) \cdot P = \left(1 + \frac{69}{100}\right) \cdot P = 1.69 \cdot P.$$

Uvrštavanjem izraza za P_1 i P dobivamo:

$$r_1^2\,\pi = 1.69 \cdot r^2\pi,$$

a odavde dijeljenjem s π i korjenovanjem (koje smijemo provesti jer su brojevi r i r_1, kao polumjeri krugova, nužno strogo pozitivni realni brojevi) slijedi

$$r_1 = 1.3 \cdot r.$$

Dobivenu jednakost zapišemo u obliku:

$$r_1 = (1 + 0.3) \cdot r = (1 + \frac{30}{100}) \cdot r = r + 30\% \cdot r,$$

pa odavde odmah vidimo da početni polumjer kruga treba uvećati za 30%.

Opaska: Formulu za izračun ukupne promjene osnovne veličine iz zadataka 1432. i 1433. ovdje nismo mogli izravno primijeniti jer ovisnost površine kruga o duljini njegova polumjera nije iskazana linearnom, nego kvadratnom funkcijom. Spomenuta se formula može primijeniti jedino u slučaju kada su dvije veličine upravno razmjerne, odnosno kad je njihova ovisnost iskazana linearnom funkcijom.

1462. *Opsezi dvaju kotača razlikuju se za l* cm. *Odredite razliku polumjera tih kotača kao funkciju argumenta l.*

Rješenje: Neka su r_1 i r_2 polumjeri tih kotača. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $r_1 > r_2$. Tada su opsezi kotača $O_1 = 2r_1\pi$ i $O_2 = 2r_2\pi$, pi čemu je $O_1 > O_2$, pa je njihova razlika

$$l = O_1 - O_2 = 2r_1\pi - 2r_2\pi = 2\pi \cdot (r_1 - r_2).$$

Odavde je

$$r_1 - r_2 = \frac{l}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot l$$

i to je tražena funkcija argumenta l.

1463. *U kuglu je upisan valjak kojemu je visina za* 25% *kraća od promjera osnovke. Izračunajte omjer obujmova valjka i kugle.*

Rješenje: Neka je r polumjer osnovke valjka. Tada je duljina visine h valjka

$$h = 2r - \frac{25}{100} \cdot 2r = 2r - \frac{1}{2} \cdot r = \frac{3}{2} \cdot r.$$

Presječemo li valjak i kuglu ravninom okomitom na ravninu osnovke valjka, uočit ćemo da je promjer R valjku opisane kugle jednak duljini dijagonale pravokutnika čije su stranice $2r$ i h. Dakle,

$$2R = \sqrt{(2r)^2 + h^2} = \sqrt{(2r)^2 + \left(\frac{3}{2}r\right)^2} = \sqrt{4r^2 + \frac{9}{4}r^2} = \sqrt{\frac{25}{4}r^2} = \frac{5}{2}r,$$

otkuda je

$$R = \frac{5}{4}r.$$

Stoga je traženi omjer obujmova valjka i kugle jednak

$$V_{valjak} : V_{kugla} = (r^2\pi \cdot h) : \left(\frac{4}{3}R^3\pi\right) = (r^2\pi \cdot \frac{3}{2}r) : \left[\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{5}{4}r\right)^3 \pi\right] = \frac{3}{2}r^3\pi : \frac{125}{48}r^3\pi = \frac{72}{125} = 72 : 125.$$

1464. *Neka je $ABCD$ konveksni četverokut, te neka su P, Q, R i S redom polovišta dužina AB, BC, CD i DA. Ako je $\angle PQR = 60°$, odredite kut $\angle QRS$.*

Rješenje: Pokažimo najprije da je četverokut $PQRS$ usporednik. U tu je svrhu dovoljno dokazati da dužine PR i QS imaju isto polovište. To ćemo najbrže dokazati tzv. metodom koordinatizacije (pokušajte sami napraviti "vektorski" dokaz). Označimo $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$ i $D = (x_D, y_D)$. Tada su koordinate točaka P, Q, R i S redom

$$P = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right), Q = \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right), R = \left(\frac{x_C + x_D}{2}, \frac{y_C + y_D}{2}\right) \text{ i } S = \left(\frac{x_D + x_A}{2}, \frac{y_D + y_A}{2}\right).$$

Označimo s P_1 i P_2 redom polovišta dužina PR i QS, te pokažimo da je $P_1 \equiv P_2$. Koordinate tih polovišta su

$$P_1 = \left(\frac{\frac{x_A + x_B}{2} + \frac{x_C + x_D}{2}}{2}, \frac{\frac{y_A + y_B}{2} + \frac{y_C + y_D}{2}}{2}\right) = \left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}, \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}\right),$$

$$P_2 = \left(\frac{\frac{x_B + x_C}{2} + \frac{x_D + x_A}{2}}{2}, \frac{\frac{y_B + y_C}{2} + \frac{y_D + y_A}{2}}{2}\right) = \left(\frac{x_B + x_C + x_D + x_A}{4}, \frac{y_B + y_C + y_D + y_A}{4}\right)$$

pa je očito $P_1 \equiv P_2$. Dakle, četverokut $PQRS$ je usporednik, a $\angle PQR$ i $\angle QRS$ su dva njegova susjedna kuta. Budući da je zbroj dvaju susjednih kutova u svakom usporedniku jednak 180°, konačno je

$$\angle QRS = 180° - \angle PQR = 180° - 60° = 120°.$$

1465. *Odredite nužan i dovoljan uvjet na vrijednosti realnih parametara a, $b \in$ **R** tako da jednadžba $ax^2 - (a + b)x + b = 0$ ima dvostruko cjelobrojno rješenje.*

Rješenje: Prvi uvjet je očito $a \neq 0$ jer za $a = 0$ dobivamo linearnu jednažbu koja ne može imati dvostruka rješenja. Uz uvažavanje navedenoga uvjeta, sva rješenja zadane jednadžbe dobijemo iz formule

$$x_{1,2}=\frac{a+b\pm\sqrt{[-(a+b)]^2-4ab}}{2a}=\frac{a+b\pm\sqrt{a^2+2ab+b^2-4ab}}{2a}=\frac{a+b\pm\sqrt{a^2-2ab+b^2}}{2a}=\frac{a+b\pm|a-b|}{2a}.$$

S obzirom na to da ispred apsolutne vrijednosti stoji znak ±, znak apsolutne vrijednosti možemo izostaviti, pa ćemo dobiti:

$$x_{1,2}=\frac{a+b\pm(a-b)}{2a}\Rightarrow x_1=\frac{a+b+(a-b)}{2a}=1,\ x_2=\frac{a+b-(a-b)}{2a}=\frac{b}{a}.$$

Želimo li da polazna jednadžba ima dvostruko cjelobrojno rješenje, dobivena rješenja x_1 i x_2 moraju biti međusobno jednaka. To znači da mora vrijediti jednakost

$$\frac{b}{a}=1,$$

a odavde je $a = b$. Prema tome, traženi uvjet je $a = b \neq 0$.

1466. *Izračunajte* $\sin\alpha$ *ako je* $\mathrm{tg}\,\alpha = 2+\sqrt{3}$ *i* $\alpha\in[\pi, 2\pi]$.

Rješenje: Iz činjenice da je $\alpha\in[\pi, 2\pi]$ zaključujemo da će tražena vrijednost sinusa kuta α biti nepozitivna jer svi kutovi iz trećega i četvrtoga kvadranta, a to su upravo svi elementi skupa $[\pi, 2\pi]$, imaju nepozitivan sinus. Štoviše, možemo reći i više: iz $\mathrm{tg}\,\alpha = 2+\sqrt{3}$ i prethodno rečenoga slijedi da je α kut iz trećega kvadranta jer jedino takvi kutovi pripadaju segmentu $[\pi, 2\pi]$ i imaju strogo pozitivnu vrijednost tangensa, pa će tražena vrijednost sinusa zadanoga kuta biti strogo negativna. Izračunat ćemo je iz jednakosti

$$\sin\alpha=-\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}.$$

Dobivamo:

$$\sin\alpha=-\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{1+(2+\sqrt{3})^2}}=-\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{1+4+2\sqrt{3}+3}}=-\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}=-\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{4\cdot(2+\sqrt{3})}}=-\sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{4\cdot(2+\sqrt{3})}}=$$
$$=-\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

1467. *Odredite ukupan broj svih realnih rješenja jednadžbe* $\sqrt{3}\sin 2x + 2\sin^2 x = 0$ *koja pripadaju intervalu* $\langle 0, \pi\rangle$.

