1. *Izračunajte vrijednost sljedećega brojevnoga izraza:* $\frac{0.1 : 0.02^2}{0.1 \cdot 0.02}$.

Rješenje: $\frac{0.1 : 0.02^2}{0.1 \cdot 0.02} = \frac{\frac{0.1}{0.02^2}}{0.1 \cdot 0.02} = \frac{0.1}{0.1 \cdot 0.02^3} = \frac{1}{0.02^3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{100}\right)^3} = \left(\frac{100}{2}\right)^3 = 50^3 = 125000$

2. *Izračunajte* 0.3% *od* $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) : 0.4$.

Rješenje: Izračunajmo najprije vrijednost osnovne veličine. Imamo:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) : 0.4 = \frac{2-1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{3-2}{6} : \frac{4}{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{10}{4} = \frac{3}{4} - \frac{5}{12} = \frac{9-5}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Tako je 0.3% od $\frac{1}{3}$ jednako

$$\frac{0.3}{100} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\frac{3}{10}}{100} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{1000} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{1000} = 0.001$$

3. *Potpuno skratite algebarski razlomak* $\frac{a^3 - 2a^2}{a^2 - 4a + 4}$.

Rješenje: Najprije uočimo da je $a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2$. Tako imamo:

$$\frac{a^3 - 2a^2}{a^2 - 4a + 4} = \frac{a^2 \cdot (a-2)}{(a-2)^2} = \frac{a^2}{a-2}$$

i taj je algebarski razlomak potpuno skraćen.

4. *Riješite jednadžbu*: $\frac{0.77}{x} = -3.5$.

Rješenje: Pomnožimo jednadžbu s x pa dobijemo:

$$-3.5 \cdot x = 0.77$$

Decimalne brojeve zapišemo kao razlomke:

$$\left(-\frac{35}{10}\right) \cdot x = \frac{77}{100}$$
$$\left(-\frac{7}{2}\right) \cdot x = \frac{77}{100}$$

Dijeljenjem jednadžbe s $-\frac{7}{2}$ konačno dobivamo:

$$x=\frac{77}{100}:\left(-\frac{7}{2}\right)$$
$$x=\frac{77}{100}\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)$$
$$x=-\frac{11}{50}$$
$$x=-0.22$$

5. *Izračunajte:* $\sqrt{2}:\sqrt[3]{2}$.

Rješenje: 1. način: Svedimo oba zadana korijena na jedan. Kako je najmanji zajednički višekratnik od 2 i 3 jednak 6, zadane korijene svodimo na šesti korijen. Imamo redom:

$$\sqrt{2}:\sqrt[3]{2}=\sqrt[2\cdot3]{2^{1\cdot3}}:\sqrt[3\cdot2]{2^{1\cdot2}}=\sqrt[6]{2^3}:\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{2^3:2^2}=\sqrt[6]{2^1}=\sqrt[6]{2}$$

2. način: Zapišimo zadane korijene kao potencije s razlomljenim eksponentom, pa primijenimo pravilo za dijeljenje potencija istih baza:

$$\sqrt{2}:\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{2}}:2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=2^{\frac{3-2}{6}}=2^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{2}$$

6. *Odredite* i^{-137}.

Rješenje: Najprije iskoristimo činjenicu da je $i^{-1}=-i$. Stoga je $i^{-137}=(i^{-1})^{137}=(-i)^{137}=(-1)^{137}\cdot i^{137}=-i^{137}$. Nadalje, i^{137} računamo tako da 137 podijelimo sa 4 , pa i potenciramo na dobiveni ostatak pri tom dijeljenju. Kako je 137 : 4 = 34 i ostatak 1, to je $i^{137}=i^1=i$. Tako je konačno

$$i^{-137}=-i^{137}=-i.$$

7. *Odredite* $\log_{27}729$.

Rješenje: Rastavimo li broj 729 na proste faktore, dobit ćemo: $729=3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3=3^6=(3^3)^2=27^2$. Tako je zadani broj jednak

$$\log_{27}729=\log_{27}(27^2)=2\log_{27}27=2\cdot1=2.$$

8. *Logaritmirajte izraz* $\dfrac{x^2-y^2}{xy}$ *po bazi* 10.

Rješenje: Primijenjujući formulu za razliku kvadrata, te formule za logaritam umnoška, odnosno količnika dobivamo:

$$\log\frac{x^2-y^2}{xy}=\log\frac{(x-y)(x+y)}{xy}=\log(x-y)+\log(x+y)-\log(xy)=\log(x-y)+\log(x+y)-\log x-\log y$$

9. *Zadane su funkcije* $f(x)=x^2$ *i* $g(x)=2x+3$. *Izračunajte* $(f\circ g)(-2)$.

Rješenje: Imamo redom:

$$(f\circ g)(-2)=f[g(-2)]=f[2\cdot(-2)+3]=f[-1]=(-1)^2=1$$

10. *Neka su* $T_1(x_1, y_1)$ *i* $T_2(x_2, y_2)$ *točke u kojima se sijeku grafovi funkcija* $f(x) = -3x + 1$ *i* $g(x) = 2x^2 + 3x + 3$. *Izračunajte* $x_1 + x_2$.

__Rješenje:__ Sjecišta grafova zadanih funkcija dobivamo tako da izjednačimo izraze kojima su zadane te funkcije. U našem slučaju, iz $f(x) = g(x)$ slijedi

$$-3x + 1 = 2x^2 + 3x + 3,$$

odnosno

$$2x^2 + 6x + 2 = 0,$$

odnosno

$$x^2 + 3x + 1 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe upravo su vrijednosti koordinata x_1 i x_2. Prema Vièteovim formulama, zbroj tih rješenja jednak je suprotnoj vrijednosti koeficijenta uz x. Kako je koeficijent uz x jednak 3, to je konačno

$$x_1 + x_2 = -3$$

11. *Odredite kvadratnu funkciju čije su nultočke* -1 *i* 2, *a čiji graf prolazi točkom* $T(1, 4)$.

__Rješenje:__ Ako su x_1 i x_2 nultočke kvadratne funkcije $f(x)$, onda vrijedi jednakost:

$$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2),$$

gdje je $a \in \mathbf{R}$ realan parametar. U našem je slučaju $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, pa je

$$f(x) = a \cdot (x + 1) \cdot (x - 2).$$

Nepoznati parametar a odredit ćemo iz činjenice da graf funkcije prolazi točkom T. To što graf funkcije $f(x)$ prolazi točkom $T(1, 4)$ znači da je

$$f(1) = 4.$$

Zbog toga u jednakost

$$f(x) = a \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)$$

uvrstimo $x = 1$ pa dobijemo:

$$f(1) = a \cdot (1 + 1) \cdot (1 - 2),$$

tj.

$$f(1) = -2a.$$

No, s druge je strane

$$f(1) = 4$$

pa usporedbom desnih strana tih jednakosti dobivamo jednadžbu

$$-2a = 4$$

i otuda

$$a = -2.$$

Dakle,

$$f(x) = (-2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2),$$

odnosno nakon provedenoga množenja

$$f(x) = -2x^2 + 2x + 4.$$

12. *Odredite skup svih rješenja nejednadžbe* $\frac{-3}{2x+3} \geq 0$.

Rješenje: Količnik dvaju izraza je nenegativan ako i samo ako su oba izraza istoga predznaka i djelitelj različit od nule. Kako je u gornjoj jednakosti djeljenik (–3) negativan realan broj, i nazivnik mora biti negativan realan broj različit od nule:

$$2x + 3 < 0.$$

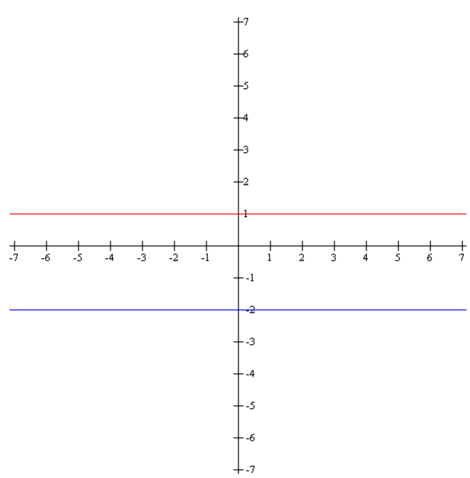
Iz te nejednadžbe dobivamo:

$$x < -\frac{3}{2}$$

pa je skup svih rješenja zadane nejednadžbe otvoreni interval $\left\langle -\infty, -\frac{3}{2} \right\rangle$.

13. *Dvije stranice kvadrata leže na pravcima* p_1 … $y = -2$ i p_2… $y = 1$. *Izračunajte površinu toga kvadrata*.

Rješenje: Nacrtajmo zadane pravce u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini.



Sa slike vidimo da su ti pravci usporedni i da njihova međusobna udaljenost iznosi $a = |-2 - 1| = |-3| = 3$. Stoga je duljina stranice kvadrata jednaka $a = 3$, pa je njegova površina $P = a^2 = 3^2 = 9$ kv. jed.

14. *Pravac p je usporedan s osi Oy i prolazi točkom T*(–2, 3). *Odredite jednadžbu pravca koji je simetričan pravcu p s obzirom na os Oy*.

Rješenje: Označimo traženi pravac s p_1. Pravac p_1 također je usporedan s osi Oy i prolazi točkom T_1 koja je simetrična zadanoj točki T s obzirom na os Oy. Odredimo njezine koordinate. Općenito, ako je $A(x_A, y_A)$ neka točka, onda su koordinate točke simetrične točki A s obzirom na os Oy dane s $A'(-x_A, y_A)$. Primijenimo li tu tvrdnju na našu točku T, dobivamo da je $T'(2, 3)$. Preostaje još napisati jednadžbu pravca koji prolazi točkom T' usporedno s osi Oy. Njegova opća jednadžba je $x = a$, pri čemu je $a \in \mathbf{R}$ realan parametar. Konkretnu vrijednost parametra a u ovom ćemo slučaju dobiti uvrstimo li koordinate točke T' u jednakost $x = a$, i to 2 umjesto x, a 3 umjesto y. Odmah je:

$$a = 2$$

pa je konačno $p_1 \ldots\ x = 2$.

15. *Vrhovi trokuta ABC su točke A*(1, 2), *B*(–2, 3) *i C*(–4, –1). *Odredite jednadžbu pravca na kojemu leži težišnica toga trokuta povučena iz vrha A*.

Rješenje: Označimo traženi pravac s t. Pravac t prolazi točkom A i polovištem P točki A nasuprotne stranice BC. Koordinate točke P odredit ćemo pomoću koordinata točaka B i C:

$$P\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right)$$
$$P\left(\frac{(-2)+(-4)}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right)$$
$$P(-3, 1)$$

Preostaje napisati jednadžbu pravca kroz točke A i P. U tu svrhu koristimo formulu za jednadžbu pravca kroz dvije zadane točke:

$$y - 1 = \frac{2-1}{1-(-3)}(x - (-3))$$
$$y - 1 = \frac{1}{4}(x+3)$$
$$y - 1 = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$
$$y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} + 1$$
$$y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$$

ili u implicitnom obliku

$$t \ldots\ x - 4y + 7 = 0.$$

16. *Izračunajte udaljenost točke T*(–2, –2) *od pravca p*… $y = -3x + 2$.

Rješenje: Jednadžbu pravca p najprije zapišemo u implicitnom obliku

$$3x + y - 2 = 0$$

Traženu udaljenost d računamo tako da u formulu za udaljenost točke $T(x_T, y_T)$ od pravca $p \ldots\ Ax + By + C = 0$

$$d(T,p)=\frac{|Ax_T+By_T+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

uvrstimo $x_T = y_T = -2$, $A = 3$, $B = 1$ i dobijemo:

$$d=\frac{|3\cdot(-2)-2-2|}{\sqrt{3^2+1^2}}$$
$$d=\frac{|-10|}{\sqrt{10}}$$
$$d=\frac{10}{\sqrt{10}}=\frac{10}{10}\sqrt{10}=\sqrt{10}$$

17. *Krajevi promjera kružnice k su točke* $A(0, -1)$ *i* $B(4, -5)$. *Odredite jednadžbu kružnice k.*

Rješenje: Za određivanje tražene jednadžbe trebaju nam koordinate središta i polumjer kružnice. Središte kružnice je polovište dužine AB, a polumjer kružnice jednak je polovici udaljenosti između točaka A i B. Tako je:

$$S\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$
$$S\left(\frac{0+4}{2},\frac{(-1)+(-5)}{2}\right)$$
$$S(2,\,-3)$$

i

$$r=\frac{1}{2}|AB|$$
$$r=\frac{1}{2}\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$$
$$r=\frac{1}{2}\sqrt{(0-4)^2+[(-1)-(-5)]^2}$$
$$r=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+4^2}$$
$$r=\frac{1}{2}\sqrt{32}$$

Traženu jednadžbu kružnice k odredit ćemo tako da u jednakost

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$$

uvrstimo 2 umjesto p, -3 umjesto q i $\frac{1}{2}\sqrt{32}$ umjesto r. Konačno dobivamo:

$$k...(x-2)^2+(y-(-3))^2=\left(\frac{1}{2}\sqrt{32}\right)^2$$
$$k...(x-2)^2+(y+3)^2=\frac{1}{4}\cdot 32$$
$$k...(x-2)^2+(y+3)^2=8$$

18. *Izračunajte* sin(–150°) – tg(–225°).

<u>Rješenje:</u> Izračunajmo zasebno vrijednost svakoga od pribrojnika. Kako je temeljni period funkcije sinus jednak 2π, odnosno 360°, to vrijedi:

$$\sin(-150°) = \sin(-150° + 360°) = \sin(210°) = \sin(180° + 30°).$$

Primjenom adicionoga teorema za funkciju sinus

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

dalje dobivamo:

$$\sin(210°) = \sin(180° + 30°) = \sin 180°\cos 30° + \cos 180°\sin 30° = 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2},$$

pa je

$$\sin(-150°) = -\frac{1}{2} = -0.5$$

Nadalje, kako je temeljni period funkcije tangens jednak π, odnosno 180°, to vrijedi:

$$\mathrm{tg}(-225°) = \mathrm{tg}(-225° + 2\cdot 180°) = \mathrm{tg}(135°) = \mathrm{tg}(180° - 45°),$$

što je prema adicionom teoremu za funkciju tangens

$$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta}$$

dalje jednako

$$\mathrm{tg}(135°) = \mathrm{tg}(180° - 45°) = \frac{\mathrm{tg}180° - \mathrm{tg}45°}{1 + \mathrm{tg}180° \cdot \mathrm{tg}45°} = \frac{0 - 1}{1 + 0 \cdot 1} = -1,$$

pa je

$$\mathrm{tg}(-225°) = -1.$$

Konačno je

$$\sin(-150°) - \mathrm{tg}(-225°) = -0.5 - (-1) = 0.5$$

19. *Izračunajte zbroj svih rješenja jednadžbe* $3\cos x + \frac{3}{2} = 0$ *u segmentu* $[0, 2\pi]$.

<u>Rješenje:</u> Iz zadane jednadžbe slijedi:

$$3\cos x = -\frac{3}{2}$$
$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

Odavde je

$$x_1 = \frac{2\pi}{3}$$
$$x_2 = 2\pi - x_1 = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

Zbroj tih rješenja jest

$$x_1 + x_2 = 2\pi.$$

Isti rezultat mogli smo dobiti kraće i brže ovim zaključivanjem: Ako je x_1 jedno rješenje jednadžbe $\cos x = a$, $a \in [-1, 1]$ u intervalu $[0, 2\pi]$, onda drugo rješenje te jednadžbe x_2 dobijemo iz formule

$$x_2 = 2\pi - x_1.$$

Odatle izravno slijedi

$$x_1 + x_2 = 2\pi.$$

20. *Ako je* $\sin x = \frac{3}{5}$ *i* $x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$, *izračunajte* $\operatorname{ctg} x$.

Rješenje: Izračunajmo najprije vrijednost kosinusa kuta x. Kako je x kut iz drugoga kvadranta, vrijednost njegova kosinusa bit će negativna. Zbog toga je

$$\cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x} = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

Konačno je

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

21. *Ako je* $\operatorname{tg} x = 0.5$ *i* $x \in \langle \pi, \frac{3\pi}{2} \rangle$, *izračunajte* $\cos x$.

Rješenje: Kako je x kut iz trećega kvadranta, vrijednost njegova kosinusa bit će negativna. Zbog toga je

$$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1+0.5^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+0.25}} = -\frac{1}{\sqrt{1.25}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{5}\sqrt{5}$$

22. *Jedan kut trokuta ABC iznosi* 65°, *a ostala dva kuta se odnose kao* 2 : 3. *Odredite sve kutove toga trokuta*.

Rješenje: Označimo kutove trokuta s α, β i γ. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\alpha = 65°$. To znači da vrijedi

$$\beta : \gamma = 2 : 3.$$

Kako zbroj kutova u trokutu mora iznositi 180°, vrijedi i jednakost

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

koja nakon uvrštavanja $\alpha = 65°$ prelazi u

$$65° + \beta + \gamma = 180°,$$

odnosno u

$$\beta + \gamma = 115°$$

Tako smo dobili sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice

$$\beta : \gamma = 2 : 3$$
$$\beta + \gamma = 115°$$

Primjenom osnovnoga pravila za računanje s omjerima (umnožak dvaju vanjskih članova omjera jednak je umnošku dvaju njegovih unutrašnjih članova) iz prve jednadžbe toga sustava dobivamo

$$3\beta = 2\gamma$$

otkuda je

$$\gamma = \frac{3}{2}\beta$$

Tu jednakost sada uvrstimo u drugu jednadžbu sustava

$$\beta + \gamma = 115°$$

pa dobivamo:

$$\beta + \frac{3}{2}\beta = 115°,$$

odnosno množenjem s 2

$$2\beta + 3\beta = 230°,$$
$$5\beta = 230°$$

i

$$\beta = 46°.$$

Tako je

$$\gamma = \frac{3}{2}\beta = \frac{3}{2}\cdot 46° = \frac{138}{2} = 69°$$

Stoga su traženi kutovi trokuta 46°, 65° i 69°.

23. *Duljina osnovice jednakokračnoga trokuta iznosi* $\sqrt{3}$ cm, *a udaljenost težišta trokuta od nje* 2 cm. *Izračunajte površinu toga trokuta.*

Rješenje: Označimo vrhove trokuta s A, B i C. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je dužina BC osnovica trokuta, odnosno da je $a = \sqrt{3}$ cm. Nadalje, neka je T težište trokuta. U jednakokračnome se trokutu težišnica na osnovicu t_a podudara s visinom na osnovicu v_a pa je udaljenost težišta trokuta od osnovice jednaka trećini duljine težišnice t_a (jer težište trokuta dijeli težišnicu trokuta u omjeru 2 : 1 računajući od vrha trokuta), odnosno trećini duljine visine na osnovicu v_a. Tako iz

$$\frac{1}{3}v_a = 2$$

slijedi

$$v_a = 6 \text{ cm}$$

Tako konačno imamo:

$$P = \frac{a\cdot v_a}{2}$$
$$P = \frac{\sqrt{3}\cdot 6}{2}$$
$$P = 3\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

24. *U pravokutnomu trokutu ABC duljina katete BC iznosi* 5 cm, *a kut pri vrhu B* 60°. *Izračunajte duljinu hipotenuze toga trokuta.*

Rješenje: Znamo da je a = 5 cm i β = 60°. Tražimo duljinu hipotenuze c. Nju ćemo izračunati tako da odredimo koja trigonometrijska funkcija kuta β povezuje taj kut, duljinu katete a i duljinu hipotenuze c. To je funkcija kosinus:

$$\cos\ \beta = \frac{a}{c}$$

otkuda je

$$c = \frac{a}{\cos\ \beta}$$
$$c = \frac{5}{\cos\ 60°}$$
$$c = \frac{5}{0.5}$$
$$c = 10\,\text{cm}$$

25. *Duljina visine na hipotenuzu pravokutnoga trokuta ABC iznosi* $2\sqrt{3}$, *a kut pri vrhu A* 30°. *Izračunajte duljinu stranice trokuta nasuprot tom kutu.*

Rješenje: Neka je C vrh pravoga kuta, a N nožište visine povučene iz vrha C na hipotenuzu AB (nacrtajte sliku!). Najprije primijetimo da kut trokuta ABC kod vrha B iznosi

$$\beta = 90° - 30°,$$

odnosno

$$\beta = 60°$$

jer je u pravokutnom trokutu zbroj dvaju šiljastih kutova jednak 90°.
Uočimo trokut CBN. Taj trokut je pravokutan (s pravim kutom pri vrhu N), visina na hipotenuzu (čiju duljinu znamo) v_c jedna je njegova kateta, stranica BC (čiju duljinu tražimo) njegova je hipotenuza, a kut pri vrhu B jednak je 60°. Sada trebamo odrediti trigonometrijsku funkciju kuta β koja povezuje taj kut, duljinu visine v_c i duljinu stranice BC (to je duljina katete a trokuta ABC). Tražena funkcija je funkcija sinus:

$$\sin\ \beta = \frac{v_c}{a}$$

otkuda je

$$a = \frac{v_c}{\sin\beta}$$
$$a = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60°}$$
$$a = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$a = 4$$

26. *Koliko različitih prostornih dijagonala ima krnja peterostrana piramida?*

Rješenje: Nacrtajte sliku! Neka je A jedan vrh donje baze piramide, a A_1 vrh gornje baze neposredno iznad A. Vrh A_1 ima dva susjedna vrha gornje baze (označimo ih s B_1 i C_1) čije su spojnice s vrhom A bočne dijagonale. Prema tome, preostaju svega dva vrha gornje baze čije spojnice s vrhom A tvore prostorne dijagonale. Budući da vrh A možemo izabrati na ukupno pet različitih načina, traženi je broj jednak $5 \cdot 2 = 10$.

27. *Pojednostavnite izraz*: $\dfrac{(x^4-6x^3+18x^2-32x+24)(x^2-1)}{(x-1)(x^3-x^2+4x+6)}$.

Rješenje: Kako je

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1),$$

zadani algebarski razlomak prelazi u

$$\frac{(x^4-6x^3+18x^2-32x+24)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^3-x^2+4x+6)} =$$
$$= \frac{(x^4-6x^3+18x^2-32x+24)(x+1)}{x^3-x^2+4x+6}$$

Budući da je polinome 4. stupnja (u brojniku), odnosno 3. stupnja (u nazivniku) vrlo teško rastaviti u faktore (uočite da metoda izlučivanja zajedničkih članova ovdje nije primjenjiva!), postupit ćemo na sljedeći način: Pomnožimo polinome u brojniku i dobiveni rezultat podijelimo polinomom u nazivniku. Imamo redom:

$(x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 32x + 24) \cdot (x + 1) = x^5 - 6x^4 + 18x^3 - 32x^2 + 24x + x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 32x + 24 = x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 14x^2 - 8x + 24$;

$$
\begin{array}{l}
(x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 14x^2 - 8x + 24) : (x^3 - x^2 + 4x + 6) = x^2 - 4x + 4 \\
\underline{x^5 - x^4 + 4x^3 + 6x^2} \\
\quad -4x^4 + 8x^3 - 20x^2 - 8x \\
\quad \underline{-4x^4 + 4x^3 - 16x^2 - 24x} \\
\qquad\qquad 4x^3 - 4x^2 + 16x + 24 \\
\qquad\qquad \underline{4x^3 - 4x^2 + 16x + 24} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Stoga je zadani razlomak jednak

$$x^2 - 4x + 4,$$

odnosno

$$(x - 2)^2.$$

28. *Izračunajte umnožak svih kompleksnih rješenja jednadžbe*

$$2z - 6 + 2|z| = \overline{z} - 9i$$

Rješenje: Pretpostavimo da je $z = a + bi$, $a, b \in \mathbf{R}$. Tada je

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\overline{z} = a - bi$$

pa uvrštavanjem dobivamo:

$$2(a + bi) - 6 + 2\sqrt{a^2 + b^2} = a - bi - 9i$$
$$(2a - 6 + 2\sqrt{a^2 + b^2}) + (2b)i = a + (-b - 9)i$$

Usporedbom realnih, odnosno imaginarnih dijelova dobivamo sljedeći sustav:

$$2a - 6 + 2\sqrt{a^2 + b^2} = a$$
$$2b = -b - 9$$

Iz druge jednadžbe toga sustava odmah slijedi

$$3b = -9,$$

otkuda je

$$b = -3.$$

Kad to uvrstimo u prvu jednadžbu sustava, dobijemo:

$$2a-6+2\sqrt{a^2+3^2}=a$$
$$2\sqrt{a^2+9}=6-a$$

Budući da je lijeva strana posljednje jednakosti nenegativan realan broj, takva mora biti i desna strana, što znači da na parametar a postavljamo dodatni uvjet

$$6-a\geq 0,$$

iz kojega je

$$a\leq 6.$$

Sada kvadriranjem te jednakosti dobijemo:

$$4(a^2+9)=36-12a+a^2,$$

odnosno

$$3a^2+12a=0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su

$$a_1=0,\ a_2=-4$$

i ona zadovoljavaju uvjet $a\leq 6$. Stoga su rješenja polazne jednadžbe kompleksni brojevi

$$z_1=0-3i=-3i,$$
$$z_2=-4-3i.$$

Njihov je umnožak jednak

$$z_1\cdot z_2=(-3i)\cdot(-4-3i)=12i+9i^2=-9+12i.$$

29. *Izračunajte vrijednost izraza*

$$\frac{(y^2-2xy+x^2)(2x+2y)}{y-x}+(x+y)\sqrt{\frac{y-x}{y+x}}$$

za $x=-\sqrt{5}$, $y=2$.

Rješenje: Zadani algebarski izraz najprije ćemo malo pojednostavniti. Uočimo da je

$$y^2-2xy+x^2=(y-x)^2$$

i

$$2x+2y=2(x+y)$$

pa je prvi pribrojnik jednak

$$\begin{aligned}&\frac{2(y-x)^2(x+y)}{y-x}=\\&2(y-x)(x+y)=\\&2(y^2-x^2)=\\&2y^2-2x^2\end{aligned}$$

Nadalje, unesemo li u drugomu pribrojniku izraz $x + y$ pod znak drugoga korijena, dobit ćemo:

$$\begin{aligned}&\sqrt{(x+y)^2\cdot\frac{y-x}{y+x}}=\\&\sqrt{(x+y)(y-x)}=\\&\sqrt{y^2-x^2}\end{aligned}$$

Tako je zadani algebarski izraz zapravo jednak

$$2y^2-2x^2+\sqrt{y^2-x^2}$$

Kako je

$$x^2=5$$

i

$$y^2=4,$$

uvrštavanjem dobivamo traženu vrijednost:

$$\begin{aligned}&2\cdot4-2\cdot5+\sqrt{4-5}=\\&=-2+\sqrt{-1}=\\&=-2+i\end{aligned}$$

30. *Izračunajte* $\frac{3}{14}$% *od* 7% *od* 1.6.

<u>**Rješenje:**</u> Odmah imamo:

$$\begin{aligned}&\frac{\frac{3}{14}}{100}\cdot\left(\frac{7}{100}\cdot\frac{16}{10}\right)=\\&=\frac{3}{1400}\cdot\frac{7\cdot16}{1000}=\\&=\frac{24}{100000}=2.4\cdot10^{-4}\end{aligned}$$

31. *Ako je* $f\left(\frac{x}{2}-\pi\right)=\sin x$ *za sve* $x\in\mathbf{R}$, *odredite* $f(x)$.

Rješenje: Stavimo

$$t = \frac{x}{2} - \pi$$

otkuda je

$$x = 2t + 2\pi.$$

Dobiveni x uvrstimo u zadanu jednakost

$$f\left(\frac{x}{2} - \pi\right) = \sin x$$

i dobijemo

$$f(t) = \sin(2t + 2\pi),$$

što je zbog 2π – periodičnosti funkcije sinus jednako

$$f(t) = \sin(2t).$$

Zamjenom slova t slovom x konačno dobijemo:

$$f(x) = \sin(2x) = 2\sin x \cos x.$$

31. *Odredite zbroj svih rješenja jednadžbe*

$$|x + 2| - |x - 3| = 2x.$$

Rješenje: Najprije odredimo kritične točke iz jednadžbi

$$\begin{gathered} x + 2 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{gathered}$$

Rješenja tih jednadžbi su $x_1 = -2$ i $x_2 = 3$, pa imamo ukupno 3 podslučaja:

1.) $-\infty < x \leq -2$

Na ovome je intervalu

$$\begin{aligned} |x + 2| &= -(x + 2) = -x - 2 \\ |x - 3| &= -(x - 3) = 3 - x \end{aligned}$$

pa dobivamo jednadžbu

$$-x - 2 - 3 + x = 2x$$

iz koje je

$$x = -\frac{5}{2}$$

Dobiveni x zadovoljava nejednakost

$$-\infty < x \leq -2$$

i rješenje je polazne jednadžbe.

2.) $-2 \leq x \leq 3$

Na ovome je intervalu

$$|x+2| = x+2$$
$$|x-3| = 3-x$$

pa dobivamo jednadžbu

$$x + 2 - 3 + x = 2x$$

iz koje slijedi

$$0 = -1$$

što je netočno. Zbog toga na promatranom intervalu polazna jednadžba nema rješenja.

3.) $3 \leq x \leq +\infty$

Na ovome je intervalu

$$|x+2| = x+2$$
$$|x-3| = x-3$$

pa dobivamo jednadžbu

$$x + 2 - x + 3 = 2x$$

čije je rješenje

$$x = \frac{5}{2}$$

Dobiveni x ne zadovoljava jednakost $3 \leq x \leq +\infty$ pa nije rješenje polazne jednadžbe.

Zaključimo: Polazna jednadžba ima jedinstveno rješenje $x = -\frac{5}{2}$ pa je zbroj svih njezinih rješenja jednak $-\frac{5}{2}$.

33. *Odredite skup svih rješenja nejednadžbe*

$$\frac{4x+8}{x+3} \geq -\log_{\frac{1}{3}} 27$$

Rješenje: Izračunajmo najprije vrijednost logaritma na desnoj strani zadane nejednadžbe. Kako je $27 = 3^3$, a $3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$, to je $27 = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right]^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ pa je

$$-\log_{\frac{1}{3}} 27 = -\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = -(-3)\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = 3 \cdot 1 = 3$$

Stoga je polazna nejednadžba ekvivalentna s

$$\frac{4x+8}{x+3} \geq 3$$
$$\frac{4x+8}{x+3} - 3 \geq 0$$
$$\frac{4x+8-3(x+3)}{x+3} \geq 0$$
$$\frac{4x+8-3x-9}{x+3} \geq 0$$
$$\frac{x-1}{x+3} \geq 0$$

Vrijednost razlomka je nenegativna ako i samo ako su brojnik i nazivnik istoga predznaka, te nazivnik različit od nule. Zbog toga imamo dva moguća slučaja:

1.) $x - 1 \geq 0$
$x + 3 > 0$

Iz prve nejednakosti je $x \geq 1$, a iz druge $x > -3$. Presjek dobivenih rješenja je $x \geq 1$, pa je u ovom slučaju skup rješenja poluzatvoreni interval $[1, +\infty\rangle$.

2.) $x - 1 \leq 0$
$x + 3 < 0$

Iz prve nejednakosti je $x \leq 1$, a iz druge $x < -3$. Presjek dobivenih rješenja je $x < -3$, pa je u ovom slučaju skup rješenja otvoreni interval $\langle -\infty, -3\rangle$.

Skup svih rješenja polazne nejednadžbe je unija dobivenih skupova rješenja: $\langle -\infty, -3\rangle \cup [1, +\infty\rangle$.

34. *Odredite vrijednost realnoga parametra $m \in$* **R** *za koji jednadžba*

$$(3m - 3)x^2 + (6m - 2)x + 3m = 0$$

ima jedno dvostruko realno rješenje.

Rješenje: Zadana jednadžba će imati jedno dvostruko realno rješenje ako i samo ako vrijednost njezine diskriminante bude jednaka nuli. Odatle dobivamo jednadžbu:

$$(6m - 2)^2 - 4 \cdot (3m - 3) \cdot 3m = 0$$

Kvadriranjem i množenjem dobivamo:

$$36m^2 - 24m + 4 - 36m^2 + 36m = 0,$$

odnosno

$$12m = -4.$$

Odatle je

$$m=-\frac{4}{12}=-\frac{1}{3}.$$

35. *Odredite zbroj svih rješenja jednadžbe*

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x-4}-6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x-4}=3\log_x x^9$$

Rješenje: Budući da se nepoznanica x nalazi kao baza logaritma na desnoj strani polazne jednadžbe, na nju moramo postaviti uvjete $x > 0$ i $x \neq 1$ jer inače logaritam na desnoj strani jednadžbe nije definiran. Uz te je uvjete

$$3\log_x x^9 = 3\cdot 9\cdot \log_x x = 3\cdot 9\cdot 1 = 27$$

Stavimo li

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-4}=t\ ,$$

onda je

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x-4}=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\right]^{x-4}=\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{x-4}\right]^{2}=t^2$$

pa dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$t^2-6t-27=0$$

čija su rješenja

$$t_1=-3,\ t_2=9.$$

Kako je

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-4}=t\ >0,$$

rješenje t_1 ne dolazi u obzir. Stoga je jedino moguće da vrijedi

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-4}=9$$

Prelaskom na bazu 3 dobivamo:

$$\begin{aligned}&(3^{-1})^{x-4}=3^2\\&3^{4-x}=3^2\\&4-x=2\end{aligned}$$

i konačno

$$x = 2$$

Dakle, jedino rješenje polazne jednadžbe jest $x = 2$ pa je to ujedno i zbroj svih njezinih rješenja.

36. *Odredite skup svih rješenja nejednadžbe*

$$\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{4} - 2\right) \geq 1$$

Rješenje: Najprije postavimo uvjet da izraz pod logaritmom bude strogo veći od 0:

$$\frac{x}{4} - 2 > 0$$

Množenjem s 4 dobivamo:

$$x - 8 > 0,$$

odnosno

$$x > 8.$$

Sada antilogaritmiramo zadanu jednadžbu, pri čemu pazimo da se, zbog toga što je baza manja od 1, znak nejednakosti mijenja:

$$\frac{x}{4} - 2 \leq (\frac{1}{4})^1$$
$$\frac{x}{4} - 2 \leq \frac{1}{4}$$

Množenjem s 4 dobivamo:

$$x - 8 \leq 1$$

i konačno

$$x \leq 9.$$

Tako smo dobili dva uvjeta na x:

$$x > 8$$
$$x \leq 9$$

pa je skup svih rješenja zadane nejednadžbe poluotvoreni interval $\langle 8, 9]$.

37. *Odredite jednadžbu kružnice čije je središte na osi Oy i koja dira pravac p…* $3x + y - 7 = 0$ *u točki s ordinatom* -2.

Rješenje: Neka je $S(p, q)$ središte tražene kružnice, a r njezin polumjer. Iz činjenice da je središte S na osi Oy odmah slijedi $p = 0$. Nadalje, neka je $T(x_T, y_T)$ diralište pravca p i tražene kružnice. Iz činjenice da T ima ordinatu jednaku -2 slijedi $y_T = -2$. Budući da T leži i na pravcu p, njezine koordinate moraju zadovoljavati jednadžbu toga pravca:

$$3x_T + y_T - 7 = 0$$

Kad u ovu jednakost uvrstimo

$$y_T = -2$$

dobijemo

$$3x_T - 2 - 7 = 0,$$

odnosno

$$3x_T = 9$$

i

$$x_T = 3$$

Dakle, $T(3, -2)$. Budući da je pravac p tangenta na zadanu kružnicu u točki T, to je pravac ST okomit na pravac p. Koeficijent smjera pravca ST odredimo kao koeficijent smjera pravca kroz točke $S(0, q)$ i $T(3, -2)$:

$$k_{ST} = \frac{-2-q}{3-0},$$
$$k_{ST} = -\frac{q+2}{3}$$

Koeficijent smjera pravca p dobijemo kad njegovu jednadžbu zapišemo u eksplicitnom obliku:

$$p \ldots\ y = -3x + 7$$

pa je $k_p = -3$. Činjenica da su pravci ST i p okomiti znači da je umnožak njihovih koeficijenata smjerova jednak -1:

$$k_{ST} \cdot k_p = -1$$

Uvrštavanjem

$$k_{ST} = -\frac{q+2}{3}$$

i

$$k_p = -3$$

u jednakost

$$k_{ST} \cdot k_p = -1$$

dobivamo:

$$q + 2 = -1,$$

a otuda je

$$q = -3.$$

Tako je $S(0, -3)$. Preostaje odrediti polumjer r, točnije njegov kvadrat r^2. On je jednak kvadratu udaljenosti točaka S i T:

$$r^2 = (0-3)^2 + [-3-(-2)]^2,$$

tj.

$$r^2 = 10.$$

Stoga je tražena jednadžba kružnice

$$k \ldots\ x^2 + (y + 3)^2 = 10,$$

odnosno u razvijenom obliku

$$k \ldots\ x^2 + y^2 + 6y = 1.$$

38. *Odredite zbroj svih kompleksnih rješenja jednadžbe*

$$3 - 4i - \sqrt{5}\,|z| = -2\bar{z}$$

Rješenje: Pretpostavimo da je $z = a + bi$, $a, b \in \mathbf{R}$. Tada je

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\bar{z} = a - bi$$

pa uvrštavanjem dobivamo:

$$3 - 4i - \sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = -2(a - bi)$$
$$3 - 4i - \sqrt{5(a^2 + b^2)} + 2a - 2bi = 0$$
$$(3 - \sqrt{5(a^2 + b^2)} + 2a) + (-4 - 2b)i = 0$$

Odatle izjednačavanjem realnoga, odnosno imaginarnoga dijela s nulom dobivamo sustav:

$$3 - \sqrt{5(a^2 + b^2)} + 2a = 0$$
$$-4 - 2b = 0$$

Iz druge jednadžbe je odmah

$$b = -2$$

Kad tu vrijednost uvrstimo u prvu jednadžbu, dobijemo:

$$3 - \sqrt{5(a^2 + 4)} + 2a = 0$$
$$\sqrt{5(a^2 + 4)} = 2a + 3$$

Kako je lijeva strana posljednje jednakosti nenegativan realan broj, takva mora biti i desna strana:

$$2a + 3 \geq 0,$$

pa dobivamo sljedeći uvjet na realni parametar a:

$$a \geq -\frac{3}{2}$$

Uz uvažavanje toga uvjeta smijemo kvadrirati posljednju jednakost. Dobivamo:

$$5(a^2 + 4) = 4a^2 + 12a + 9,$$

odnosno

$$a^2 - 12a + 11 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su $a_1 = 1$ i $a_2 = 11$. Kako oba zadovoljavaju jednakost $a \geq -\frac{3}{2}$, rješenja polazne jednadžbe su kompleksni brojevi

$$z_1 = 1 + (-2)i$$
$$z_2 = 11 + (-2)i$$

Njihov je zbroj jednak

$$z_1 + z_2 = 12 - 4i.$$

39. *Izračunajte vrijednost izraza*

$$(a-b)\sqrt{\frac{b+a}{b-a}} + \frac{a-b}{b-a}$$

za $a = \sqrt{3},\ b = 2$.

<u>Rješenje:</u> Prije računanja zadani ćemo izraz pojednostavniti što je više moguće. Unošenjem izraza $a - b$ pod drugi korijen u prvomu pribrojniku dobivamo:

$$\sqrt{(a-b)^2 \cdot \frac{b+a}{b-a}} = \sqrt{(b-a)^2 \cdot \frac{b+a}{b-a}} = \sqrt{(b-a)(b+a)} = \sqrt{b^2 - a^2}$$

Nadalje,

$$\frac{a-b}{b-a} = \frac{-(b-a)}{b-a} = -1$$

pa je zadani izraz jednak

$$\sqrt{b^2 - a^2} - 1 .$$

Sada uvrstimo konkretne vrijednosti, pri čemu uvažimo da je $b^2 = 4$ i $a^2 = 3$. Konačno dobivamo:

$$\sqrt{4-3} - 1 = \sqrt{1} - 1 = 1 - 1 = 0$$

Stoga je tražena vrijednost izraza jednaka 0.

40. *Izračunajte* 4% *od* $\frac{3}{8}$% *od* 0.6.