Rješenje: Zadanu jednadžbu najprije transformirajmo na sljedeći način:

$$\sqrt{3}\cdot(2\sin x\cos x)+2\sin^2 x=0,$$
$$\sin x\cdot(\sqrt{3}\cos x+\sin x)=0.$$

Za svaki $x\in\langle 0, \pi\rangle$ vrijedi nejednakost $\sin x\neq 0$, pa gornju jednadžbu smijemo podijeliti sa $\sin x$. Tako ćemo dobiti:

$$\sqrt{3}\cos x+\sin x=0,$$

a potom, ponovno zbog $\sin x\neq 0$, dijeljenjem sa $\sin x$

$$\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,x+1=0$$

i

$$\text{ctg } x = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Posljednja jednadžba u intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ ima jedinstveno rješenje $x = \frac{2\pi}{3}$. Dakle, traženi je broj jednak 1.

1468. *Odredite skup svih realnih rješenja nejednadžbe* $\sin 2x > \cos 2x$ *na segmentu* $[0, 2\pi\rangle$.

<u>Rješenje:</u> Riješimo najprije pripadnu jednadžbu

$$\sin 2x = \cos 2x.$$

Zbog osnovnog trigonometrijskog identiteta (kojega ovdje koristimo u obliku $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$), obje vrijednosti $\sin 2x$ i $\cos 2x$ ne mogu biti istodobno jednake nuli. Stoga gornju jednadžbu smijemo podijeliti sa $\cos 2x$, pa ćemo dobiti:

$$\text{tg } 2x = 1,$$

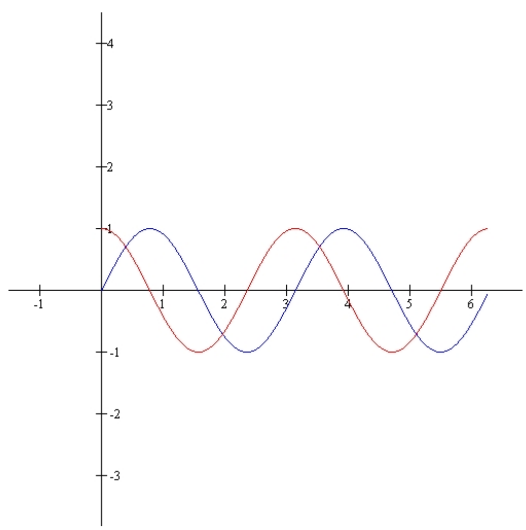
a odavde je

$$2x_k = \frac{\pi}{4}(2k+1),\ k \in \mathbf{Z},$$

odnosno

$$x_k = \frac{\pi}{8}(2k+1),\ k \in \mathbf{Z}.$$

Intervalu $[0, 2\pi\rangle$ pripadaju rješenja $x_0 = \frac{\pi}{8}$, $x_1 = \frac{3\pi}{8}$, $x_3 = \frac{5\pi}{8}$ i $x_4 = \frac{7\pi}{8}$. Nacrtajmo sada grafove funkcija $f(x) = \sin 2x$ i $g(x) = \cos 2x$ na intervalu $[0, 2\pi\rangle$. Upravo izračunata rješenja pripadne jednadžbe bit će nam korisna radi "očitavanja" sjecišta tih grafova.



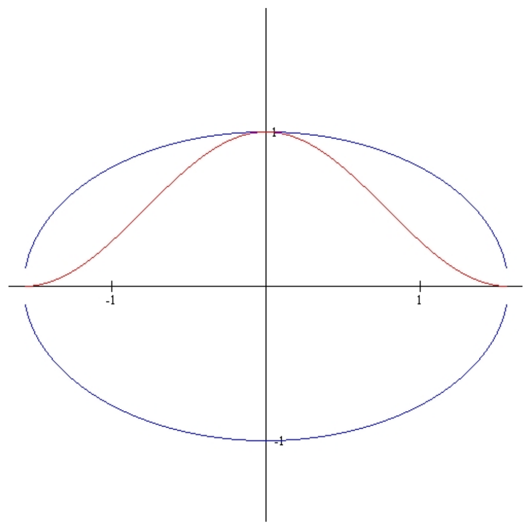
(Plavom bojom nacrtan je graf funkcije $f(x)$, a crvenom graf funkcije $g(x)$.) Tako iz grafa odmah "očitavamo" traženi skup (svi podintervali nad kojima je plava krivulja iznad crvene): $S = \langle \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8} \rangle \cup \langle \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8} \rangle$.

1469. *Odredite ukupan broj sjecišta krivulja* $K_1 \ldots \frac{4}{\pi^2} x^2 + y^2 = 1$ *i* $K_2 \ldots y = \cos^2 x$.

Rješenje: Zadatak ćemo najlakše riješiti grafički. Jednadžbu krivulje K_1 zapišimo u obliku

$$K_1 \ldots \frac{x^2}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1,$$

pa vidimo da je riječ o elipsi čija je duljina velike poluosi $\frac{\pi}{2}$, a male 1. Stoga grafove obiju funkcija crtamo na segmentu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:



Iz gornje slike vidimo da se grafovi zadanih funkcija sijeku u točno tri različite točke, pa je traženi broj jednak 3. (Koordinate tih točaka je čak lako i "očitati": $S_1 = (-\frac{\pi}{2}, 0)$, $S_2 = (0, 1)$ i $S_3 = (0, \frac{\pi}{2})$).

1470. *Dva vrha trokuta ABC su* $A = (-2, -2)$ *i* $B = (2, -2)$, *a treći vrh C pripada pozitivnom dijelu osi Oy. Ako os Ox dijeli trokut ABC na dva dijela jednakih površina, odredite koordinate točke C.*

Rješenje: Iz podatka da vrh C pripada pozitivnom dijelu osi Oy slijedi da postoji strogo pozitivan realan broj $y > 0$ takav da je $C = (0, y)$. Sada primijetimo sljedeće činjenice:

1.) Polovište stranice AB je točka $P = \left[\frac{-2+2}{2}, \frac{-2+(-2)}{2}\right] = (0, -2)$, a jednadžba stranice AB je $AB \ldots y = -2$. Stoga je os Oy, tj. pravac $x = 0$ visina iz vrha C na stranicu AB. Ta visina očito prolazi polovištem stranice AB, a to je moguće ako i samo ako je trokut ABC jednakokračan. Dužina AB duljine $|AB| = 4$ je osnovica toga trokuta. Duljina visine na osnovicu jednaka je duljini dužine PC, a ta je $|PC| = y + 2$. Stoga je površina trokuta ABC jednaka polovici umnoška duljine osnovice AB i visine na nju, tj.

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |PC| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (y + 2) = 2 \cdot (y + 2).$$

2.) Označimo sa S_1 i S_2 redom sjecišta osi Ox sa stranicama AC i BC. Trokut S_1S_2C sličan je trokutu ABC (npr. prema Talesovu poučku o sličnosti), pa zaključujemo da je i taj trokut jednakokračan. Ishodište koordinatnoga sustava O polovište je njegove osnovice kao sjecište pravaca $y = 0$ (pravac na kojem leži osnovica S_1S_2) i $x = 0$ (visina iz vrha C na stranicu S_1S_2, tj. pravac koji prolazi točkom C okomito na pravac $y = 0$). Duljina visine na osnovicu trokuta S_1S_2C jednaka je udaljenosti točaka O i C, a ta je jednaka y. Dakle, $|OC| = y$. Duljinu osnovice S_1S_2 možemo izračunati iz razmjera:

$$|S_1S_2| : |OC| = |AB| : |PC|.$$

Uvrštavanjem podataka $|OC| = y$, $|AB| = 4$ i $|PC| = (y + 2)$ dobivamo:

$$|S_1S_2| : y = 4 : (y + 2),$$

a odavde je

$$|S_1S_2| = \frac{4y}{y+2}.$$

Tako je površina trokuta S_1S_2C jednaka

$$P_{S_1S_2C} = \frac{1}{2} \cdot |S_1S_2| \cdot |OC| = \frac{1}{2} \cdot \frac{4y}{y+2} \cdot y = \frac{2y^2}{y+2}$$

Preostaje nam iskoristiti uvjet da površina trokuta S_1S_2C, kao jednoga od dijelova trokuta ABC kojega odsijeca os Ox, mora biti jednaka polovici površine trokuta ABC:

$$P_{S_1S_2C} = \frac{1}{2} P_{ABC}$$

pa uvrštavanjem podataka dobivamo:

$$\frac{2y^2}{y+2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (y + 2),$$

a odavde je

$$2y^2 = (y + 2)^2,$$

odnosno nakon korjenovanja (koje smijemo provesti jer je, prema pretpostavci, $y > 0$, pa je i $y + 2 > 0$):

$$\sqrt{2}\, y = y + 2.$$

Odavde je

$$y = \frac{2}{\sqrt{2}-1} = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = 2\sqrt{2} + 2.$$

Dakle, tražena točka je $C = (0, 2\sqrt{2} + 2)$.

1471. *Duljina visine na krak jednakokračnoga trokuta jednaka je v. Izrazite zbroj udaljenosti bilo koje točke osnovice toga trokuta od krakova trokuta kao funkciju argumenta v.*

Rješenje: Radi određenosti, neka je ABC jednakokračan trokut kojemu je dužina AB osnovica, a $b = |BC| = |AC|$ duljina kraka. Nadalje, neka je X bilo koja točka osnovice AB. Povucimo iz točke X okomice na krakove AC i BC, pa označimo s E i F redom nožišta tih okomica. Uočimo da je površina trokuta ABC jednaka zbroju površina trokutova AXC i BCX. Budući da je

$$\begin{aligned} P_{AXC} &= \frac{1}{2}|AC| \cdot |XE| = \frac{1}{2} b \cdot |XE| \\ P_{BCX} &= \frac{1}{2}|BC| \cdot |XF| = \frac{1}{2} b \cdot |XF|, \\ P_{ABC} &= \frac{1}{2} b \cdot v, \end{aligned}$$

uvrštavanjem u jednakost

$$P_{ABC} = P_{AXC} + P_{BCX}$$

dobivamo:

$$\frac{1}{2} b \cdot v = \frac{1}{2} b \cdot |XE| + \frac{1}{2} b \cdot |XF|,$$

otkuda je

$$v = |XE| + |XF|,$$

što znači da je zbroj udaljenosti bilo koje točke osnovice od krakova trokuta konstantan i jednak duljini visine na krak. (Taj rezultat je, naravno, očigledan ukoliko se za točku X odabere bilo koji od dvaju krajeva osnovice.)

1472. *Autobus mora prijeći put iz mjesta A u mjesto B u određenom vremenu. Ako bi vozio prosječnom brzinom* 48 km/h, *kasnio bi točno pola sata, a ako bi vozio prosječnom brzinom* 60 km/h, *stigao bi točno* 12 minuta *ranije. Izračunajte udaljenost između mjesta A i B.*

Rješenje: Najprije primijetimo da je 12 minuta = $\frac{12}{60}$ sati = 0.2 sata. Označimo s t vrijeme za koje autobus mora prijeći put od A o B (bez kašnjenja ili stizanja ranije). Uz vožnju od 48 km/h, vrijeme putovanja iznosi $t + 0.5$ sati, a uz vožnju od 60 km/h vrijeme putovanja iznosi $t – 0.2$ sata. U oba slučaja prijeđeni put je isti, pa koristeći osnovnu formulu jednolikoga gibanja

$$s = v \cdot t$$

dobivamo jednadžbu:

$$48 \cdot (t + 0.5) = 60 \cdot (t - 0.2),$$

odnosno linearnu jednadžbu

$$12 \cdot t = 36.$$

Otuda je $t = 3$, pa tražena udaljenost između mjesta A i B iznosi

$$|AB| = 48 \cdot (t + 0.5) = 48 \cdot (3 + 0.5) = 168 \text{ km}.$$

1473. *Odredite skup svih realnih rješenja jednadžbe* $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| \geq 1.$

Rješenje: Najprije primijetimo da razlomak unutar znaka apsolutne vrijednosti nije definiran za $x = 1$. Stoga u nastavku polaznu nejednadžbu rješavamo uz uvažavanje uvjeta $x \neq 1$. Budući da je za sve realne brojeve $x, a \in \mathbf{R}$ istinita izjava $(|x| \geq a) \Leftrightarrow ((x \geq a) \vee (x \leq -a))$, moramo razmotriti dvije mogućnosti:

1.) $\dfrac{x+2}{x-1} \geq 1$

Zbog uvjeta $x \neq 1$, navedenu nejednadžbu smijemo pomnožiti sa strogo pozitivnim brojem $(x-1)^2$, pa ćemo dobiti:

$$(x-1)^2 \leq (x+2)(x-1),$$

odnosno, nakon kvadriranja, množenja i reduciranja,

$$-3x \leq -3,$$

a odavde je $x \geq 1$. Zbog uvjeta $x \neq 1$, skup rješenja polazne nejednadžbe u ovom je slučaju otvoreni interval $\langle 1, +\infty\rangle$.

2.) $\dfrac{x+2}{x-1} \leq -1$

Postupamo potpuno analogno kao i u slučaju 1.) Uz uvažavanje uvjeta $x \neq 1$, pomnožimo navedenu nejednadžbu s $(x-1)^2$, pa nakon sređivanja dobivena izraza dobivamo:

$$(x-1)(2x+1) \leq 0.$$

Skup svih realnih rješenja ove kvadratne nejednadžbe je $[-\frac{1}{2}, 1]$, pa zbog uvjeta $x \neq 1$, slijedi da je u ovom slučaju skup rješenja polazne nejednadžbe interval $[-\frac{1}{2}, 1\rangle$.

Tako zaključujemo da je traženi skup svih realnih rješenja zadane nejednadžbe unija intervala $\langle 1, +\infty\rangle$ i $[-\frac{1}{2}, 1\rangle$, a to je skup $S = [-\frac{1}{2}, +\infty\rangle \setminus \{1\}$.

1474. *Odredite skup svih realnih rješenja nejednadžbe* $\log_2 \dfrac{x-2}{x} < 2$.

Rješenje: Lijeva strana zadane nejednadžbe je definirana za sve $x \in \mathbf{R}$ koji istovremeno zadovoljavaju uvjete $x \neq 0$ i $\dfrac{x-2}{x} > 0$. Zbog prvoga uvjeta, drugi uvjet smijemo pomnožiti s x^2, pa ćemo dobiti nejednadžbu

$$x \cdot (x-2) > 0$$

čiji je skup svih realnih rješenja $\mathbf{R} \setminus [0, 2]$. Budući da $x \in \mathbf{R} \setminus [0, 2]$ povlači $x \neq 0$, zadanu nejednadžbu nastavljamo rješavati uz uvažavanje uvjeta $x \in \mathbf{R} \setminus [0, 2]$. Antilogaritmiranjem dobivamo:

$$\frac{x-2}{x} < 4,$$

pa zbog $x \in \mathbf{R} \setminus [0, 2]$ tu nejednadžbu smijemo pomnožiti s x^2 i dobiti:

$$x \cdot (3x+2) > 0.$$

Skup svih realnih rješenja ove nejednadžbe je $\mathbf{R} \setminus [-\frac{2}{3}, 0]$. Stoga je traženi skup svih realnih rješenja zadane nejednadžbe presjek skupova $\mathbf{R} \setminus [0, 2]$ i $\mathbf{R} \setminus [-\frac{2}{3}, 0]$, a taj je skup, zbog skupovne jednakosti

$$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C),$$

jednak $\mathbf{R} \setminus ([0, 2] \cup [-\frac{2}{3}, 0]]) = \mathbf{R} \setminus [-\frac{2}{3}, 2]$. Zaključimo: $S = \mathbf{R} \setminus [-\frac{2}{3}, 2]$.

1475. *Odredite skup svih realnih rješenja jednadžbe* $\sqrt{2x-1} = x - 2$.