<u>Rješenje:</u> Odmah imamo:

$$\frac{4}{100}\cdot\left(\frac{\frac{3}{8}}{100}\cdot\frac{6}{10}\right)=\frac{4}{100}\cdot\left(\frac{3}{800}\cdot\frac{6}{10}\right)=\frac{72}{800000}=\frac{9}{100000}=9\cdot 10^{-5}.$$

41. *Odredite skup svih rješenja nejednadžbe*

$$\frac{3x+9}{x+4}\geq-\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{2}.$$

<u>Rješenje:</u> Odredimo najprije vrijednost izraza na desnoj strani nejednadžbe. Primijenit ćemo formulu

$$\log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b}$$

koja omogućava prijelaz s jedne baze logaritma na drugu i vrijedi za sve pozitivne realne brojeve a, b i c različite od 1. Stavimo li

$$a=\frac{1}{2},\ b=\sqrt{2},\ c=2$$

u tu formulu, dobivamo:

$$\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{2}=\frac{\log_2\frac{1}{2}}{\log_2\sqrt{2}}=\frac{\log_2(2^{-1})}{\log_2(2^{\frac{1}{2}})}=\frac{-1\cdot\log_2 2}{\frac{1}{2}\log_2 2}=-2$$

Stoga je polazna nejednadžba ekvivalentna nejednadžbi

$$\frac{3x+9}{x+4}\geq 2,$$

a odavde redom dobivamo:

$$\frac{3x+9}{x+4}-2\geq 0$$
$$\frac{3x+9-2(x+4)}{x+4}\geq 0$$
$$\frac{3x+9-2x-8}{x+4}\geq 0$$
$$\frac{x+1}{x+4}\geq 0$$

Kao i ranije, postoje dvije mogućnosti:

1.) $x+1\geq 0$
$x+4>0$

Iz prve nejednakosti slijedi $x\geq -1$, a iz druge $x>-4$. Presjek tih rješenja jest $x\geq -1$, pa je u ovom slučaju skup rješenja poluzatvoreni interval $[-1, +\infty\rangle$.

2.) $x + 1 \leq 0$
$x + 4 < 0$

Iz prve nejednakosti slijedi $x \leq -1$, a iz druge $x < -4$. Presjek tih rješenja jest $x < -4$, pa je u ovom slučaju skup rješenja otvoreni interval $\langle -\infty, -4\rangle$.

Zaključujemo da je traženi skup unija dobivenih skupova rješenja: $\langle -\infty, -4\rangle \cup [-1, +\infty\rangle$.

42. *Odredite* $f(x)$ *ako je*

$$f\left(\frac{x+\pi}{2}\right) = \operatorname{tg} x$$

za sve dopustive $x \in \mathbf{R}$.

Rješenje: Stavimo

$$t = \frac{x+\pi}{2},$$

odnosno

$$x = 2t - \pi.$$

Uvrštavanjem toga izraza u zadanu jednakost dobivamo:

$$f(t) = \operatorname{tg}(2t - \pi) = \operatorname{tg}(2t)$$

jer je π period funkcije tangens. Preostaje "preimenovati" nezavisnu varijablu t u x:

$$f(x) = \operatorname{tg}(2x).$$

43. *Odredite zbroj svih rješenja jednadžbe*

$$|x + 3| - |x - 2| = x.$$

Rješenje: Odredimo najprije kritične točke iz jednadžbi

$$x + 3 = 0$$
$$x - 2 = 0$$

Rješenja tih jednadžbi su $x_1 = -3$ i $x_2 = 2$, pa imamo ukupno 3 podslučaja:

1.) $-\infty < x \leq -3$

Na ovome je intervalu

$$|x + 3| = -(x + 3) = -x - 3$$
$$|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$$

pa dobivamo jednadžbu

$$-x - 3 - 2 + x = x$$

iz koje je

$$x = -5$$

Dobiveni x zadovoljava nejednakost

$$-\infty < x \leq -3$$

i rješenje je polazne jednadžbe.

2.) $-3 \leq x \leq 2$

Na ovome je intervalu

$$|x + 3| = x + 3$$
$$|x - 2| = 2 - x$$

pa dobivamo jednadžbu

$$x + 3 - 2 + x = x$$

iz koje slijedi

$$x = -1$$

Dobiveni x zadovoljava nejednakost $-3 \leq x \leq 2$ pa je drugo rješenje polazne jednadžbe

$$x_2 = -1.$$

3.) $2 \leq x \leq +\infty$

Na ovome je intervalu

$$|x + 3| = x + 3$$
$$|x - 2| = x - 2$$

pa dobivamo jednadžbu

$$x + 3 - x + 2 = x$$

čije je rješenje

$$x = 5$$

Dobiveni x zadovoljava jednakost $2 \leq x \leq +\infty$ pa je treće rješenje polazne jednadžbe

$$x_3 = 5.$$

Zaključimo: Polazna jednadžba ima ukupno tri rješenja: $x_1 = -5$, $x_2 = -1$ i $x_3 = 5$. Njihov je zbroj jednak -1.

44. *Izračunajte zbroj svih rješenja jednadžbe*

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x-5} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-5} = 2\log_x x^4$$

Rješenje: Budući da se nepoznanica x nalazi kao baza logaritma na desnoj strani polazne jednadžbe, na nju moramo postaviti uvjete $x > 0$ i $x \neq 1$ jer inače logaritam na desnoj strani jednadžbe nije definiran. Uz te je uvjete

$$2\log_x x^4 = 2\cdot 4\cdot \log_x x = 2\cdot 4\cdot 1 = 8$$

Stavimo li

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5} = t\,,$$

onda je

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x-5} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right]^{x-5} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}\right]^{2} = t^2$$

pa dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$t^2 - 2t - 8 = 0$$

čija su rješenja

$$t_1 = -2,\ t_2 = 4.$$

Kako je

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5} = t > 0,$$

rješenje t_1 ne dolazi u obzir. Stoga je jedino moguće da vrijedi

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5} = 4$$

Prelaskom na bazu 2 dobivamo:

$$\begin{aligned}&(2^{-1})^{x-5} = 2^2\\ &2^{5-x} = 2^2\\ &5 - x = 2\end{aligned}$$

i konačno

$$x = 3$$

Dakle, jedino rješenje polazne jednadžbe jest $x = 3$ pa je to ujedno i zbroj svih njezinih rješenja.

45. *Odredite skup svih rješenja nejednadžbe*

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x}{3} - 1\right) \geq 1$$

<u>**Rješenje:**</u> Najprije postavimo uvjet da izraz pod logaritmom bude strogo veći od 0:

$$\frac{x}{3} - 1 > 0$$

Množenjem s 3 dobivamo:

$$x - 3 > 0,$$

odnosno

$$x > 3.$$

Sada antilogaritmiramo zadanu jednadžbu, pri čemu pazimo da se, zbog toga što je baza manja od 1, znak nejednakosti mijenja:

$$\frac{x}{3} - 1 \le \left(\frac{1}{3}\right)^1$$
$$\frac{x}{3} - 1 \le \frac{1}{3}$$

Množenjem s 3 dobivamo:

$$x - 3 \le 1$$

i konačno

$$x \le 4.$$

Tako smo dobili dva uvjeta na x:

$$x > 3$$
$$x \le 4$$

pa je skup svih rješenja zadane nejednadžbe poluotvoreni interval $\langle 3, 4]$.

46. *Odredite vrijednost realnoga parametra m za koji jednadžba*

$$(2m - 2)x^2 + (4m - 1)x + 2m = 0$$

ima jedno dvostruko realno rješenje.

Rješenje: Zadana jednadžba će imati jedno dvostruko realno rješenje ako i samo ako vrijednost njezine diskriminante bude jednaka nuli. Odatle dobivamo jednadžbu:

$$(4m - 1)^2 - 4 \cdot (2m - 2) \cdot 2m = 0$$

Kvadriranjem i množenjem dobivamo:

$$16m^2 - 8m + 1 - 16m^2 + 16m = 0,$$

odnosno

$$8m = -1.$$

Odatle je

$$m = -\frac{1}{8}.$$

47. *Duljina stranice romba iznosi a, a tupi kut* 150°. *Izrazite duljinu kraće dijagonale romba kao funkciju varijable a.*

Rješenje: Neka je *ABCD* taj romb i neka je *BC* njegova kraća dijagonala. Kut kod vrha *A* jednak je

$$180° – 150° = 30°$$

jer je u svakomu usporedniku zbroj njegova šiljastoga i tupoga kuta jednak 180°. Uočimo trokut *ABD*. U tom trokutu znamo duljine dviju stranica: $|AB| = |AD| = a$ i kut između njih: $\alpha = 30°$. Tražimo duljinu treće stranice $|BC|$. Nju računamo rabeći kosinusov poučak:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \cos\alpha,$$
$$|BC|^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos 30°,$$
$$|BC|^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$|BC|^2 = 2a^2 - \sqrt{3}\, a^2$$
$$|BC|^2 = a^2\,(2 - \sqrt{3})$$

i konačno

$$|BC| = a \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}\,.$$

48. *Izračunajte zbroj rješenja jednadžbe*

$$1 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x+1} = 0$$

Rješenje: Zadanu jednadžbu ćemo pomnožiti izrazom $(x + 1)(2x + 1)$, ali pritom moramo postaviti uvjet da taj izraz ne smije biti jednak 0. To znači da za svako rješenje gornje jednadžbe mora vrijediti:

$$(x + 1)(2x + 1) \neq 0.$$

Mi ovdje nećemo rješavati tu nejednadžbu, nego ćemo kasnije samo provjeriti zadovoljava li je svako od dobivenih mogućih rješenja.

Množenjem s izrazom $(x + 1)(2x + 1)$ dobivamo jednadžbu:

$$(x + 1)(2x + 1) + 2x + 1 + x + 1 = 0,$$

odnosno

$$2x^2 + 2x + x + 1 + 2x + 1 + x + 1 = 0,$$

odnosno

$$2x^2 + 6x + 3 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su:

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{-3+\sqrt{3}}{2}.$$

Lako se vidi da x_1 i x_2 zadovoljavaju nejednakost $(x + 1)(2x + 1) \neq 0$. Njihov je zbroj jednak –3.

49. *Izračunajte umnožak svih rješenja jednadžbe*

$$-2x^4 - 10x^2 + 72 = 0$$

Rješenje: 1. način: Riješimo zadanu jednadžbu. Odmah vidimo da se radi o bikvadratnoj jednadžbi. Možemo je malo pojednostavniti tako da je podijelimo s (–2):

$$x^4 + 5x^2 - 36 = 0$$

Uz supstituciju $t = x^2$ dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$t^2 + 5t - 36 = 0$$

čija su rješenja $t_1 = -9$, $t_2 = 4$. Sada iz

$$x^2 = -9$$

slijedi $x_1 = -3i$, $x_2 = 3i$, a iz

$$x^2 = 4$$

slijedi $x_3 = -2$, $x_4 = 2$. Umnožak svih rješenja jednak je

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = (-3i) \cdot 3i \cdot (-2) \cdot 2 = 36i^2 = -36.$$

2. način: Opet podijelimo cijelu jednadžbu s (-2):

$$x^4 + 5x^2 - 36 = 0$$

Sada primijenimo Vièteove formule za jednadžbu n – toga stupnja. Podsjetimo, ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{C}$ sva (ne nužno različita) rješenja jednadžbe $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$, pri čemu su $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbf{R}$, onda vrijede jednakosti:

$$\begin{gathered}
x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -a_{n-1} \\
x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = a_{n-2} \\
\vdots \\
x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = a_0
\end{gathered}$$

Tako u konkretnom slučaju odmah zaključujemo da je umnožak svih rješenja zadane jednadžbe jednak slobodnom članu (članu koji ne sadrži nepoznanicu x) u toj jednadžbi, a to je – 36.

50. *Riješite jednadžbu:*

$$2\sqrt{x+4} - x = 1$$

Rješenje: Zapišimo zadanu jednadžbu u obliku:

$$2\sqrt{x+4} = x+1$$

Prije nego li provedemo kvadriranje, moramo vidjeti uz koje sve uvjete na x zadana jednadžba ima rješenje. Prvi je uvjet da izraz pod drugim korijenom bude nenegativan:

$$x + 4 \geq 0,$$

tj.

$$x \geq -4.$$

Budući da je lijeva strana jednadžbe

$$2\sqrt{x+4} = x+1$$

nenegativan realan broj, takva mora biti i desna strana:

$$x + 1 \geq 0,$$

tj.

$$x \geq -1$$

Uvjeti

$$\begin{aligned} x &\geq -4 \\ x &\geq -1 \end{aligned}$$

zajedno daju uvjet

$$x \geq -1$$

Uvažavajući dobiveni uvjet, kvadriramo jednadžbu

$$2\sqrt{x+4} = x+1$$

pa dobijemo:

$$4x + 16 = x^2 + 2x + 1,$$

tj.

$$x^2 - 2x - 15 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1 = -3$ i $x_2 = 5$. No, x_1 ne zadovoljava uvjet $x \geq -1$, pa je jedino rješenje polazne jednadžbe $x = 5$.

51. *Riješite jednadžbu:*

$$1+\sqrt{-x+3}-x=0$$

Rješenje: Kao i u prethodnom zadatku, zapišimo najprije jednadžbu u obliku

$$\sqrt{-x+3}=x-1$$

Sada postavljamo uvjete na x:

$$-x+3\geq 0$$
$$x-1\geq 0$$

iz kojih se dobiva

$$x\leq 3$$
$$x\geq 1$$

pa sva moguća rješenja jednadžbe moraju pripadati segmentu [1, 3]. Uz taj uvjet, kvadriranjem jednadžbe

$$\sqrt{-x+3}=x-1$$

dobivamo:

$$-x+3=x^2-2x+1,$$

a otuda je

$$x^2-x-2=0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1=-1$ i $x_2=2$. Uvjet $x\in[1,3]$ zadovoljava samo x_2, pa je $x=2$ jedino rješenje polazne jednadžbe.

52. *Izračunajte zbroj svih rješenja jednadžbe*

$$\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2\,.$$

Rješenje: Najprije postavimo uvjete na nepoznanicu x:

$$3x+7\geq 0$$
$$x+1\geq 0$$

Iz tih je uvjeta

$$x\geq -\frac{7}{3}$$
$$x\geq -1$$

odnosno (presjekom dobivenih skupova rješenja)

$$x\geq -1$$

Uz taj uvjet, lijevu i desnu stranu polazne jednadžbe pomnožimo s $\sqrt{3x+7}+\sqrt{x+1}$. Dobivamo:

$$(3x+7)-(x+1)=2\cdot(\sqrt{3x+7}+\sqrt{x+1}),$$

odnosno

$$2x + 6 = 2 \cdot (\sqrt{3x+7} + \sqrt{x+1}),$$

odnosno

$$\sqrt{3x+7} + \sqrt{x+1} = x + 3.$$

Primijetimo da je zbog uvjeta $x \geq -1$ desna strana posljednje jednakosti uvijek nenegativan realan broj. Tako smo dobili sustav:

$$\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2$$
$$\sqrt{3x+7} + \sqrt{x+1} = x + 3$$

Zbrajanjem tih jednadžbi dobivamo:

$$2\sqrt{3x+7} = x+5$$

Kako je zbog $x \geq -1$ desna strana te jednadžbe uvijek nenegativan realan broj, smijemo kvadrirati posljednju jednakost:

$$12x + 28 = x^2 + 10x + 25$$

otkuda je

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1 = -1$ i $x_2 = 3$. Oba ta rješenja zadovoljavaju uvjet $x \geq -1$, pa su to ujedno i sva rješenja polazne jednadžbe. Njihov je zbroj jednak 2.

53. *Riješite jednadžbu:*

$$\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 3$$

Rješenje: Kao i u prethodnom zadatku, najprije postavimo uvjete na x:

$$3x - 2 \geq 0$$
$$x - 1 \geq 0$$

iz kojih je

$$x \geq \frac{2}{3}$$
$$x \geq 1$$

odnosno

$$x \geq 1.$$

Uz uvažavanje toga uvjeta, polaznu jednadžbu množimo s $\sqrt{3x-2} - \sqrt{x-1}$ pa dobijemo:

$$(3x - 2) - (x - 1) = 3 \cdot (\sqrt{3x-2} - \sqrt{x-1})$$

otkuda je

$$2x - 1 = 3 \cdot (\sqrt{3x-2} - \sqrt{x-1}),$$

odnosno

$$\sqrt{3x-2} - \sqrt{x-1} = \frac{2x-1}{3}$$

Tako smo dobili sljedeći sustav:

$$\begin{aligned} \sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} &= 3 \\ \sqrt{3x-2} - \sqrt{x-1} &= \frac{2x-1}{3} \end{aligned}$$

Oduzimanjem tih jednadžbi dobivamo:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sqrt{x-1} &= \frac{10-2x}{3}, \\ 3 \cdot \sqrt{x-1} &= 5 - x \end{aligned}$$

Sada postavljamo novi uvjet na x:

$$5 - x \geq 0,$$

otkuda je

$$x \leq 5.$$

Tako smo utvrdili da sva moguća rješenja polazne jednadžbe moraju pripadati segmentu [1, 5]. Uz uvažavanje te činjenice, kvadriramo posljednju jednakost i dobijemo:

$$9x - 9 = 25 - 10x + x^2,$$

otkuda je

$$x^2 - 19x + 34 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1 = 2$ i $x_2 = 17$. No, segmentu [1, 5] pripada samo rješenje $x_1 = 2$, pa je to ujedno i jedino rješenje polazne jednadžbe.

54. *Odredite vrijednosti realnih parametara a i m tako da parabola* $y = a(m - x)^2$ *prolazi točkom* $A(-3, -4)$ *i ima tjeme u točki* $T(-5, 0)$.

Rješenje: Iz činjenice da parabola prolazi točkom A slijedi:

$$-4 = a(m + 3)^2,$$

a iz činjenice da prolazi točkom T slijedi

$$0 = a(m + 5)^2.$$

Promotrimo drugu jednakost. Zbog prve jednakosti ne može biti $a = 0$, pa je jedino moguće

$$m + 5 = 0$$

Odatle je $m = -5$. Sada uvrštavanjem u prvu jednakost dobivamo jednadžbu

$$4a = -4$$

iz koje je $a = -1$. Dakle, $a = -1$, $m = -5$.

55. *Nultočke kvadratne funkcije su $x_1 = -1.5$ i $x_2 = 1$, a točka $A(-1, -2)$ pripada njezinu grafu. Odredite tu kvadratnu funkciju.*

Rješenje: Iz podatka da su $x_1 = -1.5$ i $x_2 = 1$ nultočke kvadratne funkcije slijedi da $f(x)$ ima oblik:

$$f(x) = a(x + 1.5)(x - 1)$$

Činjenica da točka A pripada grafu funkcije znači da je

$$f(-1) = -2$$

Zato u jednakost

$$f(x) = a(x + 1.5)(x - 1)$$

uvrstimo $x = -1$ pa dobijemo:

$$f(-1) = a(-1 + 1.5)(-1 - 1),$$

odnosno

$$f(-1) = -a.$$

No, s druge je strane

$$f(-1) = -2$$

pa usporedbom desnih strana tih jednakosti odmah dobivamo

$$a = 2.$$

Konačno je:

$$f(x) = 2(x + 1.5)(x - 1) = 2x^2 + x - 3.$$

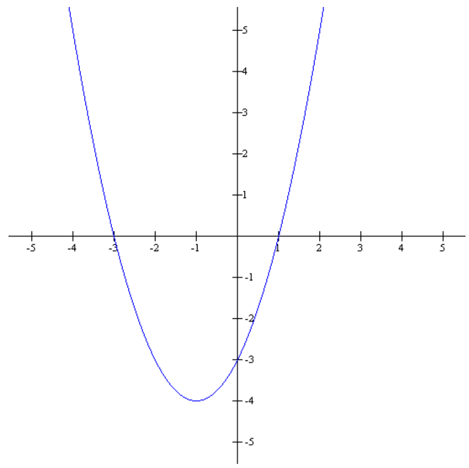
56. *Odredite skup svih rješenja nejednadžbe*

$$-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} > 0$$

Rješenje: Pomnožimo li zadanu nejednadžbu s (-2), dobivamo:

$$x^2 + 2x - 3 < 0.$$

Graf funkcije $f(x) = x^2 + 2x - 3$ je sljedeća parabola:



Riješiti nejednadžbu

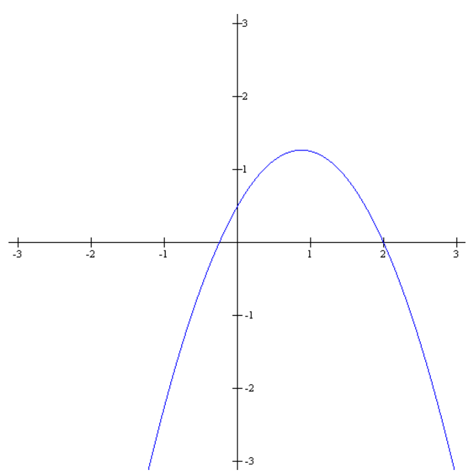
$$x^2 + 2x - 3 < 0$$

zapravo znači odrediti za koje sve $x \in \mathbf{R}$ za koje se pripadna točka parabole $(x, f(x))$ nalazi ispod osi Ox. Sa slike vidimo da su ti x–evi svi elementi skupa $\langle -3, 1\rangle$. Stoga je skup svih rješenja polazne nejednadžbe otvoreni interval $\langle -3, 1\rangle$.

57. *Odredite skup svih rješenja nejednadžbe*

$$\frac{1}{2} + \frac{7}{4}x - x^2 > 0$$

<u>Rješenje:</u> Potpuno analogno kao u prethodnom zadatku dobivamo sljedeći graf:



Ovoga puta tražimo sve $x \in \mathbf{R}$ za koje je pripadna točka parabole $(x, f(x))$ iznad osi Ox. Vidimo da se sve takve točke nalaze između nultočaka funkcije

$$f(x) = -x^2 + \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}$$

a njih dobijemo rješavajući jednadžbu

$$-x^2+\frac{7}{4}x-\frac{1}{2}=0,$$

odnosno jednadžbu

$$4x^2-7x+2=0.$$

Njezina su rješenja $x_1=-\frac{1}{4}$, $x_2=2$ pa je skup svih rješenja polazne nejednadžbe otvoreni interval $\left\langle -\frac{1}{4},\ 2\right\rangle$.

58. *Odredite prirodno područje definicije funkcije* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *zadane formulom*

$$f(x)=\sqrt{9-(x-1)^2}$$

Rješenje: Zadana funkcija definirana je za one realne brojeve x takve da je izraz pod drugim korijenom nenegativan. To znači da svi takvi x moraju zadovoljavati nejednakost

$$9-(x-1)^2\geq 0,$$

odnosno nejednakost

$$x^2-2x-8\leq 0.$$

Dobili smo kvadratnu nejednadžbu koju rješavamo potpuno analogno kao i one u prethodnim zadacima. Nultočke pripadne kvadratne funkcije $g(x)=x^2-2x-8$ su $x_1=-2$ i $x_2=4$, pa je traženo prirodno područje definicije segment [-2, 4].

59. *Odredite prirodno područje definicije funkcije* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *zadane formulom*

$$f(x)=\frac{\sqrt{-x+2x^2-1}}{x-1}$$

Rješenje: Izraz pod drugim korijenom mora biti nenegativan, a nazivnik mora biti različit od 0. To nam daje uvjete:

$$-x+2x^2-1\geq 0$$
$$x-1\neq 0$$

Prvi je uvjet, zapravo, kvadratna nejednadžba

$$2x^2-x-1\geq 0$$

Nultočke pripadne kvadratne funkcije $g(x)=2x^2-x-1$ su $x_1=-\frac{1}{2}$ i $x_2=1$. Za svaki x između tih nultočaka pripadna točka parabole se nalazi ispod osi Ox, pa su rješenje nejednadžbe svi realni brojevi lijevo od manje nultočke ili desno od veće nultočke (nultočke uključujemo zbog znaka $\geq$):

$$x\in\langle-\infty,\ -\frac{1}{2}]\cup[1,+\infty\rangle$$

No, drugi uvjet $x \neq 1$ zahtijeva da u prirodnom području definicije ne smije biti $x = 1$. Stoga taj realan broj moramo izbaciti iz gornjega skupa, pa je traženo prirodno područje definicije skup $\langle -\infty, -\frac{1}{2}] \cup \langle 1, +\infty\rangle$ kojega kraće možemo zapisati kao $\mathbf{R} \setminus \langle -\frac{1}{2}, 1]$. Dakle,

$$D_f = \mathbf{R} \setminus \langle -\frac{1}{2}, 1]$$

60. *Riješite nejednadžbu:*

$$\frac{x^2 + 8x + 12}{2(3 + x)} \geq 0$$

Rješenje: Zadani razlomak će biti nenegativan ako i samo ako su brojnik i nazivnik istoga predznaka i, uz to, nazivnik različit od nule. Dvije su mogućnosti:

1.) $x^2 + 8x + 12 \geq 0$
$3 + x > 0$

Rješavajući prvu (kvadratnu) nejednadžbu, kao rješenje dobivamo (nultočke pripadne kvadratne funkcije su $x_1 = -6$ i $x_2 = -2$) uniju poluzatvorenih intervala $\langle -\infty, -6] \cup [-2, +\infty\rangle$. Rješavajući drugu nejednadžbu, kao rješenje dobivamo otvoreni interval $\langle -3, +\infty\rangle$. Presjek skupova $\langle -\infty, -6] \cup [-2, +\infty\rangle$ i $\langle -3, +\infty\rangle$ jest skup $[-2, +\infty\rangle$.

2.) $x^2 + 8x + 12 \leq 0$
$3 + x < 0$

U ovome je slučaju rješenje prve nejednadžbe segment $[-6, -2]$, a druge otvoreni interval $\langle -\infty, -3\rangle$. Presjek tih dvaju skupova jest skup $[-6, -3\rangle$.

Tako je skup svih realnih rješenja polazne nejednadžbe unija skupova $[-2, +\infty\rangle$ i $[-6, -3\rangle$, tj. $x \in [-6, -3\rangle \cup [-2, +\infty\rangle$.

61. *Odredite sve vrijednosti realnoga parametra a tako da za sve $x \in \mathbf{R}$ vrijednosti funkcije $f(x) = ax^2 - 7x + 4a$ budu strogo negativne.*

Rješenje: Traženi uvjet stroge negativnosti zadane funkcije zapravo znači da pripadni graf funkcije (parabola) mora u cijelosti biti ispod osi Ox i ne smije je sjeći. To će biti zadovoljeno ako i samo ako vodeći koeficijent kvadratne funkcije bude strogo negativan, a pripadna diskriminanta strogo manja od nule. Kako je diskriminanta D jednaka

$$D = 49 - 16a^2,$$

dobivamo sljedeći sustav nejednadžbi:

$$a < 0$$
$$49 - 16a^2 < 0$$

Drugu nejednadžbu možemo zapisati u obliku

$$16a^2 - 49 > 0$$

Budući da su nultočke pripadne kvadratne funkcije $x_1 = -\frac{7}{4}$, $x_2 = \frac{7}{4}$, to je rješenje ove nejednadžbe skup

$$\langle -\infty, -\frac{7}{4} \rangle \cup \langle \frac{7}{4}, +\infty \rangle$$

No, zbog prve nejednadžbe ne može biti $a \in \langle \frac{7}{4}, +\infty \rangle$ pa konačno zaključujemo da će zadana funkcija poprimati samo strogo negativne vrijednosti za $a \in \langle -\infty, -\frac{7}{4} \rangle$.

62. *Za koje vrijednosti realnoga parametra $p \in \mathbf{R}$ je skup rješenja nejednadžbe*

$$x^2 + px + 1 > 0$$

jednak skupu **R**?

Rješenje: Mi zapravo tražimo sve vrijednosti realnoga parametra p za koje funkcija $f(x) = x^2 + px + 1$ poprima strogo pozitivne vrijednosti. Postupamo slično kao i u rješenju prethodnoga zadatka. Budući da pripadni graf mora biti iznad osi Ox i ne smije je sjeći, zahtijevamo da vodeći koeficijent funkcije bude strogo veći od nule, a pripadna diskriminanta strogo manja od nule. Kako je vodeći koeficijent funkcije $f(x)$ jednak 1, prvi zahtjev je ispunjen (jer je $1 > 0$). Preostaje nam jedino vidjeti za koje je vrijednosti realnoga parametra p diskriminanta funkcije $f(x)$ strogo manja od nule. Kako je

$$D = p^2 - 4,$$

dobivamo kvadratnu nejednadžbu

$$p^2 - 4 < 0$$

čije je rješenje otvoreni interval $\langle -2, 2 \rangle$. Stoga je skup rješenja zadane nejednadžbe jednak skupu **R** za $p \in \langle -2, 2 \rangle$.

63. *Odredite najmanju vrijednost funkcije $f(x) = |x^2 + 5x - 6|$.*

Rješenje: Uočimo da je $f(x)$ zapravo kompozicija funkcija $g(x) = |x|$ i $h(x) = x^2 + 5x - 6$, dakle:

$$f = g \circ h.$$

Znamo da su vrijednosti funkcije $g(x) = |x|$ nenegativne, tj. vrijedi nejednakost

$$g(x) \geq 0, \text{ za svaki } x \in \mathbf{R}.$$

Stoga je prvi kandidat za traženu najmanju vrijednost upravo 0. Utvrdimo postoji li neki realan broj x takav da je

$$f(x) = 0.$$

U tu svrhu riješimo jednadžbu

$$h(x) = 0,$$

odnosno jednadžbu

$$x^2 + 5x - 6 = 0.$$

Realna rješenja te jednadžbe su $x_1 = -6$ i $x_2 = 1$. Stoga funkcija $f(x)$ poprima najmanju vrijednost 0 upravo za $x_1 = -6$ i $x_2 = 1$, a za sve ostale realne brojeve x poprima strogo pozitivne vrijednosti.

64. *Riješite nejednadžbu:*

$$x^2 - 5|x| + 6 < 0$$

Rješenje: Razlikovat ćemo dva slučaja:

1.) $x \geq 0$

U tome je slučaju $|x| = x$ pa dobivamo nejednadžbu

$$x^2 - 5x + 6 < 0$$

čije je rješenje otvoreni interval $\langle 2, 3\rangle$. Kako svi elementi toga intervala zadovoljavaju nejednakost $x \geq 0$, oni su rješenja polazne nejednadžbe.

2.) $x \leq 0$

U tome je slučaju $|x| = -x$ pa dobivamo nejednadžbu

$$x^2 + 5x + 6 < 0$$

čije je rješenje otvoreni interval $\langle -3, -2\rangle$. Kako svi elementi toga intervala zadovoljavaju nejednakost $x \leq 0$, on je drugo rješenje polazne nejednadžbe.

Skup svih rješenja polazne nejednadžbe jest unija skupova $\langle 2, 3\rangle$ i $\langle -3, -2\rangle$, tj. skup $\langle -3, -2\rangle \cup \langle 2, 3\rangle$.

65. *Izračunajte* $\log_{3\sqrt{3}} \frac{1}{27}$. .

Rješenje: Uočimo da je $3\sqrt{3} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{27}$ pa odmah imamo:

$$\log_{3\sqrt{3}} \frac{1}{27} = \log_{\sqrt{27}} \frac{1}{27} = \log_{\sqrt{27}} 1 - \log_{\sqrt{27}} 27 = 0 - \log_{\sqrt{27}} \left(\sqrt{27}\right)^2 = -2\log_{\sqrt{27}} \sqrt{27} = -2 \cdot 1 = -2$$

66. *Izračunajte* $\log_3 \sqrt[4]{3} + \log_4(\log_{16} 256)$.

Rješenje: Izračunajmo zasebno vrijednost svakoga pribrojnika. Imamo redom:

$$\log_3 \sqrt[4]{3} = \log_3\left(3^{\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{4}\log_3 3 = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

$\log_4(\log_{16}256) = \log_4[\log_{16}(16^2)] = \log_4[2 \cdot \log_{16}16] = \log_4[2 \cdot 1] = \log_4 2 = \log_4 \sqrt{4} =$

$$= \log_4\left(4^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\log_4 4 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Stoga je tražena vrijednost zadanoga brojevnoga izraza jednaka

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

67. *Izračunajte* $\log_8(\log_9 3)$.

Rješenje: Primijenit ćemo formulu

$$\log_{b^k} b = \frac{1}{k}$$

koja vrijedi za svaki prirodan broj k i sve pozitivne brojeve b. Imamo redom:

$$\log_8(\log_9 3) = \log_{2^3}(\log_{3^2} 3) = \log_{2^3}\left(\frac{1}{2}\right) = \log_{2^3}(2)^{-1} = -\log_{2^3} 2 = -\frac{1}{3}$$

68. *Ako je* $a = \log 5$ *i* $b = \log 3$, *izrazite* $\log_{30} 8$ *kao funkciju varijabli* a i b.

Rješenje: Prijelazom na dekadski logaritam redom dobivamo:

$$\log_{30} 8 = \frac{\log 8}{\log 30} = \frac{\log \frac{1000}{125}}{\log(10 \cdot 3)} = \frac{\log 1000 - \log 125}{\log 10 + \log 3} = \frac{3 - \log(5^3)}{1 + \log 3} = \frac{3 - 3\log 5}{1 + \log 3} = \frac{3 - 3a}{1 + b} = \frac{3(1-a)}{b+1}.$$

69. *Odredite apsolutnu vrijednost razlike rješenja jednadžbe*

$$\log_3 x + 6\log_x 3 = 5$$

Rješenje: Odmah primijetimo da x mora biti pozitivan broj različit od 1. Nadalje, stavimo li

$$t = \log_3 x,$$

onda je

$$\log_x 3 = \frac{\log_3 3}{\log_3 x} = \frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{t}$$

pa dobivamo jednadžbu

$$t + \frac{6}{t} = 5$$

koja množenjem s t prelazi u kvadratnu jednadžbu

$$t^2 - 5t + 6 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su $t_1 = 2$, $t_2 = 3$. Sada iz

$$\log_3 x = 2$$

slijedi

$$x = 3^2 = 9,$$

a iz

$$\log_3 x = 3$$

slijedi

$$x = 3^3 = 27$$

Stoga polazna jednadžba ima ukupno dva rješenja: $x_1 = 27$ i $x_2 = 9$. Apsolutna vrijednost njihove razlike jednaka je 18.

70. *Riješite jednadžbu:*

$$\log_x 16 = -\frac{4}{3}$$

Rješenje: Odmah primijetimo da x mora biti pozitivan broj različit od 1. Antilogaritmiranjem dobivamo:

$$x^{-\frac{4}{3}} = 16$$

pa kad lijevu i desnu stranu te jednadžbe potenciramo na $-\frac{3}{4}$, dobijemo:

$$x = 16^{-\frac{3}{4}}$$

što je dalje jednako:

$$x = 16^{-\frac{3}{4}} = \left(2^4\right)^{-\frac{3}{4}} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Dakle, jedino rješenje polazne jednadžbe jest $x = \frac{1}{8}$.

71. *Odredite* $\frac{x}{y}$ *iz jednakosti*:

$$\log^2 x - \log^2 y = 2$$
$$\log x + \log y = 1$$

Rješenje: Uočimo da je

$$\log^2 x - \log^2 y = (\log x + \log y) \cdot (\log x - \log y)$$

U tu jednakost uvrstimo prvu i drugu zadanu jednakost, pa dobivamo:

$$2 = 1 \cdot (\log x - \log y)$$

otkuda je

$$\log x - \log y = 2.$$

Tako smo dobili jednostavniji sustav

$$\log x + \log y = 1$$
$$\log x - \log y = 2$$

Zbrajanjem tih jednadžbi dobivamo

$$2 \log x = 3$$

a odavde je

$$\log x = \frac{3}{2}$$

pa uvrštavanjem u bilo koju od jednadžbi sustava slijedi

$$\log y = \frac{1}{2}$$

Kako je

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y \ ,$$

uvrštavanjem izračunatih logaritama dobijemo:

$$\log \frac{x}{y} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$$
$$\log \frac{x}{y} = 1$$
$$\frac{x}{y} = 10^1$$

i konačno

$$\frac{x}{y} = 10.$$

Uočite da smo zadatak riješili bez izračunavanja konkretnih vrijednosti nepoznanica x i y.

72. *Odredite skup svih rješenja nejednadžbe*

$$\log \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}$$

Rješenje: Odmah primijetimo da je prvi uvjet na x

$$x > 0$$

Uz uvažavanje toga uvjeta antilogaritmiramo nejednadžbu i dobijemo:

$$\frac{x}{2} \leq 10^{\frac{1}{2}}$$
$$x \leq 2\sqrt{10}$$

Tako smo dobili dva uvjeta na x:

$$x > 0$$
$$x \leq 2\sqrt{10}$$

Stoga je traženi skup svih rješenja polazne nejednadžbe poluotvoreni interval $\langle 0, 2\sqrt{10}\,]$.

73. *Riješite nejednadžbu:*

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x}{2}-2\right) \geq 0$$

Rješenje: Da bi logaritam uopće bio definiran, mora vrijediti:

$$\frac{x}{2}-2 > 0$$

otkuda se množenjem s 2 dobiva

$$x > 4.$$

Uz uvažavanje toga uvjeta, antilogaritmiramo zadanu nejednadžbu pazeći na promjenu znaka nejednakosti (jer je baza logaritma manja od 1):

$$\frac{x}{2}-2 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^0$$
$$\frac{x}{2}-2 \leq 1$$

otkuda množenjem s 2 dobivamo

$$x \leq 6.$$

Tako smo dobili dva uvjeta na *x*:

$$x > 4$$
$$x \leq 6$$

pa je skup svih rješenja polazne nejednadžbe poluotvoreni interval $\langle 4, 6]$.

74. *Izračunajte:*

$$3^{0.25-\log_3 80\sqrt[4]{3}} - \log_2 0.125$$

Rješenje: Izračunajmo zasebno vrijednost umanjenika, a zasebno vrijednost umanjitelja. Imamo redom:

$$3^{0.25-\log_3 80\sqrt[4]{3}} = 3^{0.25\cdot 1-\log_3 80\sqrt[4]{3}} = 3^{0.25\cdot\log_3 3-\log_3 80\sqrt[4]{3}} = 3^{\log_3(3^{0.25})-\log_3 80\sqrt[4]{3}} = 3^{\log_3\frac{3^{0.25}}{80\cdot 3^{\frac{1}{4}}}} = \frac{3^{\frac{1}{4}}}{80\cdot 3^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{80}$$

$$\log_2 0.125 = \log_2\frac{1}{8} = \log_2 1-\log_2 8 = 0-\log_2(2^3) = -3\log_2 2 = -3\cdot 1 = -3$$

Stoga je tražena vrijednost zadanoga brojevnoga izraza jednaka

$$\frac{1}{80}+3=\frac{241}{80}.$$

75. *Riješite jednadžbu:*

$$3^{x-1}+2\cdot 3^{x}+2\cdot 3^{x+1}=9\cdot 5^{x-1}$$

Rješenje: Zadanu jednadžbu transformiramo na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
&3^{x-1}+2\cdot 3^{x}+2\cdot 3^{x+1}=9\cdot 5^{x-1}\\
&3^{x}\cdot 3^{-1}+2\cdot 3^{x}+2\cdot 3^{x}\cdot 3^{1}=9\cdot 5^{x}\cdot 5^{-1}\\
&3^{x}\cdot\frac{1}{3}+2\cdot 3^{x}+2\cdot 3^{x}\cdot 3=9\cdot 5^{x}\cdot\frac{1}{5} \qquad /\cdot 15\\
&3^{x}\cdot 5+30\cdot 3^{x}+90\cdot 3^{x}=27\cdot 5^{x}\\
&125\cdot 3^{x}=27\cdot 5^{x}\\
&\frac{3^{x}}{5^{x}}=\frac{27}{125}\\
&\left(\frac{3}{5}\right)^{x}=\frac{3^{3}}{5^{3}}\\
&\left(\frac{3}{5}\right)^{x}=\left(\frac{3}{5}\right)^{3}
\end{aligned}$$

i konačno

$$x=3.$$

76. *Odredite ono rješenje jednadžbe*

$$2^{x}-3^{x}=\sqrt{6^{x}-9^{x}}$$

koje je različito od nule!