Rješenje: Korijen na lijevoj strani jednadžbe definiran je za sve $x \in \mathbf{R}$ za koje vrijedi nejednakost $2x - 1 \geq 0$. Za takve je x lijeva strana jednadžbe nenegativan realan broj, pa takva mora biti i desna strana jednadžbe, tj. mora vrijediti nejednakost $x - 2 \geq 0$. Tako smo dobili sustav nejednadžbi

$$\begin{aligned} 2x - 1 &\geq 0 \\ x - 2 &\geq 0 \end{aligned}$$

čije je rješenje $x \geq 2$. Stoga zadanu jednadžbu rješavamo uvažavajući uvjet $x \geq 2$. Iz tih razloga zadanu jednadžbu smijemo kvadrirati (uvjet $x \geq 2$ osigurava nam da su lijeva i desna strana jednadžbe nenegativni realni brojevi), pa dobivamo:

$$2x - 1 = (x - 2)^2,$$

odnosno kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Sva realna rješenja te jednadžbe su $x_1 = 1$ i $x_2 = 5$. No, rješenje $x_1 = 1$ ne zadovoljava jednakost $x \geq 2$, pa to rješenje ne uzimamo u obzir. Stoga zadana jednadžba ima jedinstveno rješenje $x = 5$, pa je traženi skup $S = \{5\}$.

1476. *Odredite skup svih realnih rješenja nejednadžbe* $\sqrt{2x-1} \leq x - 2$.

Rješenje: Potpuno analogno (uz istu argumentaciju) kao u prethodnom zadatku dobivamo uvjet na vrijednost nepoznanice x:

$$x \geq 2, \text{ tj. } x \in [2, +\infty\rangle.$$

pa kvadriranjem i sređivanjem zadane nejednadžbe dobivamo

$$x^2 - 6x + 5 \geq 0.$$

Skup svih realnih rješenja ove jednadžbe je $\mathbf{R} \setminus [1, 5]$. Stoga je traženi skup svih realnih rješenja zadane nejednadžbe presjek skupova $[2, +\infty\rangle$ i $\mathbf{R} \setminus \langle 1, 5\rangle$, a to je skup $S = [5, +\infty\rangle$.

1477. *Osi dviju cesta čije su širine a i b ($a, b \in \langle 0, +\infty\rangle$) sijeku se pod šiljastim kutom α. Izrazite površinu zajedničkoga dijela tih cesta kao funkciju argumenata a, b i α.*

Rješenje: Presjek promatranih cesta je usporednik. Visine na njegove stranice su a i b, a jedan od šiljastih kutova α. Odaberimo stranicu usporednika (označimo je s x) kojoj odgovara visina a. Duljinu te stranice dobijemo iz pravokutnoga trokuta kojemu je hipotenuza jednaka x, jedna kateta b, a šiljasti kut nasuprot kateti b α. Dakle,

$$\sin \alpha = \frac{b}{x},$$

a otuda je

$$x = \frac{b}{\sin \alpha}.$$

Stoga je tražena površina jednaka

$$P = ax = \frac{ab}{\sin \alpha}.$$

1478. *Odredite skup svih realnih rješenja jednadžbe* $\log(x^2) + \log^2|x| = 3$.

Rješenje: Lijeva strana nejednadžbe ima smisla za sve realne brojeve $x \in \mathbf{R}$ koji zadovoljavaju nejednakosti $x^2 > 0$ i $|x| > 0$. Te dvije nejednakosti su ekvivalentne, pa npr. iz $|x| > 0$ slijedi $x \neq 0$. Stoga zadanu nejednadžbu rješavamo uz uvjet $x \neq 0$. Primijetimo da za svaki realan broj $x \neq 0$ vrijedi jednakost

$$\log(x^2) = 2 \log |x|,$$

pa uvođenjem zamjene $t = \log |x|$ dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$t^2 + 2t - 3 = 0.$$

Sva realna rješenja ove jednadžbe su $t_1 = -3$ i $t_2 = 1$. Tako iz $\log |x| = -3$ antilogaritmiranjem slijedi $|x| = 10^{-3} = 0.001$, a otuda $x_1 = -0.001$ i $x_2 = 0.001$. Analogno, iz $\log |x| = 1$ slijedi $|x| = 10^1 = 10$, a otuda $x_3 = -10$ i $x_4 = 10$. Sva četiri dobivena rješenja zadovoljavaju uvjet $x \neq 0$, pa je traženi skup

$$S = \{-10, -0.001, 0.001, 10\}.$$

1479. *U nekom je aritmetičkom nizu zbroj prvih* 6 *članova na neparnim mjestima jednak* 72. *Izračunajte zbroj prvoga, šestoga i jedanaestoga člana toga niza.*

Rješenje: Neka je a_1 prvi član, a d razlika aritmetičkoga niza. Članovi toga niza na neparnim mjestima (a_1, a_3, a_5, …) tvore aritmetički podniz kojemu je prvi član a_1, a razlika $2d$. Zbroj prvih šest članova toga podniza jednak je

$$S_6 = \frac{6}{2} \cdot [2a_1 + (6 - 1) \cdot 2d] = 6a_1 + 30d.$$

Prema uvjetu zadatka, taj zbroj treba biti jednak 72, pa mora vrijediti jednakost

$$6a_1 + 30d = 72.$$

Koristeći tu jednakost, izračunamo traženi zbroj prvoga, šestoga i jedanaestoga člana polaznoga niza:

$$a_1 + a_6 + a_{11} = a_1 + (a_1 + 5d) + (a_1 + 10d) = 3a_1 + 15d = \frac{1}{2} \cdot (6a_1 + 30d) = \frac{1}{2} \cdot 72 = 36.$$

1480. *Odredite eksplicitni oblik jednadžbe pravca koji prolazi središtima kružnica* $K_1 \ldots x^2 + y^2 + 6x - 2y = 0$ *i* $K_2 \ldots x^2 + y^2 - 8x - 2y - 1 = 0$.

Rješenje: Jednažbe zadanih kružnica zapišemo u obliku:

$$K_1 .. (x + 3)^2 + (y - 1)^2 - 3^2 - 1^2 = 0,$$
$$K_2 .. (x - 4)^2 + (y - 1)^2 - 4^2 - 1^2 - 1 = 0,$$

pa "očitamo" koordinate njihovih središta: $S_1 = (-3, 1)$, $S_2 = (4, 1)$. Uočimo da su druge koordinate tih točaka međusobno jednake, pa je traženi pravac $p \ldots y = 1$ (to je ujedno i traženi oblik njegove jednadžbe).

1481. *Odredite skup svih realnih rješenja jednadžbe* $2 \cdot \log_4(x + 6) - 3 \cdot \log_8(x - 2) = 2 -$ $- \log_2(x - 8)$.

Rješenje: Svi logaritmi u zadanoj jednadžbi postoje ako i samo ako istodobno vrijede uvjeti $x + 6 > 0$, $x - 2 > 0$ i $x - 8 > 0$. Lako se vidi da valjanost posljednjega uvjeta povlači valjanost prvih dvaju, pa uvjet na vrijednost nepoznanice x glasi $x > 8$. Uz uvažavanje toga uvjeta, jednadžbu zapišemo u obliku:

$$2 \cdot \log_4(x + 6) - 3 \cdot \log_8(x - 2) = 2 - \log_2(x - 8),$$

odnosno, prelaskom na bazu 2,

$$2 \cdot \frac{\log_2(x+6)}{\log_2 4} - 3 \cdot \frac{\log_2(x-2)}{\log_2 8} = \log_2(2^2) - \log_2(x - 8),$$

a ta je jednakost, zbog $\log_2 4 = \log_2(2^2) = 2$ i $\log_2 8 = \log_2(2^3) = 3$, ekvivalentna s

$$\log_2(x + 6) - \log_2(x - 2) = \log_2 \frac{4}{x-8},$$

tj. s

$$\log_2 \frac{x+6}{x-2} = \log_2 \frac{4}{x-8}.$$

Izjednačavanjem logaritmanada dobivamo jednadžbu

$$\frac{x+6}{x-2} = \frac{4}{x-8}$$

koja, nakon množenja s $(x - 2)(x - 8)$, reduciranja i sređivanja, prelazi u kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - 6x - 40 = 0.$$

Sva realna rješenja te jednadžbe su $x_1 = -4$ i $x_2 = 10$. Zbog uvjeta $x > 8$, rješenje $x_1 = -4$ ne dolazi u obzir, pa je jedino realno rješenje zadane jednadžbe $x = 10$, tj. traženi skup je $S = \{10\}$.