Rješenje: Najprije primijetimo da nužno mora biti $x \le 0$ jer samo za takve x vrijede nejednakosti

$$\begin{gathered}6^{x}-9^{x}\ge 0\\ 2^{x}-3^{x}\ge 0\end{gathered}$$

Uz uvažavanje te činjenice, kvadriramo polaznu jednadžbu i dobijemo:

$$4^{x}-2\cdot\ 2^{x}\cdot 3^{x}+9^{x}=6^{x}-9^{x},$$

odnosno

$$4^{x}-3\cdot 6^{x}+2\cdot 9^{x}=0$$

Podijelimo li cijelu jednadžbu s 9^{x}, dobit ćemo:

$$\frac{4^x}{9^x}-3\cdot\frac{6^x}{9^x}+2=0$$
$$\left(\frac{4}{9}\right)^x-3\cdot\left(\frac{6}{9}\right)^x+2=0$$
$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^x-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+2=0$$
$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]^2-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+2=0$$

Uz zamjenu

$$t=\left(\frac{2}{3}\right)^x$$

dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$t^2-3t+2=0$$

čija su rješenja $t_1 = 1$ i $t_2 = 2$. Sada iz

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x=1$$

tj.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^0$$

izravno slijedi $x = 0$, dok iz

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x=2$$

slijedi

$$\log_2\left(\frac{2}{3}\right)^x=\log_2 2$$
$$x\cdot\log_2\left(\frac{2}{3}\right)=1$$
$$x\cdot(\log_2 2-\log_2 3)=1$$
$$x\cdot(1-\log_2 3)=1$$
$$x=\frac{1}{1-\log_2 3}$$

Lako se vidi da oba dobivena rješenja zadovoljavaju uvjet $x \leq 0$. Budući da tražimo rješenje polazne jednadžbe različito od nule, traženo rješenje jest

$$x = \frac{1}{1 - \log_2 3}$$

77. *Koja od sljedećih jednadžbi ima rješenje u skupu prirodnih brojeva* **N**:

a) $2x^2 + 4x + 3 = 0$
b) $\log(-x^3 + 2) = 0$
c) $2^{x+1} = 1$
d) $2x = 3$.

Rješenje: Riješimo zasebno svaku od zadanih jednadžbi.

a) Riječ je o kvadratnoj jednadžbi čija je diskriminanta $D = 16 - 24 = -8 < 0$ pa njezina rješenja nisu realni brojevi, nego čisto kompleksni.

b) Uz uvažavanje uvjeta $-x^3 + 2 > 0$ antilogaritmiranjem dobivamo jednadžbu

$$-x^3 + 2 = 1$$

koja je ekvivalnetna jednadžbi

$$x^3 = 1.$$

Ta jednadžba ima jedno realno rješenje: $x = 1$ i dva čisto kompleksna rješenja. $x = 1$ zadovoljava uvjet $-x^3 + 2 > 0$ pa je to ujedno i rješenje polazne jednadžbe. To rješenje pripada skupu prirodnih brojeva.

c) Kako je $1 = 2^0$, zadana jednadžba je ekvivalentna jednadžbi

$$2^{x+1} = 2^0,$$

a odavde izjednačavanjem eksponenaza dobivamo jednadžbu

$$x + 1 = 0$$

čije je jedino rješenje $x = -1$. To rješenje ne pripada skupu prirodnih brojeva.

d) Iz zadane jednadžbe odmah slijedi

$$x = \frac{3}{2}$$

To rješenje ne pripada skupu prirodnih brojeva.

Zaključimo: jednadžba navedena pod slovom b) ima rješenje u skupu prirodnih brojeva.

78. *Na kojemu od sljedećih četiriju pravaca leži polovište P dužine AB zadane koordinatama svojih krajnjih točaka* $A(-4, 2)$, $B(2, 4)$:

a) $y = -5x + 5$;
b) $y = -5x - 6$;
c) $y = \frac{1}{5}x - 5$;
d) $y = -\frac{1}{2}x - 1$?

Rješenje: Izračunajmo najprije koordinate polovišta P. Imamo:

$$P\left(\frac{-4+2}{2},\frac{2+(-4)}{2}\right)$$
$$P(-1,-1)$$

Uvrstimo u svaku od navedenih jednadžbi pravaca –1 umjesto x, odnosno y i utvrdimo u kojem ćemo slučaju dobiti valjanu jednakost:

a) $-1 = -5 \cdot (-1) - 5 \Rightarrow -1 = 0$, što je netočno;
b) $-1 = -5 \cdot (-1) - 6 \Rightarrow -1 = -1$, što je točno. Zbog toga točka P leži na pravcu $y = -5x - 6$.
c) $-1=\frac{1}{5}\cdot(-1)-5\Rightarrow -1=-\frac{26}{5}$ što je netočno;
d) $-1=-\frac{1}{2}\cdot(-1)-1\Rightarrow -1=-\frac{1}{2}$, što je netočno.

Zaključimo: Točka P leži na pravcu $y = -5x - 6$.

79. *Odredite istinitost sljedećih tvrdnji*:

a) Koeficijent smjera pravca p je tangens kuta što ga taj pravac zatvara s pozitivnim dijelom osi Ox.
b) Koeficijent smjera pravca p je nagib toga pravca.
c) Koeficijent smjera pravca p je kut što ga pravac zatvara s pozitivnim dijelom osi Ox.
d) Koeficijent smjera pravca p je tangens nagiba toga pravca.

Rješenje: Istinite su tvrdnje a) i b), dok su tvrdnje c) i d) lažne.

80. *Odredite implicitni oblik jednadžbe pravca koji prolazi točkom* $A(4, 1)$, *a okomit je na pravac koji prolazi točkama* $B(-2, 0)$ *i* $C(-1, -4)$.

Rješenje: Označimo traženi pravac s p. Njegov koeficijent smjera k je recipročan i suprotan koeficijentu smjera pravca kroz točke B i C pa slijedi:

$$k=-\frac{x_C-x_B}{y_C-y_B}$$
$$k=-\frac{-1-(-2)}{-4-0}$$
$$k=\frac{1}{4}$$

Preostaje napisati jednadžbu pravca kroz zadanu točku A s koeficijentom smjera k:

$$y - y_A = k(x - x_A)$$
$$y-1=\frac{1}{4}(x-4)$$

otkuda izravno slijedi traženi implicitni oblik jednadžba pravca

$$x - 4y = 0$$

81. *Odredite vrijednost realnoga parametra a za koju se pravci* $p_1 \ldots y - 2x - 3a = 0$ *i* $p_2 \ldots y - ax - 5 = 0$ *sijeku u točki čija je apscisa jednaka* 2.

Rješenje: Neka je $T(x_T, y_T)$ sjecište zadanih pravaca. Znamo da je $x_T = 2$. Budući da točka T leži i na p_1 i na p_2, njezine koordinate moraju zadovoljavati jednadžbe obaju pravaca. Uvrštavanjem $x_T = 2$ u te jednadžbe dobivamo:

$$y_T - 2 \cdot 2 - 3a = 0$$
$$y_T - 2a - 5 = 0$$

Oduzimanjem ovih jednadžbi dobivamo

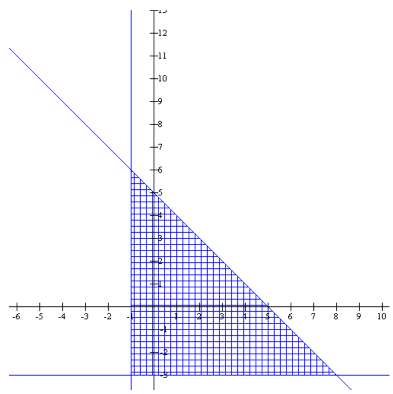
$$-a + 1 = 0,$$

a otuda je izravno

$$a = 1.$$

82. *Izračunajte površinu trokuta čije stranice leže na pravcima* $x = -1$, $y = -3$ *i* $x + y = 5$.

Rješenje: Nacrtajmo zadane pravce u pravokutnomu koordinatnomu sustavu u ravnini.

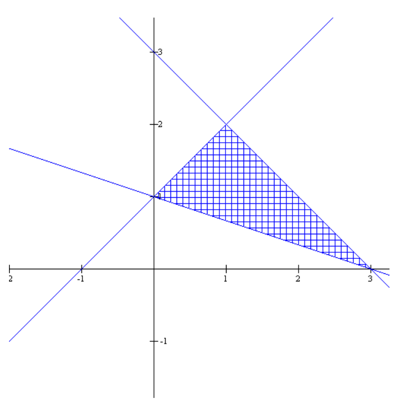


Sa slike vidimo da su vrhovi toga trokuta $A(8, -3)$, $B(6, -1)$ i $C(-1, -3)$. (Računski ih lagano dobijemo rješavajući sustave jednadžbi $y = -3$ i $x + y = 5$; $x = -1$ i $x + y = 5$; $y = -3$ i $x = -1$). Uočimo odmah da je troku pravokutan i da su duljine njegovih kateta $|AC| = 8 + 1 = 9$ i $|BC| = 3 + 6 = 9$. Stoga je njegova površina jednaka

$$P = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 = \frac{81}{2} \text{ kv. jed.}$$

83. *Izračunajte površinu trokuta omeđenoga pravcima* $x - y + 1 = 0$, $x + 3y - 3 = 0$ *i* $x + y - 3 = 0$.

Rješenje: Nacrtajmo zadane pravce u pravokutnomu koordinatnomu sustavu u ravnini.



Sa slike vidimo da su vrhovi trokuta $A(0, 1)$, $B(3, 0)$ i $C(1, 2)$. (Računski ih dobijemo rješavajući redom sljedeće sustave: $x - y + 1 = 0$ i $x + 3y - 3 = 0$; $x + 3y - 3 = 0$ i $x + y - 3 = 0$; $x - y + 1 = 0$ i $x + y - 3 = 0$). Trokut ABC je pravokutan (s pravim kutom pri vrhu C) i duljine njegovih kateta su $|AC| = \sqrt{2}$ i $|BC| = 2\sqrt{2}$. Stoga je njegova površina jednaka

$$P = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 2 \text{ kv. jed.}$$

84. *Bez uporabe kalkulatora izračunajte* $4521^2 - 4519^2$.

<u>Rješenje:</u> Prema formuli za razliku kvadrata odmah imamo:

$$4521^2 - 4519^2 = (4521 - 4519)(4521 + 4519) = 2 \cdot 9040 = 18\,080$$

85. *Bez uporabe kalkulatora izračunajte*: $\sqrt[3]{54} \cdot 16^{\frac{1}{3}}$.

<u>Rješenje:</u> Kako je vađenje trećega korijena jednako potenciranju na jednu trećinu, odmah imamo:

$$\sqrt[3]{54} \cdot 16^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{54 \cdot 16} = \sqrt[3]{27 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 2} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2} = 3 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2} = 6 \cdot \sqrt[3]{4}$$

86. *Racionalizirajte nazivnik sljedećega razlomka i pojednostavnite dobiveni izraz:*

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

<u>Rješenje:</u> Množenjem brojnika i nazivnika razlomka s $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ dobivamo redom:

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{6-2} = \frac{6+2\sqrt{12}+2}{4} = \frac{8+4\sqrt{3}}{4} = 2+\sqrt{3}$$

87. *Izračunajte bez uporabe kalkulatora:* $(0.1)^{-2} : (0.001)^{-3} \cdot 10^3$.

<u>Rješenje:</u> Prelaskom na potencije s bazom 10 dobivamo:

$$(0.1)^{-2} : (0.001)^{-3} \cdot 10^3 = [(10)^{-1}]^{-2} : [(10)^{-3}]^{-3} \cdot 10^3 = 10^2 : 10^3 \cdot 10^3 = 10^{2-3+3} = 10^2 = 100.$$

88. *Pojednostavnite izraz:*

$$\frac{a-b}{1-\frac{a}{b}}$$

<u>Rješenje:</u> Odmah imamo:

$$\frac{a-b}{1-\frac{a}{b}} = \frac{a-b}{\frac{b-a}{b}} = \frac{b(a-b)}{b-a} = \frac{-b(b-a)}{b-a} = -b$$

89. *Izračunajte:* $\frac{\sqrt{5}+i}{\sqrt{5}-2i}$

Rješenje: Množenjem brojnika i nazivnika s $\sqrt{5}+2i$ dobivamo redom:

$$\frac{\sqrt{5}+i}{\sqrt{5}-2i}=\frac{(\sqrt{5}+i)\cdot(\sqrt{5}+2i)}{(\sqrt{5}-2i)\cdot(\sqrt{5}+2i)}=\frac{5+\sqrt{5}i+2\sqrt{5}i+2i^2}{5-4i^2}=\frac{5+3\sqrt{5}i-2}{5+4}=\frac{3+3\sqrt{5}i}{9}=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}i$$

90. *Odredite realne brojeve x i y iz jednakosti:*

$$x + 2xi^3 + 3yi + 2 - 3i = 2xi^2 - 2y - 2 + 4i$$

Rješenje:

Zadanu jednakost najprije transformiramo ovako:

$$x - 2xi + 3yi + 2 - 3i = -2x - 2y - 2 + 4i$$
$$x - 2xi + 3yi + 2 - 3i + 2x + 2y + 2 - 4i = 0$$
$$(3x + 2y + 4) + (-2x + 3y - 7)i = 0$$

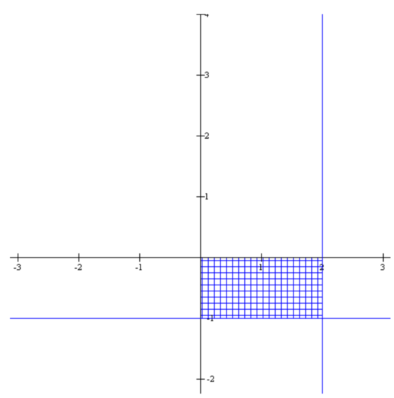
Tako smo dobili sustav jednadžbi:

$$3x + 2y + 4 = 0$$
$$-2x + 3y - 7 = 0$$

Njegovo je rješenje $x = -2$, $y = 1$.

91. *Pravci* $x = 2$ *i* $y = -1$ *zajedno s koordinatnim osima omeđuju četverokut ABCD takav da vrh B leži na osi Ox, a vrh D na osi Oy. Odredite implicitni oblik jednadžbe dijagonale AC.*

Rješenje: Nacrtajmo zadane pravce u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini.



Budući da vrh B mora ležati na osi Ox, a vrh D na osi Oy, slijedi da vrhove dobivenoga pravokutnika moramo označiti ovako: $A(2,-1)$, $B(2,0)$, $C(0, 0)$ i $D(0, -1)$. Stoga je jednadžba dijagonale AC (jednadžba pravca kroz ishodište koordinatnog sustava i jednu zadanu točku)

$$y=-\frac{1}{2}x$$

odnosno

$$x + 2y = 0.$$

92. *Odredite jednadžbu pravca s obzirom na kojega su točke* $A(-6, 1)$ *i* $B(1, 3)$ *međusobno osnosimetrične.*

Rješenje: Označimo traženi pravac s p. Pravac p je zapravo simetrala dužine AB, što znači da p prolazi polovištem dužine AB okomito na pravac kroz točke A i B. Polovište dužine AB je točka $P(-\frac{5}{2}, 2)$, a koeficijent smjera pravca p

$$k_p = -\frac{1}{k_{AB}}$$
$$k_p = -\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$$
$$k_p = -\frac{1-(-6)}{3-1}$$
$$k_p = -\frac{7}{2}$$

Prema tome, jednadžba pravca p jest

$$y - 2 = -\frac{7}{2}(x + \frac{5}{2})$$
$$y = -\frac{7}{2}x - \frac{27}{4}$$

odnosno, u implicitnom obliku

$$14x + 4y + 27 = 0.$$

93. *Odredite jednadžbu pravca simetričnog pravcu* $p\ldots\ x - 2y + 4 = 0$ *s obzirom na os* Oy.

Rješenje: Oba pravca moraju prolaziti istom točkom na osi Oy. Koordinate sjecište S pravca p s osi Oy dobijemo rješavajući sustav $x - 2y + 4 = 0$, $x = 0$. Njegovo rješenje je $x = 0$, $y = 2$, pa je $S(0, 2)$. Za određivanje tražene jednadžbe pravca nužna nam je još jedna njegova točka. U tu svrhu odaberimo neku točku pravca p, npr. $T(-4, 0)$. Točki T simetrična točka s obzirom na os Oy ima koordinate $T'(4, 0)$. Preostaje napisati jednadžbu pravca ST', a za to je najpogodniji segmentni oblik:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$$

otkuda se množenjem s 4 dobiva implicitni oblik jednadžbe istoga pravca

$$x + 2y - 4 = 0.$$

94. *Izračunajte zbroj svih rješenja jednadžbe*

$$|3x - 2| = 1 - x.$$

Rješenje: Razlikovat ćemo dva slučaja:

1.) $3x - 2 \geq 0$

U tome je slučaju $|3x - 2| = 3x - 2$ pa dobivamo jednadžbu

$$3x - 2 = 1 - x$$

čije je rješenje $x = \frac{3}{4}$. Za $x = \frac{3}{4}$ vrijedi nejednakost $3x - 2 \geq 0$, pa je taj broj rješenje polazne jednadžbe.

2.) $3x - 2 \leq 0$

U tome je slučaju $|3x - 2| = -(3x - 2) = 2 - 3x$ pa dobivamo jednadžbu

$$2 - 3x = 1 - x$$

čije je rješenje $x = \frac{1}{2}$. Za $x = \frac{1}{2}$ vrijedi nejednakost $3x - 2 \leq 0$, pa je to drugo rješenje polazne jednadžbe. Stoga su sva rješenja polazne jednadžbe $x_1 = \frac{3}{4}$ i $x_2 = \frac{1}{2}$. Njihov je zbroj jednak $\frac{5}{4}$.

95. *Odredite skup svih rješenja nejednadžbe*

$$-2x^2 + 4x + 4 > -2$$

Rješenje: Zadanu nejednadžbu možemo zapisati u obliku

$$-2x^2 + 4x + 6 > 0$$

otkuda nakon dijeljenja s (-2) dobivamo nejednadžbu

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

Nultočke pripadne kvadratne funkcije su $x_1 = -1$ i $x_2 = 3$, pa je traženi skup otvoreni interval $\langle -1, 3\rangle$.

96. *Izračunajte zbroj kvadrata svih rješenja jednadžbe*

$$10^{-2x^2 - x + 5} = 100$$

Rješenje: Kako je $100 = 10^2$, jednadžbu najprije zapišemo u obliku

$$10^{-2x^2 - x + 5} = 10^2$$

a odavde usporedbom eksponenata dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$-2x^2 - x + 5 = 2,$$

odnosno

$$-2x^2 - x + 3 = 0,$$

odnosno

$$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0$$

Prema Vièteovim formulama, rješenja x_1 i x_2 ove jednadžbe zadovoljavaju jednakosti:

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{2}$$
$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{3}{2}$$

Prema tome, traženi zbroj kvadrata svih rješenja polazne jednadžbe jednak je

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 \cdot x_2) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4}$$

97. *Riješite jednadžbu:*

$$\frac{1}{3} \cdot 2^{x-1} - 1 = -\frac{11}{12}$$

Rješenje: Zadanu jednadžbu možemo transformirati ovako:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3} \cdot 2^{x-1} - 1 = -\frac{11}{12} \\
&\frac{1}{3} \cdot 2^{x-1} = 1 - \frac{11}{12} \\
&\frac{1}{3} \cdot 2^{x-1} = \frac{1}{12} \qquad / \cdot 3 \\
&2^{x-1} = \frac{1}{4} \\
&2^{x-1} = 2^{-2}
\end{aligned}$$

Odavde usporedbom eksponenata dobivamo jednadžbu

$$x - 1 = -2$$

čije je rješenje $x = -1$. Stoga je jedino rješenje polazne jednadžbe $x = -1$.

98. *Ako je* $a = \log 576$, *izrazite* $\log 0.576 + \log 0.024$ *kao funkciju varijable* a.

Rješenje: Zasebno ćemo izraziti ćemo svaki pribrojnika kao funkciju varijable a, a potom zbrojiti dobivene rezultate. Imamo redom:

$$\log 0.576 = \log \frac{576}{1000} = \log 576 - \log 1000 = a - 3$$
$$\log 0.24 = \log \frac{24}{100} = \log 24 - \log 100 = \log \sqrt{576} - 2 = \log(576)^{\frac{1}{2}} - 2 = \frac{1}{2}\log 576 - 2 = \frac{a}{2} - 2$$

Zbrajanjem dobivenih rezultata konačno dobivamo:

$$\log 0.576 + \log 0.024 = a - 3 + \frac{a}{2} - 2 = \frac{3}{2}a - 5 .$$

99. *Riješite jednadžbu:*

$$\log[\log(-2x + 4)] = 0$$

Rješenje: Uvažavajući uvjete $-2x + 4 > 0$ i $\log(-2x + 4) > 0$ antilogaritmiranjem dobivamo:

$$\log(-2x + 4) = 10^0,$$

odnosno

$$\log(-2x + 4) = 1.$$

Još jednim antilogaritmiranjem dobivamo:

$$-2x + 4 = 10^1,$$

odnosno

$$-2x + 4 = 10,$$

a odavde je $x = 3$. Za $x = 3$ vrijede nejednakosti $-2x + 4 > 0$ i $\log(-2x + 4) > 0$, pa zaključujemo da je to jedino rješenje polazne jednadžbe.

100. *Izračunajte* $f(5)$ *ako za sve dopustive x vrijedi*:

$$f(x-3) = \frac{-2x}{x+8}$$

Rješenje: Iz $x - 3 = 5$ odmah slijedi $x = 8$. Stoga ćemo u jednakost

$$f(x-3) = \frac{-2x}{x+8}$$

uvrstiti $x = 8$ i dobiti:

$$f(5) = \frac{-2 \cdot 8}{8+8} = -1$$

Dakle, $f(5) = -1$.

101. *Izračunajte* $\operatorname{tg} 225° - \sqrt{3} \operatorname{ctg} 210°$.

Rješenje: Koristimo činjenicu da je $\pi = 180°$ period obiju funkcija tg i ctg, što znači da za sve dopustive x vrijedi:

$$\operatorname{tg}(x + 180°) = \operatorname{tg} x$$
$$\operatorname{ctg}(x + 180°) = \operatorname{ctg} x$$

Tako redom imamo:

$$\operatorname{tg} 225° = \operatorname{tg}(45° + 180°) = \operatorname{tg} 45° = 1;$$
$$\operatorname{ctg} 210° = \operatorname{ctg}(30° + 180°) = \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}$$

Stoga je vrijednost polaznoga izraza jednaka

$$1 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 1 - 3 = -2.$$

102. *Izračunajte:*

$$\frac{2\frac{23}{50}+1\frac{16}{75}}{55.1:5}:\frac{15}{17}:\left(\frac{2}{15}+0.15\right)+\frac{\left(9\frac{18}{25}-6.52\right)\cdot 9}{40\frac{1}{2}\cdot 2:9}$$

Rješenje: Mješovite brojeve i decimalne brojeve naprije zapišimo u obliku potpuno skraćenih razlomaka, a znakove dijeljenja zamijenimo znakovima množenja uz odgovarajuću pretvorbu djelitelja:

$$\frac{\frac{123}{50}+\frac{91}{75}}{\frac{551}{10}\cdot\frac{1}{5}}\cdot\frac{17}{15}\cdot\frac{1}{\frac{2}{15}+\frac{3}{20}}+\frac{\left(\frac{243}{25}-\frac{163}{25}\right)\cdot 9}{\frac{81}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{9}}$$

Dalje redom imamo:

$$\frac{\frac{738+364}{300}}{\frac{551}{50}}\cdot\frac{17}{15}\cdot\frac{1}{\frac{8+9}{60}}+\frac{\left(\frac{243-163}{25}\right)\cdot 9}{\frac{81}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{9}}=$$

$$\frac{\frac{1102}{300}}{\frac{551}{50}}\cdot\frac{17}{15}\cdot\frac{60}{17}+\frac{\frac{80}{25}\cdot 9}{9}=$$

$$\frac{4}{3}+\frac{16}{5}=\frac{68}{15}$$

103. *Izračunajte:*

$$\left(\frac{0.1^2}{80}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Rješenje: Kako je $0.1 = 10^{-1}$, a $80 = 8 \cdot 10$, bit će:

$$\left(\frac{0.1^2}{80}\right)^{\frac{1}{3}}=\left[\frac{\left(10^{-1}\right)^2}{8\cdot 10}\right]^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{10^{-2}}{2^3\cdot 10}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{2^3\cdot 10^3}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2\cdot 10}=\frac{1}{20}=0.05$$

104. *Izračunajte:*

$$5\cdot\left(\frac{3^{-1}-3^{-2}}{3^{-1}+3^{-2}}:\frac{4^{-1}-4^{-2}}{4^{-1}+4^{-2}}\right)^{-1}.$$

Rješenje: Imamo redom:

$$5\cdot\left(\frac{3^{-1}-3^{-2}}{3^{-1}+3^{-2}}:\frac{4^{-1}-4^{-2}}{4^{-1}+4^{-2}}\right)^{-1}=5\cdot\left(\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}}:\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}\right)^{-1}=5\cdot\left(\frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}}:\frac{\frac{3}{16}}{\frac{5}{16}}\right)^{-1}=5\cdot\left(\frac{1}{2}:\frac{3}{5}\right)^{-1}=5\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}\right)^{-1}$$

$$=5\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{-1}=5\cdot\frac{6}{5}=6$$

105. *Izračunajte:*

$$\left[\sqrt{0.65^2-0.16^2}+\left(-\frac{3}{4}\right)^2\cdot 0.48\right]:0.5$$

Rješenje: Primjenom formule za razliku kvadrata redom dobivamo:

$$\left[\sqrt{0.65^2-0.16^2}+\left(-\frac{3}{4}\right)^2\cdot 0.48\right]:0.5=\left[\sqrt{(0.65-0.16)(0.65+0.16)}+\frac{9}{16}\cdot\frac{12}{25}\right]:\frac{1}{2}=$$

$$=\left[\sqrt{0.49\cdot 0.81}+\frac{27}{100}\right]\cdot 2=(0.7\cdot 0.9+0.27)\cdot 2=0.9\cdot 2=1.8$$

106. *Potpuno skratite razlomak:*

$$\frac{4x^4-8x^2+3}{2x^3+2x^2-x-1}$$

Rješenje: Rastavimo najprije i brojnik i nazivnik u faktore:

$4x^4 - 8x^2 + 3 = (2x^2 - 2)^2 - 1 = (2x^2 - 2 - 1)\ (2x^2 - 2 + 1) = (2x^2 - 3)\ (2x^2 - 1);$
$2x^3 + 2x^2 - x - 1 = 2x^2(x + 1) - (x + 1) = (x + 1)(2x^2 - 1).$

Tako je zadani algebarski razlomak jednak

$$\frac{4x^4-8x^2+3}{2x^3+2x^2-x-1}=\frac{(2x^2-3)(2x^2-1)}{(2x^2-1)(x+1)}=\frac{2x^2-3}{x+1}$$

107. *Pojednostavnite izraz:*

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{-2}\cdot(a^{-1}+b^{-1})+\frac{2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)$$

Rješenje: Imamo redom:

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{-2}\cdot(a^{-1}+b^{-1})+\frac{2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{3}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)=\frac{1}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{2}}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{3}}\cdot\left(\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}\right)=$$

$$\frac{1}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{2}}\cdot\left(\frac{b+a}{ab}\right)+\frac{2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)=\frac{1}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{2}}\cdot\left[\frac{b+a}{ab}+\frac{2}{\sqrt{ab}}\right]=\frac{1}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{2}}\cdot\left[\frac{b+a+2\sqrt{ab}}{ab}\right]=$$

$$\frac{1}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{2}}\cdot\left[\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{2}}{ab}\right]=\frac{1}{ab}$$

108. *Potpuno skratite razlomak:*

$$\frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{30}-\sqrt{20}}$$

Rješenje: Imamo redom:

$$\frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{30}-\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{10}\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}=\sqrt{\frac{2}{10}}=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

109. *Ako je* $a=\sqrt[3]{216}$, *izračunajte* $-2a+1$.

Rješenje: Rastavimo li broj 216 na proste faktore, dobit ćemo:

$$216=6^{3}$$

Stoga je $a=\sqrt[3]{6^{3}}=6$, pa je $-2a+1=-2\cdot 6+1=-11$.

110. *Pojednostavnite izraz:*

$$\sqrt[3]{a\sqrt{a}}:\sqrt{a\sqrt{a}}$$

Rješenje: Svođenjem na jedan korijen dobivamo:

$$\sqrt[3]{a\sqrt{a}}:\sqrt{a\sqrt{a}}=\sqrt[3]{\sqrt{a^{2}\cdot a}}:\sqrt{\sqrt{a^{2}\cdot a}}=\sqrt[6]{a^{3}}:\sqrt[4]{a^{3}}=a^{\frac{3}{6}}:a^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{1}{2}}:a^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}=a^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{a^{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{a}}$$

111. *Izračunajte:*

$$\frac{\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{3}}}{\sqrt[3]{2}}$$

Rješenje: Svođenjem na jedan korijen dobivamo:

$$\frac{\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{3}}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt{\sqrt[3]{2^{3}\cdot 3}}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[6]{8\cdot 3}}{\sqrt[3\cdot 2]{2^{1\cdot 2}}}=\frac{\sqrt[6]{24}}{\sqrt[6]{2^{2}}}=\frac{\sqrt[6]{24}}{\sqrt[6]{4}}=\sqrt[6]{\frac{24}{4}}=\sqrt[6]{6}\,.$$

112. *Pojednostavnite izraz:*

$$\frac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2-ca}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2-ab}{(c-a)(c-b)}$$

Rješenje: Kako bismo zadane razlomke mogli svesti na zajednički nazivnik, izlučimo (–1) iz izraza (b – a) u nazivniku drugoga razlomka, te (–1) i iz izraza (c – a) i iz izraza (c – b) u nazivniku trećega razlomka. Tako dobivamo:

$$\frac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca-b^2}{(b-c)(a-b)}+\frac{c^2-ab}{(a-c)(b-c)}=\frac{(a^2-bc)(b-c)+(ca-b^2)(a-c)+(c^2-ab)(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=$$

$$\frac{a^2b-b^2c-a^2c+bc^2+a^2c-ab^2-ac^2+b^2c+ac^2-a^2b-bc^2+ab^2}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{0}{(a-b)(a-c)(b-c)}=0$$

113. *Izračunajte:*

$$\left(2-\sqrt{2.25}\right)\cdot 0.125^{\frac{1}{3}}\cdot 0.0625^{-\frac{1}{4}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}.$$

Rješenje: Uočimo da je 2.25 = 1.5^2, 0.125 = $\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$ i 0.0625 = $\frac{1}{16}=\left(\frac{1}{2}\right)^4$. Izračunajmo zasebno svaki faktor:

$2-\sqrt{2.25}=2-\sqrt{1.5^2}=2-1.5=0.5=\frac{1}{2}$;

$0.125^{\frac{1}{3}}=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$;

$0.0625^{-\frac{1}{4}}=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^{-\frac{1}{4}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{4}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$.

Tako je zadani brojevni izraz jednak

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1+1-1-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4.$$

114. *Svedite na jedan korijen:* $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}$.

Rješenje: Zadane ćemo korijene svesti na šesti korijen jer je NZV(2, 3) = 6. Imamo redom:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}=\sqrt[2]{2^1}\cdot\sqrt[3]{3^1}=\sqrt[2\cdot 3]{2^{1\cdot 3}}\cdot\sqrt[3\cdot 2]{3^{1\cdot 2}}=\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{2^3\cdot 3^2}=\sqrt[6]{8\cdot 9}=\sqrt[6]{72}$$

115. *Izračunajte:*

$$\frac{\sqrt[3]{0.125}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^{-1}}{1-\sqrt{0.25}}$$

Rješenje: Uočimo da je $0.125 = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ i $0.25 = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Tako je zadani brojevni izraz jednak:

$$\frac{\sqrt[3]{0.125}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^{-1}}{1-\sqrt{0.25}} = \frac{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}\cdot\left(\frac{3-2}{6}\right)^{-1}}{1-\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 6}{\frac{1}{2}} = 6$$

116. *Riješite nejednadžbu:*

$$\frac{(x-1)^2}{x+1} > 0$$

Rješenje: Brojnik razlomka $\frac{(x-1)^2}{x+1}$ je nenegativan za svaki $x \in \mathbf{R}$, a poprima vrijednost 0 za $x = 1$. Da bi cijeli razlomak bio strogo pozitivan, nazivnik mora biti strogo pozitivan, a brojnik ne smije biti jednak 0. To znači da mora vrijediti:

$$x + 1 > 0$$
$$x \neq 1.$$

Rješenje prve nejednadžbe jest $\langle 1, +\infty\rangle$, a druge $\langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$ Presjek tih skupova jest $\langle -1, 1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$, i taj je skup rješenje polazne nejednadžbe.

117. *Riješite nejednadžbu:*

$$\frac{x+4}{5-x} > 0$$

Rješenje: Lijeva strana zadane nejednadžbe će biti strogo pozitivna ako i samo ako su i brojnik i nazivnik ili strogo pozitivni ili strogo negativni. Zbog toga razmatramo dva slučaja:

1.) $x + 4 > 0$
$5 - x > 0$

Iz prve nejednadžbe slijedi $x > -4$, a iz druge $x < 5$. Stoga je rješenje ovoga slučaja otvoreni interval $\langle -4, 5\rangle$.

2.) $x + 4 < 0$
$5 - x < 0$

Iz prve nejednadžbe slijedi $x < -4$, a iz druge $x > 5$. Kako ne postoji niti jedan realan broj koji bi istovremeno bio manji od -4 i veći od 5, rješenje ovoga slučaja jest prazan skup $\emptyset$.

Konačno rješenje nejednadžbe je unija rješenja slučaja 1.) i rješenja slučaja 2.), a to je skup $\langle -4, 5\rangle$.

118. *Riješite nejednadžbu:*

$$\frac{1}{1-x} \geq -3$$

Rješenje: Polaznu nejednadžbu najprije transformiramo ovako:

$$\frac{1}{1-x} \geq -3 \Leftrightarrow \frac{1}{1-x} + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1+3(1-x)}{1-x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4-3x}{1-x} \geq 0$$

Slično kao i u rješenju prethodnoga zadatka, razlikujemo dva slučaja:

1.) $4 - 3x \geq 0$
$1 - x > 0$

Iz prve nejednadžbe slijedi $x \leq \frac{4}{3}$, a iz druge $x < 1$. Stoga je rješenje ovoga slučaja otvoreni interval $\langle -\infty, 1\rangle$.

2.) $4 - 3x \leq 0$
$1 - x < 0$

Iz prve nejednadžbe slijedi $x \geq \frac{4}{3}$, a iz druge $x > 1$. Stoga je rješenje ovoga slučaja poluotvoreni interval $[\frac{4}{3}, +\infty\rangle$.

Konačno rješenje nejednadžbe je unija rješenja slučaja 1.) i slučaja 2.), a to je skup $\langle -\infty, 1\rangle \cup [\frac{4}{3}, +\infty\rangle$ kojega kraće možemo zapisati kao $\mathbf{R} \setminus [1, \frac{4}{3}\rangle$.

119. *Riješite nejednadžbu:*

$$\frac{1}{1+x} > \frac{1}{x}$$

Rješenje: Postupamo slično kao i u prethodnom zadatku. Polaznu nejednadžbu najprije transformiramo ovako:

$$\frac{1}{1+x} > \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-(1+x)}{(1+x)\cdot x} > 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{(1+x)\cdot x} > 0$$

Budući da je brojnik posljednjega razlomka strogo negativan, a vrijednost cijeloga razlomka mora biti strogo pozitivna, nazivnik mora biti strogo negativan. Odatle dobivamo nejednadžbu

$$(1 + x) \cdot x < 0$$

koja je ekvivalentna kvadratnoj nejednadžbi

$$x^2 + x < 0.$$

Nultočke pripadne kvadratne funkcije možemo očitati izravno iz oblika $(1 + x) \cdot x = 0$, i to su $x_1 = -1$, $x_2 = 0$. Stoga je konačno rješenje polazne nejednadžbe otvoreni interval $\langle -1, 0\rangle$.

120. *Riješite jednadžbu:*

$$|-2x + 2| = -3x + 8$$

Rješenje: Razlikovat ćemo dva slučaja:

1.) $-2x + 2 \geq 0$

U ovome je slučaju $|-2x + 2| = -2x + 2$ pa dobivamo jednadžbu

$$-2x + 2 = -3x + 8$$

čije je rješenje $x = 6$. No, $x = 6$ ne zadovoljava uvjet $-2x + 2 \geq 0$, pa to nije rješenje polazne jednadžbe.

2.) $-2x + 2 \leq 0$

U ovome je slučaju $|-2x + 2| = -(-2x + 2) = 2x - 2$ pa dobivamo jednadžbu:

$$2x - 2 = -3x + 8$$

čije je rješenje $x = 2$. $x = 2$ zadovoljava uvjet $-2x + 2 \leq 0$ pa je to rješenje polazne jednadžbe.

Zaključimo: Polazna jednadžba ima točno jedno rješenje, i to je $x = 2$.

121. *Riješite jednadžbu:*

$$|x - 2| + |x - 1| = 1.$$

Rješenje: Najprije odredimo kritične točke iz jednadžbi $x - 2 = 0$ i $x - 1 = 0$. Rješenja tih jednadžbi su $x = 2$ i $x = 1$. Stoga zadanu jednadžbu rješavamo na ukupno tri intervala:

1.) $-\infty < x \leq 1$

Na ovome je intervalu $|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$ i $|x - 1| = -(x - 1) = 1 - x$. Stoga polazna jednadžba prelazi u:

$$2 - x + 1 - x = 1$$

Rješenje ove jednadžbe jest $x = 1$. Kako $x = 1$ pripada intervalu $-\infty < x \leq 1$, to je $x_1 = 1$ rješenje polazne jednadžbe.

2.) $1 \leq x \leq 2$

Na ovome je intervalu $|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$ i $|x - 1| = x - 1$. Stoga polazna jednadžba prelazi u:

$$2 - x + x - 1 = 1$$

Iz ove jednadžbe slijedi $1 = 1$, što je istinit identitet. Stoga je skup rješenja u ovom slučaju segment $[1, 2]$.

3.) $2 \leq x < +\infty$

Na ovome je intervalu $|x - 2| = x - 2$ i $|x - 1| = x - 1$. Stoga polazna jednadžba prelazi u:

$$x - 2 + x - 1 = 1$$

Rješenje ove jednadžbe jest $x = 2$. Kako $x = 2$ pripada intervalu $2 \leq x < +\infty$, to je $x_3 = 2$ treće rješenje polazne jednadžbe.

Skup svih rješenja polazne jednadžbe je unija skupova $\{1\}$, $[1, 2]$ i $\{2\}$. Kako vrijede inkluzije $\{1\} \subset [1, 2]$ i $\{2\} \subset [1, 2]$, to je unija tih triju skupova $[1, 2]$.

122. *Duljina katete a pravokutnoga trokuta ABC iznosi* 5 cm, *a sinus toj kateti nasuprotnoga kuta jednak je* 0.8. *Izračunajte duljinu hipotenuze c toga trokuta.*

Rješenje: Kateti a nasuprotni kut je kut α pri vrhu A. Njegov je sinus po definiciji jednak

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Iz te je jednakosti

$$c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{5}{0.8} = \frac{50}{8} = 6.25$$

Dakle, duljina hipotenuze c trokuta ABC iznosi 6.25 cm.

123. *Izračunajte:*

$$\frac{5 \cdot \mathrm{tg}45° - (\cos 30°)^2}{\sin 60}$$

Rješenje: Kako je tg 45° = 1, cos 30° = sin 60° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, zadani je izraz jednak:

$$\frac{5 \cdot \mathrm{tg}45° - (\cos 30°)^2}{\sin 60} = \frac{5 \cdot 1 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5 - \frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{17}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{17}{2\sqrt{3}} = \frac{17}{6}\sqrt{3}$$

124. *Odredite predznak izraza*

$$\sin x \cdot \cos(2\pi - x) \cdot \mathrm{tg}(-x)$$

za $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Rješenje: Najprije ćemo pojednostavniti zadani izraz. Kako je 2π period funkcije kosinus, to je:

$$\cos(2\pi - x) = \cos(-x + 2\pi) = \cos(-x) = \cos x$$

jer je cos x parna funkcija. Budući da je tg x neparna funkcija, vrijedi:

$$\mathrm{tg}(-x) = -\,\mathrm{tg}\, x.$$

Tako je zadani izraz ekvivalentan s

$$-\sin x \cdot \cos x \cdot \mathrm{tg}\, x = -\sin x \cdot \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = -\cos^2 x$$

Budući da za $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ vrijedi $\cos^2 x > 0$, vrijednost polaznoga izraza je strogo negativna, tj. njegov predznak je negativan.

125. *Izračunajte vrijednost tangensa kuta* α *ako je*

$$\sin\alpha = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right) \qquad i \qquad 450° < \alpha < 540°.$$

Rješenje: Odredimo najprije u kojemu je kvadrantu kut α. Podijelimo li 450 s 360, dobit ćemo količnik 1 i ostatak 90. Slično, podijelimo li 540 s 360, dobit ćemo količnik 1 i ostatak 180. Stoga za kut α vrijedi nejednakost

$$90° < \alpha < 180°$$

pa je riječ o kutu u drugom kvadrantu. Tangens toga kuta je negativan, a računamo ga prema formuli:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-\sin^2 \alpha}}$$

Uvrštavanjem

$$\sin \alpha = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$$

u tu formulu dobivamo redom:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{\sqrt{1-\left[\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\right]^2}} = -\frac{\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{16}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2}} = -\frac{\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{16}\left(2+2\sqrt{12}+6\right)}} = -\frac{\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{16}\left(8+4\sqrt{3}\right)}} =$$

$$= -\frac{\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{\sqrt{\frac{16-\left(8+4\sqrt{3}\right)}{16}}} = -\frac{\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{\sqrt{\frac{8-4\sqrt{3}}{16}}} = -\frac{\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{\sqrt{\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{16}}} = -\frac{\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}} = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{(\sqrt{2}-\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{6})} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2}{2-6} = \frac{2+2\sqrt{12}+6}{-4} = \frac{8+4\sqrt{3}}{-4} = -2-\sqrt{3}$$

126. *Ako je* $\operatorname{ctg} x = 0.5$, *izračunajte vrijednost izraza* $\frac{5\sin x + 6\cos x}{\cos x - \sin x}$ **.**

Rješenje: Svaki član u brojniku i nazivniku zadanoga izraza podijelimo s $\sin x$, što smijemo jer je zbog

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = 0.5$$

$\sin x$ različit od nule. Tako dobivamo:

$$\frac{5+6\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\cos x}{\sin x}-1} = \frac{5+6\cdot\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} x - 1} = \frac{5+6\cdot 0.5}{0.5-1} = \frac{5+3}{-0.5} = -\frac{8}{\frac{1}{2}} = -16$$

127. *Odredite* $|\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x|$ *ako je* $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3$.

Rješenje: Iz jednakosti

$$(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 = \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^2 x$$

zbog

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$$

slijedi

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 - 2$$

odnosno uvrštavanjem $\text{tg } x + \text{ctg } x = 3$

$$\text{tg}^2 x + \text{ctg}^2 x = 9 - 2 = 7.$$

Sada iz

$$|\text{tg } x - \text{ctg } x| = \sqrt{(\text{tg } x - \text{ctg } x)^2} = \sqrt{\text{tg}^2 x - 2 \cdot \text{tg } x \cdot \text{ctg } x + \text{ctg}^2 x} = \sqrt{\text{tg}^2 x + \text{ctg}^2 x - 2}$$

uvrštavanjem

$$\text{tg}^2 x + \text{ctg}^2 x = 7$$

izravno slijedi

$$|\text{tg } x - \text{ctg } x| = \sqrt{7-2} = \sqrt{5}\,.$$

128. *Kut* α *se nalazi u četvrtom kvadrantu. Apsolutna vrijednost njegova sinusa jednaka je* 0.735. *Odredite mjeru kuta* α *u radijanima.*

Rješenje: Postupak je ovakav:

1.) Odredimo kut α_1 u 1. kvadrantu čija je apsolutna vrijednost sinusa također jednaka 0.735.
2.) Traženi kut α odredimo iz jednakosti

$$\alpha = 2\pi - \alpha_1$$

Naime, budući da je α_1 kut iz prvoga kvadranta, vrijedi $\alpha_1 \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, odakle slijedi

$$\alpha \in \langle 2\pi - \frac{\pi}{2}, 2\pi - 0 \rangle = \langle \frac{3\pi}{2}, 2\pi \rangle$$

pa je α kut iz četvrtoga kvadranta. Napokon, iz

$$|\sin \alpha| = |\sin(2\pi - \alpha_1)| = |-\sin \alpha_1| = |\sin \alpha_1|$$

slijedi da kutovi α i α_1 imaju jednake apsolutne vrijednosti sinusa.

Rabeći kalkulator odredimo kut α_1 iz jednadžbe:

$$\sin \alpha_1 = 0.735$$

jer je za sve kutove α_1 iz prvoga kvadranta $|\sin \alpha_1| = \sin \alpha_1$. Dobivamo:

$$\alpha_1 = 0{,}82566668098582304228504475888957 3 \text{ rad}$$

pa je konačno

$$\alpha = 2\pi - \alpha_1 = 5{,}4575186261937634346402420076694 3 \text{ rad.} \approx 5.45752 \text{ rad.}$$

129. *Za koju je vrijednost realnoga parametra a temeljni period funkcije* $f(x) = \sin(ax)$ *jednak* 4π?

Rješenje: Temeljni period funkcije $f(x)$ određujemo prema formuli

$$T = \frac{2\pi}{a}$$

Uvrštavanjem $T = 4\pi$ dobivamo jednadžbu

$$\frac{2\pi}{a} = 4\pi$$

iz koje je

$$a = \frac{1}{2}.$$

130. *S točnošću od* 10^{-1} *izračunajte površinu trokuta ABC ako je zadano*:

$$a = 3.68,\ \alpha = 35°37'',\ \beta = 36°47''36''.$$

<u>Rješenje:</u> Površinu trokuta možemo izračunati pomoću izraza:

$$P = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$$

Kut γ dobijemo iz osnovne relacije među kutovima trokuta:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°,$$

otkuda je

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta),$$

pa je

$$\sin\gamma = \sin[180° - (\alpha + \beta)] = \sin(\alpha + \beta)$$

Duljinu stranice b odredimo pomoću sinusova poučka:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

otkuda je

$$b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \cdot a$$

Tako je

$$P = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\sin\beta \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha} = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\frac{1}{2}\left[\cos(-\alpha) - \cos(\alpha + 2\beta)\right]}{\sin\alpha} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos\alpha - \cos(\alpha + 2\beta)}{\sin\alpha} \cdot a^2$$

Uvrštavanjem zadanih podataka dobivamo:

$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos 35°37'' - \cos(35°37'' + 2 \cdot 36°47'36'')}{\sin 35°37''} \cdot 3.68^2$$

Kako je

$\cos 35°37'' = \cos(35° + \frac{37}{3600}°) = \cos(35.010277777777777777777777777778°) = 0.81904914236008750297679177580977 5;$

$\sin 35°37'' = \sin(35.010277777777777777777777777778°) = 0.57372336748576409640836777444799 1;$

$\cos(35°37'' + 2 \cdot 36°47'36'') = \cos(35°37'' + 73°15'12'') = \cos(108°15'49'') = \cos(108.26361111111111111111111111111°) = -0.31338940693842990461889581682262 2;$

$3.68^2 = 13.5424,$

uvrštavanjem konačno dobijemo:

$$P = 6.6826351684205958111888243701930 6 \text{ kv. jed.},$$

odnosno s traženom točnošću:

$$P = 6.7 \text{ kv. jed.}$$

131. *Odredite odsječak na osi Oy pravca p…* $5y + 3 = 0$.

Rješenje: Zapišimo jednadžbu zadanoga pravca u segmentnom obliku (budući da ona ne sadrži x, koeficijent uz x jednak je 0):

$$\begin{aligned} 0 \cdot x + 5 \cdot y + 3 &= 0 \\ 0 \cdot x + 5 \cdot y &= -3 \quad /:(-3) \\ \frac{x}{0} + \frac{y}{-\frac{3}{5}} &= 1 \end{aligned}$$

Odsječak na osi Oy je nazivnik razlomka kojemu je brojnik jednak y. Vidimo da je taj nazivnik jednak $-\frac{3}{5}$ pa je traženi odsječak $n = -\frac{3}{5}$.

132. *Izračunajte udaljenost pravca p…* $8x - 15y + 17 = 0$ *od ishodišta.*

Rješenje: Tražena je udaljenost jednaka

$$d = \frac{|8 \cdot 0 - 15 \cdot 0 + 17|}{\sqrt{8^2 + 15^2}} = \frac{|17|}{\sqrt{64 + 225}} = \frac{17}{\sqrt{289}} = \frac{17}{17} = 1$$

133. *Izračunajte udaljenost točke* $T(13, -3)$ *od pravca p…* $5x - 12y + 3 = 0$.

Rješenje: Tražena je udaljenost jednaka

$$d = \frac{|5 \cdot 13 - 12 \cdot (-3) + 3|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|104|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{104}{\sqrt{169}} = \frac{104}{13} = 8.$$

134. *Izračunajte veličine unutrašnjih kutova trokuta ABC kojemu su vrhovi* $A(1, 5)$, $B(-1, 10)$ *i* $C(0, -4)$.

Rješenje: 1. način (analitički): Izračunajmo najprije duljine stranica zadanoga trokuta. Imamo redom:

$$a = |BC| = \sqrt{(0+1)^2 + (-4-10)^2} = \sqrt{1+196} = \sqrt{197}$$
$$b = |AC| = \sqrt{(0-1)^2 + (-4-5)^2} = \sqrt{1+81} = \sqrt{82}$$
$$c = |AB| = \sqrt{(-1-1)^2 + (10-5)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$

Nadalje, pomoću zadanih koordinata vrhova izračunamo površinu trokuta ABC:

$$P = \frac{1}{2} | x_A \cdot (y_B - y_C) + x_B \cdot (y_C - y_A) + x_C \cdot (y_A - y_B) |$$
$$P = \frac{1}{2} | 1 \cdot (10-(-4)) + (-1) \cdot (-4-5) + 0 \cdot (5-10) |$$
$$P = \frac{23}{2}$$

Sada možemo prijeći na računanje kutova. Izračunat ćemo najprije kutove nasuprot srednjoj i najmanjoj stranici. Naime, rješavanjem jednadžbe

$$\sin x = a,\ a \in \langle -1, 1 \rangle$$

na intervalu $[0, \pi\rangle$ dobivamo uvijek dva različita kuta: jedan šiljasti i jedan tupi. Budući da se nasuprot srednjoj i najmanjoj stranici sigurno nalaze šiljasti kutovi (jer bi u suprotnom slijedilo da trokut ima barem dva tupa kuta, što je nemoguće), njih jednoznačno možemo odrediti iz jednadžbe $\sin x = a$. No, kako kut nasuprot najvećoj stranici može biti ili šiljast ili tup, a rješavanjem jednadžbe $\sin x = a$ ne možemo otkriti koje od dva dobivena rješenja treba uzeti, taj ćemo kut izračunati iz osnovne relacije među kutovima trokuta

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

pa će i on biti jednoznačno određen. Dakle, računamo kutove β i γ nasuprot stranicama b i c. Koristimo formule

$$P = \frac{1}{2} ac \sin \beta$$
$$P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

iz kojih se dobiva

$$\sin \beta = \frac{2P}{ac}$$
$$\sin \gamma = \frac{2P}{ab}$$

Uvrštavanjem konkretnih vrijednosti dobivamo:

$$\sin \beta = \frac{2 \cdot \frac{23}{2}}{\sqrt{197} \cdot \sqrt{29}} = \frac{23}{\sqrt{5713}} \approx 0{,}30429563595731059945359789572938 8$$
$$\beta \approx 17{,}715792706376935248260563298617° \approx 17°42'57''$$
$$\sin \gamma = \frac{2 \cdot \frac{23}{2}}{\sqrt{197} \cdot \sqrt{82}} = \frac{23}{\sqrt{16154}} \approx 0{,}18096217054540199428235765143212 6$$
$$\gamma \approx 10{,}425808525884785917978440453154 1° \approx 10°25'33''$$

Napokon, iz

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

slijedi:

$$\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$$
$$\alpha = 180° - (17°42'57'' + 10°25'33'')$$
$$\alpha = 151°51'30''$$

<u>2. način</u> (vektorski): Koristit ćemo formulu za skalarni umnožak vektora

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

iz koje je

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Označimo:

$$\vec{a} = \overrightarrow{BC},\ \vec{b} = \overrightarrow{AC},\ \vec{c} = \overrightarrow{AB}$$

Uz ovakve oznake, α je kut između vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$, β kut između vektora $-\vec{c}$ i $\vec{a}$, a γ kut između vektora $-\vec{b}$ i $-\vec{a}$. Duljine vektora $\pm\vec{a}$, $\pm\vec{b}$ i $\pm\vec{c}$ jednake su duljinama pripadnih stranica trokuta:

$$|\vec{a}| = |\overrightarrow{-a}| = |BC| = \sqrt{(0+1)^2 + (-4-10)^2} = \sqrt{1+196} = \sqrt{197}$$
$$|\vec{b}| = |\overrightarrow{-b}| = |AC| = \sqrt{(0-1)^2 + (-4-5)^2} = \sqrt{1+81} = \sqrt{82}$$
$$|\vec{c}| = |\overrightarrow{-c}| = |AB| = \sqrt{(-1-1)^2 + (10-5)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$

Odredimo sada vektore $\vec{a}$, $-\vec{a}$, $\vec{b}$, $-\vec{b}$, $\vec{c}$ i $-\vec{c}$. Imamo redom:

$$\vec{a} = \overrightarrow{BC} = (x_C - x_B)\vec{i} + (y_C - y_B)\vec{j} = (0-(-1))\vec{i} + (-4-10)\vec{j} = \vec{i} - 14\vec{j}$$
$$-\vec{a} = -\vec{i} + 14\vec{j}$$
$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (x_C - x_A)\vec{i} + (y_C - y_A)\vec{j} = (0-1)\vec{i} + (-4-5)\vec{j} = -\vec{i} - 9\vec{j}$$
$$-\vec{b} = \vec{i} + 9\vec{j}$$
$$\vec{c} = \overrightarrow{AB} == (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} = (-1-1)\vec{i} + (10-5)\vec{j} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$$
$$-\vec{c} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$$

Sada možemo prijeći na računanje kutova. Za razliku od prethodnoga načina, ovdje nema nikakvih dodatnih ograničenja na redoslijed provedbe računa jer je kosinus šiljastoga kuta pozitivan, a tupoga negativan. Imamo redom:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{1 \cdot 2 + 9 \cdot (-5)}{\sqrt{82} \cdot \sqrt{29}} = -\frac{43}{\sqrt{2378}} = -0{,}88178464193469164010763458692662 6$$
$$\alpha = 151{,}85839876773827883376099624822 9° \approx 151°51'30''$$

$$\cos\beta=\frac{\overrightarrow{-c}\cdot\vec{a}}{|\overrightarrow{-c}|\cdot|\vec{a}|}=\frac{2\cdot 1+5\cdot 14}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{197}}=\frac{72}{\sqrt{5713}}=0{,}9525776429967983982895238475006694$$

$$\beta=17{,}715792706376935248260563298617°\approx 17°42'57''$$

$$\cos\gamma=\frac{\overrightarrow{-b}\cdot\overrightarrow{-a}}{|\overrightarrow{-b}|\cdot|\overrightarrow{-a}|}=\frac{1\cdot(-1)+14\cdot 9}{\sqrt{82}\cdot\sqrt{197}}=\frac{125}{\sqrt{16154}}=0{,}98349005731196736023020462734851 1$$

$$\gamma=10{,}425808525884785917978440453154 1°\approx 10°25'33''$$

135. *Odredite koordinate središta kružnice*

$$x^2+y^2-5x+5y=0$$

Rješenje: Jednadžbu kružnice zapišimo u kanonskom obliku:

$$(x-\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}+(y+\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}=0\,,$$

tj.

$$(x-\frac{5}{2})^2+(y+\frac{5}{2})^2=\frac{25}{2}$$

Iz toga oblika izravno očitavamo tražene koordinate središta kružnice:

$$S\left(\frac{5}{2},\,-\frac{5}{2}\right)$$

136. *Linearni ekscentricitet elipse jednak je* 3, *a numerički* 0.5. *Odredite (osnu) jednadžbu elipse.*

Rješenje: Označimo s a duljinu velike poluosi, a s b duljinu male poluosi. Linearni ekscentricitet elipse e računamo prema formuli:

$$e=\sqrt{a^2-b^2}\,,$$

a numerički (ε) prema formuli

$$\varepsilon=\frac{e}{a}$$

U našem je slučaju $e = 3$, $\varepsilon = 0.5$ pa iz druge od gornjih dviju formula dobivamo:

$$a=\frac{e}{\varepsilon}=\frac{3}{0.5}=6$$

Sada iz

$$e=\sqrt{a^2-b^2}$$

slijedi

$$b^2 = a^2 - e^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27$$

Osna jednadžba elipse u svojemu općemu obliku glasi:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Uvrštavanjem $a^2 = 36$ i $b^2 = 27$ dobijemo:

$$27x^2 + 36y^2 = 36 \cdot 27$$

otkuda dijeljenjem cijele jednakosti s 9 slijedi tražena osna jednadžba:

$$3x^2 + 4y^2 = 108$$

137. *Duljina male poluosi hiperbole jednaka je* 4, *a numerički ekscentricitet hiperbole* 2. *Odredite njezinu osnu jednadžbu.*

Rješenje: Zadane su nam sljedeće veličine:

$$b = 4$$
$$\varepsilon = 2$$

Koristimo analogne formule za linearni i numerički ekscentricitet:

$$e = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\varepsilon = \frac{e}{a}$$

Iz prve od njih je

$$b^2 = e^2 - a^2,$$

a iz druge

$$e = \varepsilon \cdot a.$$

Stoga je

$$b^2 = (\varepsilon \cdot a)^2 - a^2,$$
$$b^2 = (\varepsilon^2 - 1) \cdot a^2$$

te konačno:

$$a^2 = \frac{b^2}{\varepsilon^2 - 1}$$

Uvrštavanjem $b = 4$ i $\varepsilon = 2$ dobivamo:

$$a^2 = \frac{16}{3}$$

pa je tražena osna jednadžba hiperbole (zapisana u obliku $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$)

$$16x^2 - \frac{16}{3}y^2 = 16 \cdot \frac{16}{3},$$

odnosno (nakon množenja cijele jednadžbe sa $\frac{3}{16}$)

$$3x^2 - y^2 = 16$$

138. *Odredite tjemenu jednadžbu parabole čije je žarište u točki* $F(5, 0)$.

Rješenje: Označimo s p poluparametar parabole. Koordinate žarišta (kao funkcija varijable p) dane su formulom

$$F(\frac{p}{2}, 0)$$

U našem je slučaju $F(5, 0)$, pa dobivamo jednadžbu

$$\frac{p}{2} = 5$$

čije je rješenje $p = 10$. Tražena tjemena jednadžba parabole (u obliku $y^2 = 2px$) glasi:

$$y^2 = 10x.$$

139. *Odredite osnu jednadžbu elipse ako su zadane duljine njezinih poluosi*: $a = 4,\ b = 3$.

Rješenje: Uvrštavanjem $a = 4,\ b = 3$ u jednadžbu

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

odmah dobivamo:

$$9x^2 + 16y^2 = 144.$$

140. *Pojednostavnite izraz:*

$$\frac{10 \cdot 2^n - 5 \cdot 2^{n-1}}{6 \cdot 2^{n+1} + 3 \cdot 2^n}$$

Rješenje: Izlučimo 2^n iz svakoga člana brojnika, odnosno nazivnika. Dobivamo:

$$\frac{10 \cdot 2^n - 5 \cdot 2^{n-1}}{6 \cdot 2^{n+1} + 3 \cdot 2^n} = \frac{2^n \cdot (10 - 5 \cdot 2^{-1})}{2^n \cdot (6 \cdot 2^1 + 3)} = \frac{10 - 5 \cdot \frac{1}{2}}{6 \cdot 2 + 3} = \frac{10 - \frac{5}{2}}{15} = \frac{\frac{15}{2}}{15} = \frac{1}{2}$$

141. *Izračunajte:*

$$\frac{(3^{n-1} + 3^{2n-1})^3}{(3^{3n-1} + 27^n)^2}$$

Rješenje: Najprije uočimo da je $27^n = (3^3)^n = 3^{3n}$. Tako redom imamo:

$$\frac{(9^{n-1}+3^{2n-1})^3}{(3^{3n-1}+27^n)^2}=\frac{((3^2)^{n-1}+3^{2n-1})^3}{(3^{3n-1}+3^{3n})^2}=\frac{(3^{2n-2})^3+3\cdot(3^{2n-2})^2\cdot 3^{2n-1}+3\cdot 3^{2n-2}\cdot(3^{2n-1})^2+(3^{2n-1})^3}{(3^{3n-1})^2+2\cdot 3^{3n-1}\cdot 3^{3n}+(3^{3n})^2}=$$
$$=\frac{3^{6n-6}+3\cdot 3^{4n-4}\cdot 3^{2n-1}+3\cdot 3^{2n-2}\cdot 3^{4n-2}+3^{6n-3}}{3^{6n-2}+2\cdot 3^{3n-1}\cdot 3^{3n}+3^{6n}}=\frac{3^{6n-6}+3^{6n-4}+3^{6n-3}+3^{6n-3}}{3^{6n-2}+2\cdot 3^{6n-1}+3^{6n}}=\frac{3^{6n-3}\cdot(3^{-3}+3^{-1}+1+1)}{3^{6n-2}\cdot(1+2\cdot 3^1+3^2)}=$$
$$=\frac{\frac{1}{27}+\frac{1}{3}+2}{3\cdot(1+6+9)}=\frac{\frac{1+9+54}{27}}{48}=\frac{\frac{64}{27}}{48}=\frac{4}{81}$$

142. *Ako je* $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$, $\frac{b}{c}=\frac{1}{3}$, $\frac{c}{d}=\frac{1}{4}$ i $\frac{d}{e}=\frac{1}{5}$, *odredite produženi omjer* $a:b:c:d:e$.

Rješenje: Zadane jednakosti najprije zapišimo u obliku razmjera:

$$a:b=1:2$$
$$b:c=1:3$$
$$c:d=1:4$$
$$d:e=1:5$$

Produženi omjer možemo formirati ako je unutrašnji član na lijevoj strani svakoga razmjera jednak vanjskom članu na lijevoj strani njemu neposredno sljedećega razmjera, te ako je vanjski član na desnoj strani svakoga razmjera jednak unutrašnjem članu na desnoj strani njemu neposredno sljedećega razmjera. Prvi uvjet je ispunjen jer lijeva strana 1. razmjera završava s b kojim počinje lijeva strana 2. razmjera, lijeva strana 2. razmjera završava s c kojim počinje lijeva strana 3. razmjera i lijeva strana 3. razmjera završava s d kojim počinje lijeva strana 4. razmjera. No, drugi uvjet nije ispunjen jer desna strana 1. razmjera završava s 2, a desna strana 2. razmjera počinje s 1 itd. Zbog toga svaki član na desnoj strani 2. razmjera pomnožimo s 2, svaki član na desnoj strani 3. razmjera s $2 \cdot 3 = 6$ i svaki član na desnoj strani 4. razmjera s $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Vrijednost razmjera time se neće promijeniti. Opisanim postupkom dobivamo sljedeće razmjere

$$a:b=1:2$$
$$b:c=2:6$$
$$c:d=6:24$$
$$d:e=24:120$$

Prema tome, traženi produženi omjer jest:

$$a:b:c:d:e=1:2:6:24:120.$$

143. *Ako je*

$$b = 2a,\ c = 3b,\ d = 4c \text{ i } e = 5d,$$

izrazite zbroj $a + b + c + d + e$ *kao funkciju varijable* a.

Rješenje: Sukcesivnim uvrštavanjem dobivamo:

$$c = 3b = 3 \cdot 2a = 6a$$
$$d = 4c = 4 \cdot 6a = 24a$$
$$e = 5d = 5 \cdot 24a = 120a$$

Stoga je

$$a + b + c + d + e = a + 2a + 6a + 24a + 120a = 153a.$$

144. *Pojednostavnite izraz:*

$$\left(\frac{a}{a^2-4a+4}+\frac{8}{2a-a^2}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{a-4}\right)^2$$

<u>Rješenje:</u> Uočimo da je

$$a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2$$

i

$$2a - a^2 = -(a^2 - 2a) = -a\cdot (a - 2)$$

Tako je zadani izraz jednak:

$$\left(\frac{a}{(a-2)^2}-\frac{8}{a(a-2)}\right)\cdot\left(\frac{a-4+2}{a-4}\right)^2=\frac{a-8(a-2)}{a(a-2)^2}\cdot\left(\frac{a-2}{a-4}\right)^2=\frac{a-8a+16}{a(a-2)^2}\cdot\frac{(a-2)^2}{(a-4)^2}=\frac{(a-4)^2}{a(a-2)^2}\cdot\frac{(a-2)^2}{(a-4)^2}=\frac{1}{a}$$

145. *Riješite jednadžbu:*

$$\frac{4}{x^2+10x+25}+\frac{3}{10x-2x^2}=\frac{5}{2x^2-50}$$

<u>Rješenje:</u> Kako je

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$$
$$10x - 2x^2 = -2x \cdot (x - 5)$$
$$2x^2 - 50 = 2(x^2 - 25) = 2(x - 5)(x + 5),$$

to, uz uvjet da su sva tri gornja izraza različita od nule neovisno jedan o drugima, jednadžbu množimo najmanjim zajedničkim višekratnikom tih izraza, a to je izraz

$$2x \cdot (x - 5) \cdot (x + 5)^2$$

Tako dobivamo:

$$4 \cdot 2x \cdot (x - 5) - 3 \cdot (x + 5)^2 = 5\cdot x \cdot (x + 5),$$

otkuda je

$$8x^2 - 40x - 3x^2 - 30x - 75 = 5x^2 + 25x,$$

odnosno

$$-95x = 75,$$

pa je konačno

$$x=-\frac{75}{95}=-\frac{15}{19}.$$

Lako se vidi da su za dobiveni x vrijednosti izraza

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$$
$$10x - 2x^2 = -2x \cdot (x - 5)$$
$$2x^2 - 50 = 2(x^2 - 25) = 2(x - 5)(x + 5),$$

različite od nule, pa je $x = -\frac{15}{19}$ jedino rješenje polazne jednadžbe.

146. *U nekoj je tvornici proizvedeno* 780 *tona robe, čime je plan proizvodnje premašen za* 4%. *Odredite planiranu proizvodnju.*

Rješenje: Primijenit ćemo postotni račun više sto. Tražena planirana proizvodnja je osnovna vrijednost (ili osnovna svota) pa je označimo sa S. Postotak p jednak je 4, a 780 tona jest uvećani osnovni iznos pa ga označimo s $S + P$. Dakle,

$$\begin{array}{c} S + P = 780 \text{ t}, \\ p = 4 \\ \hline S = ? \end{array}$$

Osnovna vrijednost S izračunava se iz formule

$$S = \frac{(S+P)\cdot 100}{100+p}$$

pa uvrštavanjem dobivamo

$$S = \frac{780\cdot 100}{100+4} = 750$$

Dakle, planirana proizvodnja je iznosila 750 t.

147. *Prženjem sirove kave njezina se masa umanjuje za* 12.5%. *Koliko kilograma sirove kave treba ispržiti da se dobije* 210 kg *pržene kave*?

Rješenje: Primijenit ćemo postotni račun niže sto. Tražena količina sirove kave je osnovna vrijednost pa je označimo sa S. Postotak p jednak je 12.5. 210 kg je umanjena osnovna vrijednost pa je označimo sa $S - P$. Dakle,

$$\begin{array}{c} S - P = 210 \text{ kg}, \\ p = 12.5 \\ \hline S = ? \end{array}$$

Osnovnu vrijednost S računamo prema formuli

$$S = \frac{(S-P)\cdot 100}{100-p}$$

Uvrštavanjem dobivamo:

$$S = \frac{210\cdot 100}{100-12.5} = 240$$

Dakle, treba ispržiti ukupno 240 kg sirove kave.

148. *Na nekom je ispitu* 14 *ispitanika riješilo sve zadatke*, 32% *svih ispitanika riješilo je dio zadataka*, a 12% *svih ispitanika nije riješilo niti jedan zadatak. Ako je svaki ispitanik ili riješio sve zadatke ili riješio dio zadataka ili nije riješio niti jedan zadatak, koliko je ukupno ispitanika pristupilo tom ispitu*?

Rješenje: Iz podataka u zadatku zaključujemo da je ukupno 100% – (32% + 12%) = 56% svih ispitanika riješilo sve zadatke. No, s druge strane, taj je broj jednak 14. Stoga je postotak p jednak 56, postotni iznos P jednak 14, a osnovnu vrijednost (tj. traženi ukupan broj ispitanika) S tražimo:

$$\begin{array}{c} P = 14 \\ p = 56 \\ \hline S = ? \end{array}$$

Osnovnu vrijednost S određujemo prema formuli

$$S = \frac{100P}{p}$$

Uvrštavanjem dobivamo:

$$S = \frac{100 \cdot 14}{56} = 25$$

Dakle, ispitu je pristupilo ukupno 25 ispitanika.

149. *Ako se cijena nekoga proizvoda najprije umanji za* 4%, *a potom se tako dobivena cijena umanji za još* 2.5%, *izračunajte ukupnu promjenu cijene*.

Rješenje: Riječ je o sukcesivnoj promjeni osnovne veličine. Zadano nam je:

$$\begin{array}{l} p_1 = -4 \\ p_2 = -2.5 \end{array}$$

(predznak – označava da je riječ o umanjenju cijene). Ukupnu (rezultantnu) promjenu R cijene računamo iz izraza:

$$R = 100 \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) - 100$$

Uvrštavanjem dobivamo:

$$R = 100 \cdot \left(1 + \frac{-4}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{-2.5}{100}\right) - 100 = 100 \cdot \left(1 - \frac{4}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{2.5}{100}\right) - 100 = 100 \cdot 0.96 \cdot 0.975 - 100 = -6.4$$

Dakle, ukupna promjena cijene iznosi –6.4%, što znači da je krajnja cijena za 6.4% niža od početne.

150. *Ako umnošku triju uzastopnih parnih brojeva pribrojimo njihov dvostruki zbroj i oduzmemo kub srednjega od njih, dobit ćemo* 20. *Odredite te brojeve*.

Rješenje: Budući da se radi o trima uzastopnima parnim brojevima, postoji prirodan broj n takav da su ti brojevi jednaki $2n - 2$, $2n$ i $2n + 2$. Zbog toga je njihov umnožak jednak

$$(2n - 2) \cdot 2n \cdot (2n + 2) = 2n \cdot (4n^2 - 4) = 8n^3 - 8n$$

Dvostruki zbroj tih brojeva jest

$$2 \cdot (2n - 2 + 2n + 2n + 2) = 12n,$$

a kub srednjega od njih

$$(2n)^3 = 8n^3.$$

Stoga dobivamo jednadžbu

$$8n^3 - 8n + 12n - 8n^3 = 20,$$

a odavde je

$$n = 5.$$

Stoga su traženi brojevi $2 \cdot 5 - 2$, $2 \cdot 5$ i $2 \cdot 5 + 2$, tj. 8, 10 i 12.

151. *Mjesta A i B nalaze se na istoj obali rijeke. Da bi brodić doplovio od mjesta B do mjesta A za isto vrijeme u kojemu doplovi iz mjesta A u mjesto B, mora povećati brzinu za* 4 km/h. *Odredite brzinu rijeke.*

Rješenje: Neka je v tražena brzina rijeke, a v_1 brzina brodića u mirnoj vodi. Ploveći od A do B (nizvodno) ukupna brzina brodića jednaka je zbroju njegove brzine u mirnoj vodi i brzine rijeke:

$$v_{AB} = v + v_1$$

Ploveći od B do A (uzvodno) ukupna brzina brodića jednaka je razlici njegove brzine u mirnoj vodi i brzine rijeke:

$$v_{BA} = v_1 - v$$

Razlika brzina v_{AB} i v_{BA} je 4 km/h:

$$v_{AB} - v_{BA} = 4$$

Uvrštavanjem prethodnih dviju jednakosti dobivamo:

$$(v + v_1) - (v_1 - v) = 4,$$

odnosno

$$2v = 4,$$

a odatle je $v = 2$. Dakle, brzina rijeke iznosi 2 km/h.

152. *Cijena nekoga odijela uvećana je za* 12% *i sada iznosi* 1400 kn. *Izračunajte cijenu odijela prije poskupljenja.*

Rješenje: Primijenit ćemo postotni račun niže sto. Tražena cijena odijela prije poskupljenja jest osnovna svota, pa ćemo je označiti s S. Postotak p iznosi 12, a 1400 kn je uvećana osnovna svota, pa ćemo je označiti s $S + P$. Dakle,

$$\begin{array}{c} S + P = 1400 \\ p = 12 \\ \hline S = ? \end{array}$$

Osnovna svota S izračunava se iz formule

$$S = \frac{(S+P)\cdot 100}{100+p}$$

pa uvrštavanjem dobivamo

$$S = \frac{1400\cdot 100}{100+12} = 1250$$

Stoga je cijena odijela prije poskupljenja iznosila 1250 kn.

153. *Cijena neke robe uveća se za* 25%. *Za koliko bi postotaka trebalo sniziti novodobivenu cijenu da se dobije početna cijena*?

Rješenje: Označimo traženi postotak s p. U ovom se zadatku radi o sukcesivnoj promjeni osnovne vrijednosti. Ukupnu promjenu R računamo iz izraza

$$R = 100\cdot\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p_2}{100}\right)-100$$

Kako krajnja cijena treba biti jednaka početnoj, to je $R = 0$. Nadalje, prva promjena jednaka je $p_1 = +25$, a druga je ona koju tražimo: $p_2 = p$. Uvrštavanjem dobivamo:

$$\begin{aligned}
&0 = 100\cdot\left(1+\frac{+25}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)-100\\
&100 = 100\cdot\left(1+\frac{25}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)\\
&100 = 100\cdot 1.25\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)\\
&100 = 125\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)\\
&100 = 125+\frac{125}{100}p\\
&\frac{125}{100}p = 100-125\\
&\frac{5}{4}p = -25\\
&p = -25 : \frac{5}{4} = -25\cdot\frac{4}{5} = -20
\end{aligned}$$

Zaključujemo da novodobivenu cijenu treba sniziti za 20% da se dobije početna cijena.

154. *Morska voda sadrži* 4.5% *soli. Koliko slatke vode treba uliti u* 80 *litara morske da koncentracija soli u tako dobivenoj smjesi bude* 2.5%?

Rješenje: 80 litara morske vode sadrži ukupno $\frac{4.5}{100}\cdot 80$ = 3.6 litara soli. Tih istih 3.6 litara soli treba iznositi 2.5% od nepoznate količine smjese. Označimo li tu nepoznatu količinu s x, vrijedi:

$$\frac{2.5}{100}\cdot x = 3.6$$

Odavde je $x = 144$. Stoga je ukupni obujam smjese 144 litre, a kako smo na početku imali 80 litara morske vode, treba doliti još $144 - 80 = 64$ litre slatke vode.

155. *Riješite nejednadžbu:*

$$1+\frac{1}{(x-1)^2} > \frac{x-1}{x+1}$$

Rješenje: Prvi uvjet na nepoznanicu x je

$$x + 1 \neq 0,$$

odnosno

$$x \neq -1.$$

Uz uvažavanje toga uvjeta cijelu nejednadžbu smijemo pomnožiti strogo pozitivnim izrazom $(x - 1)^2$ i pritom se znak nejednakosti ne mijenja. Dobivamo:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + 1 &> (x-1)(x+1), \\ x^2 - 2x + 1 + 1 &> x^2 - 1, \\ -2x &> -3 \\ x &< \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Zbog uvjeta $x \neq 1$, rješenje nejednadžbe je skup $\langle -\infty, \frac{3}{2} \rangle \setminus \{1\}$.

156. *Riješite nejednadžbu:*

$$\frac{x}{2} - 0.2 < \frac{3x-2}{5}$$

Rješenje: Množenjem nejednadžbe s 10 dobivamo:

$$5x - 2 < 6x - 4,$$

a odavde je

$$x > 2.$$

Stoga je skup svih rješenja zadane nejednadžbe otvoreni interval $\langle 2, +\infty \rangle$.

157. *Riješite nejednadžbu:*

$$(x + 2)^3 - (x - 1)^3 \geq (3x + 2)^2$$

Rješenje: Kubiranjem i kvadriranjem dobivamo:

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \geq 9x^2 + 12x + 4,$$

a odavde je reduciranjem i sređivanjem

$$-3x \geq -5$$

te

$$x \le \frac{5}{3}$$

Stoga je skup svih rješenja zadane nejednadžbe poluotvoreni interval $\langle -\infty, \frac{5}{3}]$.

158. *Odredite površinu kvadrata kojemu dvije stranice leže na pravcima* $p_1 \ldots\ y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{2}$ *i* $p_2 \ldots\ y = \frac{3}{4}x - \frac{11}{4}$.

<u>Rješenje:</u> Zapišimo najprije zadane jednadžbe pravaca u implicitnom obliku:

$$p_1 \ldots\ 3x - 4y + 14 = 0$$
$$p_2 \ldots\ 3x - 4y - 11 = 0$$

Udaljenost usporednih pravaca $p \ldots\ Ax + By + C_1 = 0$ i $q \ldots\ Ax + By + C_2 = 0$ računamo prema formuli:

$$d = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

U našem je slučaju $A = 3$, $B = -4$, $C_1 = 14$ i $C_2 = -11$. Uvrštavanjem dobivamo:

$$d = \frac{|14 - (-11)|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|14 + 11)|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{25}{5} = 5$$

Izračunata udaljenost jednaka je duljini stranice kvadrata:

$$a = d = 5$$

Stoga je tražena površina kvadrata

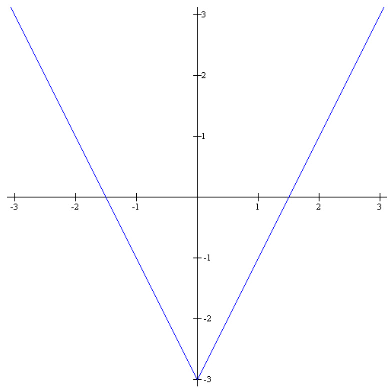
$$P = a^2 = 5^2 = 25 \text{ kv. jed.}$$

159. *Odredite površinu trokuta što ga s osi Ox zatvara graf funkcije* $f(x) = 2|x| - 3$.

<u>Rješenje:</u> Nacrtajmo najprije graf zadane funkcije. Zapišimo je najprije ovako:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{za } x \ge 0 \\ -2x - 3, & \text{za } x \le 0 \end{cases}$$

Njezin graf je dan na donjoj slici.



Sjecišta B i C dobivenoga grafa s osi Ox računski dobijemo rješavajući jednadžbe $2x - 3 = 0$ i $-2x - 3 = 0$. Stoga je $B(1.5, 0)$ i $C(-1.5, 0)$. Treći vrh trokuta je $A(0, 3)$, a računski ga dobijemo rješavajući sustav $y = 2x - 3$, $y = -2x - 3$. Površina trokuta ABC jednaka je polovici umnoška duljine stranice a i visine v_a na tu stranicu. Očito je $a = |BC| = 3$, te $v_a = 3$ (to je dužina kojoj je jedan vrh u točki A, a drugi u ishodištu koordinatnoga sustava!) pa je konačno

$$P = \frac{1}{2} a v_a = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2} \text{ kv. jed.}$$

160. *Riješite sustav jednadžbi:*

$$x - \frac{x-y}{5} = 0.1$$
$$y - \frac{x+4}{2} = 0.5$$

<u>Rješenje:</u> Pomnožimo prvu jednadžbu s 10, a drugu s 2. Dobivamo:

$$10x - 2x + 2y = 1$$
$$2y - x - 4 = 1$$

odnosno

$$8x + 2y = 1$$
$$-x + 2y = 5$$

Oduzimanjem tih jednadžbi dobivamo

$$9x = -4$$

pa je

$$x = -\frac{4}{9}$$

Sada iz

$$-x + 2y = 5$$

slijedi

$$y = \frac{1}{2}(x+5)$$

pa uvrštavanjem

$$x = -\frac{4}{9}$$

izračunamo

$$y = \frac{41}{18}$$

Stoga je rješenje polaznoga sustava uređeni par $\left(-\frac{4}{9}, \frac{41}{18}\right)$.

161. *Izračunajte površinu trokuta ABC ako su dva njegova vrha u točkama* $A(4, 3)$ *i* $C(2, 5)$, *a polovište stranice AB u točki* $P(1, 1)$.