1482. *Ako za neki kut x vrijedi jednakost* $\sin 2007x + \cos 2007x = \sqrt{\frac{2007}{2006}}$, *izračunajte* $\operatorname{tg} 2007x + + \operatorname{ctg} 2007x$.

Rješenje: Kvadriranjem zadane jednakosti dobivamo:

$$\sin^2 2007x + 2 \cdot (\sin 2007x \cdot \cos 2007x) + \cos^2 2007x = \frac{2007}{2006},$$

odnosno, zbog osnovnoga trigonometrijskoga identiteta kojega ovdje primijenjujemo u obliku $\sin^2 2007x +$ $+ \cos^2 2007x = 1$,

$$1 + 2 \cdot (\sin 2007x \cdot \cos 2007x) = \frac{2007}{2006},$$

a odavde je

$$\sin 2007x \cdot \cos 2007x = \frac{1}{4012}.$$

Tako sada imamo:

$$\text{tg } 2007x + \text{ctg } 2007x = \frac{\sin 2007x}{\cos 2007x} + \frac{\cos 2007x}{\sin 2007x} = \frac{\sin^2 2007x + \cos^2 2007x}{\sin 2007x \cdot \cos 2007x} = \frac{1}{\frac{1}{4012}} = 4012.$$

Opaska (za "nevjerne"): Kutova x koji zadovoljavaju zadanu jednakost ima beskonačno mnogo. Najmanji strogo pozitivan kut koji zadovoljava zadanu jednakost je $x \approx 0.000003557823°$.

1483. *Vrhovi trokuta ABC su* $A = (–3, –2)$, $B = (5, 2)$ *i* $C = (0, 7)$. *Odredite koordinate nožišta visine iz vrha C.*

Rješenje: Jednadžba pravca na kojemu leži stranica AB je

$$AB\ldots\ y - (-2) = \frac{2-(-2)}{5-(-3)} \cdot [x - (-3)],$$

odnosno

$$AB\ldots\ x - 2y - 1 = 0.$$

Pravac kojemu pripada visina iz vrha C je, prema definiciji, pravac koji prolazi vrhom C okomito na pravac kroz točke A i B. Stoga je njegov koeficijent smjera

$$k_{v_c} = -\frac{1}{k_{AB}} = \frac{x_A - x_B}{y_B - y_A} = \frac{-3-5}{2-(-2)} = -2,$$

pa je njegova jednadžba

$$v_c\ldots\ y - 7 = -2(x - 0),$$

odnosno

$$v_c\ldots\ 2x + y - 7 = 0.$$

Traženo nožište visine iz vrha C je sjecište pravaca AB i v_c. Dobivamo ga rješavajući sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 2x + y &= 7 \end{aligned}$$

Odavde je $x = 3$, $y = 1$, pa je traženo nožište $N = (3, 1)$.

1484. *Ako je* $z = \dfrac{16}{1-i\sqrt{3}} - \dfrac{14}{i\sqrt{3}+2}$, *odredite* $\text{Re}(z) \cdot \text{Im}(z)$.

Rješenje: Najprije racionalizirajmo nazivnike umanjenika i umanjitelja. Dobivamo:

$$z = \frac{16}{1-i\sqrt{3}} - \frac{14}{i\sqrt{3}+2} = \frac{16(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} - \frac{14\cdot(i\sqrt{3}-2)}{(i\sqrt{3}+2)(i\sqrt{3}-2)} = \frac{16(1+i\sqrt{3})}{1+3} - \frac{14\cdot(i\sqrt{3}-2)}{-3-4} =$$
$$= \frac{16(1+i\sqrt{3})}{4} - \frac{14(i\sqrt{3}-2)}{-7} = 4(1+i\sqrt{3}) + 2(i\sqrt{3}-2) = 4 + 4\sqrt{3}i + 2\sqrt{3}i - 4 = 6\sqrt{3}i$$

Odatle "očitamo": $\text{Re}(z) = 0$, $\text{Im}(z) = 6\sqrt{3}$, pa je $\text{Re}(z) \cdot \text{Im}(z) = 0$.

1485. *Odredite sve prirodne brojeve* $n \in \mathbf{N}$ *za koje je zbroj prvih n prirodnih brojeva koji pri dijeljenju s n daju ostatak* $n - 1$ *jednak* $60n - 60$.

Rješenje: Primijetimo najprije da nužno mora biti $n > 1$. Naime, za $n = 1$ tražimo prvih 1 prirodnih brojeva koji pri dijeljenju s 1 daju ostatak $1 - 1 = 0$., odnosno tražimo prvi prirodan broj djeljiv s 1. To je očito 1, a budući da ne vrijedi jednakost $1 = 60 \cdot 1 - 60$, mora biti $n > 1$.
Svi takvi prirodni brojevi tvore aritmetički niz (a_m) čiji je opći član $a_m = n \cdot m + (n - 1)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ (ovdje moramo uzeti u obzir i $m = 0$ jer količnik pri dijeljenju dvaju prirodnih brojeva može biti jednak 0). Prvi član toga niza je $a_1 = n \cdot 0 + (n - 1) = n - 1$, a n – ti $a_n = n \cdot (n - 1) + (n - 1) = n^2 - 1$, pa je zbroj prvih n članova niza

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (n - 1 + n^2 - 1) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 1) \cdot (n + 2).$$

Tako iz jednadžbe

$$\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 1) \cdot (n + 2) = 60n - 60,$$

koju možemo zapisati u obliku

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n + 2) = 120(n - 1),$$

odnosno u obliku

$$(n - 1)(n^2 + 2n - 120) = 0.$$

Budući da smo već zaključili da mora biti $n > 1$, prvi faktor ne može biti jednak 0. Stoga iz

$$n^2 + 2n - 120 = 0$$

slijedi $n_1 = -12$ i $n_2 = 10$. Rješenje $n_1 = -12$ nije prirodan broj, pa je traženi broj $n = 10$.

1486. *Jedan radnik može sâm završiti neki posao za* 20 *dana, a drugi za* 30 *dana. Ako bi im se nakon* 6 *dana obavljanja posla priključio treći radnik, posao bi bio obavljen za* 10 *dana. Za koje bi vrijeme treći radnik sâm obavio taj posao? (Pretpostavlja se da sva tri radnika rade pod jednakim uvjetima.)*

Rješenje: Označimo s x traženo vrijeme. Za 1 dan pvi radnik sâm napravi $\frac{1}{20}$ posla, drugi $\frac{1}{30}$ posla, a treći $\frac{1}{x}$ posla. Prvi i drugi radnik zajedno rade 6 dana, pa u tih 6 dana naprave $6 \cdot (\frac{1}{20} + \frac{1}{30})$ posla. U preostala $10 - 6 = 4$ dana rade sva tri radnika zajedno, pa u tom vremenu naprave $4 \cdot (\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{x})$ posla. Budući da je na taj način obavljen cijeli posao, mora vrijediti jednakost

$$6 \cdot (\frac{1}{20} + \frac{1}{30}) + 4 \cdot (\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{x}) = 1.$$

Množenjem svih članova navedene jednakosti sa $60x$ dobivamo:

$$18x + 12x + 12x + 8x + 240 = 60x,$$

a odavde je $x = 24$. Dakle, treći radnik bi sâm obavio taj posao za 24 dana.