Rješenje: Da bismo izračunali površinu trokuta prema formuli

$$P = \frac{1}{2} | x_A \cdot (y_B - y_C) + x_B \cdot (y_C - y_A) + x_C \cdot (y_A - y_B) |$$

trebaju nam još koordinate vrha B. U tu ćemo svrhu iskoristiti podatak o polovištu stranice AB. Općenito, to polovište dobijemo prema formuli

$$P\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Kako je $x_A = 4$, $y_A = 3$ i $P(1, 1)$, to znači da moraju vrijediti sljedeće jednakosti:

$$1 = \frac{4 + x_B}{2}$$
$$1 = \frac{3 + y_B}{2}$$

Iz tih se jednakosti lako dobiva $x_B = -2$, $y_B = -1$, pa je $B(-2, -1)$. Preostaje izračunati traženu površinu:

$$P = \frac{1}{2} | x_A \cdot (y_B - y_C) + x_B \cdot (y_C - y_A) + x_C \cdot (y_A - y_B) |$$
$$P = \frac{1}{2} | 4 \cdot (-1 - 5) + (-2) \cdot (5 - 3) + 2 \cdot (3 - (-1)) |$$
$$P = \frac{1}{2} | 4 \cdot (-6) + (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 4 |$$
$$P = 10 \text{ kv. jed.}$$

162. *U nekomu razredu u jednoj klupi sjede točno dvojica učenika, pa je* 5 *klupa suvišno. Kada bi svaki učenik želio sjediti sam u svojoj klupi, nedostajalo bi ukupno* 11 *klupa. Koliko ima učenika, a koliko klupa*?

Rješenje: Označimo s x ukupan broj učenika toga razreda, a s y ukupan broj klupa. Iz prvoga podatka – da u jednoj klupi sjede točno dvojica učenika, pa je 5 klupa suvišno – slijedi da ima točno $y - 5$ klupa u kojima sjede točno dvojica učenika. Stoga je ukupan broj učenika

$$x = 2 \cdot (y - 5)$$

Iz drugoga podatka – da nedostaje ukupno 11 klupa pa da svaki učenik može sjediti sam u svojoj klupi – slijedi da je ukupan broj učenika za 11 veći od ukupnoga broja klupa:

$$x = y + 11.$$

Usporedbom desnih strana navedenih dviju jednadžbi dobivamo jednadžbu

$$2y - 10 = y + 11,$$

iz koje je $y = 21$. Stoga je

$$x = y + 11,$$
$$x = 21 + 11 = 32$$

Dakle, u tom su razredu ukupno 32 učenika i 21 klupa.

163. *Na današnji dan prije* 10 *godina otac je bio* 10 *puta stariji od sina. Na današnji dan za* 22 *godine bit će dvostruko stariji od sina. Koliko godina danas ima otac, a koliko sin*?

Rješenje: Neka je o traženi broj očevih, a s traženi broj sinovih godina. Prije 10 godina otac je imao $o - 10$, a sin $s - 10$ godina. Kako je tada otac bio deset puta stariji od sina, vrijedi jednakost:

$$o - 10 = 10 \cdot (s - 10)$$

Za 22 godine otac će imati $o + 22$ godine, a sin $s + 22$ godine. Kako će tada otac biti dvostruko stariji od sina, vrijedi jednakost:

$$o + 22 = 2 \cdot (s + 22)$$

Jednadžbe

$$o - 10 = 10 \cdot (s - 10)$$
$$o + 22 = 2 \cdot (s + 22)$$

tvore sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice. Iz prve jednadžbe je

$$o = 10s - 90,$$

a iz druge

$$o = 2s + 22$$

Metodom komparacije ovih jednadžbi dobivamo:

$$10s - 90 = 2s + 22,$$

a otuda je $s = 14$. Sada je lako izračunati

$$o = 2 \cdot 14 + 22$$
$$o = 50$$

Dakle, otac danas ima 50 godina, a sin 14 godina.

164. *Vrhovi na osnovici jednakokračnoga trokuta ABC su* $A(-2, 4)$ *i* $B(6, 8)$. *Vrh C nasuprot osnovici leži na osi apscisa. Odredite njegove koordinate.*

Rješenje: Koristimo činjenicu da je trokut ABC jednakokračan, što znači da vrijedi jednakost:

$$|AC| = |BC|,$$

odnosno

$$|AC|^2 = |BC|^2$$

Iz podatka da vrh C leži na osi apscisa slijedi da su njegove koordinate oblika $C(x_C, 0)$. Kad te koordinate zajedno sa zadanim koordinatama vrhova A i B uvrstimo u jednakost

$$|AC|^2 = |BC|^2,$$

dobit ćemo:

$$(x_C + 2)^2 + (0 - 4)^2 = (x_C - 6)^2 + (0 - 8)^2.$$

Kvadriranjem dobivamo:

$$x_C^2 + 4x_C + 4 + 16 = x_C^2 - 12\, x_C + 36 + 64,$$

a odatle

$$16x_C = 80$$

i

$$x_C = 5.$$

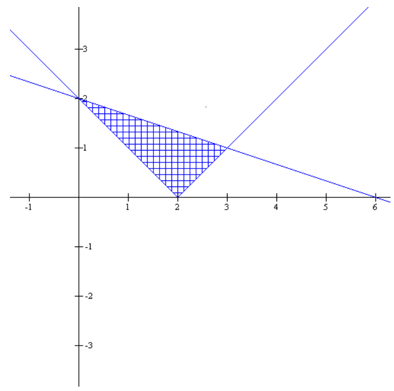
Prema tome, $C(5, 0)$.

165. *Izračunajte površinu trokuta kojega pravac p…* $x + 3y - 6 = 0$ *zatvara s grafom funkcije* $f(x) = |x - 2|$.

Rješenje: Nacrtajmo zadani pravac i graf zadane funkcije u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Pritom napomenimo da je

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{za } x \geq 2 \\ 2 - x, & \text{za } x \leq 2 \end{cases}$$

Tražene krivulje prikazane su na donjoj slici.



Sa slike možemo očitati da su vrhovi trokuta $A(3, 1)$, $B(0, 2)$ i $C(2, 0)$. (Računski ih dobijemo redom rješavanjem sustava $y = x - 2$ i $x + 3y - 6 = 0$, $y = 2 - x$ i $x + 3y - 6 = 0$, te kao kritičnu točku funkcije $f(x)$.) Taj je trokut pravokutan s pravim kutom pri vrhu C (pravci $y = x - 2$ i $y = -x + 2$ koji se sijeku u tom vrhu su međusobno okomiti!). Stoga je njegova površina jednaka polovici umnoška duljina njegovih kateta, a to su dužine AC i BC. Kako je

$$|AC| = \sqrt{(2-3)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
$$|BC| = \sqrt{(2-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

to je površina P jednaka

$$P = \frac{1}{2} |AC| \cdot |BC|$$
$$P = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}$$
$$P = 2 \text{ kv. jed.}$$

166. *Duljina hipotenuze pravokutnoga trokuta iznosi* 25 cm, *a duljina jedne katete* 10 cm. *Izračunajte duljinu ortogonalne projekcije druge katete na hipotenuzu.*

Rješenje: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je duljina katete a jednaka 10 cm, dakle $a = 10$ cm. Znamo i da je $c = 25$ cm. Prema Pitagorinu poučku

$$a^2 + b^2 = c^2$$

slijedi da je kvadrat duljine katete b jednak

$$b^2 = c^2 - a^2$$
$$b^2 = 25^2 - 10^2$$
$$b^2 = 625 - 100$$
$$b^2 = 525$$

Označimo s q traženu duljinu ortogonalne projekcije katete b. Ta duljina q, duljina katete b i duljina hipotenuze c vezani su relacijom

$$b^2 = q \cdot c.$$

Uvrštavanjem $b^2 = 525$ i $c = 25$ dobivamo jednadžbu

$$25 \cdot q = 525$$

čije je rješenje $q = 21$. Dakle, tražena duljina ortogonalne projekcije katete b jednaka je 21 cm.

167. *Duljine kateta pravokutnoga trokuta su* 6 cm *i* 8 cm. *U taj je trokut upisan kvadrat kojemu su dva vrha na hipotenuzi, a po jedan na svakoj od kateta. Izračunajte duljinu stranice toga kvadrata.*

Rješenje: Označimo zadani trokut s ABC, pri čemu je pravi kut pri vrhu C. Nadalje, neka je $EFGH$ traženi kvadrat označen tako da je vrh E na kateti AC, vrhovi F i G na hipotenuzi AB, a vrh H na kateti BC. (Nacrtajte sliku!). Označimo sa x traženu duljinu stranice kvadrata. Uočimo najprije pravokutne trokute HGB i EAF. Njihovi su kutovi jednaki 90°, β i γ. U trokutu HGB je

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|HG|}{|GB|} = \frac{x}{|GB|}$$

a u trokutu EAF je

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|AF|}{|EF|} = \frac{|AF|}{x}$$

No, u trokutu ABC je

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{b}{a}$$

Tako sada iz

$$\frac{x}{|GB|} = \frac{b}{a}$$

slijedi

$$|GB| = \frac{ax}{b},$$

a iz

$$\frac{|AF|}{x} = \frac{b}{a}$$

slijedi

$$|AF| = \frac{bx}{a}$$

Preostaje nam iskoristiti činjenicu da je

$$|AF| + |FG| + |GB| = |AB|,$$

pa uvrštavanjem $|AF| = \frac{bx}{a}$, $|FG| = x$, $|GB| = \frac{ax}{b}$ i $|AB| = c = \sqrt{a^2 + b^2}$ dobivamo:

$$\frac{bx}{a}+x+\frac{ax}{b}=\sqrt{a^2+b^2}$$
$$b^2x+abx+a^2x=ab\sqrt{a^2+b^2}$$
$$x=\frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+ab+b^2}$$

Uvrštavanjem podataka (izraz za x je simetričan pa je svejedno je li $a = 6$, $b = 8$ ili obrnuto) konačno dobivamo:

$$x=\frac{120}{37}\text{ cm.}$$

168. *Duljine stranica trokuta su* 10 cm, 12 cm *i* 10 cm. *Izračunajte polumjer tom trokutu upisane kružnice*.

Rješenje: Polumjer ρ trokutu upisane kružnice računamo prema formuli

$$\rho=\frac{P}{s}$$

gdje je P površina trokuta, a s poluopseg trokuta. Primijetimo da je zadani trokut jednakokračan. Njegova osnovica duga je $a = 12$ cm, a svaki od krakova $b = 10$ cm. Odatle slijedi da je duljina visine na osnovicu jednaka

$$v_a=\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8\,\text{cm}$$

pa je površina P toga trokuta jednaka

$$P=\frac{1}{2}av_a=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 8=48\text{ cm}^2$$

Poluopseg trokuta jednak je

$$s=\frac{1}{2}(a+2b)=\frac{1}{2}\cdot(12+2\cdot 10)=16\,\text{cm},$$

pa je konačno

$$\rho=\frac{P}{s}=\frac{48}{16}=3\text{ cm.}$$

169. *Duljine stranica trokuta ABC su* 16 cm, 10 cm *i* 10 cm. *Ako je površina trokuta DEF sličnoga trokutu ABC jednaka* 12 cm^2, *koliki je opseg toga trokuta*?

Rješenje: Izračunajmo najprije površinu zadanoga trokuta ABC. Uočimo da je taj trokut jednakokračan. Duljina njegove osnovice je $a = 16$ cm, dok su duljine krakova $b = 10$ cm. Odatle slijedi da je duljina visine na osnovicu

$$v_a=\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6\,\text{cm},$$

pa je površina trokuta ABC jednaka

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} a v_a = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 6 = 48 \text{ cm}^2.$$

Koeficijent sličnosti trokuta *DEF* i *ABC* dobijemo kao drugi korijen iz omjera njihovih površina:

$$k = \sqrt{\frac{P_{DEF}}{P_{ABC}}} = \sqrt{\frac{12}{48}} = \frac{1}{2}$$

Tako je traženi opseg trokuta *DEF* jednak

$$o_{DEF} = k \cdot o_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot (16 + 10 + 10) = 18 \text{ cm}.$$

170. *Izračunajte zbroj svih koeficijenata polinoma*

$$p(x) = (x^2 - 2x + 2)^{12} \cdot (x^2 - 5x + 3)^{13}.$$

Rješenje: Zbroj svih koeficijenata nekoga polinoma uvijek je jednak vrijednosti toga polinoma za $x = 1$. Stoga za zadani polinom $p(x)$ trebamo izračunati $p(1)$, a to je jednostavno:

$$p(x) = (1^2 - 2 \cdot 1 + 2)^{12} \cdot (1^2 - 5 \cdot 1 + 3)^{13} = 1^{12} \cdot (-1)^{13} = 1 \cdot (-1) = -1$$

Dakle, traženi je zbroj jednak –1.

171. *Pojednostavnite izraz:* $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{x^9}}$.

Rješenje: Svaki od zadanih korijena najprije svedimo na jedan korijen, a nakon toga oba na zajednički korijen. Imamo:

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{x^9}} = \sqrt[12]{x^2} \cdot \sqrt[6]{x^9} = \sqrt[6]{x} \cdot \sqrt[6]{x^9} = \sqrt[6]{x^{10}} = \sqrt[3]{x^5} = x \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

172. *U polukrug su upisana dva kruga. Promjer prvoga jednak je polumjeru polukruga, dok je drugi smješten u jedan od preostalih dijelova polukruga tako da dodiruje prvi krug . Izračunajte omjer površina tih krugova.*

Rješenje: Neka je S središte polukruga, a r njegov polumjer. Nadalje, neka je S_1 središte prvoga, većega kruga. Budući da je njegov promjer jednak r, to je njegov polumjer jednak $\frac{r}{2}$. Napokon, neka je S_2 središte drugoga, manjega kruga, a r_1 njegov polumjer. Cilj nam je izraziti veličinu r_1 pomoću r.

Krug sa središtem u S_2 dira zadani polukrug u dvije točke: jedna (D_1) se nalazi na luku polukružnice zadanoga polukruga, a druga (D_2) na vodoravnom promjeru polukruga koji prolazi točkom S. Spojimo S sa S_2, te S_2 sa svakim od navedenih dvaju dirališta. Uočimo trokut D_2SS_2. Taj trokut je pravokutan, njegova je hipotenuza

$$|SS_2| = |SD_1| - |S_2D_1| = r - r_1,$$

a jedna kateta

$$|D_2S_2| = r_1.$$

Stoga je kvadrat duljine druge katete toga trokuta jednak

$$|D_2S|^2 = (r - r_1)^2 - (r_1)^2 = r^2 - 2rr_1$$

Sada iz točke S_2 povucimo usporednicu s promjerom polukruga na kojemu se nalazi točka S i neka ta usporednica siječe spojnicu SS_1 u točki T. Trokut S_2TS_1 je pravokutan trokut. Duljine njegovih stranica su:

$$|TS_1| = |SS_1| - |ST| = \frac{r}{2} - r_1,$$
$$|S_2T| = |D_2S|$$
$$|S_1S_2| = \frac{r}{2} + r_1$$

i prema Pitagorinu poučku mora vrijediti

$$|TS_1|^2 + |S_2T|^2 = |S_1S_2|^2$$

Uvrštavanjem:

$$|TS_1| = \frac{r}{2} - r_1$$
$$|S_2T|^2 = |D_2S|^2 == r^2 - 2rr_1$$
$$S_1S_2| = \frac{r}{2} + r_1$$

dobivamo:

$$(\frac{r}{2} - r_1)^2 + r^2 - 2rr_1 = (\frac{r}{2} + r_1)^2$$

Kvadriranjem i reduciranjem slijedi:

$$r^2 - 4rr_1 = 0,$$

pa dijeljenjem s $4r$ (što smijemo jer je r polumjer polukruga, pa mora biti strogo veći od nule) dobivamo:

$$r_1 = \frac{r}{4}$$

Zaključujemo da je polumjer manjega kruga dvostruko manji od polumjera većega, pa je njegova površina 4 puta manja od površine većega kruga. Dakle, traženi omjer je 4 : 1.

173. *Prigodom prevaljivanja puta od* 5 km, *kotač nekoga bicikla okrene se točno* 2000 *puta. Izračunajte njegov polumjer.*

Rješenje: Neka je r traženi polumjer. U jednom okretaju kotač prevali put jednak svojemu opsegu:

$$o = 2 \cdot r \cdot \pi$$

U 2000 okretaja kotač prevali put

$$s = 2000 \cdot o = 4000 \cdot r \cdot \pi$$

Kako taj put, s druge strane iznosi 5 km = 5 000 m = 500 000 cm, slijedi da je traženi polumjer kotača

$$r = \frac{500000}{4000 \cdot \pi} \approx 40 \text{ cm}$$

174. *Kružnici je opisan trapez opsega* 24 cm *i površine* 42 cm^2. *Izračunajte polumjer kružnice.*

Rješenje: Neka je r traženi polumjer kružnice. Opisani trapez možemo shvatiti i kao tangencijalni četverokut. Za površinu P i poluopseg s takvoga četverokuta, te polumjer r vrijedi relacija:

$$P = r \cdot s$$

Odatle lagano proizlazi

$$r = \frac{P}{s} = \frac{42}{\frac{24}{2}} = \frac{7}{2} = 3.5 \text{ cm}$$

175. *Odredite vrijednost realnoga parametra a tako da odsječak na osi Ox pravca p…* $2x - 5y + + 2a = 0$ *bude jednak* 4.

Rješenje: Zadanu jednadžbu pravca najprije prevedimo u segmentni oblik:

$$\begin{aligned} &2x - 5y = -2a \\ &-\frac{2x}{2a} + \frac{5y}{2a} = 1 \\ &\frac{x}{-a} + \frac{y}{\frac{2a}{5}} = 1 \end{aligned}$$

Odsječak na osi Ox je nazivnik razlomka kojemu je brojnik jednak x, a to je $-a$. Kako taj nazivnik treba biti jednak 4, iz jednadžbe

$$-a = 4$$

odmah slijedi $a = -4$.

176. *Odredite sjecište pravca p…* $2x - 3y - 2 = 0$ *i pravca koji prolazi točkama* $A\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ i $B\left(\frac{3}{4}, 0\right)$.

Rješenje: Odredimo najprije jednadžbu pravca kroz točke A i B. Uočimo da tu jednadžbu odmah možemo zapisati u segmentnom obliku jer su točke A i B sjecišta pravca s osi Oy, odnosno osi Ox. Imamo:

$$\begin{aligned} &\frac{x}{\frac{3}{4}} + \frac{y}{-\frac{1}{2}} = 1 \\ &\frac{4x}{3} - 2y = 1 \\ &4x - 6y = 3 \\ &4x - 6y - 3 = 0 \end{aligned}$$

Pomnožimo li jednadžbu pravca p sa 2, dobit ćemo:

$$4x - 6y - 4 = 0.$$

Tako uočavamo da su pravac p i pravac kroz točke A i B usporedni pravci, pa se oni ne sijeku.

177. *Krugu površine* 2π *opisan je romb površine* 16. *Izračunajte šiljasti kut toga romba.*

Rješenje: Neka je α traženi šiljasti kut romba, a a duljina njegove stranice. Taj romb možemo shvatiti kao tangencijalni četverokut pa vrijedi formula:

$$P_{romb} = \rho \cdot s$$

gdje je P_{romb} površina romba, ρ polumjer rombu upisane kružnice (odnosno, upisanoga kruga) i s poluopseg romba. Budući da je poluopseg romba jednak

$$s = \frac{1}{2} \cdot 4a = 2a\,,$$

dobivamo jednadžbu

$$P_{romb} = \rho \cdot 2a$$

iz koje je $a = \dfrac{P_{romb}}{2\rho}$. S druge strane, površina romba dana je izrazom

$$P_{romb} = av = a^2 \sin\alpha$$

Zbog $a = \dfrac{P_{romb}}{2\rho}$ i

$$P_{krug} = \rho^2 \cdot \pi \Leftrightarrow \rho^2 = \frac{P_{krug}}{\pi}$$

slijedi:

$$\sin\alpha = \frac{4\rho^2}{P_{romb}} = \frac{4 \cdot \dfrac{P_{krug}}{\pi}}{P_{romb}} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{P_{krug}}{P_{romb}}$$

Uvrštavanjem konkretnih vrijednosti

$$P_{krug} = 2\pi,\ P_{romb} = 16$$

dobivamo trigonometrijsku jednadžbu

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}$$

čije je rješenje $\alpha = 30°$. Dakle, šiljasti kut romba iznosi $30°$.

178. *Zadane su tri sukladne kružnice polumjera* $R = 4$ cm *tako da se dvije od njih dodiruju u središtu treće. Izračunajte polumjer kružnice koja dodiruje sve zadane kružnice.*

Rješenje: Pretpostavimo da se kružnice k_1 i k_2 dodiruju u središtu kružnice k_3. Neka je k tražena kružnica i neka je njezin polumjer r. k je smještena unutar krivocrtnoga "trokuta" čije su stranice lukovi zadanih kružnica određeni njihovim sjecištima, što znači da dodiruje k_1 i k_2 izvana, a k_3 iznutra (nacrtajte sliku). Ako je S_i središte kružnice k_i, $i = 1, 2, 3$, a S središte tražene kružnice, onda je trokut S_1S_2S jednakokračan. Duljine njegovih krakova su

$$|S_1S| = |S_2S| = R + r,$$

a duljina njegove osnovice je

$$|S_1S_2| = 2R.$$

Budući da se S_3 nalazi u polovištu dužine S_1S_2, to je dužina SS_3 visina na osnovicu jednakokračnoga trokuta S_1S_2S i njezina je duljina jednaka

$$|SS_3| = R - r$$

Preostaje primijeniti Pitagorin poučak na duljine stranica pravokutnoga trokuta S_1S_3S (ili trokuta S_2S_3S). Duljine njegovih kateta su:

$$|S_1S_3| = R,$$
$$|SS_3| = R - r,$$

a duljina hipotenuze

$$|S_1S| = R + r.$$

Tako dobivamo:

$$R^2 + (R - r)^2 = (R + r)^2,$$

otkuda je kvadriranjem i reduciranjem:

$$R^2 - 4Rr = 0.$$

Dijeljenjem s $R \neq 0$ i sređivanjem dobivamo:

$$r = \frac{1}{4}R$$

Kako je $R = 4$ cm, to je konačno

$$r = 1 \text{ cm}.$$

179. *Duljina sjene vertikalnoga štapa čija je duljina* 2.3 m *u* 15 *sati iznosi* 82 cm. *Izračunajte visinu drveta čija je sjena u* 15 *sati duga* 8.5 m.

Rješenje: Neka je h tražena visina drveta. U fiksiranom vremenskom trenutku duljina sjene nekoga predmeta upravno je razmjerna njegovoj visini. To znači da mora vrijediti razmjer:

$$2.3 \text{ m} : 0.82 \text{ m} = h : 8.5 \text{ m}$$

iz kojega se dobiva jednadžba

$$0.82 \cdot h = 8.5 \cdot 2.3$$

čije je približno rješenje $h =$ 23.84 m. Dakle, drvo je visoko približno 23.84 m.

180. *Duljina male osi elipse iznosi* 6. *Ako ta elipsa prolazi točkom* $A(-4, 1)$, *odredite njezinu osnu jednadžbu*.

Rješenje: Iz podatka $2b = 6$ slijedi $b = 3$, tj. duljina male poluosi elipse jednaka je 6. Sada u osnu jednadžbu

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

uvrstimo $b = 3$ i koordinate točke A $x = -4$, $y = 1$ (budući da elipsa prolazi tom točkom, njezine koordinate moraju zadovoljavati jednadžbu elipse). Tako dobivamo:

$$3^2 \cdot (-4)^2 + 1^2 \cdot a^2 = 3^2 \cdot a^2,$$

otkuda je

$$a^2 = 18.$$

Stoga je tražena osna jednadžba elipse

$$9x^2 + 18y^2 = 162,$$

odnosno

$$x^2 + 2y^2 = 18$$

ili ekvivalentno

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1\,.$$

181. *U točki $D(5,\ y > 0)$ hiperbole $x^2 - y^2 = 9$ povučene su tangenta i normala na hiperbolu. Izračunajte površinu trokuta kojega ti pravci zatvaraju s osi Oy.*

Rješenje: Izračunajmo najprije drugu koordinatu točke D. Uvrstimo li u jednakost

$$x^2 - y^2 = 9$$

umjesto x broj 5, dobit ćemo jednadžbu:

$$25 - y^2 = 9$$

čije je strogo pozitivno rješenje $y = 4$. Dakle, $D(5, 4)$. Jednadžbu hiperbole sada zapišimo u obliku

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$$

pa usporedbom te jednakosti s općim oblikom osne jednadžbe hiperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

očitavamo:

$$a^2 = b^2 = 9.$$

Implicitni oblik jednadžbe tangente na hiperbolu u točki $T(x_T, y_T)$ dan je formulom

$$b^2 \cdot x_T \cdot x - a^2 \cdot y_T \cdot y - a^2 \cdot b^2 = 0$$

U našem je slučaju $T = D$, tj. $x_T = 5$, $y_T = 4$, te $a^2 = b^2 = 9$, pa uvrštavanjem u gornju formulu dobivamo:

$$9 \cdot 5 \cdot x - 9 \cdot 4 \cdot y - 9 \cdot 9 = 0,$$

otkuda dijeljenjem s 9 slijedi

$$5x - 4y - 9 = 0,$$

odnosno

$$y = \frac{5}{4} x - \frac{9}{4}$$

Dakle, $t \ldots \ y = \frac{5}{4} x - \frac{9}{4}$. Koeficijent smjera tangente jednak je

$$k_t = \frac{5}{4}$$

pa je koeficijent smjera normale jednak

$$k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{\frac{5}{4}} = -\frac{4}{5}$$

Jednadžbu normale napisat ćemo koristeći činjenice da je njezin koeficijent smjera $k_n = -\frac{4}{5}$ i da prolazi točkom $D(5, 4)$. Imamo:

$$y - 4 = -\frac{4}{5} \cdot (x - 5),$$

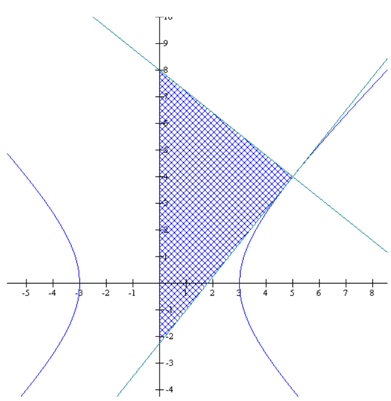
otkuda je

$$y = -\frac{4}{5} x + 8$$

ili

$$n \ldots 4x + 5y - 40 = 0.$$

Nacrtajmo sada dobivene pravce u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini.



Trokut čiju površinu želimo izračunati išrafiran je na gornjoj slici. Odredimo koordinate njegovih vrhova. Vrh A je sjecište normale t s osi Oy. Računski ga dobijemo rješavajući sustav

$$\begin{gathered} y = -\frac{4}{5}x + 8 \\ x = 0 \end{gathered}$$

a možemo ga očitati i izravno sa slike. U oba je slučaja $A(0, 8)$. Vrh B je sjecište tangente t i osi Oy. Računski ga dobijemo rješavajući sustav

$$\begin{gathered} y = \frac{5}{4}x - \frac{9}{4} \\ x = 0 \end{gathered}$$

Njegovo je rješenje uređeni par $(0, -\frac{9}{4})$ pa je $B(0, -\frac{9}{4})$. Napokon, vrh C je sjecište tangente t i normale n, a to je točka D. Dakle, $C(5, 4)$. Površina trokuta ABC jednaka je polovici umnoška duljine stranice c i visine na tu stranicu. Duljina stranice c jednaka je

$$c = |AB| = |8-(-\frac{9}{4})| = |8 + \frac{9}{4})| = \frac{41}{4},$$

a duljina visine na nju jednaka je apsolutnoj vrijednosti apscise točke C, dakle,

$$v_c = |5| = 5.$$

Tako je konačno

$$P = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{41}{4} \cdot 5 = \frac{205}{8} \text{ kv. jed.}$$

182. *Izračunajte*: $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^{-2}$.

<u>Rješenje:</u> Imamo redom:

$$\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{3 - 2\sqrt{6} + 2} = \frac{1}{5 - 2\sqrt{6}} = \frac{5 + 2\sqrt{6}}{(5 - 2\sqrt{6})(5 + 2\sqrt{6})} = \frac{5 + 2\sqrt{6}}{25 - 4 \cdot 6} = \frac{5 + 2\sqrt{6}}{25 - 24} = 5 + 2\sqrt{6}$$

183. *Pojednostavnite sljedeći algebarski izraz*:

$$\frac{x^2 - x + 2}{x^2 - 3x + 2} - \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x + 2}$$

<u>Rješenje:</u> Rastavimo najprije svaki od izraza $x^2 - x + 2$, $x^2 - 3x + 2$ na faktore. Rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - x + 2 = 0$ su $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, pa vrijedi rastav:

$$x^2 - x + 2 = (x + 1)(x - 2)$$

Analogno, rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - 3x + 2 = 0$ su $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ pa vrijedi rastav:

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

Tako je zadani izraz jednak

$$\frac{x^2-x+2}{x^2-3x+2}-\frac{x^2-3x+2}{x^2-x+2}=\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}-\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}=\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x-1}=\frac{(x+1)^2-(x+1)^2}{(x-1)(x+1)}=$$
$$=\frac{x^2+2x+1-(x^2-2x+1)}{x^2-1}=\frac{4x}{x^2-1}$$

184. *Ako je* $f(x) = 2x - \frac{5}{3}$, *odredite* $f(x + \frac{1}{2})$.

<u>Rješenje:</u> U jednakosti

$$f(x) = 2x - \frac{5}{3}$$

umjesto x pišimo $x + \frac{1}{2}$. Dobivamo:

$$f(x + \frac{1}{2}) = 2(x + \frac{1}{2}) - \frac{5}{3} = 2x + 1 - \frac{5}{3} = 2x - \frac{2}{3}.$$

Stoga je

$$f(x + \frac{1}{2}) = 2x - \frac{2}{3}.$$

185. *Ako za svaki* $x \in \mathbf{R}$ *vrijedi jednakost* $f(2x - 4) = x$, *odredite* $f(2x + 4)$.

<u>Rješenje:</u> <u>1. način</u>: Da bismo izračunali $f(2x + 4)$, najprije moramo odrediti formulu po kojoj računamo $f(x)$. Zamijenimo $t = 2x - 4$, odnosno stavimo $x = \frac{1}{2}t + 2$. Tada jednakost $f(2x - 4) = x$ prelazi u

$$f(t) = \frac{1}{2}t + 2,$$

pa preimenovanjem nezavisne varijable t u x slijedi

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$$

U tu jednakost umjesto x uvrstimo izraz $2x + 4$. Dobivamo:

$$f(2x + 4) = \frac{1}{2}\cdot(2x+4) + 2 = x + 2 + 2 = x + 4$$

tj.

$$f(2x + 4) = x + 4.$$

<u>2. način:</u> Budući da vrijedi jednakost

$$2x + 4 = 2(x + 4) - 4,$$

u jednakost $f(2x - 4) = x$ umjesto x pišimo $x + 4$. Dobivamo:

$$f(2(x+4) - 4)) = x + 4,$$

odnosno izravno

$$f(2x + 4) = x + 4.$$

186. *Zadane su funkcije* $f(x) = x^2 - 5x + 2$ *i* $g(x) = 4x + 1$. *Odredite funkciju* $(f \circ g)(x)$.

Rješenje: Imamo redom:

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(4x + 1) = (4x + 1)^2 - 5 \cdot (4x + 1) + 2 = 16x^2 + 8x + 1 - 20x - 5 + 2 = 16x^2 - 12x + 2.$

Dakle, $(f \circ g)(x) = 16x^2 - 12x + 2$.

187. *Odredite* $f^{-1}(x)$ *ako je* $f(x) = \log_{0.5}(1 + x) - 1$.

Rješenje: Postupak određivanja inverzne funkcije provodimo u četiri koraka:

1.) Zamijenimo $f(x)$ s y:

$$y = \log_{0.5}(1 + x) - 1$$

2.) Zamijenimo x i y:

$$x = \log_{0.5}(1 + y) - 1$$

3.) Izrazimo y pomoću x:

$$\begin{aligned} x &= \log_{0.5}(1 + y) - 1 \\ x + 1 &= \log_{0.5}(1 + y) \\ (0.5)^{x+1} &= 1 + y \\ y &= 0.5^{x+1} - 1 \\ y &= (2^{-1})^{x+1} - 1 \\ y &= 2^{-x-1} - 1 \end{aligned}$$

4.) Zamijenimo y s $f^{-1}(x)$:

$$f^{-1}(x) = 2^{-x} - 1$$

188. *Odredite prirodno područje definicije funkcije* $f(x) = \log_2(x^2 + 2x - 3)$.

Rješenje: Jedini je uvjet da izraz pod logaritmom bude strogo pozitivan. To znači da mora vrijediti

$$x^2 + 2x - 3 > 0$$

Dobili smo kvadratnu nejednadžbu. Nultočke pripadne kvadratne funkcije su $x_1 = -3$ i $x_2 = 1$, a vodeći koeficijent je $a = 1 > 0$. To znači da se graf te funkcije nalazi iznad osi Ox svuda osim između nultočaka te funkcije. Stoga je

$$D_f = \mathbf{R} \setminus [-3, 1]$$

ili ekvivalentno

$$D_f = \langle -\infty, -3\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$$

189. *Odredite skup svih rješenja jednadžbe*

$$|x^2 + 4x| = x^2 + 4x + 6$$

Rješenje: Dva su moguća slučaja:

1.) $x^2 + 4x \geq 0$

U ovome je slučaju $|x^2 + 4x| = x^2 + 4x$ pa dobivamo jednadžbu:

$$x^2 + 4x = x^2 + 4x + 6$$

koja je ekvivalentna jednakosti

$$0 = 6$$

a ta jednakost očito nije istinita. Stoga u ovom slučaju polazna jednadžba nema rješenja.

2.) $x^2 + 4x \leq 0$

U ovom je slučaju $|x^2 + 4x| = -(x^2 + 4x) = -x^2 - 4x$ pa dobivamo jednadžbu:

$$-x^2 - 4x = x^2 + 4x + 6$$

koja je ekvivalentna jednadžbi

$$2x^2 + 8x + 6 = 0,$$

odnosno jednadžbi

$$x^2 + 4x + 3 = 0.$$

Rješenja posljednje kvadratne jednadžbe su $x_1 = -1$ i $x_2 = -3$. Oba zadovoljavaju nejednakost $x^2 + 4x \leq 0$, pa su to ujedno i rješenja polazne jednadžbe.

Stoga je skup svih rješenja polazne jednadžbe $\{-3, -1\}$ (ili $\{-1, -3\}$, svejedno).

190. *Odredite skup svih rješenja jednadžbe*

$$|x - 1| + |x - 2| = 1$$

Rješenje: Kritične točke dobivamo iz jednadžbi $x - 1 = 0$ i $x - 2 = 0$ čija su rješenja $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$. Stoga polaznu jednadžbu razmatramo na trima intervalima:

1.) $-\infty < x \leq 1$

Na ovome je intervalu $|x - 1| = -(x - 1) = 1 - x$ i $|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$ pa dobivamo jednadžbu:

$$1 - x + 2 - x = 1$$

Njezino je rješenje $x = 1$. Kako ono zadovoljava nejednakost $-\infty < x \leq 1$, $x_1 = 1$ je rješenje polazne jednadžbe.

2.) $1 \leq x \leq 2$

Na ovome je intervalu $|x - 1| = x - 1$ i $|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$ pa dobivamo jednadžbu:

$$x - 1 + 2 - x = 1$$

koja je ekvivalentna jednakosti

$$1 = 1$$

a ova je očigledno istinita. Stoga je u ovom slučaju skup rješenja polazne jednadžbe segment [1, 2].

3.) $2 \leq x < +\infty$

Na ovome je intervalu $|x - 1| = x - 1$ i $|x - 2| = x - 2$ pa dobivamo jednadžbu:

$$x - 1 + x - 2 = 1$$

čije je rješenje $x = 2$. Kako ono zadovoljava nejednakost $2 \leq x < +\infty$, to je i $x_2 = 2$ rješenje polazne jednadžbe.

Skup svih rješenja polazne jednadžbe je unija skupova dobivenih rješenja:

$$\{1\} \cup [1, 2] \cup \{2\} = [1, 2]$$

jer su skupovi {1} i {2} podskupovi segmenta [1, 2].

191. *Riješite nejednadžbu:*

$$\frac{2x+3}{x+1} \geq 2$$

Rješenje: Transformirajmo zadanu nejednadžbu na sljedeći način:

$$\frac{2x+3}{x+1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x+1} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+3-2(x+1)}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+3-2x-2}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} \geq 0$$

Brojnik posljednje dobivena razlomka je strogo pozitivan realan broj (1). Da bi vrijednost cijeloga razlomka bila nenegativan realan broj, nazivnik mora biti strogo pozitivan:

$$x + 1 > 0$$

Odavde je $x \in \langle -\infty, -1\rangle$, pa je skup svih rješenja polazne nejednadžbe otvoreni interval $\langle -\infty, -1\rangle$.

192. *Odredite realne brojeve x i y iz jednakosti*:

$$\frac{xi}{1-i} + \frac{yi}{1+i} = \frac{1}{i}$$

Rješenje: Pomnožimo zadanu jednakost najmanjim zajedničkim nazivnikom svih razlomaka koji se pojavljuju u njoj. To je izraz $i \cdot (1 - i) \cdot (1 + i)$, pa dobivamo:

$$x \cdot i \cdot i \cdot (1 + i) + y \cdot i \cdot i \cdot (1 - i) = 1 \cdot (1 - i) \cdot (1 + i),$$

odnosno

$$x \cdot i^2 \cdot (1 + i) + y \cdot i^2 \cdot (1 - i) = (1 - i) \cdot (1 + i),$$

odnosno, zbog $i^2 = -1$ i $(1 - i) \cdot (1 + i) = 1 - i^2 = 1 - (-1) = 2$,

$$-x \cdot (1 + i) - y \cdot (1 - i) = 2,$$

te nakon provedena množenja i grupiranja članova

$$(-x - y) + (y - x) \cdot i = 2.$$

Da bi ta jednakost bila istinita, brojevi x i y moraju zadovoljavati sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} -x - y &= 2 \\ y - x &= 0 \end{aligned}$$

Njihovim zbrajanjem dobivamo

$$-2x = 2,$$

a otuda je $x = -1$. Sada iz

$$y - x = 0$$

lako nalazimo $y = x = -1$.

193. *Izračunajte:* $i + i^4 + i^7 + i^{10} + \ldots + i^{100}$.

Rješenje: Primijetimo najprije da za svaki $k \in \mathbf{N}$ vrijedi jednakost:

$$i^k + i^{k+3} + i^{k+6} + i^{k+9} = i^k \cdot (1 + i^3 + i^6 + i^9) = i^k \cdot [1 - i + (-1) + i] = i^k \cdot 0 = 0$$

Nadalje, u aritmetičkom nizu 1, 4, 7, 10, … prvi član je jednak $a_1 = 1$, a razlika niza $d = 3$. Odredimo koji je član po redu jednak 100. Podsjetimo da se n – ti član aritmetičkoga niza određuje prema formuli

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

Mi tražimo $n \in \mathbf{N}$ takav da je $a_n = 100$. U gornju jednakost uvrstimo 100 umjesto a_n, 1 umjesto a_1, a 3 umjesto d. Dobivamo jednadžbu:

$$100 = 1 + (n - 1) \cdot 3,$$

odnosno

$$3n = 102,$$

pa je $n = 34$. Dakle, 100 je 34. član aritmetičkoga niza 1, 4, 7, 10, … . Zašto nam treba ovaj podatak? Naime, sada grupiramo zadane pribrojnike u grupe s po 4 uzastopna pribrojnika. Prvu grupu tvore i, i^4, i^7 i i^{10}, drugu i^{13}, i^{16}, i^{19} i i^{22} itd. Kako imamo ukupno 34 pribrojnika, dijeljenjem 34 s 4 dobivamo količnik 8 i ostatak 2. To znači da imamo ukupno 9 grupa: 8 grupa po četiri pribrojnika čiji je zbroj, kako smo primijetili, jednak nuli, i posljednju, 9. grupu, od dva pribrojnika (i^{97} i i^{100}) čiji je zbroj jednak

$$i^{97} + i^{100} = i^{4 \cdot 24 + 1} + i^{4 \cdot 25 + 0} = i^1 + i^0 = i + 1 = 1 + i.$$

Dakle, zadani zbroj je jednak $8 \cdot 0 + 1 + i = 1 + i$.

194. *Zadani su kompleksni brojevi* $z = 1 - i$ *i* $w = 2 - 3i$. *Izračunajte*:

$$\frac{z\overline{w}-\overline{z}w}{z^2-w^2}$$

Rješenje: Imamo redom:

$$\frac{z\overline{w}-\overline{z}w}{z^2-w^2}=\frac{(1-i)\overline{2-3i}-\overline{1-i}\cdot(2-3i)}{(1-i)^2-(2-3i)^2}=\frac{(1-i)(2+3i)-(1+i)\cdot(2-3i)}{(1-2i+i^2)-(4-12i+9i^2)}=\frac{2-2i+3i-3i^2-(2+2i-3i-3i^2)}{1-2i+i^2-4+12i-9i^2}=$$
$$\frac{2-2i+3i-3\cdot(-1)-2-2i+3i+3\cdot(-1)}{1-2i+(-1)-4+12i-9\cdot(-1)}=\frac{2-2i+3i-3\cdot(-1)-2-2i+3i+3\cdot(-1)}{1-2i+(-1)-4+12i-9\cdot(-1)}=\frac{2i}{5+10i}=\frac{2i\cdot(5-10i)}{(5+10i)(5-10i)}=$$
$$\frac{10i-20i^2}{25-100i^2}=\frac{20+10i}{25+100}=\frac{20}{125}+\frac{10}{125}i=\frac{4}{25}+\frac{2}{25}i$$

195. *Izračunajte*: $\left(\frac{i^{202}-i^{303}}{i^{404}+i^{505}}\right)^{101}$.

Rješenje: Kako je:

$$i^{202}=i^{4\cdot 50+2}=i^2=-1$$
$$i^{303}=i^{4\cdot 75+3}=i^3=-i$$
$$i^{404}=i^{4\cdot 101+0}=i^0=1$$
$$i^{505}=i^{4\cdot 126+1}=i^1=i$$

imamo:

$$\left(\frac{i^{202}-i^{303}}{i^{404}+i^{505}}\right)^{101}=\left(\frac{-1+i}{1+i}\right)^{101}=\left(\frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right)^{101}=\left(\frac{(-1+i+i-i^2)}{1^2-i^2}\right)^{101}=\left(\frac{-1+i+i-(-1)}{1-(-1)}\right)^{101}=\left(\frac{2i}{2}\right)^{101}=$$
$$=i^{101}=i^{4\cdot 25+1}=i^1=i$$

196. *Izračunajte:* $i^2+i^5+i^8+i^{11}+\ldots+i^{101}$.

Rješenje: Postupimo potpuno analogno kao i u rješenju Zadatka 193. Promotrimo aritmetički niz 2, 5, 8, 11, … i odredimo koji je član po redu jednak 101. Prvi član niza je $a_1 = 2$, a razlika $d = 3$. Stoga dobivamo jednadžbu:

$$101 = 2 + (n-1)\cdot 3$$

čije je rješenje $n = 34$. Dakle, 101 je 34. član niza 2, 5, 8, 11, … . Sada ponovno grupiramo pribrojnike u grupe od po četiri uzastopna pribrojnika i uočimo da je, ponovno zbog jednakosti $i^k + i^{k+3} + i^{k+6} + i^{k+9} = 0$, za svaki $k \in \mathbf{N}$ (tu smo jednakost dokazali u rješenju Zadatkja 193.), zbroj pribrojnika u svakoj takvoj grupi jednak 0. No, dijeljenjem 34 s 4 dobivamo 8 i ostatak 2, pa imamo 8 grupa od po četiri uzastopna pribrojnika čiji je zbroj nula i jednu (posljednju) grupu od dva pribrojnika (i^{98} i i^{101}) čiji je zbroj jednak

$$i^{98}+i^{101}=i^{4\cdot 24+2}+i^{4\cdot 25+1}=i^2+i^1=(-1)+i.$$

Stoga je zadani zbroj jednak $8\cdot 0+(-1)+i=-1+i$.

197. *Izračunajte*: $\left(\frac{i^{111}-i^{222}}{i^{333}+i^{444}}\right)^{555}$.

Rješenje: Kako je:

$$\begin{aligned} i^{111} &= i^{4\cdot 27+3} = i^3 = -i \\ i^{222} &= i^{4\cdot 55+2} = i^2 = -1 \\ i^{333} &= i^{4\cdot 83+1} = i^1 = i \\ i^{444} &= i^{4\cdot 111+0} = i^0 = 1 \end{aligned}$$

imamo:

$$\left(\frac{i^{111}-i^{222}}{i^{333}+i^{444}}\right)^{555} = \left(\frac{-i+(-1)}{i+1}\right)^{555} = \left(\frac{-(1+i)}{1+i}\right)^{555} = (-1)^{555} = -1.$$

198. *Odredite realne brojeve x i y iz jednakosti*:

$$(1-i)x + (2+i)y = 1 - 3i.$$

<u>**Rješenje:**</u> Iz zadane jednakosti množenjem faktora na lijevoj strani dobivamo:

$$x - xi + 2y + iy = 1 - 3i,$$

odnosno

$$(x + 2y) + (y - x)i = 1 - 3i.$$

Izjednačavanjem realnih i imaginarnih dijelova dobiva se sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ y - x &= -3. \end{aligned}$$

Zbrajanjem jednadžbi odmah dobivamo

$$3y = -2,$$

otkuda je $y = -\frac{2}{3}$, Iz druge jednadžbe sustava je

$$x = y + 3$$

pa uvrštavanjem $y = -\frac{2}{3}$ dobivamo $x = \frac{7}{3}$. Traženi brojevi su, dakle, $x = \frac{7}{3}$ i $y = -\frac{2}{3}$.

199. *Odredite* $\mathrm{Re}\,\frac{i^{115}}{(1-i)(2+i)}$.

<u>**Rješenje:**</u> Zapišimo brojnik i nazivnik gornjega razlomka u algebarskom obliku:

$$\begin{aligned} &i^{115} = i^{4\cdot 28+3} = i^3 = -i; \\ &(1-i)(2+i) = 2 - 2i + i - i^2 = 2 - i - (-1) = 3 - i. \end{aligned}$$

Tako sada imamo:

$$\mathrm{Re}\,\frac{i^{115}}{(1-i)(2+i)} = \mathrm{Re}\,\frac{-i}{3-i} = \mathrm{Re}\,\frac{-i\cdot(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \mathrm{Re}\,\frac{-3i-i^2}{9-i^2} = \mathrm{Re}\,\frac{-3i-(-1)}{9-(-1)} = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i\right) = \frac{1}{10}$$

200. *Odredite* $|z|$ *ako je* $z = \frac{(\sqrt{2} - i)^5}{(1 - i\sqrt{2})^8}$.

Rješenje: Koristit ćemo formulu $|z^n| = |z|^n$ koja vrijedi za sve kompleksne brojeve $z \in \mathbf{C}$ i sve prirodne brojeve $n \in \mathbf{N}$, te formulu

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Tako redom imamo:

$$|z| = \left|\frac{(\sqrt{2} - i)^5}{(1 - i\sqrt{2})^8}\right| = \frac{\left|(\sqrt{2} - i)^5\right|}{\left|(1 - i\sqrt{2})^8\right|} = \frac{\left|(\sqrt{2} - i)\right|^5}{\left|(1 - i\sqrt{2})\right|^8} = \frac{\left(\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2}\right)^5}{\left(\sqrt{1^2 + (-\sqrt{2})^2}\right)^8} = \frac{\left(\sqrt{2+1}\right)^5}{\left(\sqrt{2+1}\right)^8} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^5}{\left(\sqrt{3}\right)^8} = \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^3} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

201. *Izračunajte*: $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^5} + \ldots + \frac{1}{i^{103}} + \frac{1}{i^{105}}$.

Rješenje: Primijetimo najprije da za sve $k \in \mathbf{Z}$ vrijedi jednakost:

$$i^k + i^{k+2} = i^k \cdot (1 + i^2) = i^{4k} \cdot [1 + (-1)] = 0.$$

Tako npr. za $k = -3$ dobivamo:

$$0 = i^{-3} + i^{-1} = \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i} = \frac{1}{i} + \frac{1}{i^3},$$

za $k = -7$ na sličan način

$$0 = \frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^7}$$

itd. Nadalje, promotrimo aritmetički niz $-1, -3, -5, \ldots$. Njegov je prvi član $a_1 = -1$, a razlika $d = -2$. Odredimo koji je po redu član toga niza broj -105. Iz jednadžbe

$$-105 = -1 + (n - 1) \cdot (-2)$$

slijedi $n = 53$. Dakle, 105 je 53. član niza $-1, -3, -5, \ldots$. Tako sada zadane pribrojnike grupirajmo u grupe od po dva uzastopna pribrojnika. Kako 53 pri dijeljenju s 2 daje količnik 26 i ostatak 1, imat ćemo ukupno 26 grupa od po dva uzastopna pribrojnika čiji je zbroj, kako smo već primijetili, jednak nuli, te jednu, posljednju, grupu sa samo jednim pribrojnikom: $\frac{1}{i^{105}} = \frac{1}{i^{4 \cdot 26+1}} = \frac{1}{i^1} = \frac{1}{i} = \frac{1 \cdot i^3}{i \cdot i^3} = \frac{i^3}{i^4} = \frac{-i}{1} = -i$. Stoga je zadani zbroj jednak

$$26 \cdot 0 + (-i) = -i.$$

202. *Izračunajte vrijednost umnoška*

$$(1 - z + i)\,(1 + z - i)\,(1 + z + i)\,(1 - z - i)$$

ako je $z = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$.

Rješenje: Zadani umnožak najprije ćemo malo pojednostavniti. Množenjem prvoga i posljednjega faktora dobivamo:

$$(1 - z + i)(1 - z - i) = (1 - z)^2 - i^2 = 1 - 2z + z^2 - (-1) = z^2 - 2z + 2,$$

a množenjem drugoga i trećega

$$(1 + z - i)(1 + z + i) = (1 + z)^2 - i^2 = 1 + 2z + z^2 - (-1) = z^2 + 2z + 2,$$

pa je zadani umnožak jednak

$$(z^2 - 2z + 2)\,(z^2 + 2z + 2) = (z^2 + 2)^2 - (2z)^2 = z^4 + 4z^2 + 4 - 4z^2 = z^4 + 4.$$

Dakle, trebamo izračunati $z^4 + 4$ za $z = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$. Imamo redom:

$$z^4 + 4 = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^4 + 4 = \left[\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^2 + 4 = \left[\frac{(1-i)^2}{(\sqrt{2})^2}\right]^2 + 4 = \left(\frac{1-2i+i^2}{2}\right)^2 + 4 = \left(\frac{1-2i+(-1)}{2}\right)^2 + 4 =$$
$$\left(\frac{-2i}{2}\right)^2 + 4 = (-i)^2 + 4 = i^2 + 4 = (-1) + 4 = 3$$

Tražena je vrijednost, dakle, jednaka 3.

203. *Koje cjelobrojne vrijednosti može poprimiti izraz* $\sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}$?

Rješenje: Označimo zadani zbroj sa Z. Njegovim kubiranjem dobivamo:

$$Z^3 = 2 + 11i + 3\cdot\sqrt[3]{(2+11i)^2}\cdot\sqrt[3]{2-11i} + 3\cdot\sqrt[3]{2+11i}\cdot\sqrt[3]{(2-11i)^2} + 2 - 11i$$
$$Z^3 = 4 + 3\cdot\sqrt[3]{(2+11i)(2-11i)}\cdot\left(\sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}\right)$$
$$Z^3 = 4 + 3\cdot\sqrt[3]{4-121i^2}\cdot Z$$
$$Z^3 = 4 + 3\cdot\sqrt[3]{4+121}\cdot Z$$
$$Z^3 = 4 + 3\cdot\sqrt[3]{125}\cdot Z$$
$$Z^3 = 4 + 3\cdot 5\cdot Z$$
$$Z^3 - 15Z - 4 = 0$$

Posljednju jednadžbu možemo faktorizirati ovako:

$$Z^3 - 16Z + Z - 4 = 0$$
$$Z\cdot(Z^2 - 16) + (Z - 4) = 0$$
$$Z\cdot(Z - 4)(Z + 4) + (Z - 4) = 0$$
$$(Z - 4)\cdot[Z\cdot(Z + 4) + 1] = 0$$
$$(Z - 4)\cdot(Z^2 + 4Z + 1) = 0$$

Budući da rješenja kvadratne jednadžbe $Z^2 + 4Z + 1 = 0$ nisu cijeli brojevi, slijedi da je jedina moguća cjelobrojna vrijednost zadanoga zbroja $Z = 4$.

204. *Izračunajte*: $\dfrac{1+i+i^2+...+i^{105}+i^{106}}{1\cdot i\cdot i^2\cdot ...\cdot i^{105}\cdot i^{106}}$.

Rješenje: Izračunajmo zasebno brojnik B, a zasebno nazivnik N gornjega razlomka. Za izračunavanje vrijednosti brojnika B primijetimo da za svaki cijeli broj $k \in \mathbf{Z}$ vrijedi jednakost:

$$i^k + i^{k+1} + i^{k+2} + i^{k+3} = i^k \cdot (1 + i^1 + i^2 + i^3)) = i^k \cdot [1 + i + (-1) + (-i)] = 0.$$

Tako npr. za $k = 0$ dobivamo:

$$0 = i^0 + i^1 + i^2 + i^3 = 1 + i + i^2 + i^3,$$

za $k = 4$ na sličan način

$$0 = i^4 + i^5 + i^6 + i^7$$

itd. Stoga svih 107 pribrojnika grupiramo u grupe od po četiri uzastopna pribrojnika. Kako 107 pri dijeljenju s 4 daje količnik 26 i ostatak 3, dobit ćemo ukupno 26 grupa od po četiri uzastopna pribrojnika čiji je zbroj, kako smo već primijetili, jednak nuli, te jednu, posljednju, grupu koju tvore zadnja tri pribrojnika (i^{104}, i^{105} i i^{106}) čiji je zbroj jednak

$$i^{104} + i^{105} + i^{106} = i^{4\cdot 26+0} + i^{4\cdot 26+1} + i^{4\cdot 26+2} = i^0 + i^1 + i^2 = 1 + i + (-1) = i$$

pa je konačno

$$B = 26 \cdot 0 + (-1) + i = -1 + i.$$

Da bismo izračunali vrijednost nazivnika N, rabeći pravilo o množenju potencija jednakih baza (koje vrijedi i za kompleksne brojeve), zapišimo taj nazivnik u sljedećem obliku:

$$N = i^{0+1+2+\ldots+105+106}$$

U eksponentu imamo zbroj prvih 107 članova aritmetičkoga niza čiji je prvi član jednak 0, a posljednji (107.) 106. Kad u formulu za zbroj prvih n članova aritmetičkoga niza

$$S_n = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n)$$

uvrstimo $n = 107$, $a_1 = 0$, $a_n = 106$, dobijemo:

$$S_{107} = \frac{107}{2}\cdot(0+106) = \frac{106\cdot 107}{2} = 53\cdot 107$$

Stoga je

$$N = i^{53\cdot 107} = (i^{53})^{107} = (i^{4\cdot 13+1})^{107} = (i^1)^{107} = i^{107} = i^{4\cdot 26+3} = i^3 = -i.$$

Tako konačno imamo:

$$\frac{1+i+i^2+...+i^{105}+i^{106}}{1\cdot i\cdot i^2\cdot ...\cdot i^{105}\cdot i^{106}} = \frac{B}{N} = \frac{i}{-i} = -1$$

205. *Izračunajte* $1 + z + z^2 + \ldots + z^{11}$ *ako je* $z = 1 - i$.

Rješenje: Najprije uočimo da je

$$1+z+z^2+...+z^{11}=\frac{z^{12}-1}{z-1}$$

Nadalje, za $z = 1 - i$ je

$$z^{12} - 1 = (z^2)^6 - 1 = [(1 - i)^2]^6 - 1 = (1 - 2i + i^2)^6 - 1 = [1 - 2i + (-1)]^6 - 1 = (-2i)^6 - 1 = 2^6 i^6 - 1 = -64 - 1 = -65$$

i

$$z - 1 = (1 - i) - 1 = -i.$$

Tako je vrijednost zadanoga izraza za $z = 1 - i$ jednaka

$$1+z+z^2+...+z^{11}=\frac{z^{12}-1}{z-1}=\frac{-65}{-i}=\frac{-65\cdot i}{-i\cdot i}=\frac{-65\cdot i}{-i^2}=\frac{-65\cdot i}{-(-1)}=\frac{-65\cdot i}{1}=-65i$$

206. *Izračunajte*: $\dfrac{5+i}{(1+i)(2-3i)}$.

<u>Rješenje:</u> Imamo redom:

$$\frac{5+i}{(1+i)(2-3i)}=\frac{5+i}{2+2i-3i-3i^2}=\frac{5+i}{2+2i-3i-3\cdot(-1)}=\frac{5+i}{5-i}=\frac{(5+i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}=\frac{25+10i+i^2}{25-i^2}=\frac{25+10i+(-1)}{25-(-1)}=$$
$$\frac{24+10i}{26}=\frac{12}{13}+\frac{5}{13}i.$$

207. *Riješite sljedeću jednadžbu u skupu* **C**:

$$z\cdot\overline{z}-i=2+z^2$$

<u>Rješenje:</u> Pretpostavimo da je $z = a + bi$, $a, b \in$ **R**. Uvrštavanjem u gornju jednadžbu dobivamo:

$$\begin{aligned}(a + bi)\cdot(a - bi) - i &= 2 + (a + bi)^2;\\ a^2 - b^2i^2 - i &= 2 + a^2 + 2abi + b^2i^2;\\ -b^2\cdot(-1) - i &= 2 + 2abi + b^2\cdot(-1)\\ 2 + 2abi - 2b^2 + i &= 0;\\ (2 - 2b^2) + (2ab + 1)i &= 0.\end{aligned}$$

Odavde slijedi sljedeći sustav dviju jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned}2 - 2b^2 &= 0\\ 2ab + 1 &= 0\end{aligned}$$

Prva jednadžba toga sustava je kvadratna jednadžba s jednom nepoznanicom (b). Njezinim rješavanjem dobijemo dva realna rješenja: $b_1 = -1$, $b_2 = 1$. Uvrstimo li prvo od njih, $b_1 = -1$, u drugu jednadžbu toga sustava, dobit ćemo:

$$-2a + 1 = 0,$$

a odatle je $a = \frac{1}{2}$. Stoga je jedno rješenje polazne jednadžbe kompleksan broj $z_1 = a + b_1 i = \frac{1}{2} - i$. Slično, uvrstimo li $b_2 = 1$ u drugu jednadžbu gornjega sustava, dobit ćemo $a = -\frac{1}{2}$ pa je u ovom slučaju rješenje polazne jednadžbe $z_2 = -\frac{1}{2} + i$.

Zaključimo: Polazna jednadžba ima ukupno dva kompleksna rješenja: $z_1 = \frac{1}{2} - i$ i $z_2 = -\frac{1}{2} + i$.

208. *Izračunajte*: $\frac{3+i}{(1+i)(1-2i)}$.

<u>Rješenje:</u> Imamo redom:

$$\frac{3+i}{(1+i)(1-2i)} = \frac{3+i}{1+i-2i-2i^2} = \frac{3+i}{1+i-2i-2\cdot(-1)} = \frac{3+i}{3-i} = \frac{(3+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{9+6i+i^2}{9-i^2} = \frac{9+6i+(-1)}{9-(-1)} =$$
$$\frac{8+6i}{10} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i.$$

209. *Izračunajte*: $\left(\frac{i^{313}+i^{414}}{i^{515}-i^{616}}\right)^{717}$.

<u>Rješenje:</u> Kako je:

$$I^{313} = i^{4\cdot 78+1} = i^1 = i$$
$$I^{414} = i^{4\cdot 103+2} = i^2 = -1$$
$$I^{515} = i^{4\cdot 128+3} = i^1 = -i$$
$$I^{616} = i^{4\cdot 154+0} = i^0 = 1$$

imamo:

$$\left(\frac{i^{313}+i^{414}}{i^{515}-i^{616}}\right)^{717} = \left(\frac{i+(-1)}{-i-1}\right)^{717} = \left(\frac{-1+i}{-1-i}\right)^{717} = \left[\frac{(-1+i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)}\right]^{717} = \left(\frac{1-2i+i^2}{1-i^2}\right)^{717} = \left(\frac{1-2i+(-1)}{1-(-1)}\right)^{717} =$$
$$= \left(\frac{-2i}{2}\right)^{717} = (-i)^{717} = (-1)\cdot i^{717} = (-1)\cdot i^{4\cdot 179+1} = (-1)\cdot i^1 = (-1)\cdot i = -i.$$

210. *Riješite sljedeću jednadžbu u skupu* **C:**

$$(1+i)z^2 - (3+i)z + 4 + 2i = 0.$$

<u>Rješenje:</u> Može se pokazati da su rješenja kvadratne jednadžbe s kompleksnim koeficijentima

$$az^2 + bz + c = 0$$

(pri čemu su $a, b, c \in$ **C** i $a \neq 0$) dana formulom

$$z_{1,2} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

U našem je slučaju $a = 1 + i$, $b = -(3 + i)$, $c = 4 + 2i$ pa slijedi:

$$z_{1,2} = \frac{3+i+\sqrt{(3+i)^2-4\cdot(1+i)\cdot(4+2i)}}{2\cdot(1+i)} = \frac{3+i+\sqrt{(9+6i+i^2)-4\cdot(4+4i+2i+2i^2)}}{2\cdot(1+i)} =$$
$$= \frac{3+i+\sqrt{(9+6i-1)-4\cdot(4+4i+2i-2)}}{2\cdot(1+i)} = \frac{3+i+\sqrt{8+6i-4\cdot(2+6i)}}{2\cdot(1+i)} = \frac{3+i+\sqrt{8+6i-8-24i}}{2\cdot(1+i)} =$$
$$= \frac{3+i+\sqrt{-18i}}{2\cdot(1+i)}$$

Pojavio se problem određivanja drugoga korijena iz broja $-18i$. Taj je problem ekvivalentan rješavanju jednadžbe

$$w^2 = -18i$$

Stavimo $w = c + di$, pri čemu su $c, d \in \mathbf{R}$. Nakon uvrštavanja, kvadriranja i izjednačavanja realnih, odnosno imaginarnih dijelova dobiva se sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$c^2 - d^2 = 0$$
$$2cd = -18$$

Iz prve jednadžbe toga sustava slijedi da je ili $c = d$ ili $c = -d$. Ako bi bilo $c = d$, uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobili bismo $2d^2 = -18$, a ta jednadžba nema realnih rješenja (kompleksna rješenja ne dolaze u obzir jer su i c i d realni brojevi). Zato mora biti $c = -d$, pa uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobivamo $-2d^2 = -18$, odnosno $d^2 = 9$, odnosno $d_1 = -3$, $d_2 = 3$. Tako je $c_1 = -d = 3$ i $c_2 = -d_2 = -3$ pa su rješenja jednadžbe $w^2 = -18i$ kompleksni brojevi $w_1 = -3 + 3i$ i $w_2 = 3 - 3i$. To onda znači da je

$$(\sqrt{-18i})_1 = -3+3i$$
$$(\sqrt{-18i})_2 = 3-3i$$

pa konačno imamo:

$$z_1 = \frac{3+i+(-3+3i)}{2\cdot(1+i)} = \frac{3+i-3+3i}{2\cdot(1+i)} = \frac{4i}{2\cdot(1+i)} = \frac{2i}{1+i} = \frac{2i\cdot(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i-2i^2}{1-i^2} = \frac{2+2i}{1+1} = \frac{2+2i}{2} = 1+i$$
$$z_2 = \frac{3+i+(3-3i)}{2\cdot(1+i)} = \frac{3+i+3-3i}{2\cdot(1+i)} = \frac{6-2i}{2\cdot(1+i)} = \frac{3-i}{1+i} = \frac{(3-i)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)} = \frac{3-i-3i+i^2}{1-i^2} = \frac{3-4i-1}{1+1} = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$$

Dakle, sva rješenja polazne jednadžbe su $z_1 = 1 + i$ i $z_2 = 1 - 2i$.

211. *Riješite sljedeći sustav jednadžbi u skupu* **C**:

$$i\cdot z + \overline{w} = 1$$
$$\overline{z} - i\cdot w = 2-i$$

Rješenje: Pretpostavimo da je $z = a + bi$, $w = c + di$, pri čemu su $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Uvrstimo te izraze u svaku od jednadžbi zadanoga sustava:

$$i\cdot(a+bi) + (c-di) = 1$$
$$(a-bi) - i\cdot(c+di) = 2-i$$

Odavde je

$$ai + bi^2 + c - di = 1$$
$$a - bi - ci - di^2 = 2 - i$$

odnosno

$$(c - b) + (a - d)i = 1$$
$$(a + d) + (-b - c)i = 2 - i$$

Izjednačavanjem realnih, odnosno imaginarnih dijelova u objema jednadžbama dobivamo sljedeći sustav od 4 linearne jednadžbe s 4 nepoznanice:

$$a - d = 0$$
$$a + d = 2$$
$$-b + c = 1$$
$$-b - c = -1$$

Zbrojimo li prvu i drugu jednadžbu toga sustava, dobit ćemo odmah $a = 1$, pa je i $d = 1$. Nadalje, zbrajanjem treće i četvrte jednadžbe toga sustava dobivamo $b = 0$, pa je $c = 1$. Stoga su sva rješenja zadanoga sustava

$$w = 1 + i, \; z = 1.$$

212. *Izračunajte*:

$$\frac{(1-2i)^2-(2-i)^2}{(1-i)^3-(1+i)^3}$$

<u>Rješenje:</u> Provedimo naznačeno kvadriranje, odnosno kubiranje i uvijek uvažimo da je $i^2 = -1$, te $i^3 = -i$. Dobivamo:

$$\frac{(1-2i)^2-(2-i)^2}{(1-i)^3-(1+i)^3}=\frac{(1-4i+4i^2)-(4-4i+i^2)}{(1-3i+3i^2-i^3)-(1+3i+3i^2+i^3)}=\frac{1-4i+4i^2-4+4i-i^2}{1-3i+3i^2-i^3-1-3i-3i^2-i^3}=$$
$$=\frac{1-4i-4-4+4i+1}{-3i-(-i)-3i-(-i)}=\frac{-6}{-4i}=\frac{3}{2i}=\frac{3\cdot i}{2i\cdot i}=\frac{3\cdot i}{2i^2}=\frac{3\cdot i}{-2}=-\frac{3}{2}i$$

213. *Riješite sljedeći sustav jednadžbi u skupu* **C**:

$$\overline{z}-\overline{w}=1+i$$
$$i\cdot z+i\cdot w=3i$$

<u>Rješenje:</u> Pretpostavimo da je $z = a + bi$, $w = c + di$, pri čemu su $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Uvrstimo te izraze u svaku od jednadžbi zadanoga sustava:

$$(a - bi) - (c - di) = 1 + i$$
$$i \cdot (a + bi) + i \cdot (c + di) = 3i$$

Odavde je

$$a - bi - c + di = 1 + i$$
$$ai + bi^2 + ci + di^2 = 3i$$

odnosno

$$(a - c) + (d - b)i = 1 + i$$

$$(-b-d)+(a+c)i=3i$$

Izjednačavanjem realnih, odnosno imaginarnih dijelova u objema jednadžbama dobivamo sljedeći sustav od 4 linearne jednadžbe s 4 nepoznanice:

$$\begin{aligned} a-c&=1\\ a+c&=3\\ -b+d&=1\\ -b-d&=0 \end{aligned}$$

Zbrojimo li prvu i drugu jednadžbu toga sustava, dobit ćemo odmah $a = 2$, pa je $c = 1$. Nadalje, zbrajanjem treće i četvrte jednadžbe toga sustava dobivamo $b=-\frac{1}{2}$, pa je $d=\frac{1}{2}$. Stoga su sva rješenja zadanoga sustava

$$w = 1+\frac{1}{2}i,\ z=2-\frac{1}{2}i.$$

214. *Izračunajte*:

$$\frac{(1+2i)^2-(2+i)^2}{(1+i)^3+(1-i)^3}$$

<u>Rješenje:</u> Provedimo naznačeno kvadriranje, odnosno kubiranje i uvijek uvažimo da je $i^2 = -1$, te $i^3 = -i$. Dobivamo:

$$\frac{(1+2i)^2-(2+i)^2}{(1+i)^3+(1-i)^3}=\frac{(1+4i+4i^2)-(4+4i+i^2)}{(1+3i+3i^2+i^3)+(1-3i+3i^2-i^3)}=\frac{1+4i+4i^2-4-4i-i^2}{1+3i+3i^2+i^3+1-3i+3i^2-i^3}=$$
$$=\frac{1+4i-4-4-4i+1}{1-3+1-3}=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}$$

215. *Odredite realne brojeve x i y iz sljedeće jednakosti*:

$$(x+y)(2-i)+(x-y)(1+3i)=2+3i$$

<u>Rješenje:</u> Izvršimo naznačena množenja. Dobivamo:

$$2x+2y-xi-yi+x-y+3xi-3yi=2+3i,$$

odnosno nakon reduciranja

$$3x+y+2xi-4yi=2+3i,$$

tj.

$$(3x+y)+(2x-4y)i=2+3i.$$

Izjednačavanjem realnih, odnosno imaginarnih dijelova dobivamo sljedeći sustav od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} 3x+y&=2\\ 2x-4y&=3 \end{aligned}$$

Pomnožimo li prvu jednadžbu s 4 i tako dobivenoj jednadžbi pribrojimo drugu jednadžbu ovoga sustava, dobit ćemo:

$$14x = 11,$$

a odavde je izravno $x = \frac{11}{14}$. Sada je lako izračunati

$$y = 2 - 3x = 2 - 3 \cdot \frac{11}{14} = 2 - \frac{33}{14} = \frac{28}{14} - \frac{33}{14} = -\frac{5}{14}$$

Dakle, traženi realni brojevi su $x = \frac{11}{14}$ i $y = -\frac{5}{14}$.

216. *Izračunajte*: $\left(\frac{i^{77}-1}{i^{55}-1}\right)^{33}$.

Rješenje: Kako je

$$i^{77} = i^{4 \cdot 19 + 1} = i^1 = i,$$
$$i^{55} = i^{4 \cdot 13 + 3} = i^3 = -i,$$

imamo:

$$\left(\frac{i^{77}-1}{i^{55}-1}\right)^{33} = \left(\frac{i-1}{-i-1}\right)^{33} = \left(\frac{-1+i}{-1-i}\right)^{33} = \left[\frac{(-1+i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)}\right]^{33} = \left[\frac{1-2i+i^2}{1-i^2}\right]^{33} = \left[\frac{1-2i-1}{1+1}\right]^{33} = \left(-\frac{2i}{2}\right)^{33} = -i^{33} =$$
$$= -i^{4 \cdot 8+1} = -i^1 = -i$$

217. *Izračunajte*: $(1 - i)^2 \cdot (2 - i)^2 \cdot (3 - i)^2$.

Rješenje: Imamo redom:

$(1 - i)^2 \cdot (2 - i)^2 \cdot (3 - i)^2 = [(1 - i) \cdot (2 - i) \cdot (3 - i)]^2 = [(2 - 2i - i + i^2) \cdot (3 - i)]^2 = [(2 - 3i - 1) \cdot (3 - i)]^2 = [(1 - 3i) \cdot$
$\cdot (3 - i)]^2 = (3 - 9i - i + 3i^2)^2 = (3 - 10i - 3)^2 = (-10i)^2 = 100i^2 = -100.$

218. *Izračunajte*: $\left(\frac{i^{33}-1}{i^{55}-1}\right)^{77}$.

Rješenje: Kako je

$$I^{33} = i^{4 \cdot 8 + 1} = i^1 = i,$$
$$i^{55} = i^{4 \cdot 13 + 3} = i^3 = -i,$$

imamo:

$$\left(\frac{i^{33}-1}{i^{55}-1}\right)^{77} = \left(\frac{i-1}{-i-1}\right)^{77} = \left(\frac{-1+i}{-1-i}\right)^{77} = \left[\frac{(-1+i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)}\right]^{77} = \left[\frac{1-2i+i^2}{1-i^2}\right]^{77} = \left[\frac{1-2i-1}{1+1}\right]^{77} = \left(-\frac{2i}{2}\right)^{77} = -i^{77} =$$
$$= -i^{4 \cdot 19+1} = -i^1 = -i$$

219. *Izračunajte*: $\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{12}$.

Rješenje: Imamo redom:

$$\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{12}=\left[\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{2}\right]^{6}=\left[\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{2}\right]^{6}=\left[\frac{(-\sqrt{3}+i)^{2}}{(1+i)^{2}}\right]^{6}=\left[\frac{3-2\sqrt{3}i+i^{2}}{1+2i+i^{2}}\right]^{6}=\left[\frac{3-2\sqrt{3}i-1}{1+2i-1}\right]^{6}=$$

$$=\left[\frac{2-2\sqrt{3}i}{2i}\right]^{6}=\left[\frac{1-\sqrt{3}i}{i}\right]^{6}=\left[\frac{(1-\sqrt{3}i)\cdot i}{i\cdot i}\right]^{6}=\left[\frac{i-\sqrt{3}i^{2}}{i^{2}}\right]^{6}=\left[\frac{i+\sqrt{3}}{-1}\right]^{6}=(-\sqrt{3}-i)^{6}=\left[(-\sqrt{3}-i)^{3}\right]^{2}=$$

$$=\left[-3\sqrt{3}-9i-3\sqrt{3}i^{2}-i^{3}\right]^{2}=\left[-3\sqrt{3}-9i+3\sqrt{3}+i\right]^{2}=(-8i)^{2}=64i^{2}=-64$$

220. *Izračunajte*: $\left(\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{12}$.

__Rješenje:__ Imamo redom:

$$\left(\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{12}=\left[\left(\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{2}\right]^{6}=\left[\frac{(1-i)^{2}}{(1+i\sqrt{3})^{2}}\right]^{6}=\left[\frac{1-2i+i^{2}}{1+2\sqrt{3}i+3i^{2}}\right]^{6}=\left[\frac{1-2i-1}{1+2\sqrt{3}i-3}\right]^{6}=$$

$$=\left[\frac{-2i}{-2+2\sqrt{3}i}\right]^{6}=\left[\frac{i}{1-i\sqrt{3}}\right]^{6}=\left[\frac{i\cdot(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})\cdot(1+i\sqrt{3})}\right]^{6}=\left[\frac{i+\sqrt{3}i^{2}}{1-3i^{2}}\right]^{6}=\left[\frac{-\sqrt{3}+i}{4}\right]^{6}=\left[\frac{\sqrt{3}-i}{4}\right]^{6}=\left[\left(\frac{\sqrt{3}-i}{4}\right)^{3}\right]^{2}=$$

$$=\left[\frac{3\sqrt{3}-9i+3\sqrt{3}i^{2}-i^{3}}{64}\right]^{2}=\left[\frac{3\sqrt{3}-9i-3\sqrt{3}+i}{64}\right]^{2}=\left[\frac{-8i}{64}\right]^{2}=(-\frac{1}{8}i)^{2}=\frac{1}{64}i^{2}=-\frac{1}{64}$$

221. *Riješite sljedeću jednadžbu* (*po* x):

$$a^2\cdot(b-x)^2=b^2\cdot(a-x)^2.$$

($a, b\in$ **R** *su realni parametri*)

__Rješenje:__ Kvadriranjem i množenjem dobivamo

$$a^2\cdot(b^2-2bx+x^2)=b^2\cdot(a^2-2ax+x^2),$$
$$a^2b^2-2a^2bx+a^2x^2=a^2b^2-2ab^2x+b^2x^2$$

otkuda slijedi

$$(a^2-b^2)x^2-2ab(b-a)x=0,$$

odnosno

$$(a-b)\cdot x\cdot[(a+b)\cdot x+2ab]=0,$$

Razlikujemo dva moguća slučaja:

1.) $a=b$

U ovom je slučaju prvi faktor na lijevoj strani posljednje jednadžbe jednak nuli, pa je vrijednost cijele lijeve strane jednaka nuli neovisno o vrijednosti nepoznanice x. Stoga polazna jednadžba ima za rješenje svaki realan broj $x\in$ **R**.

2.) $a \neq b$

U ovom je slučaju prvi faktor na lijevoj strani posljednje jednadžbe različit od nule. Zato podijelimo cijelu jednadžbu tim faktorom. Dobit ćemo jednadžbu:

$$x \cdot [(a+b) \cdot x + 2ab] = 0$$

Odmah vidimo da je jedno rješenje te jednadžbe $x_1 = 0$. Ako još vrijedi i nejednakost $a + b \neq 0$, onda iz

$$(a+b) \cdot x + 2ab = 0$$

dobivamo drugo rješenje te jednadžbe: $x_2 = -\frac{2ab}{a+b}$. Ako ta nejednakost ne vrijedi (odnosno, ako je $a + b = 0$), onda izraz $(a + b) \cdot x + 2ab$ ne može biti jednak nuli. Naime, ako bi bilo $a + b = 0$, slijedilo bi:

$$0 \cdot x + 2ab = 0,$$

a otuda je $ab = 0$. Tako smo dobili sustav

$$\begin{aligned} a + b &= 0 \\ ab &= 0 \end{aligned}$$

koji ima jedinstveno rješenje: $a = b = 0$. No, to znači da je $a = b$, a mi smo pretpostavili da je $a \neq b$, pa smo dobili kontradikciju. Zbog toga u slučaju $a + b = 0$, tj. $a = -b$ polazna jednadžba ima samo jedno rješenje: $x = 0$.

Zaključimo: Ako vrijedi jednakost $a = b$, rješenje polazne jednadžbe je svaki realan broj $x \in \mathbf{R}$. Ako vrijede relacije $a \neq b$ i $a = -b$, polazna jednadžba ima točno jedno rješenje: $x = 0$. U svim ostalim slučajevima polazna jednadžba ima dva rješenja: $x_1 = 0$ i $x_2 = -\frac{2ab}{a+b}$.

222. *Napišite neku kvadratnu jednadžbu kojoj su svi koeficijenti cijeli brojevi, a* $x = \frac{1}{1 - i\sqrt{3}}$ *jedno njezino rješenje.*

Rješenje: Najprije zapišimo x u standardnom (algebarskom) obliku:

$$x = \frac{1}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{(1 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - 3i^2} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + 3} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i$$

Sada primijenimo sljedeću tvrdnju:

Tvrdnja: *Ako je $z \in \mathbf{C}$ jedno kompleksno rješenje kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ čiji su svi koeficijenti realni brojevi (tj. $a, b, c \in \mathbf{R}$), onda je i broj $\bar{z}$ rješenje iste te jednadžbe.*

U našem slučaju, to znači da je rješenje tražene kvadratne jednadžbe i broj $\bar{x} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} i$. Kako svaka kvadratna jednadžba ima točno dva (ne nužno različita) rješenja, možemo odmah primijeniti Vièteove formule. U tu svrhu računamo:

$$x+\overline{x}=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$
$$x\cdot\overline{x}=\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)=\frac{1}{16}-\frac{3}{16}i^2=\frac{1}{16}+\frac{3}{16}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

pa zaključujemo: Koeficijenti kvadratne jednadžbe (oblika $x^2 + px + q = 0$) su:

- koeficijent uz x^2: 1 (taj je koeficijent uvijek jednak 1 i ne ovisi o gore izračunatim vrijednostima),
- koeficijent uz x: $-\frac{1}{2}$ (broj suprotan zbroju rješenja jednadžbe)
- slobodni koeficijent: $\frac{1}{4}$ (broj jednak umnošku rješenja jednadžbe)

pa jednadžba glasi:

$$x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}=0$$

No, kako se u zadatku traži da svi koeficijenti budu cijeli brojevi, preostaje gornju jednadžbu pomnožiti s nekim zajedničkim višekratnikom razlomaka koji se pojavljuju u njoj. Najjednostavnije je odabrati višekratnik 4, odnosno pomnožiti gornju jednadžbu s 4. Tako konačno dobivamo traženu jednadžbu:

$$4x^2 - 2x + 1 = 0$$

223. *Riješite sljedeći sustav jednadžbi:*

$$x^2 + y^2 = 10$$
$$x + y = 2$$

Rješenje: Izrazimo npr. nepoznanicu y iz druge jednadžbe zadanoga sustava:

$$y = 2 - x$$

Uvrstimo dobiveni izraz umjesto y u prvu jednadžbu:

$$x^2 + (2 - x)^2 = 10.$$

Kvadriranjem dobivamo:

$$x^2 + 4 - 4x + x^2 = 10,$$

pa sređivanjem i reduciranjem slijedi:

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1 = -1$ i $x_2 = 3$. Za $x_1 = -1$ dobivamo

$$y_1 = 2 - x_1 = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3,$$

a za $x_2 = 3$ dobivamo

$$y_2 = 2 - x_2 = 2 - 3 = -1.$$

Sva rješenja sustava su uređeni parovi (–1, 3) i (3, –1).