1487. *Neka je a rješenje jednažbe* $\log_2 \log_3 x = 1$. *Izračunajte površinu kruga opisanoga oko kvadrata stranice a.*

Rješenje: Iz zadane jednadžbe antilogaritmiranjem slijedi $\log_3 x = 2^1$, tj. $\log_3 x = 2$, a odavde je ponovnim antilogaritmiranjem $x = 3^2 = 9$. Promjer kruga opisanoga oko kvadrata stranice $a = 9$ jednak je duljini dijagonale toga kvadrata, pa iz

$$2R = d = a\sqrt{2}$$

(R je polumjer opisanoga kruga, a d duljina dijagonale kvadrata) slijedi

$$R = \frac{1}{2}\,a\sqrt{2}\,.$$

Stoga je tražena površina kruga jednaka

$$P = R^2\pi = \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2\pi = \frac{a^2\pi}{2} = \frac{81\pi}{2}\text{ kv. jed.}$$

1488. *Duljine stranica trokuta su tri uzastopna člana aritmetičkoga niza s razlikom* 10. *Ako najveći kut trokuta iznosi* 120°, *izračunajte opseg trokuta.*

Rješenje: Neka je $x > 0$ duljina najkraće stranice trokuta. Tada su duljine preostalih dviju stranica trokuta $x + 10$ i $x + 20$, pa vrijedi nejednakost $x < x + 10 < x + 20$. Kut 120° je tupi kut, pa se nalazi nasuprot najveće stranice trokuta, a to je stranica duljine $x + 20$. Primjenom kosinusova poučka dobivamo:

$$\cos 120° = \frac{x^2+(x+10)^2-(x+20)^2}{2\cdot x\cdot(x+10)}\,,$$

odnosno

$$-\frac{1}{2} = \frac{x^2-20x-300}{2x^2+20x}\,.$$

Odatle množenjem s $2x^2 + 20x$ dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$4x^2 - 20x - 600 = 0,$$

odnosno

$$x^2 - 5x - 150 = 0.$$

Sva realna rješenja te jednadžbe su $x_1 = -10$ i $x_2 = 15$. Rješenje $x_1 = -10$ je strogo negativan broj, pa ne dolazi u obzir, te preostaje $x = x_2 = 15$. Stoga je opseg trokuta jednak

$$O = x + (x + 10) + (x + 20) = 3x + 30 = 3\cdot 15 + 30 = 75\text{ jed.}$$

1489. *Bez korištenja kalkulatora izračunajte vrijednost izraza* tg 40° · tg 45° · tg 50°.

Rješenje: Primijetimo da za svaki kut α, za koji su izrazi $\text{tg}(90° - \alpha)$ i $\text{ctg}\,\alpha$ dobro definirani, vrijedi jednakost

$$\text{tg}(90° - \alpha) = \text{ctg}\,\alpha$$

Ova jednakost lako slijedi iz

$$\text{tg}(90^\circ-\alpha) = \frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{\cos(90^\circ-\alpha)} = \frac{\sin 90^\circ\cdot\cos\alpha-\cos 90^\circ\cdot\sin\alpha}{\cos 90^\circ\cdot\cos\alpha+\sin 90^\circ\cdot\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \text{ctg}\,\alpha\,.$$

Stoga je zadani izraz jednak

tg 40° · tg 45° · tg(90° – 40°) = tg 40° · tg 45° · ctg 40° = [tg 40° · ctg 40°] · tg 45° = [tg 40° · $\frac{1}{\text{tg } 40^\circ}$] · tg 45° = = 1 · 1 = 1.

1490. *Dvadeset brojeva a_1, …, a_{20} u danom poretku tvori aritmetički niz. Zbroj svih članova s parnim indeksima jednak je* 350, *a zbroj svih članova s neparnim indeksima jednak je* 320. *Odredite jedanaesti član toga niza.*

Rješenje: Neka je d razlika polaznoga niza. Članovi s parnim indeksima su a_2, a_4, …, a_{18} i a_{20}. Njih ima točno 10 i oni tvore novi aritmetički niz kojemu je prvi član a_2, a razlika $2 \cdot d$. Njihov zbroj jednak je

$$S_{\text{parni}} = \frac{10}{2} \cdot (a_2 + a_{20}) = \frac{10}{2} \cdot \left[(a_1 + d) + (a_1 + 19 \cdot d)\right] = 10 \cdot a_1 + 100 \cdot d$$

Analogno, članova s neparnim indeksima: a_1, a_3, …, a_{17}, a_{19} ima točno 10 i oni tvore novi aritmetički niz kojemu je prvi član a_1, a razlika $2 \cdot d$. Njihov zbroj jednak je

$$S_{\text{neparni}} = \frac{10}{2} \cdot (a_1 + a_{19}) = \frac{10}{2} \cdot \left[a_1 + (a_1 + 18 \cdot d)\right] = 10 \cdot a_1 + 90 \cdot d \, .$$

Tako se dobije sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$10 \cdot a_1 + 100 \cdot d = 350$$
$$10 \cdot a_1 + 90 \cdot d = 320$$

Oduzimanjem druge jednadžbe od prve dobije se $10 \cdot d = 30$, a otuda je $d = 3$. Uvrštavanjem u bilo koju jednadžbu slijedi $a_1 = 5$. Konačno je $a_{11} = a_1 + 10 \cdot d = 5 + 10 \cdot 3 = 35$.

1491. *Ako je* $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{a}{b}}$, *za a, $b > 0$ i $a \neq b$, izrazite* sin x *pomoću a i b.*

Rješenje: Primjenom formule za tangens dvostrukoga kuta $\text{tg}(2 \cdot x) = \frac{2 \cdot \text{tg } x}{1 - \text{tg}^2 x}$ dobivamo:

$$\text{tg}\left[2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right] = \frac{2 \cdot \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{1 - \text{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)},$$

odnosno

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}}{1 - \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2}.$$

Lijeva strana toga izraza jednaka je

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\sin\frac{\pi}{2} \cdot \cos x - \cos\frac{\pi}{2} \cdot \sin x}{\cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos x + \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \text{ctg } x \, ,$$

a desna

$$\frac{2\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}}{1-\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2}=\frac{2\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}}{1-\frac{a}{b}}=\frac{2\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}}{\frac{b-a}{b}}=\frac{2\cdot b\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}}{b-a}=\frac{2\cdot\sqrt{b^2\cdot\frac{a}{b}}}{b-a}=\frac{2\cdot\sqrt{a\cdot b}}{b-a}.$$

Stoga je

$$\operatorname{ctg} x=\frac{2\cdot\sqrt{a\cdot b}}{b-a},$$

pa je konačno

$$\sin x=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2\cdot\sqrt{a\cdot b}}{b-a}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4\cdot a\cdot b}{(b-a)^2}}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{(b-a)^2+4\cdot a\cdot b}}{b-a}}=\frac{b-a}{\sqrt{b^2-2\cdot a\cdot b+a^2+4\cdot a\cdot b}}=$$

$$=\frac{b-a}{\sqrt{b^2+2\cdot a\cdot b+a^2}}=\frac{b-a}{\sqrt{(b+a)^2}}=\frac{b-a}{b+a}$$

1492. *Ako je $a>0$ i $x>\sqrt{a}$, pojednostavnite izraz* $\sqrt{\frac{a+x^2}{x}-2\cdot\sqrt{a}}+\sqrt{\frac{a+x^2}{x}+2\cdot\sqrt{a}}$.

<u>Rješenje</u>: Imamo redom:

$$\sqrt{\frac{a+x^2}{x}-2\cdot\sqrt{a}}+\sqrt{\frac{a+x^2}{x}+2\cdot\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{a-2\cdot\sqrt{a}\cdot x+x^2}{x}}+\sqrt{\frac{a+2\cdot\sqrt{a}\cdot x+x^2}{x}}=\sqrt{\frac{(x-\sqrt{a})^2}{x}}+\sqrt{\frac{(\sqrt{a}+x)^2}{x}}=$$

$$\frac{x-\sqrt{a}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{a}+x}{\sqrt{x}}=\frac{2\cdot x}{\sqrt{x}}=2\cdot\sqrt{\frac{x^2}{x}}=2\cdot\sqrt{x}$$

1493. *Binomni koeficijenti petoga i trećega člana u razvoju binoma* $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$, *za $x>0$ i $n\in\mathbf{N}$, odnose se kao $7:2$. Odredite koeficijent uz x u razvoju toga binoma.*

<u>Rješenje:</u> Binomni koeficijent uz treći član u razvoju navedenoga binoma jednak je $\binom{n}{2}=\frac{n\cdot(n-1)}{2!}=\frac{n\cdot(n-1)}{2}$, a binomni koeficijent uz peti član $\binom{n}{4}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{4!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{24}$. Stoga je njihov omjer jednak $\frac{\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{24}}{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}=\frac{(n-2)\cdot(n-3)}{12}=[(n-2)\cdot(n-3)]:12$. Tako dobivamo razmjer

$$[(n-2)\cdot(n-3)]:12=7:2,$$

iz kojega slijedi

$$2\cdot(n-2)\cdot(n-3)=12\cdot 7,$$

odnosno

$$(n-2)\cdot(n-3)=42.$$

Budući da su brojevi $n-3$ i $n-2$ uzastopni cijeli brojevi, te da je $42 = 6 \cdot 7$, iz gornje jednakosti slijedi $n-2=7$, odnosno $n=9$. (Bez „pogađanja“ ovu vrijednost možemo dobiti riješivši kvadratnu jednadžbu $(n-2)\cdot(n-3) =$ $= 42$, tj. jednadžbu $n^2 - 5\cdot n - 36 = 0$.) Tako je opći član u razvoju navedenoga binoma jednak

$$\binom{9}{k}\cdot\left(\sqrt{x}\right)^{9-k}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^{k}=\binom{9}{k}\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{9-k}\cdot\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{k}=\binom{9}{k}\cdot x^{\frac{9-k}{2}}\cdot x^{-\frac{2\cdot k}{3}}=\binom{9}{k}\cdot x^{\frac{9-k}{2}-\frac{2\cdot k}{3}}=\binom{9}{k}\cdot x^{\frac{27-3\cdot k}{6}-\frac{4\cdot k}{6}}=\binom{9}{k}\cdot x^{\frac{27-7\cdot k}{6}}.$$

Mi tražimo koeficijent uz x, odnosno koeficijent uz x^1. Stoga najprije moramo odrediti za koju vrijednost k će eksponent potencije $\binom{9}{k}\cdot x^{\frac{27-7\cdot k}{6}}$ biti jednak 1. U tu svrhu riješimo jednadžbu

$$\frac{27-7\cdot k}{6}=1.$$

Iz ove jednadžbe se lagano dobije $k = 3$, pa je traženi koeficijent $\binom{9}{3}=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3!}=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}=3\cdot 4\cdot 7=84$.

1494. *Izračunajte vrijednost brojevnoga izraza*

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2.$$

Rješenje: Koristeći formule za kvadrat zbroja, odnosno razlike binoma, te razliku kvadrata

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

i formulu

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

imamo redom:

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2=$$

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2+2\cdot\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2-2\cdot\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2=$$

$$\text{(korijeni i kvadrati se ''krate'', a drugi i peti pribrojnik zajedno daju 0)} =$$

$$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=2+2+2+2=8$$

1495. Odredite imaginarni dio kompleksnoga broja $z = (3-5i)^3$.

Rješenje: Koristeći formulu za kub razlike binoma

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

i potencije broja i

$$i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i$$

dobivamo:

$(3-5i)^3 = 3^3 - 3 \cdot 3^2 \cdot (5i) + 3 \cdot 3 \cdot (5i)^2 - (5i)^3 = 27 - 135i + 45i^2 - 125i^3 = 27 - 135i + 45 \cdot (-1) - 125 \cdot (-i) =$
$= 27 - 135i - 45 + 125i = -18 - 10i.$

Odatle izravno slijedi:

$$Im\, z = Im\,(-18 - 10i) = -10.$$

1496. Odredite područje definicije realne funkcije

$$f(x) = \frac{1}{x^3 + 3x^2 - x - 3}$$

<u>Rješenje:</u> Zadana realna funkcija je racionalna funkcija. Ona nije definirana u točkama u kojima je vrijednost njezina nazivnika jednaka 0. Stoga najprije moramo ispitati postoje li realni brojevi x za koje je vrijednost izraza $x^3 + 3x^2 - x - 3$ jednaka nuli. To znači da moramo riješiti jednadžbu:

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$$

To je kubna jednadžba koju, općenito, ne znamo riješiti. No, lijevu stranu te jednadžbe možemo rastaviti na umnožak dvaju jednostavnijih izraza, i to na sljedeći način:

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = x^2 \cdot (x + 3) - (x + 3) = (x + 3)(x^2 - 1)$$

Stoga je jednadžba

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$$

ekvivalentna jednadžbi

$$(x + 3)(x^2 - 1) = 0$$

Umnožak dvaju realnih brojeva jednak je 0 ako i samo ako je barem jedan od tih brojeva jednak 0. U našem slučaju to znači da barem jedan od brojeva $x + 3$ i $x^2 - 1$ treba biti jednak 0. Iz

$$x + 3 = 0$$

dobivamo

$$x = -3,$$

dok iz

$$x^2 - 1 = 0$$

slijedi

$$x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Dakle, vrijednost izraza $x^3 + 3x^2 - x - 3$ jednaka je nuli za ukupno tri realna broja x: $x = -3$, $x = -1$ i $x = 1$. Za sve ostale realne brojeve x vrijednost toga izraza je različita od nule, pa je traženo područje definicije

$$D_f = \mathbf{R} \setminus \{-3, -1, 1\}.$$

1497. Ako je

$$f^{-1}(x+1)=\frac{3x+6}{1-x},$$

izračunajte $f(1)$.

Rješenje:

1. način (standardni): Da bismo izračunali $f(1)$, najprije moramo odrediti formulu po kojoj se računa $f(x)$ za sve x iz područja definicije funkcije $f(x)$. Tu formulu možemo odrediti i pomoću formule za funkciji $f(x)$ inverznu funkciju $f^{-1}(x)$, a ovu, pak, iz zadane jednakosti. Zato najprije odredimo formulu za $f^{-1}(x)$. Stavimo

$$t = x + 1,$$

otkuda je

$$x = t - 1.$$

Sada u jednakosti

$$f^{-1}(x+1)=\frac{3x+6}{1-x}$$

svuda umjesto x pišimo $t - 1$. Dobivamo:

$$f^{-1}(t-1+1)=\frac{3(t-1)+6}{1-(t-1)}$$
$$f^{-1}(t)=\frac{3t-3+6}{1-t+1}$$
$$f^{-1}(t)=\frac{3t+3}{2-t}$$

"Preimenovanjem" nezavisne varijable t u x (to smijemo napraviti jer je posve nebitno kojim slovom označavamo nezavisnu varijablu: t, x, a, b, …) dobivamo:

$$f^{-1}(x)=\frac{3x+3}{2-x}$$

Time smo dobili formulu za funkciji $f(x)$ inverznu funkciju $f^{-1}(x)$. Iz te formule odredimo formulu za funkciju $f(x)$ sljedećim postupkom:

1.) Zamijenimo f^{-1}(x) sa y.
2.) Zamijenimo x i y (gdje god piše x, pišemo y i obrnuto)
3.) Izrazimo x pomoću y.
4.) Zamijenimo y s $f(x)$.

Imamo redom:

$$1.)\ \ y=\frac{3x+3}{2-x}$$
$$2.)\ \ x=\frac{3y+3}{2-y}$$
$$3.)\ \ x=\frac{3y+3}{2-y}$$
$$x\cdot(2-y)=3y+3$$
$$2x-xy=3y+3$$
$$-xy-3y=3-2x$$
$$y\cdot(-x-3)=3-2x$$
$$y=\frac{3-2x}{-x-3}$$
$$y=\frac{2x-3}{x+3}$$
$$4.)\ f(x)=\frac{2x-3}{x+3}$$

Dakle, vrijednost funkcije $f(x)$ računamo prema formuli:

$$f(x)=\frac{2x-3}{x+3}.$$

Da bismo izračunali $f(1)$, u tu formulu umjesto x uvrstimo 1. Konačno dobivamo:

$$f(1)=\frac{2\cdot 1-3}{1+3}$$
$$f(1)=-\frac{1}{4}$$
$$f(1)=-0.25$$

<u>*2. način* ("trik"):</u> Prema definiciji inverzne funkcije, vrijedi sljedeća relacija:

$$f^{-1}(b)=a\Leftrightarrow f(a)=b.$$

Prema toj relaciji, da bismo izračunali $f(1)$, moramo odrediti za koji je realan broj x vrijednost izraza $\frac{3x+6}{1-x}$ jednaka 1. U tu svrhu riješimo jednadžbu

$$\frac{3x+6}{1-x}=1$$

Imamo redom:

$$3x+6=1\cdot(1-x)$$
$$3x+6=1-x$$
$$3x+x=1-6$$
$$4x=-5$$
$$x=-\frac{5}{4}$$
$$x=-1.25$$

Sada u polaznu jednakost

$$f^{-1}(x+1)=\frac{3x+6}{1-x}$$

umjesto x uvrstimo – 1.25 pa dobijemo:

$$f^{-1}(-1.25+1)=1,$$
$$f^{-1}(-0.25)=1.$$

Napokon, u relaciju

$$f^{-1}(b)=a \Leftrightarrow f(a)=b$$

umjesto b uvrstimo –0.25, a umjesto a uvrstimo 1 Dobivamo:

$$f^{-1}(-0.25)=1 \Leftrightarrow f(1)=-0.25$$

Stoga je $f(1) = -0.25$.