224. *Riješite jednadžbu*:

$$(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 55$$

Rješenje: Umanjenik ostavimo nepromijenjen, a umanjitelj kvadriramo. Dobivamo:

$$(x^2 + 2x)^2 - x^2 - 2x - 1 - 55 = 0,$$

a tu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$(x^2 + 2x)^2 - (x^2 + 2x) - 56 = 0.$$

Uvedimo zamjenu

$$t = x^2 + 2x$$

pa dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$t^2 - t - 56 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su $t_1 = -7$ i $t_2 = 8$. Iz $t_1 = -7$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo novu kvadratnu jednadžbu

$$x^2 + 2x = -7$$

koja je ekvivalentna kvadratnoj jednadžbi

$$x^2 + 2x + 7 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su $x_1 = -1 - i\sqrt{6}$ i $x_2 = -1 + i\sqrt{6}$. Nadalje, iz $t_2 = 8$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2 + 2x = 8$$

koja je ekvivalentna kvadratnoj jednadžbi

$$x^2 + 2x - 8 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su $x_3 = -4$ i $x_4 = 2$. Stoga polazna jednadžba ima točno četiri rješenja:

$$x_1 = -1 - i\sqrt{6},\ x_2 = -1 + i\sqrt{6},\ x_3 = -4 \text{ i } x_4 = 2$$

225. *Riješite sljedeći sustav jednadžbi*:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 5 \\ xy &= 2 \end{aligned}$$

Rješenje: Iz druge jednadžbe sustava zaključujemo da moraju vrijediti nejednakosti $x \neq 0$ i $y \neq 0$ jer za $x = 0$ ili $y = 0$ vrijednost umnoška xy mora biti jednaka 0, a ne 2. Stoga drugu jednadžbu sustava smijemo podijeliti s x i dobiti:

$$y = \frac{2}{x}$$

Uvrstimo taj izraz umjesto y u prvu jednadžbu sustava:

$$x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 5$$
$$x^2 + \frac{4}{x^2} = 5$$

Ovu jednadžbu pomnožimo s x^2, pa nakon sređivanja dobijemo jednadžbu:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$$

Dobili smo bikvadratnu jednadžbu koja se standardno rješava zamjenom $t = x^2$. Dakle, stavimo $t = x^2$ pa slijedi:

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $t_1 = 1$ i $t_2 = 4$. Iz $t_1 = 1$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo novu kvadratnu jednadžbu

$$x^2 = 1$$

čija su rješenja $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$. Pripadne vrijednosti nepoznanice y su

$$y_1 = \frac{2}{x_1} = \frac{2}{-1} = -2$$
$$y_2 = \frac{2}{x_2} = \frac{2}{1} = 2$$

Napokon, iz $t = 4$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2 = 4$$

čija su rješenja $x_3 = -2$ i $x_4 = 2$. Pripadne vrijednosti nepoznanice y su

$$y_3 = \frac{2}{x_3} = \frac{2}{-2} = -1$$
$$y_4 = \frac{2}{x_4} = \frac{2}{2} = 1$$

Zaključimo: Sva rješenja polaznoga sustava su uređeni parovi $(-1, -2)$, $(1, 2)$, $(-2, -1)$ i $(2, 1)$.

226. *Riješite jednadžbu*:

$$x(a + b - x) = c(a + b - c)$$

gdje su $a, b, c \in \mathbf{R}$ *realni parametri.*

Rješenje: Zadanu jednadžbu transformiramo ovako:

$$x \cdot (a + b) - x^2 - c(a + b - c) = 0,$$
$$x^2 - (a + b) \cdot x + c \cdot (a + b - c) = 0.$$

Diskriminanta ove kvadratne jednadžbe jednaka je

$$D = (a+b)^2 - 4 \cdot c \cdot (a+b-c) = (a+b)^2 - 4 \cdot (a+b) \cdot c + 4c^2 = [(a+b) - 2c]^2 = (a+b-2c)^2$$

pa su njezina rješenja

$$x_1 = \frac{a+b-(a+b-2c)}{2} = \frac{a+b-a-b+2c}{2} = \frac{2c}{2} = c$$
$$x_2 = \frac{a+b+(a+b-2c)}{2} = \frac{a+b+a+b-2c}{2} = \frac{2a+2b-2c}{2} = \frac{2 \cdot (a+b-c)}{2} = a+b-c$$

Kako nema nikakvih dodatnih uvjeta bilo na realne parametre a, b, c, bilo na nepoznanicu x, dobivena rješenja su ujedno i sva rješenja polazne jednadžbe.

227. *Rastavite na faktore polinom* $p(x) = (x^2 - 3x)^2 - 3(x^2 - 3x) - 8$.

Rješenje: Rastaviti na faktore neki polinom znači prikazati ga u obliku umnoška što više različitih polinoma što manjega stupnja. Uvedimo zamjenu $t = x^2 - 3x$. Tada zadani polinom postaje polinom u varijabli t:

$$p(t) = t^2 - 3t - 8$$

Ovaj kvadratni polinom rastavimo u faktore tako da najprije riješimo kvadratnu jednadžbu

$$t^2 - 3t - 8 = 0,$$

dobijemo njezina rješenja $t_1 = -2$, $t_2 = 4$, pa zapišemo:

$$p(t) = (t+2) \cdot (t-4)$$

Vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo:

$$p(x) = (x^2 - 3x + 2) \cdot (x^2 - 3x - 4)$$

Svaki od dobivenih dvaju faktora pokušajmo dalje rastaviti na način posve analogan onome koji smo rabili kod rastava polinoma $p(t) = t^2 - 3t - 8$. Rješavanjem kvadratne jednadžbe

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

dobijemo $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, pa vrijedi rastav:

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1) \cdot (x-2),$$

dok rješavanjem kvadratne jednadžbe

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

dobijemo $x_3 = -1$, $x_4 = 4$, pa vrijedi rastav:

$$x^2 - 3x - 4 = (x+1) \cdot (x-4).$$

Tako je konačno

$$p(x) = (x^2 - 3x + 2) \cdot (x^2 - 3x - 4) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+1) \cdot (x-4),$$

što, zbog nejednakosti $x - 4 < x - 1 < x - 1 < x + 1$ koje vrijede za sve $x \in \mathbf{R}$, možemo pregledno zapisati prema načelu "od najmanjega do najvećega":

$$p(x) = (x - 4) \cdot (x - 2) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1).$$

228. *Riješite jednadžbu*:

$$(x^2 - 2x)^2 - (x - 1)^2 + 1 = 0$$

<u>Rješenje:</u> Umanjenik ostavimo nepromijenjen, a umanjitelj kvadriramo. Dobivamo:

$$(x^2 - 2x)^2 - x^2 + 2x - 1 + 1 = 0,$$

a tu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$(x^2 - 2x)^2 - (x^2 - 2x) = 0.$$

Uvedimo zamjenu

$$t = x^2 - 2x$$

pa dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$t^2 - t = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su $t_1 = 0$ i $t_2 = 1$. Iz $t_1 = 0$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo novu kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - 2x = 0$$

Rješenja te jednadžbe su $x_1 = 0$ i $x_2 = 2$. Nadalje, iz $t_2 = 1$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - 2x = 1$$

koja je ekvivalentna kvadratnoj jednadžbi

$$x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su $x_3 = 1 - \sqrt{2}$ i $x_4 = 1 + \sqrt{2}$. Stoga polazna jednadžba ima točno četiri rješenja:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1 - \sqrt{2} \text{ i } x_4 = 1 + \sqrt{2}.$$

229. *Rastavite na faktore polinom* $p(x) = (x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12$.

<u>Rješenje:</u> Rastaviti na faktore neki polinom znači prikazati ga u obliku umnoška što više različitih polinoma što manjega stupnja. Uvedimo zamjenu $t = x^2 + x$. Tada zadani polinom postaje polinom u varijabli t:

$$p(t) = t^2 + 4t - 12$$

Ovaj kvadratni polinom rastavimo u faktore tako da najprije riješimo kvadratnu jednadžbu

$$t^2 + 4t - 12 = 0,$$

dobijemo njezina rješenja $t_1 = -6$, $t_2 = 2$, pa zapišemo:

$$p(t) = (t + 6) \cdot (t - 2)$$

Vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo:

$$p(x) = (x^2 + x + 6) \cdot (x^2 + x - 2)$$

Svaki od dobivenih dvaju faktora pokušajmo dalje rastaviti na način posve analogan onome koji smo rabili kod rastava polinoma $p(t) = t^2 - 3t - 8$. Rješavanjem kvadratne jednadžbe

$$x^2 + x + 6 = 0$$

dobijemo $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{23}}{2} i \notin \mathbf{R}$, pa se taj polinom ne da dalje rastaviti na faktore. Rješavanjem kvadratne jednadžbe

$$x^2 + x - 2 = 0$$

dobijemo $x_3 = -2$, $x_4 = 1$, pa vrijedi rastav:

$$x^2 + x - 2 = (x + 2) \cdot (x - 1).$$

Tako je konačno

$$p(x) = (x^2 + x + 6) \cdot (x^2 + x - 2) = (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x^2 + x + 6).$$

230. *Riješite jednadžbu*:

$$\frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2+1} = 2.9$$

Rješenje: Uvedimo zamjenu

$$t = \frac{x^2+1}{x}$$

Tada je

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{t}$$

pa dobivamo jednadžbu:

$$t + \frac{1}{t} = \frac{29}{10}.$$

Množenjem te jednadžbe s $10t$ dobivamo ekvivalentnu jednadžbu

$$10t^2 - 29t + 10 = 0$$

čija su rješenja $t_1 = \frac{2}{5}$ i $t_2 = \frac{5}{2}$. Iz $t_1 = \frac{2}{5}$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo novu kvadratnu jednadžbu

$$\frac{x^2+1}{x} = \frac{2}{5}$$

koja množenjem s $5x$ prelazi u ekvivalentnu jednadžbu

$$5x^2 - 2x + 5 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su $x_1 = \frac{1}{5} - \frac{2\sqrt{6}}{5}i$ i $x_2 = \frac{1}{5} + \frac{2\sqrt{6}}{5}i$. Nadalje, iz $t_2 = \frac{5}{2}$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$\frac{x^2+1}{x} = \frac{5}{2}$$

koja množenjem s $2x$ prelazi u ekvivalentnu jednadžbu

$$2x^2 - 5x + 2 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su $x_3 = \frac{1}{2}$ i $x_4 = 2$. Pogledajmo jesu li sva četiri dobivena rješenja ujedno i rješenja polazne jednadžbe. Uvjeti na x su $x \neq 0$ i $x^2 + 1 \neq 0$, a lako se vidi da sva četiri dobivena rješenja uistinu zadovoljavaju te uvjete. Stoga možemo zaključiti da polazna jednadžba ima točno četiri rješenja:

$$x_1 = \frac{1}{5} - \frac{2\sqrt{6}}{5}i,\ x_2 = \frac{1}{5} + \frac{2\sqrt{6}}{5}i,\ x_3 = \frac{1}{2} \text{ i } x_4 = 2.$$

231. *Odredite prirodan broj x iz jednakosti*:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + x = 1326$$

Rješenje: Lijeva strana jednadžbe je zbroj prvih x članova aritmetičkoga niza 1, 2, 3, … . U rješenju zadatka 204. već smo vidjeli da se taj zbroj računa prema formuli

$$S_x = \frac{x}{2} \cdot (a_1 + a_x)$$

U ovu formulu uvrstimo $S_x = 1326$, $a_1 = 1$ i $a_x = x$. Dobivamo jednadžbu:

$$1326 = \frac{x}{2} \cdot (1 + x)$$

koja množenjem s 2 prelazi u ekvivalentnu jednadžbu

$$x^2 + x - 2652 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su $x_1 = -52$, $x_2 = 51$. Prvo rješenje ne dolazi u obzir jer x mora biti prirodan broj, pa je jedino rješenje zadatka $x = 51$.

232. *Odredite realne brojeve x i y iz sljedeće jednakosti*:

$$(2x - yi) \cdot (x + 2yi) = 4 + 3i.$$

Rješenje: Množenjem faktora na lijevoj strani zadane jednakosti dobivamo:

$$2x^2 - xyi + 4xyi - 2y^2i^2 = 4 + 3i,$$

otkuda je

$$(2x^2 + 2y^2) + (3xy) \cdot i = 4 + 3i.$$

Izjednačavanjem realnih, odnosno imaginarnih dijelova dobivamo sljedeći sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2y^2 &= 4 \\ 3xy &= 3 \end{aligned}$$

koji je ekvivalentan sustavu

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2 \\ xy &= 1 \end{aligned}$$

Zbog jednakosti $xy = 1$ zaključujemo da niti x niti y nisu jednaki nuli (u suprotnom bi umnožak xy morao biti jednak nuli), pa iz te jednakosti izrazimo npr. nepoznanicu y pomoću x:

$$y = \frac{1}{x}$$

Uvrštavanjem toga izraza umjesto y u prvu jednadžbu dobijemo:

$$x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$$

otkuda množenjem s x^2 dobivamo bikvadratnu jednadžbu

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$

koja je ekvivalentna jednadžbi

$$(x^2 - 1)^2 = 0,$$

a ova, pak, jednadžbi

$$x^2 - 1 = 0$$

jer je 0 jedini broj koji pomnožen sam sobom daje 0. Sada iz jednadžbe

$$x^2 - 1 = 0$$

lako nalazimo $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$ pa su pripadne vrijednosti nepoznanice y

$$y_1 = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{-1} = -1 \quad \text{i} \quad y_2 = \frac{1}{x_2} = \frac{1}{1} = 1.$$

Stoga su rješenje zadatka dva uređena para realnih brojeva: $(-1, -1)$ i $(1, 1)$.

233. *Riješite jednadžbu*:

$$\frac{1}{x(x+2)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{12}$$

Rješenje: Zapišimo zadanu jednadžbu u sljedećem obliku:

$$\frac{1}{x^2+2x}-\frac{1}{x^2+2x+1}-\frac{1}{12}=0$$

Uvedimo zamjenu:

$$t = x^2 + 2x.$$

Tada je

$$x^2 + 2x + 1 = t + 1$$

pa dobivamo jednadžbu:

$$\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}-\frac{1}{12}=0$$

koja množenjem s $12 \cdot t \cdot (t + 1)$ prelazi u ekvivalentnu jednadžbu

$$12(t + 1) - 12t - t(t + 1) = 0,$$

a ova, nakon množenja i reduciranja, u jednadžbu

$$t^2 + t - 12 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su $t_1 = -4$ i $t_2 = 3$. Iz $t_1 = -4$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo novu kvadratnu jednadžbu

$$x^2 + 2x = -4$$

koja je ekvivalentna jednadžbi

$$x^2 + 2x + 4 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su $x_1=-1-i\sqrt{3}$ i $x_2=-1+i\sqrt{3}$. Iz $t_2 = 3$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2 + 2x = 3$$

koja je ekvivalentna jednadžbi

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su $x_3 = -3$ i $x_4 = 1$. Pogledajmo jesu li sva četiri dobivena rješenja ujedno i rješenja polazne jednadžbe. Uvjeti na x su

$$x^2 + 2x \neq 0$$
$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 \neq 0$$

Za sva četiri dobivena rješenja vrijede relacije

$$x^2 + 2x \in \{-4, 3\}$$
$$x^2 + 2x + 1 \in \{-3, 4\}$$

pa ona zadovoljavaju oba navedena uvjeta na x. Stoga možemo zaključiti da su sva rješenja polazne jednadžbe

$$x_1 = -1 - i\sqrt{3},\ x_2 = -1 + i\sqrt{3},\ x_3 = -3 \text{ i } x_4 = 1.$$

234. *Riješite jednadžbu*:

$$(x^2 + x - 2) \cdot (x^2 + x - 3) = 12$$

Rješenje: Uvedimo zamjenu

$$t = x^2 + x - 2.$$

Tada je

$$x^2 + x - 3 = (x^2 + x - 2) - 1 = t - 1.$$

Izvršimo te zamjene u polaznoj jednadžbi pa dobijemo:

$$t \cdot (t - 1) = 12,$$

a ta jednadžba, nakon provedena množenja i sređivanja, prelazi u ekvivalentnu jednadžbu

$$t^2 - t - 12 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su $t_1 = -3$ i $t_2 = 4$. Iz $t_1 = -3$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo novu kvadratnu jednadžbu

$$x^2 + x - 2 = -3$$

koja je ekvivalentna jednadžbi

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su $x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ i $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Iz $t_2 = 4$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2 + x - 2 = 4$$

koja je ekvivalentna jednadžbi

$$x^2 + x - 6 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su $x_3 = -3$ i $x_4 = 2$. Kako nema nikakvih uvjeta na rješenje x polazne jednadžbe, zaključujemo da polazna jednadžba ima točno četiri rješenja:

$$x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ x_3 = -3 \text{ i } x_4 = 2.$$

235. *Rastavite na faktore polinom* $p(x) = (x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3$.

Rješenje: Rastaviti na faktore neki polinom znači prikazati ga u obliku umnoška što više različitih polinoma što manjega stupnja. Uvedimo zamjenu $t = x^2 - 2x$. Tada zadani polinom postaje polinom u varijabli t:

$$p(t) = t^2 - 2t - 3$$

Ovaj kvadratni polinom rastavimo u faktore tako da najprije riješimo kvadratnu jednadžbu

$$t^2 - 2t - 3 = 0,$$

dobijemo njezina rješenja $t_1 = -1$, $t_2 = 3$, pa zapišemo:

$$p(t) = (t + 1) \cdot (t - 3)$$

Vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo:

$$p(x) = (x^2 - 2x + 1) \cdot (x^2 - 2x - 3)$$

Svaki od dobivenih dvaju faktora pokušajmo dalje rastaviti na način posve analogan onome koji smo rabili kod rastava polinoma $p(t) = t^2 - 3t - 8$. Rješavanjem kvadratne jednadžbe

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

dobijemo $x_1 = x_2 = 1$, pa vrijedi rastav:

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2,$$

dok rješavanjem kvadratne jednadžbe

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

dobijemo $x_3 = -1$, $x_4 = 3$, pa vrijedi rastav:

$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1) \cdot (x - 3).$$

Tako je konačno

$$p(x) = (x^2 - 2x + 1) \cdot (x^2 - 2x - 3) = (x - 3) \cdot (x - 1)^2 \cdot (x + 1).$$

236. *Riješite jednadžbu*:

$$(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 5$$

Rješenje: Umanjenik ostavimo nepromijenjen, a umanjitelj kvadriramo. Dobivamo:

$$(x^2 + 2x)^2 - x^2 - 2x - 1 - 5 = 0,$$

a tu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$(x^2 + 2x)^2 - (x^2 + 2x) - 6 = 0.$$

Uvedimo zamjenu

$$t = x^2 + 2x$$

pa dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$t^2 - t - 6 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su $t_1 = -2$ i $t_2 = 3$. Iz $t_1 = -2$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo novu kvadratnu jednadžbu

$$x^2 + 2x = -2$$

koja je ekvivalentna jednadžbi

$$x^2 + 2x + 2 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su $x_1 = -1 - i$ i $x_2 = -1 + i$. Nadalje, iz $t_2 = 3$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2 + 2x = 3$$

koja je ekvivalentna kvadratnoj jednadžbi

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su $x_3 = -3$ i $x_4 = 1$. Stoga polazna jednadžba ima točno četiri rješenja:

$$x_1 = -1 - i,\ \ x_2 = -1 + i,\ \ x_3 = -3 \text{ i } \ x_4 = 1.$$

237. *Za koje je vrijednosti realnoga parametra $p \in$ **R** jedno rješenje jednadžbe*

$$(p - x)^2 = px(p + x)$$

jednako nuli?

<u>Rješenje:</u> Uvrstimo li $x = 0$ u zadanu jednadžbu, dobijemo:

$$(p - 0)^2 = p \cdot 0 \cdot (p + 0),$$

odnosno

$$p^2 = 0,$$

a odatle je $p = 0$. Dakle, jedno rješenje zadane jednadžbge je jednako nuli ako i samo ako je $p = 0$.

238. *Za koju su vrijednost realnoga parametra $p \in$ **R** rješenja jednadžbe*

$$p^2 \cdot (x + 1)^2 = x \cdot (p - x)$$

međusobno suprotni brojevi?

<u>Rješenje:</u> Najprije svedimo zadanu jednadžbu na standardni oblik

$$x^2 + ax + b = 0.$$

Kvadriranjem na lijevoj strani i množenjem na desnoj strani polazne jednadžbe dobivamo:

$$p^2 \cdot (x^2 + 2x + 1) = px - x^2,$$

pa je sređivanjem

$$(p^2 + 1)x^2 + (2p^2 - p)x + p^2 = 0,$$

odnosno dijeljenjem s $(p^2 + 1)$

$$x^2 + \frac{2p^2 - p}{p^2 + 1}x + \frac{p^2}{p^2 + 1} = 0$$

U zadatku se traži da rješenja jednadžbe budu međusobno suprotni brojevi. Taj je uvjet ekvivalentan uvjetu da zbroj rješenja zadane kvadratne jednadžbe bude jednak nuli. Prema Vièteovim formulama, zbroj rješenja jednadžbe

$$x^2 + \frac{2p^2 - p}{p^2 + 1}x + \frac{p^2}{p^2 + 1} = 0$$

jednak je $-\frac{2p^2 - p}{p^2 + 1}$, odnosno $\frac{p - 2p^2}{p^2 + 1}$. Budući da želimo da taj zbroj bude jednak nuli, mora vrijediti jednakost:

$$\frac{p - 2p^2}{p^2 + 1} = 0$$

Vrijednost nekoga razlomka jednaka je nuli ako i samo ako je brojnika toga razlomka jednak nuli, a nazivnik različit od nule. Izjednačavanjem brojnika razlomka $\frac{p - 2p^2}{p^2 + 1}$ s nulom dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$p - 2p^2 = 0$$

čija su rješenja $p_1 = 0$ i $p_2 = \frac{1}{2}$. Kako nema nikakvih dodatnih uvjeta na parametar p, to su $p_1 = 0$ i $p_2 = \frac{1}{2}$ ujedno i rješenja postavljenoga zadatka.

239. *Odredite sva realna rješenja jednadžbe*

$$x \cdot |x| - 5x + 4 = 0.$$

Rješenje: Razlikovat ćemo dva slučaja:

1.) $x \geq 0$

U ovome je slučaju $|x| = x$ pa dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

Njezina su rješenja $x_1 = 1$ i $x_2 = 4$. Kako oba zadovoljavaju uvjet $x \geq 0$, to su ujedno i rješenja polazne jednadžbe.

2.) $x \leq 0$

U ovome je slučaju $|x| = -x$ pa dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$-x^2 - 5x + 4 = 0$$

čija su rješenja $x_3 = -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{41}}{2}$ i $x_4 = -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{41}}{2}$. No, uvjet $x \leq 0$ zadovoljava jedino rješenje x_3 jer je realan broj x_4 strogo veći od nule.

Zaključimo: Sva realna rješenja polazne jednadžbe su $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ i $x_3 = -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{41}}{2}$.

240. *Skratite razlomak*:

$$\frac{4x^2 - 9}{6x^2 + 5x - 6}$$

Rješenje: I brojnik i nazivnik možemo rastaviti u faktore na isti način kao i kvadratne polinome u zadatku 235., no, postoji brži i jednostavniji način. Brojnik rastavimo primjenom formule za razliku kvadrata:

$$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x - 3)(2x + 3),$$

a nazivnik na sljedeći način:

$$6x^2 + 5x - 6 = 6x^2 + 9x - 4x - 6 = 3x \cdot (2x + 3) - 2 \cdot (2x + 3) = (2x + 3) \cdot (3x - 2).$$

Stoga je

$$\frac{4x^2 - 9}{6x^2 + 5x - 6} = \frac{(2x-3)(2x+3)}{(2x+3)(3x-2)} = \frac{2x-3}{3x-2}.$$

241. *Odredite sva realna rješenja jednadžbe*

$$x^2 + 3x + |x + 3| = 0.$$

Rješenje: Razlikovat ćemo dva slučaja:

1.) $x + 3 \geq 0$

U ovome je slučaju $|x + 3| = x + 3$ pa dobivamo jednadžbu:

$$x^2 + 3x + x + 3 = 0,$$

odnosno jednadžbu

$$x^2 + 4x + 3 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su $x_1 = -3$ i $x_2 = -1$. Kako oba zadovoljavaju uvjet $x + 3 \geq 0$, to su ujedno i rješenja polazne jednadžbe.

2.) $x + 3 \leq 0$

U ovome je slučaju $|x + 3| = -(x + 3) = -x - 3$ pa dobivamo jednadžbu:

$$x^2 + 3x - x - 3 = 0,$$

odnosno jednadžbu

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su $x_3 = -3$ i $x_4 = 1$. No, uvjet $x + 3 \le 0$ zadovoljava jedino rješenje x_3 jer za rješenje $x_4 = 1$ vrijedi nejednakost $x_4 + 3 = 1 + 3 = 4 > 0$.

Zaključimo: Sva realna rješenja polazne jednadžbe su $x_1 = -3$ i $x_2 = 1$.

242. *Skratite razlomak*:

$$\frac{6x^2-5x-6}{9x^2-4}$$

Rješenje: I brojnik i nazivnik možemo rastaviti u faktore na isti način kao i kvadratne polinome u zadatku 235., no, postoji brži i jednostavniji način. Nazivnik rastavimo primjenom formule za razliku kvadrata:

$$9x^2 - 4 = (3x)^2 - 2^2 = (3x - 2)(3x + 2),$$

a brojnik na sljedeći način:

$$6x^2 - 5x - 6 = 6x^2 - 9x + 4x - 6 = 3x \cdot (2x - 3) + 2 \cdot (2x - 3) = (2x - 3) \cdot (3x + 2).$$

Stoga je

$$\frac{6x^2-5x-6}{9x^2-4} = \frac{(2x-3)(3x+2)}{(3x-2)(3x+2)} = \frac{2x-3}{3x-2}.$$

243. *Zadana je kvadratna jednadžba*

$$2x^2 + x + 1 = 0.$$

Napišite neku kvadratnu jednadžbu čije je jedno rješenje jednako zbroju kvadrata, a drugo zbroju kubova rješenja zadane jednadžbe.

Rješenje: Odredimo najprije zbroj i umnožak rješenja zadane jednadžbe. Podijelimo je s 2:

$$x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0$$

pa očitajmo:

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{2}$$
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}$$

Označimo rješenja tražene kvadratne jednadžbe s y_1 i y_2. Tada imamo:

$$y_1 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 \cdot x_2) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$
$$y_2 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3 \cdot (x_1 \cdot x_2) \cdot (x_1 + x_2) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{3}{4} = \frac{-1+6}{8} = \frac{5}{8}$$

Zbroj i umnožak rješenja y_1 i y_2 jednaki su

$$y_1 + y_2 = -\frac{3}{4} + \frac{5}{8} = \frac{-6+5}{8} = -\frac{1}{8}$$
$$y_1 \cdot y_2 = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{5}{8} = -\frac{15}{32}$$

Stoga kvadratna jednadžba (s nepoznanicom y) kojoj su rješenja y_1 i y_2, a koeficijent uz y^2 jednak 1, glasi:

$$y^2 + \frac{1}{8}y - \frac{15}{32} = 0.$$

Množenjem s 32 dobivamo kvadratnu jednadžbu s cjelobrojnim koeficijentima:

$$32y^2 + 4y - 15 = 0.$$

244. *Riješite sljedeći sustav jednadžbi u skupu* $\mathbf{R}$:

$$x^3 + y^3 = 1$$
$$xy \cdot (x + y) = 2$$

Rješenje: Kako je

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 = (x + y)^3 - 3xy \cdot (x + y),$$

to je polazni sustav ekvivalentan sustavu

$$(x + y)^3 - 3xy \cdot (x + y) = 2$$
$$xy \cdot (x + y) = 2$$

Uvrštavanjem druge jednadžbe sustava u prvu dobivamo:

$$(x + y)^3 - 3 \cdot 2 = 2,$$

otkuda je

$$(x + y)^3 = 8$$

i

$$x + y = 2$$

(ostala dva treća korijena iz 8 su kompleksni brojevi koje zanemarujemo jer tražimo realna rješenja polaznoga sustava). Dobivenu jednakost uvrstimo u drugu jednadžbu polaznoga sustava pa dobijemo

$$xy \cdot 2 = 2,$$

odnosno

$$xy = 1.$$

Tako smo dobili sljedeći sustav jednadžbi ekvivalentan polaznom:

$$x + y = 2$$
$$xy = 1$$

Prema Vièteovim formulama slijedi da su x i y rješenja kvadratne jednadžbe

$$t^2 - 2t + 1 = 0,$$

odnosno jednadžbe

$$(t - 1)^2 = 0,$$

odnosno jednadžbe

$$t - 1 = 0.$$

Jedino rješenje posljednje jednadžbe jest $t = 1$. Odatle zaključujemo da je jedino realno rješenje polaznoga sustava $x = y = 1$, tj. uređeni par $(1, 1)$.

245. *Riješite jednadžbu*:

$$(x^2 - x + 1) \cdot (x^2 - x + 3) = 15$$

Rješenje: Uvedimo zamjenu

$$t = x^2 - x + 1.$$

Tada je

$$x^2 - x + 3 = (x^2 - x + 1) + 2 = t + 2.$$

Izvršimo te zamjene u polaznoj jednadžbi pa dobijemo:

$$t \cdot (t + 2) = 15,$$

a ta jednadžba, nakon provedena množenja i sređivanja, prelazi u ekvivalentnu jednadžbu

$$t^2 + 2t - 15 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su $t_1 = -5$ i $t_2 = 3$. Iz $t_1 = -5$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo novu kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - x + 1 = -5$$

koja je ekvivalentna jednadžbi

$$x^2 - x + 6 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{23}}{2} i$ i $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{23}}{2} i$. Iz $t_2 = 3$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - x + 1 = 3$$

koja je ekvivalentna jednadžbi

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su $x_3 = -1$ i $x_4 = 2$. Kako nema nikakvih uvjeta na rješenje x polazne jednadžbe, zaključujemo da polazna jednadžba ima točno četiri rješenja:

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{23}}{2} i, \; x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{23}}{2} i, \; x_3 = -1 \text{ i } x_4 = 2.$$

246. *Riješite jednadžbu*:

$$(a^2 - b^2)x^2 - 4abx = a^2 - b^2$$

<u>Rješenje:</u> Zapišimo zadanu jednadžbu u standardnom obliku:

$$(a^2 - b^2)x^2 - 4abx - (a^2 - b^2) = 0.$$

Njezina je diskriminanta jednaka

$$D = 16a^2b^2 + 4(a^2 - b^2)^2 = 4[4a^2b^2 + (a^2 - b^2)^2] = 4[4a^2b^2 + a^4 - 2a^2b^2 + b^4] = 4[a^4 + 2a^2b^2 + b^4] = 4(a^2 + b^2)^2,$$

pa imamo:

$$x_1 = \frac{4ab - \sqrt{4(a^2+b^2)^2}}{2(a^2-b^2)} = \frac{4ab - 2(a^2+b^2)}{2(a^2-b^2)} = \frac{2ab - a^2 - b^2}{a^2-b^2} = -\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2-b^2} = -\frac{(a-b)^2}{(a-b)(a+b)} = -\frac{a-b}{a+b} = \frac{b-a}{a+b}$$

$$x_2 = \frac{4ab + \sqrt{4(a^2+b^2)^2}}{2(a^2-b^2)} = \frac{4ab + 2(a^2+b^2)}{2(a^2-b^2)} = \frac{2ab + a^2 + b^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2-b^2} = \frac{(a+b)^2}{(a-b)(a+b)} = \frac{a+b}{a-b}$$

247. *Riješite sljedeći sustav jednadžbi*:

$$x^2 + y^2 = 6.5$$
$$x + y = 3$$

<u>Rješenje:</u> Izrazimo npr. y iz druge jednadžbe zadanoga sustava:

$$y = 3 - x$$

pa uvrstimo dobiveni izraz umjesto y u prvu jednadžbu sustava:

$$x^2 + (3 - x)^2 = 6.5.$$

Kvadriranjem i sređivanjem dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$2x^2 - 6x + 2.5 = 0.$$

Njezina su rješenja $x_1 = 0.5$ i $x_2 = 2.5$. Pripadne vrijednosti nepoznanice y su:

$$y_1 = 3 - x_1 = 3 - 0.5 = 2.5 \quad \text{i} \quad y_2 = 3 - x_2 = 3 - 2.5 = 0.5$$

Stoga zadani sustav ima dva rješenja: (0.5, 2.5) i (2.5, 0.5).

248. *Riješite jednadžbu*:

$$(x^2 - 4x)^2 + (x - 2)^2 = 16$$

Rješenje: Umanjenik ostavimo nepromijenjen, a umanjitelj kvadriramo. Dobivamo:

$$(x^2 - 4x)^2 + x^2 - 4x + 4 - 16 = 0,$$

a tu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$(x^2 - 4x)^2 + (x^2 - 4x) - 12 = 0.$$

Uvedimo zamjenu

$$t = x^2 - 4x$$

pa dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$t^2 + t - 12 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su $t_1 = -4$ i $t_2 = 3$. Iz $t_1 = -4$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo novu kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - 4x = -4$$

koja je ekvivalentna jednadžbi

$$x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Jedino rješenje te jednadžbe je $x_1 = 2$. Nadalje, iz $t_2 = 3$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - 4x = 3$$

koja je ekvivalentna kvadratnoj jednadžbi

$$x^2 - 4x - 3 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su $x_2 = 2 - \sqrt{7}$ i $x_3 = 2 + \sqrt{7}$. Stoga polazna jednadžba ima točno tri različita rješenja:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 2 - \sqrt{7} \text{ i } x_3 = 2 + \sqrt{7}\ .$$

249. *Riješite sljedeći sustav jednadžbi*:

$$x^2 + y^2 = 6.25$$
$$xy = 3$$

Rješenje: Zbog $xy = 3$, vrijednost niti jedne od nepoznanica ne može biti jednaka nuli (u suprotnom bi vrijednost umnoška xy morala biti jednaka nuli). Izrazimo npr. y iz druge jednadžbe zadanoga sustava podijelivši tu jednadžbu s x:

$$y = \frac{3}{x}$$

pa uvrstimo dobiveni izraz umjesto y u prvu jednadžbu sustava:

$$x^2 + \left(\frac{3}{x}\right)^2 = 6.25,$$

$$x^2 + \frac{9}{x^2} = 6.25$$

Množenjem ove jednadžbe s x^2 dobivamo bikvadratnu jednadžbu

$$x^4 - 6.25x^2 + 9 = 0.$$

Riješimo je uvođenjem standardne zamjene

$$t = x^2,$$

pa dobivamo:

$$t^2 - 6.25t + 9 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $t_1 = 2.25$ i $t_2 = 4$. Iz $t_1 = 2.25$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo:

$$x^2 = 2.25,$$

otkuda slijedi $x_1 = -1.5$ i $x_2 = 1.5$. Pripadne vrijednosti nepoznanice y su:

$$y_1 = \frac{3}{x_1} = \frac{3}{-1.5} = -\frac{3}{1.5} = -2$$
$$y_2 = \frac{3}{x_2} = \frac{3}{1.5} = \frac{3}{1.5} = 2$$

Nadalje, iz $t = 4$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo:

$$x^2 = 4,$$

otkuda slijedi $x_3 = -2$ i $x_4 = 2$. Pripadne vrijednosti nepoznanice y su:

$$y_3 = \frac{3}{x_3} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2} = -1.5$$
$$y_4 = \frac{3}{x_4} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Dakle, zadani sustav ima ukupno četiri rješenja: $(-1.5, -2)$, $(1.5, 2)$, $(-2, 1.5)$ i $(2, 1.5)$.

250. *Odredite nultočke kvadratne funkcije* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *ako je* $f(-2) = 4$, $f(1) = -2$ i $f(0) = -2$.

Rješenje: U izraz $f(x) = ax^2 + bx + c$ uvrstimo redom $x = -2$, $x = 0$ i $x = 1$. Dobivamo:

$$f(-2) = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c$$
$$f(0) = a \cdot (0)^2 + b \cdot (0) + c$$
$$f(1) = a \cdot (1)^2 + b \cdot (1) + c$$

Kako je $f(-2) = 4$, $f(1) = -2$ i $f(0) = -2$, uvrštavanjem dobivamo:

$$4a - 2b + c = 4$$
$$c = -2$$
$$a + b + c = -2$$

Iz druge jednadžbe je $c = -2$, što uvršteno u prvu i treću jednadžbu sustava daje:

$$\begin{aligned} 4a - 2b - 2 &= 4 \\ a + b - 2 &= -2 \end{aligned}$$

otkuda se sređivanjem dobiva

$$\begin{aligned} 2a - b &= 3 \\ a + b &= 0 \end{aligned}$$

Zbrajanjem tih jednadžbi dobije se

$$3a = 3$$

pa je $a = 1$. Potom iz $a + b = 0$ slijedi $b = -a = -1$. Prema tome, kvadratna funkcija glasi:

$$f(x) = 1 \cdot x^2 + (-1) \cdot x + (-2),$$

odnosno

$$f(x) = x^2 - x - 2.$$

Njezine nultočke dobijemo tako da izraz po kojemu računamo funkciju $f(x)$ izjednačimo s nulom:

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Rješenja te kvadratne jednadžbe su $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$, i to su tražene nultočke.

251. *Riješite nejednadžbu*:

$$\frac{x+3}{x^2+2x+1} \geq 1$$

Rješenje: Zadanu nejednadžbu najprije transformirajmo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} &\frac{x+3}{x^2+2x+1} \geq 1 \\ &\frac{x+3}{x^2+2x+1} - 1 \geq 0 \\ &\frac{x+3-(x^2+2x+1)}{x^2+2x+1} \geq 0 \\ &\frac{x+3-x^2-2x-1}{x^2+2x+1} \geq 0 \\ &\frac{-x^2-x+2}{x^2+2x+1} \geq 0 \\ &\frac{-x^2-x+2}{(x+1)^2} \geq 0 \end{aligned}$$

Primijetimo da je nazivnik posljednjega razlomka uvijek nenegativan (jednak nuli ili strogo veći od nje), pa je jedini zahtjev na izraz u njemu taj da navedeni izraz ne smije biti jednak nuli. Da bi vrijednost cijeloga razlomka bila nenegativna, i brojnik mora biti nenegativan. Stoga dobivamo sustav:

$$-x^2 - x + 2 \geq 0$$
$$(x + 1)^2 \neq 0$$

Prva nejednadžba je kvadratna nejednadžba čije je rješenje $x \in [-2, 1]$ (nultočke pripadne kvadratne funkcije su $x_1 = -2$ i $x_2 = 1$, a njezin je graf parabola okrenuta prema dolje, pa funkcija poprima nenegativne vrijednosti za x – eve koji se nalaze između njezinih nultočaka). Iz druge nejednakosti slijedi $x \neq -1$. Presjek dobivenih skupova jest skup $[-2, 1] \setminus \{-1\}$, i to je skup svih rješenja zadane nejednadžbe.

252. *Riješite nejednadžbu*:

$$\frac{x^2}{2x - x^2} \geq 1$$

<u>Rješenje</u>: Zadanu nejednadžbu najprije transformirajmo na sljedeći način:

$$\frac{x^2}{2x - x^2} \geq 1$$
$$\frac{x^2}{2x - x^2} - 1 \geq 0$$
$$\frac{x^2 - (2x - x^2)}{2x - x^2} \geq 0$$
$$\frac{x^2 - 2x + x^2}{2x - x^2} \geq 0$$
$$\frac{2x^2 - 2x}{2x - x^2} \geq 0 \qquad / : 2$$
$$\frac{x^2 - x}{2x - x^2} \geq 0$$

Razlikujemo dva slučaja:

1.) $x^2 - x \geq 0$
$2x - x^2 > 0$

Rješavanjem prve kvadratne nejednadžbe dobivamo $x \in \langle -\infty, 0] \cup [1, +\infty\rangle$, a druge $x \in \langle 0, 2\rangle$. Presjek tih skupova jest poluzatvoreni interval $[1, 2\rangle$.

2.) $x^2 - x \leq 0$
$2x - x^2 < 0$

Rješavanjem prve kvadratne nejednadžbe dobivamo $x \in [0, 1]$, a druge $x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$. Presjek tih skupova jest prazan skup $\emptyset$.

Stoga je skup svih rješenja zadane jednadžbe poluzatvoreni interval $[1, 2\rangle$.