1498. Koliko realnih rješenja ima jednadžba

$$27^{\frac{4}{3x}+1}+10\cdot 9^{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}\cdot 8^{\frac{2}{3x}}+2^{\frac{4}{x}+3}=\frac{455}{4}\cdot 16^{\frac{1}{x}}\ ?$$

Rješenje: Koristimo jednakosti $27 = 3^3$, $9 = 3^2$, $8 = 2^3$ i $16 = 2^4$, te formulu za potenciranje potencije

$$(a^b)^c = a^{b\cdot c}$$

U skladu s njima, zadanu jednadžbu transformiramo ovako:

$$(3^3)^{\frac{4}{3x}+1}+10\cdot(3^2)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}\cdot(2^3)^{\frac{2}{3x}}+2^{\frac{4}{x}+3}=\frac{455}{4}\cdot(2^4)^{\frac{1}{x}}$$
$$3^{3\cdot\left(\frac{4}{3x}+1\right)}+10\cdot 3^{2\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)}\cdot 2^{3\cdot\frac{2}{3x}}+2^{\frac{4}{x}+3}=\frac{455}{4}\cdot 2^{4\cdot\frac{1}{x}}$$
$$3^{\frac{4}{x}+3}+10\cdot 3^{\frac{2}{x}+1}\cdot 2^{\frac{2}{x}}+2^{\frac{4}{x}+3}=\frac{455}{4}\cdot 2^{\frac{4}{x}}$$

Sada koristimo formulu za množenje potencija istih baza zapisanu u sljedećemu obliku:

$$a^{b+c}=a^b\cdot a^c$$

U skladu s tom formulom polaznu jednadžbu dalje transformiramo ovako:

$$3^{\frac{4}{x}}\cdot 3^3+10\cdot 3^{\frac{2}{x}}\cdot 3^1\cdot 2^{\frac{2}{x}}+2^{\frac{4}{x}}\cdot 2^3=\frac{455}{4}\cdot 2^{\frac{4}{x}}$$
$$27\cdot 3^{\frac{4}{x}}+30\cdot 3^{\frac{2}{x}}\cdot 2^{\frac{2}{x}}+8\cdot 2^{\frac{4}{x}}=\frac{455}{4}\cdot 2^{\frac{4}{x}} \qquad /\cdot 4$$
$$108\cdot 3^{\frac{4}{x}}+120\cdot 3^{\frac{2}{x}}\cdot 2^{\frac{2}{x}}+32\cdot 2^{\frac{4}{x}}=455\cdot 2^{\frac{4}{x}}$$
$$108\cdot 3^{\frac{4}{x}}+120\cdot 3^{\frac{2}{x}}\cdot 2^{\frac{2}{x}}+32\cdot 2^{\frac{4}{x}}-455\cdot 2^{\frac{4}{x}}=0$$
$$108\cdot 3^{\frac{4}{x}}+120\cdot 3^{\frac{2}{x}}\cdot 2^{\frac{2}{x}}-423\cdot 2^{\frac{4}{x}}=0$$

Dobivenu jednadžbu podijelimo s $2^{\frac{4}{x}}$ (to smijemo jer je taj broj – kao potencija prirodnoga broja - uvijek različit od nule) i iskoristimo formulu za dijeljenje potencija istih eksponenata zapisanu u sljedećemu obliku:

$$\frac{a^c}{b^c}=\left(\frac{a}{b}\right)^c$$

Tako dobivamo:

$$108\cdot\frac{3^{\frac{4}{x}}}{2^{\frac{4}{x}}}+120\cdot\frac{3^{\frac{2}{x}}\cdot 2^{\frac{2}{x}}}{2^{\frac{4}{x}}}-423=0$$

$$108\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{4}{x}}+120\cdot 3^{\frac{2}{x}}\cdot 2^{\frac{2}{x}-\frac{4}{x}}-423=0$$

$$108\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{4}{x}}+120\cdot 3^{\frac{2}{x}}\cdot 2^{-\frac{2}{x}}-423=0$$

$$108\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{4}{x}}+120\cdot\frac{3^{\frac{2}{x}}}{2^{\frac{2}{x}}}-423=0$$

$$108\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{4}{x}}+120\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}}-423=0$$

Stavimo li

$$t=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}},$$

onda je

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{4}{x}}=\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\right]^2=t^2,$$

pa dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$108\cdot t^2+120\cdot t-423=0.$$

Njezina su rješenja

$$t_1=-\frac{47}{18},\ t_2=\frac{3}{2}$$

Budući da vrijedi nejednakost

$$t=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}}>0,$$

rješenje t_1 ne dolazi u obzir. Sada iz

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}}=\frac{3}{2}$$

slijedi

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{1}$$
$$\frac{2}{x}=1 \qquad / \cdot x$$
$$x=2$$

Zaključujemo da polazna jednadžba ima samo jedno realno rješenje $x = 2$.

1499. Riješite nejednadžbu:

$$(x+1)^{-x^2-2x} > x + 1.$$

Rješenje: Budući da se izraz $x + 1$ nalazi kao baza potencije, njegova vrijednost mora biti strogo pozitivna (jer je opća potencija a^b definirana samo za $a > 0$ i $a \neq 1$). Tako dobivamo sljedeće uvjete:

$$x + 1 > 0$$
$$x + 1 \neq 1.$$

Uvažavajući te uvjete, zaključit ćemo da su i lijeva i desna strana polazne nejednadžbe strogo pozitivni realni brojevi pa nejednadžbu smijemo podijeliti s $x + 1$ (pri čemu se znak nejednakosti ne mijenja). Dobit ćemo:

$$\frac{(x+1)^{-x^2-2x}}{x+1} > (x+1)^0$$
$$\frac{(x+1)^{-x^2-2x}}{(x+1)^1} > (x+1)^0$$
$$(x+1)^{-x^2-2x-1} > (x+1)^0$$
$$(x+1)^{-(x^2+2x+1)} > (x+1)^0$$
$$(x+1)^{-(x+1)^2} > (x+1)^0$$

Primijetimo da za sve realne brojeve x vrijedi nejednakost

$$-(x+1)^2 \leq 0.$$

pa razlikujemo dva moguća slučaja:

1.) $x + 1 > 1 \Rightarrow$ usporedbom eksponenata dobivamo nejednadžbu

$$-(x+1)^2 > 0,$$

odnosno, zajedno s početnim uvjetima

$$x + 1 > 0$$
$$x + 1 \neq 1.$$

i uvjetom

$$x + 1 > 1$$

sustav

$$x + 1 > 0$$

$$x + 1 \neq 1.$$
$$x + 1 > 1$$
$$-(x + 1)^2 > 0$$

Posljednja nejednadžba toga sustava, prema primijećenoj nejednakosti, nema niti jedno realno rješenje, što znači da niti cijeli sustav nema rješenja.

2.) $0 < x + 1 < 1 \Rightarrow$ usporedbom eksponenata dobivamo nejednadžbu

$$-(x + 1)^2 < 0,$$

odnosno sustav

$$x + 1 > 0$$
$$x + 1 \neq 1$$
$$0 < x + 1 < 1$$
$$-(x + 1)^2 < 0$$

Rješavanjem pojedinih nejednadžbi toga sustava dobivamo sljedeća rješenja:

$$x > -1$$
$$x \neq 0$$
$$-1 < x < 0$$
$$x \neq -1.$$

Presjek tih rješenja je skup $\langle -1, 0\rangle$, i taj je skup jedino rješenje zadane nejednadžbe.

1500. Ispit se sastoji od 5 pitanja na koja se odgovara zaokruživanjem točno jednoga od odgovora *A*, *B* ili *C*. Na koliko načina možete riješiti ispit ako odgovorite na sva pitanja?

Rješenje: Na svako od pitanja imamo točno 3 različita moguća odgovora, pa, prema načelu umnoška, na svih 5 pitanja možemo odgovoriti na ukupno $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$ različita načina. Stoga je traženi broj načina jednak 243.