253. *Riješite nejednadžbu*:

$$\frac{x + 2}{x^2 + 3x + 2} \geq 1$$

<u>Rješenje</u>: Zadanu nejednadžbu najprije transformirajmo na sljedeći način:

$$\frac{x+2}{x^2+3x+2} \geq 1$$
$$\frac{x+2}{x^2+3x+2} - 1 \geq 0$$
$$\frac{x+2-(x^2+3x+2)}{x^2+3x+2} \geq 0$$
$$\frac{x+2-x^2-3x-2}{x^2+3x+2} \geq 0$$
$$\frac{-x^2-2x}{x^2+3x+2} \geq 0 \quad / : (-1)$$
$$\frac{x^2+2x}{x^2+3x+2} \leq 0$$

Razlikujemo dva slučaja:

1.) $x^2 + 2x \leq 0$
$x^2 + 3x + 2 > 0$

Rješavanjem prve kvadratne nejednadžbe dobivamo $x \in$ [-2, 0], a druge $x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle -1, +\infty\rangle$. Presjek tih skupova jest skup $\langle -1, 0]$.

2.) $x^2 + 2x \geq 0$
$x^2 + 3x + 2 < 0$

Rješavanjem prve kvadratne nejednadžbe dobivamo $x \in \langle -\infty, -2] \cup [0, +\infty\rangle$, a druge $x \in \langle -2, -1\rangle$. Presjek tih skupova jest prazan skup $\varnothing$.

Stoga je skup svih rješenja zadane jednadžbe poluotvoreni interval $\langle -1, 0]$.

254. *Broj* –2 *dvostruki je korijen polinoma drugoga stupnja*, *a vrijednost polinoma u točki* $x = 0$ *iznosi* 2. *Odredite taj polinom.*

Rješenje: To što je (–2) dvostruki korijen polinoma drugoga stupnja znači da taj polinom možemo zapisati u obliku

$$p(x) = a \cdot (x + 2)^2,$$

gdje je $a \in \mathbf{R}$ realni parametar. Vrijednost parametra a odredit ćemo iz činjenice da vrijednost polinoma u točki $x = 0$ iznosi 2, što znači da je $p(0) = 2$. Uvrstimo li $x = 0$ u jednakost

$$p(x) = a \cdot (x + 2)^2,$$

dobit ćemo:

$$p(0) = a \cdot (0 + 2)^2,$$

otkuda je, zbog $p(0) = 2$,

$$2 = 4a,$$

te je $a = \frac{1}{2}$. Tako konačno imamo:

$$p(x) = \frac{1}{2} \cdot (x+2)^2,$$
$$p(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 4x + 4),$$
$$p(x) = \frac{1}{2} x^2 + 2x + 2.$$

255. *Opseg pravokutnoga trokuta jednak je* 20 cm, *a jedan je njegov šiljasti kut* 5 *puta veći od drugoga. Izračunajte površinu toga trokuta.*

Rješenje: Neka su standardno a i b duljine kateta toga trokuta, α i β redom tim katetama nasuprotni kutovi, a c duljina hipotenuze toga trokuta. Zbroj dvaju šiljastih kutova u pravokutnom trokutu jednak je 90°, što znači da vrijedi jednakost

$$\alpha + \beta = 90°.$$

No, u zadatku je navedeno da je jedan šiljasti kut 5 puta veći od drugoga. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je kut α 5 puta veći od kuta β, što možemo zapisati kao:

$$\alpha = 5 \cdot \beta$$

Kad tu jednakost uvrstimo u jednakost

$$\alpha + \beta = 90°,$$

dobivamo linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom:

$$5 \cdot \beta + \beta = 90°,$$

otkuda je $\beta = 15°$. Nadalje, iz

$$\sin\beta = \frac{b}{c}, \quad \cos\beta = \frac{a}{c}$$

slijedi

$$b = c \cdot \sin\beta,$$
$$a = c \cdot \cos\beta$$

Uvrstimo te izraze u izraz za opseg O zadanoga trokuta:

$$O = a + b + c$$

pa dobijemo:

$$O = c \cdot \cos\beta + c \cdot \sin\beta + c,$$

otkuda je

$$c = \frac{O}{1 + \sin\beta + \cos\beta}$$

Tako sada imamo:

$$P = \frac{1}{2} ab$$
$$P = \frac{1}{2} \cdot (c \cdot \cos\beta) \cdot (c \cdot \sin\beta)$$
$$P = \frac{1}{2} \cdot c^2 \cdot (\cos\beta \cdot \sin\beta)$$
$$P = \frac{1}{4} \cdot c^2 \cdot \sin(2\beta)$$
$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{O^2}{(1+\sin\beta+\cos\beta)^2} \cdot \sin(2\beta)$$
$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{O^2}{1+\sin^2\beta+\cos^2\beta+2\sin\beta+2\cos\beta+2\sin\beta\cos\beta} \cdot \sin(2\beta)$$
$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{O^2}{1+1+2\sin\beta+2\cos\beta+\sin(2\beta)} \cdot \sin(2\beta)$$
$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{O^2}{2+2\sin\beta+2\cos\beta+\sin(2\beta)} \cdot \sin(2\beta)$$
$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{O^2}{2+2\cdot(\sin\beta+\cos\beta)+\sin(2\beta)} \cdot \sin(2\beta)$$
$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{O^2}{2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\cos(45°-\beta)+\sin(2\beta)} \cdot \sin(2\beta)$$

U taj izraz uvrstimo O = 20 cm i β = 15°, pa dobijemo:

$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{400}{2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\cos(45^\circ-15^\circ)+\sin(2\cdot15^\circ)} \cdot \sin(2\cdot15^\circ)$$
$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{400}{2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\cos(30^\circ)+\sin(30^\circ)} \cdot \sin(30^\circ)$$
$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{400}{2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}$$
$$P = \frac{1}{8} \cdot \frac{400}{2+\sqrt{6}+\frac{1}{2}}$$
$$P = \frac{1}{8} \cdot \frac{800}{4+2\sqrt{6}+1}$$
$$P = \frac{100}{5+2\sqrt{6}} = \frac{100\cdot(5-2\sqrt{6})}{(5+2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})} = \frac{100\cdot(5-2\sqrt{6})}{25-24}$$
$$P = 100\cdot(5-2\sqrt{6}) = \left[10\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right]^2 \text{ cm}^2$$

ili približno

$$P \approx 10.1020514433643803605431850588217 \text{ cm}^2.$$

256. *Zbroj duljina kateta pravokutnoga trokuta iznosi* 13 cm, *a površina trokuta* 20 cm^2. *Izračunajte kutove toga trokuta.*

Rješenje: Standardno pretpostavimo da su duljine kateta trokuta a i b, te da su njima nasuprotni kutovi redom α i β. Podatake iskazane u zadatku možemo zapisati u obliku sljedećih jednakosti:

$$a + b = 13$$
$$\frac{ab}{2} = 20$$

odnosno,

$$a + b = 13$$
$$ab = 40$$

Prema Vièteovim formulama slijedi da su duljine kateta rješenja kvadratne jednadžbe

$$t^2 - 13t + 40 = 0.$$

Rješavanjem dobijemo $t_1 = 5$, $t_2 = 8$ pa je $a = 5$ cm i $b = 8$ cm (ili obrnuto). Koristeći funkciju tangens izračunavamo veličinu kuta α:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{8}$$
$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{5}{8}$$
$$\alpha = 32.005383208083495560790645750404 7^{\circ}$$
$$\alpha = 32^{\circ}19''$$

Tako je

$$\beta = 90° - \alpha,$$
$$\beta = 90° - 32°19''$$
$$\beta = 57°59'41''.$$

Prema tome, kutovi zadanoga trokuta su 90°, 57°59'41'' i 32°18''.

257. *U kružnicu polumjera* 30 cm *upisan je jednakokračan trokut čiji je kut uz osnovicu jednak* 50°. *Kolika je površina toga trokuta*?

Rješenje: Zadanu kružnicu možemo shvatiti kao kružnicu opisanu jednakokračnom trokutu čiju površinu tražimo. Njezin je polumjer, dakle, $R = 30$ cm. Kut koji zatvaraju krakovi trokuta jednak je

$$\alpha = 180° - (50° + 50°) = 80°$$

Tako iz relacije

$$2R = \frac{a}{\sin \alpha}$$

dobijemo

$$a = 2R \sin \alpha,$$
$$a = 60 \sin 80°$$

Povucimo iz vrha *A* nasuprot osnovici *a* visinu na osnovicu *BC* i neka je *N* nožište te osnovice. Trokut *BNA* (ili *CAN*, svejedno) je pravokutan. Vrh *N* je vrh pravoga kuta, kut kod vrha *B* jednak je 50°, a duljina stranice *BN* jednaka je

$$|BN| = \frac{a}{2} = 30 \sin 80°$$

Stoga je duljina *v* visine *AN* jednaka

$$v = |AN| = |BN| \text{ tg } 50°$$
$$v = 30 \sin 80° \text{ tg } 50°$$

pa je tražena površina trokuta jednaka

$$P = \frac{1}{2} av$$
$$P = \frac{1}{2} \cdot 60 \sin 80^{\circ} \cdot 30 \sin 80° \text{tg} 50°$$
$$P = 900 \cdot \sin^2 80° \cdot \text{tg} 50°$$
$$P \approx 1040{,}2360422075381832999135487375 9 \text{ cm}^2$$

258. *Odredite kutove pravokutnoga trokuta kojemu je hipotenuza trostruko dulja od jedne katete.*

Rješenje: Podatak da je hipotenuza *c* pravokutnoga trokuta trostruko dulja od jedne katete (bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je to kateta *a*) zapišimo u obliku jednakosti:

$$c = 3a.$$

Iz te je jednakosti

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{3}.$$

No, prema definiciji trigonometrijskih funkcija pravokutnoga trokuta, omjer $\frac{a}{c}$ jednak je sinusu kuta nasuprot kateti *a*. Označimo li taj kut s α, posljednju jednakost možemo zapisati u obliku:

$$\sin \alpha = \frac{1}{3}$$

Odavde je

$$\alpha = 19.471220634490691369245999339962 4°,$$

odnosno

$$\alpha = 19°28'16''.$$

Drugi šiljasti kut toga trokuta iznosi

$$\beta = 90° - \alpha$$
$$\beta = 90° - 19°28'16''$$
$$\beta = 60°31'44''$$

Dakle, traženi kutovi su 90°, 60°31'44" i 19°28'16".

259. *Obodni kut nad tetivom kružnice čiji je polumjer* 3 cm *iznosi* 40°. *Izračunajte duljinu te tetive.*

Rješenje: Neka je S središte kružnice. Označimo tu tetivu s AB, njezin središnji kut s α, a njezin obodni kut s β. Trokut ABS je jednakokračan. Duljine njegovih krakova jednake su polumjeru kružnice, a tražena duljina tetive jednaka je duljini njegove osnovice. Iz središta S povucimo okomicu na tetivu i neka je N nožište te okomice. Trokut ANS (ili NBS, svejedno) je pravokutan. Kut pri vrhu S toga trokuta jednak je $\frac{\alpha}{2}$, duljina njegove katete AN jednaka je polovici tražene duljine tetive, a duljina njegove hipotenuze AS jednaka je polumjeru kružnice. Kako je

$$|AN| = |AS| \sin \frac{\alpha}{2}$$

slijedi da je

$$|AB| = 2 \cdot |AN|$$
$$|AB| = 2 \cdot |AS| \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

No, prema poučku o obodnom i središnjem kutu nad istom tetivom, obodni je kut jednak polovici središnjega, što znači da vrijedi

$$\beta = \frac{\alpha}{2}$$

Tako konačno imamo:

$$|AB| = 2 \cdot |AS| \cdot \sin \beta,$$

pa uvrštavanjem $|AS| = r = 3$ cm, $\beta = 40°$, dobivamo:

$$|AB| \approx 3{,}8567256581192359579358604594 4358 \text{ cm.}$$

260. *Zadana je kružnica sa središtem u točki S i polumjerom r* = 9 cm. *Njezina tetiva AB duljine* $9\sqrt{2}$ cm *podijeljena je točkama M i N na tri sukladna dijela. Izračunajte kut* $\angle MSN$.

Rješenje: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je M točka na tetivi AB bliža točki A, a N točka na toj tetivi bliža točki B. Uočimo da je trokut ABS jednakokračan pravokutan trokut s pravim kutom pri vrhu S. Naime, vrijedi:

$$|AS|^2 + |BS|^2 = 9^2 + 9^2 = 81 + 81 = 162 = |AB|^2.$$

Zbog toga su kutovi pri vrhovima A i B jednaki 45°. Promotrimo trokute MAS i BNS. Budući da točke M i N dijele tetivu AB na tri sukladna dijela, vrijedi:

$$|AM| = |MN| = |NB| = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \text{ cm.}$$

Nadalje, $|AS| = |BS| = r = 9$ cm, te $\angle SAM = \angle SBN = 45°$. Zaključujemo da se trokutovi MAS i BNS podudaraju u dvije stranice i kutu između njih, pa su, prema puočku $S – K – S$, oni sukladni. Odavde zaključujemo i da je

$$|SM| = |SN|.$$

Izračunajmo duljinu dužine *SM*. Primijenit ćemo kosinusov puočak na trokut *MAS*:

$$|SM|^2 = |AS|^2 + |AM|^2 - 2 \cdot |AS| \cdot |AM| \cdot \cos \angle SAM,$$
$$|SM|^2 = 9^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot 9 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \cos 45°,$$
$$|SM|^2 = 81 + 18 - 2 \cdot 9 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$|SM|^2 = 81 + 18 - 54,$$
$$|SM|^2 = 45.$$

Traženi ćemo kut izračunati primijenjujući kosinusov poučak na trokut *MNS*. Označimo li ga s α, imamo:

$$|MN|^2 = |SM|^2 + |SN|^2 - 2 \cdot |SM| \cdot |SN| \cdot \cos \alpha,$$

što, zbog $|SM| = |SN|$, možemo zapisati u obliku

$$|MN|^2 = |SM|^2 + |SM|^2 - 2 \cdot |SM| \cdot |SM| \cdot \cos \alpha,$$

odnosno

$$|MN|^2 = 2|SM|^2 - 2 \cdot |SM|^2 \cdot \cos \alpha,$$

otkuda je

$$\cos\alpha = \frac{2 \cdot |SM|^2 - |MN|^2}{2 \cdot |SM|^2}$$
$$\cos\alpha = \frac{2 \cdot 45 - (3\sqrt{2})^2}{2 \cdot 45}$$
$$\cos\alpha = \frac{2 \cdot 45 - 18}{2 \cdot 45}$$
$$\cos\alpha = \frac{72}{90}$$
$$\cos\alpha = \frac{4}{5}$$

Tako je konačno

$$\alpha = 36.869897645844021296855612559093 4°,$$

odnosno

$$\alpha = 36°52'12''.$$

261. *Omjer duljina kateta pravokutnoga trokuta jednak je* 3 : 8. *Duljina visine na hipotenuzu iznosi* 12 cm. *Izračunajte duljinu hipotenuze.*

Rješenje: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a : b = 3 : 8$. Prema definiciji omjera, tada postoji realan broj $k > 0$ takav da je $a = 3k$, $b = 8k$. Izrazimo i duljinu hipotenuze c pomoću k primijenjujući Pitagorin teorem:

$$c^2 = a^2 + b^2 = (3k)^2 + (8k)^2 = 9k^2 + 64k^2 = 73k^2,$$

pa je

$$c = \sqrt{73} \cdot k.$$

Označimo li s P površinu trokuta, možemo je izračunati na dva načina: kao poluumnožak duljina kateta a i b:

$$P = \frac{1}{2} ab$$

ili kao poluumnožak duljine hipotenuze c i visine v na hipotenuzu:

$$P = \frac{1}{2} cv$$

Lijeve strane tih jednakosti su jednake, pa moraju biti i desne. Odatle slijedi:

$$ab = cv.$$

U tu jednakost uvrstimo $a = 3k$, $b = 8k$, $c = \sqrt{73} \cdot k$ i $v = 12$ cm, pa dobijemo:

$$3k \cdot 8k = \sqrt{73} \cdot k \cdot 12$$

Budući da je $k > 0$, tu jednakost podijelimo s k i dobijemo:

$$24k = 12\sqrt{73},$$

otkuda je

$$k = \frac{12}{24}\sqrt{73} = \frac{1}{2}\sqrt{73}$$

Konačno je

$$c = \sqrt{73} \cdot k,$$
$$c = \sqrt{73} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{73} = \frac{1}{2} \cdot 73 = \frac{73}{2} = 36.5 \text{ cm}$$

262. *Na kružnici polumjera* $r = 5$ cm *povučena je tetiva duljine* $l = 3$ cm. *Izračunajte obodni kut nad tom tetivom.*

Rješenje: Neka je S središte kružnice, a AB povučena tetiva. Trokut ABS je jednakokračan. Duljine njegovih krakova jednake su polumjeru kružnice, a duljina njegove osnovice jednaka je duljini tetive. Označimo s α kut pri vrhu S u tom trokutu. α je središnji kut nad tetivom AB, a možemo ga izračunati rabeći kosinusov poučak:

$$|AB|^2 = |AS|^2 + |BS|^2 - 2 \cdot |AS| \cdot |BS| \cdot \cos \alpha,$$

što, zbog $|AS| = |BS| = r$ i $|AB| = l$, možemo zapisati u obliku

$$l^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cdot \cos \alpha,$$

a odavde je

$$\cos\alpha = \frac{2r^2 - l^2}{2r^2}$$

Uvrštavanjem $r = 5$ i $l = 3$ dobivamo:

$$\cos\alpha = \frac{2 \cdot 5^2 - 3^2}{2 \cdot 5^2}$$
$$\cos\alpha = \frac{2 \cdot 25 - 9}{2 \cdot 25}$$
$$\cos\alpha = \frac{41}{50}$$

Odatle slijedi

$$\alpha = 34.91520624744418458049209158488 99°.$$

Traženi je obodni kut jednak polovici središnjega kuta, odnosno polovici kuta α:

$$\beta = \frac{\alpha}{2} = 17.457603123722092290246045792444 9°,$$

odnosno

$$\beta = 17°27'27''.$$

263. *Duljina dijagonale pravilnoga peterokuta jednaka je* 5 cm. *Izračunajte površinu peterokuta.*

Rješenje: Budući da je riječ o pravilnomu peterokutu, broj njegovih stranica jednak je n = 5. Duljina njegove dijagonale jednaka je promjeru opisane kružnice:

$$2r = 5,$$

otkuda slijedi da je polumjer r peterokutu opisane kružnice jednak

$$r = 2.5 \text{ cm}.$$

Nadalje, središnji kut peterokuta jednak je

$$\alpha = \frac{360°}{n} = \frac{360°}{5} = 72°$$

Tako je površina zadanoga peterokuta jednaka

$$P = \frac{1}{2} n r^2 \sin\alpha$$
$$P = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2.5^2 \sin 72°$$
$$P \approx 14{,}860258067111774564319364584052 8 \text{ cm}^2$$

264. *Dvije se kružnice diraju izvana. Njihove se zajedničke vanjske tangente sijeku pod kutom od* 42°. *Ako je polumjer veće kružnice jednak* 10 cm, *izračunajte polumjer manje kružnice.*

Rješenje: Neka su S_1 i R središte, odnosno polumjer veće kružnice, a S_2 i r središte, odnosno polumjer manje kružnice. Neka su t_1 i t_2 njihove zajedničke vanjske tangente i neka je S njihovo sjecište. Označimo još s D_1 diralište tangente t_1 i veće kružnice, D_2 diralište tangente t_2 i veće kružnice, D_3 diralište tangente t_1 i manje kružnice, D_4 diralište tangente t_2 i manje kružnice, te D diralište zadanih kružnica. (Nacrtajte sliku!) Tada je

$$\angle D_1SD_2 = \angle D_3SD_4 = 42°.$$

Pokažimo najprije da su točke S, S_1, D i S_2 kolinearne (leže na jednom pravcu). Da točke S_1, D i S_2 leže na jednom pravcu slijedi izravno iz definicije vanjskoga dirališta dviju kružnica. Treba još vidjeti da i točka S leži na tom pravcu.
U tu svrhu uočimo trokute D_1S_1S i S_1D_2S. Ti trokuti su pravokutni (pravi kutovi su im kod vrhova D_1 i D_2, a ti kutovi su pravi jer spojnica središta s diralištem kružnice siječe tangentu pod pravim kutom), imaju zajedničku hipotenuzu SS_1, dvije katete su im jednake: $|D_1S_1| = |D_2S_1| = R$, pa sukladnost slijedi izravno iz Pitagorina poučka i poučka S – S – S. No, to znači da je kut kod vrha S u trokutu D_1S_1S jednak kutu kod vrha S u trokutu S_1D_2S (nalaze se nasuprot jednakim katetama $|D_1S_1|$ i $|D_2S_1|$), a odatle slijedi da je pravac SS_1 simetrala kuta $\angle D_1SD_2$.
Na potpuno isti način (promatrajući trokute D_3S_2S i S_2D_4S) pokazuje se da je pravac SS_2 simetrala kuta $\angle D_3SD_4$. No, već smo zaključili da su kutovi $\angle D_1SD_2$ i $\angle D_3SD_4$ sukladni, pa zbog jedinstvenosti simetrale kuta slijedi da točke S, S_1 i S_2 leže na jednom pravcu i taj pravac je simetrala kuta kojega zatvaraju zajedničke vanjske tangente.
Iz netom dokazanoga izravno slijedi da su trokuti D_1S_1S i D_3S_2S slični (prema poučku K – K – K: imaju zajednički kut kod S, oba su pravokutna pa su im i preostali šiljasti kutovi jednaki). U pravokutnom trokutu D_3S_2S duljina hipotenuze SS_2 jednaka je

$$|SS_2| = \frac{|D_3S_2|}{\sin 21°} = \frac{r}{\sin 21°}$$

dok je u pravokutnom trokutu D_1S_1S duljina hipotenuze jednaka

$$|SS_1| = \frac{|D_1S_1|}{\sin 21°} = \frac{R}{\sin 21°}$$

No, zbog kolinearnosti točaka S, S_1, D i S_2 vrijedi jednakost:

$$|SS_1| = |SS_2| + |S_2D| + |DS_1|,$$

a kako je $|S_2D| = r$ i $|DS_1| = R$, uvrštavanjem dobivamo:

$$\frac{R}{\sin 21°} = \frac{r}{\sin 21°} + r + R$$

odnosno, množenjem sa sin 21°,

$$R = r + r \sin 21° + R \sin 21°,$$
$$r \cdot (1 + \sin 21°) = R \cdot (1 - \sin 21°)$$

i odatle konačno

$$r = R \cdot \frac{1 - \sin 21°}{1 + \sin 21°}$$

Uvrstimo li u ovu jednakost $R = 10$, dobivamo:

$$r = 4.7235511605635238125653214451505 1\text{ cm}$$

(ili približno $r \approx 4.72$ cm.)

265. *Polumjer kružnice jednak je* 8 cm. *Izračunajte šiljasti obodni kut nad tetivom udaljenom* 5 cm *od središta kružnice*.

Rješenje: Neka je S središte kružnice, a AB njezina tetiva. Trokut SAB je jednakokračan. Duljine njegovih krakova jednake su polumjeru kružnice, a duljina njegove osnovice duljini tetive. Duljina visine na osnovicu AB jednaka je udaljenosti tetive AB od središta kružnice. Ako s N označimo nožište te visine na osnovici AB, onda je trokut SAN pravokutan i duljine dviju njegovih stranica su:

$$|SN| = 5 \text{ cm},$$
$$|AS| = r = 8 \text{ cm}.$$

Kut kod vrha S u navedenom pravokutnom trokutu upravo je traženi obodni kut. Naime, on je polovica kuta ASB (jer je SN i simetrala kuta pri vrhu S u jednakokračnom trokutu SAB), a taj je kut središnji kut za tetivu AB. Stoga tvrdnja izlazi izravno iz poučka o obodnom i središnjem kutu.

Označimo li traženi kut s α, iz pravokutnoga trokuta SAN slijedi:

$$\cos\alpha = \frac{|SN|}{|AS|}$$
$$\cos\alpha = \frac{5}{8}$$

pa je traženi kut

$$\alpha = 51.31781254651056000906125162567 56°,$$

odnosno

$$\alpha = 51°19'4''.$$

266. *Razlika šiljastih kutova pravokutnoga trokuta jednaka je* 22°, *a razlika duljina kateta* 3 cm. *Izračunajte duljinu hipotenuze toga trokuta*.

Rješenje: Standardno označimo duljine kateta pravokutnoga trokuta s a i b, njima nasuprotne šiljaste kutove redom s α i β, a duljinu hipotenuze s c. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je

$$\alpha - \beta = 22°.$$

Kako se nasuprot većem kutu nalazi dulja stranica, iz gornje pretpostavke slijedi da je $\alpha > \beta$, što povlači $a > b$. Stoga podatak o razlici kateta možemo zapisati jedino u obliku

$$a - b = 3.$$

Iskoristimo činjenicu da je u pravokutnom trokutu zbroj šiljastih kutova jednak 90°:

$$\alpha + \beta = 90°.$$

Tako imamo sustav od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\alpha - \beta = 22°$$
$$\alpha + \beta = 90°$$

Zbrajanjem tih jednadžbi dobivamo

$$2\alpha = 112°,$$

pa je $\alpha = 56°$. Izrazimo duljine kateta a i b pomoću duljine hipotenuze c i neke trigonometrijske funkcije kuta α:

$$a = c \cdot \sin\alpha$$
$$b = c \cdot \cos\alpha$$

Uvrštavanjem tih izraza u jednakost

$$a - b = 3$$

dobivamo:

$$c \cdot \sin\alpha - c \cdot \cos\alpha = 3,$$
$$c \cdot (\sin\alpha - \cos\alpha) = 3$$

i konačno

$$c = \frac{3}{\sin\alpha - \cos\alpha}.$$

U ovu jednakost uvrstimo $\alpha = 56°$ i dobijemo traženu duljinu hipotenuze:

$$c = 11.1175070094227108209789795131007 \text{ cm}$$

ili približno

$$c \approx 11.12 \text{ cm}.$$

267. *Kut nasuprot osnovici jednakokračnoga trokuta iznosi* 35°. *Ako je opseg trokuta jednak* 17 cm, *izračunajte površinu toga trokuta*.

Rješenje: Označimo zadani trokut s ABC tako da je A vrh nasuprot osnovici BC i neka je α kut pri vrhu A. U zadatku je navedeno da je

$$\alpha = 35°.$$

Povucimo visinu v iz vrha A na osnovicu BC i neka je N njezino nožište na osnovici. Trokut BNA je pravokutan. Njegove katete su visina v, dužina BN čija je duljina jednaka polovici osnovice BC, a hipotenuza krak AB. Kut pri vrhu A toga trokuta jednak je polovici kuta α jer je visina iz vrha A na osnovicu BC jednakokračnoga trokuta ujedno i simetrala kuta pri vrhu A Iz navedenoga trokuta proizlazi:

$$|AB| = \frac{|AN|}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{v}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$
$$|BN| = |AN| \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = v \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$
$$|BC| = 2|BN| = 2v \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

Budući da je opseg O trokuta ABC jednak

$$O = |BC| + |CA| + |AB|,$$

što zbog $|CA| = |AB|$ (duljine krakova jednakokračnoga trokuta su jednake) možemo zapisati u obliku

$$O = |BC| + 2 \cdot |AB|,$$

uvrštavanjem

$$|AB| = \frac{v}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$|BC| = 2|BN| = 2v \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

u tu jednakost dobivamo:

$$O = 2v \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 2 \frac{v}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$O = v \cdot (2 \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{2}{\cos \frac{\alpha}{2}})$$

$$v = \frac{O \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} + 2}$$

Površina trokuta ABC dana je izrazom

$$P = \frac{1}{2} |BC| \cdot v$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2v \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot v$$

$$P = v^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

Uvrstimo u ovu formulu dobiveni izraz za v, pa imamo:

$$P = \left(\frac{O \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} + 2} \right)^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

Preostaje nam uvrstiti $O = 17$ cm i $\alpha = 35°$ u gornju formulu i izračunati vrijednost dobivenoga izraza. Dobiva se

$$P = 12.24731826575518270540038438 2106 \text{ cm}^2.$$

268. *Izračunajte površinu pravilnoga deveterokuta kojemu je polumjer upisane kružnice jednak* 3 cm.

<u>Rješenje:</u> Pravilan deveterokut ima $n = 9$ stranica. To znači da je njegov središnji kut jednak

$$\alpha = \frac{360°}{n} = \frac{360°}{9} = 40°$$

pa, budući znamo veličinu polumjera upisane kružnice

$$\rho = 3 \text{ cm},$$

njegovu površinu računamo prema formuli

$$P = n\rho^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

U tu formulu uvrstimo $n = 9$, $\rho = 3$ i $\alpha = 40°$, pa nakon kratkoga računa konačno dobijemo

$$P = 29.4815889755623912694348785049236 \text{ cm}^2.$$

269. *Izračunajte duljinu hipotenuze pravokutnoga trokuta ako je duljina visine na nju* 11 cm, *a šiljasti kut* $\beta = 48°50'$.

Rješenje: Označimo s c traženu duljinu hipotenuze, a s a i b duljine kateta kojima su nasuprotni kutovi redom α i β. U svakom pravokutnom trokutu vrijedi:

$$a = c \cdot \cos \beta$$
$$b = c \cdot \sin \beta$$

U rješenju zadatka 261. pokazali smo i da u svakom pravokutnom trokutu vrijedi jednakost:

$$ab = cv,$$

gdje je v duljina visine na hipotenuzu. U tu jednakost uvrstimo

$$a = c \cdot \cos \beta$$
$$b = c \cdot \sin \beta$$

pa dobijemo:

$$c^2 \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta = cv,$$

pa dijeljenjem cijele jednadžbe s $c \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta$ dobivamo:

$$c = \frac{v}{\cos\beta \sin\beta}$$

što je zbog

$$\cos \beta \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}\sin(2\beta)$$

ekvivalentno s

$$c = \frac{2v}{\sin(2\beta)}$$

Preostaje nam u tu formulu uvrstiti $v = 11$ cm i

$$\beta = 48°50' = 48° + \left(\frac{50}{60}\right)^{\circ} = 48° + 0{,}83333333333333333333333333333333°$$
$$\beta = 48{,}83333333333333333333333333333333°$$

te konačno dobiti:

$$c = 22{,}198432184706632161794155422051 5 \text{ cm}$$

ili približno

$$c \approx 22.2 \text{ cm}.$$

270. *Kut nasuprot osnovici jednakokračnoga trokuta iznosi* 44°20'. *Ako je krak toga trokuta za* 3 cm *dulji od osnovice*, *izračunajte površinu trokuta*.

Rješenje: Označimo zadani trokut s *ABC* tako da je *A* vrh nasuprot osnovici *BC* i neka je α kut pri vrhu *A*. U zadatku je navedeno da je

$$\alpha = 44°20'.$$

Povucimo visinu *v* iz vrha *A* na osnovicu *BC* i neka je *N* njezino nožište na osnovici. Trokut *BNA* je pravokutan. Njegove katete su visina *v*, dužina *BN* čija je duljina jednaka polovici osnovice *BC* i krak *AB*. Kut pri vrhu *A* toga trokuta jednak je polovici kuta α jer je visina iz vrha *A* na osnovicu *BC* jednakokračnoga trokuta ujedno i simetrala kuta pri vrhu *A* Iz navedenoga trokuta proizlazi:

$$|AB| = \frac{|AN|}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{v}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$
$$|BN| = |AN| \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = v \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$
$$|BC| = 2|BN| = 2v \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

Podatak da je krak za 3 cm dulji od osnovice možemo zapisati u obliku jednakosti

$$|AB| - |BC| = 3$$

pa uvrštavanjem

$$|AB| = \frac{|AN|}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{v}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$
$$|BC| = 2|BN| = 2v \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

u tu jednakost dobivamo:

$$\frac{v}{\cos\frac{\alpha}{2}}-2v\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=3$$

$$\frac{v}{\cos\frac{\alpha}{2}}-2v\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=3$$

$$\frac{v-2v\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=3$$

$$v\cdot\left(\frac{1-2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)=3$$

$$v=\frac{3\cos\frac{\alpha}{2}}{1-2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

U rješenju zadatka 267. izveli smo formulu za površinu jednakokračnoga trokuta ako su zadani duljina visine na osnovicu i kut nasuprot osnovici:

$$P=v^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

U tu formulu uvrstimo dobiveni izraz za v, pa dobijemo

$$P=\left(\frac{3\cos\frac{\alpha}{2}}{1-2\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

Preostaje nam u tu formulu uvrstiti

$$\frac{\alpha}{2}=\frac{44°20'}{2}=22°10'=22°+\left(\frac{10}{60}\right)^{\circ}=22{,}1666666666666666666666666666667°$$

i konačno dobiti

$$P=52.2216477787566819455740350594427\text{ cm}^2.$$

271. *Polumjer kružnice iznosi* 5 cm. *Odredite duljinu tetive te kružnice kojoj pripada obodni kut od* 112°.

Rješenje: Određenosti radi, označimo sa S središte kružnice, a sa AB promatranu tetivu. Neka je C točka na kružnici takva da je $\angle ACB = 112°$. Primijetimo najprije da točka C i središte S leže na različitim stranama tetive AB. Naime, u suprotnom bi, prema poučku o obodnom i središnjem kutu, obodni kut iznosio najviše $\frac{180°}{2}=90°$ (taj slučaj nastupa ukoliko se tetiva AB podudara s promjerom kružnice). Zato povucimo promjer zadane kružnice kojemu je jedan kraj u točki C i neka je D njegov drugi kraj. Četverokut $ACBD$ je tetivni četverokut i znamo tri kuta toga četverokuta: kutovi kod vrhova A i B su pravi prema Talesovu poučku (kutovi nad promjerom CD), a kut kod vrha C jednak je 112°. To znači da je kut kod vrha D jednak

$$\delta = 360° - (90° + 90° + 112°)$$
$$\delta = 68°$$

No, kut kod vrha D je također obodni kut nad tetivom AB, i to s iste strane tetive kao i središte kružnice S. Stoga je pripadni središnji kut $\angle ASB$ jednak

$$\alpha_1 = 2 \cdot 68°$$
$$\alpha_1 = 136°$$

Preostaje primijeniti kosinusov poučak na trokut ABS:

$$|AB|^2 = |AS|^2 + |BS|^2 - 2 \cdot |AS| \cdot |BS| \cdot \cos \alpha_1$$
$$|AB|^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos \alpha_1$$
$$|AB|^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos 136°,$$

pa se dobije

$$|AS| = 9.27183854566787400806474451136957 \text{ cm}$$

ili približno

$$|AS| \approx 9.27 \text{ cm}.$$

272. *U jednakostraničan trokut čija je visina duga* 18 cm *upisana je kružnica. Izračunajte duljinu kružnoga luka te kružnice koji se vidi iz jednoga vrha toga trokuta.*

Rješenje: Određenosti radi, neka je ABC jednakostraničan trokut, a S središte tom trokutu upisane kružnice. Bez smanjenja općenitosti odaberimo vrh C trokuta ABC i izračunajmo duljinu kružnoga luka upisane kružnice koji se vidi iz vrha C. Primijetimo da ta kružnica dira stranice trokuta u njihovim polovištima: P_1 na stranici AB, P_2 na stranici BC i P_3 na stranici AC, pa spojimo svako od njih s točkom S.

Iz vrha C vidi se luk $P_3P_1P_2$. Njegovu duljinu dobijemo ukoliko od opsega kružnice oduzmemo duljinu kružnoga luka P_2P_3. Polumjer toga kružnoga luka jednak je polumjeru kružnice, pa nam još treba njegov središnji kut. U tu svrhu promotrimo četverokut SP_2CP_3. Kutovi kod vrhova P_2 i P_3 toga četverokuta su pravi (jer su pravci CP_2 i CP_3 tangente upisane kružnice, pa s njezinim polumjerima SP_2, odnosno SP_3 tvore prave kutove), a kut kod vrha C jednak je kutu kod vrha C u jednakostraničnom trokutu ABC. Kako sva tri kuta u jednakostraničnom trokutu iznose 60°, to je i kut kod vrha C jednak 60°. Tako je kut kod vrha S jednak

$$\alpha_1 = 360° - (90° + 90° + 60°)$$
$$\alpha_1 = 120°$$

Stoga je tražena duljina luka jednaka

$$l = 2r\pi - \frac{r\pi}{180} \cdot \alpha_1$$
$$l = 2r\pi - \frac{r\pi}{180} \cdot 120$$
$$l = 2r\pi - \frac{2r\pi}{3}$$

i konačno

$$l = \frac{4r\pi}{3}$$

Polumjer jednakostraničnom trokutu upisane kružnice jednak je jednoj trećini visine:

$$r = \frac{v}{3}$$

pa uvrštavanjem toga izraza u

$$l = \frac{4r\pi}{3}$$

dobijemo

$$l = \frac{4\frac{v}{3}\pi}{9}$$
$$l = \frac{4v\pi}{9}$$

Preostaje u posljednje dobiveni izraz uvrstiti v = 18 cm i konačno dobiti

$$l = 8\pi \text{ cm}.$$

273. *Duljina tetive neke kružnice jednaka je* $\frac{3}{5}$ *njezina promjera. Izračunajte obodni kut koji pripada toj tetivi.*

Rješenje: Određenosti radi, neka je S središte kružnice, a AB promatrana tetiva. Povucimo iz S okomicu na AB i neka ta okomica siječe tetivu AB u točki N. Trokut ABS je jednakokračan (jer je $|AS| = |BS| = r$ = polumjer kružnice), pa je N polovište tetive AB. Istodobno, spojnica SN je simetrala kuta kod vrha S trokuta ABS, a to je upravo središnji kut koji pripada tetivi AB. Stoga je kut kod vrha S u trokutu ANS (ili BNS, svejedno) jednak polovici središnjega kuta, a prema poučku o obodnom i središnjem kutu, ta polovica upravo je traženi obodni kut. Dakle, zapravo računamo veličinu kuta pri vrhu S trokuta ANS. Njegov je sinus jednak

$$\sin\beta = \frac{|AN|}{|AS|} = \frac{\frac{1}{2}|AB|}{|AS|} = \frac{|AB|}{2|AS|}$$

No, $|AS| = r$ pa je $2 \cdot |AS| = 2r$ duljina promjera kružnice. Stoga je sinus obodnoga kuta jednak omjeru duljine tetive $|AB|$ i promjera kružnice, a u zadatku je navedeno da je taj omjer jednak $\frac{3}{5}$. Preostaje nam, dakle, riješiti trigonometrijsku jednadžbu

$$\sin\beta = \frac{3}{5}$$

i dobiti

$$\beta = 36.8698976458440212968556125590934°,$$

odnosno

$$\beta = 36°52'12''.$$

(Rješenje trigonometrijske jednadžbe $\sin \beta = \frac{3}{5}$ koje se nalazi u drugom kvadrantu ne dolazi u obzir jer je taj kut tup, pa bi središnji kut – kao dvostruko veći kut od obodnoga – bio veći od 180°, pa točke A, B i S ne bi mogle tvoriti trokut.)

274. *Duljine dijagonala romba su* 11 cm *i* 16 cm. *Izračunajte kutove toga romba.*

Rješenje: Određenosti radi, neka je $ABCD$ zadani romb i neka je S sjecište njegovih dijagonala. Romb je četverokut s okomitim dijagonalama, i te se dijagonale raspolavljaju. Zbog toga je trokut ABS pravokutan. Duljine njegovih kateta su

$$|AS| = \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$$
$$|BS| = \frac{1}{2}|BD| = \frac{1}{2} \cdot 11 = 5.5$$

a duljina njegove hipotenuze jednaka je duljini stranice romba. Prema Pitagorinu poučku slijedi

$$|AB|^2 = |AS|^2 + |BS|^2$$
$$|AB|^2 = 8^2 + 5.5^2$$
$$|AB|^2 = 94.25$$

Kako bismo odredili kutove romba, primijenit ćemo kosinusov poučak na trokut ABD. Kut pri vrhu A toga trokuta upravo je šiljasti kut romba, pa primjenom kosinusova poučka dobivamo:

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \cos \alpha,$$

što, zbog $|AB| = |AD|$ (jer su sve stranice romba jednako duge), možemo zapisati u obliku

$$|BD|^2 = 2|AB|^2 - 2 \cdot |AB|^2 \cdot \cos \alpha,$$

a otuda je

$$\cos \alpha = \frac{2|AB|^2 - |BD|^2}{2|AB|^2}$$

U tu jednakost uvrstimo $|AB|^2 = 94.25$ i $|BD|^2 = 11^2 = 121$, pa dobijemo:

$$\cos \alpha = \frac{67.5}{188.5} = \frac{675}{1885} = \frac{135}{377}$$

te je

$$\alpha = 69.017045975336802632459278702792 4°,$$

odnosno

$$\alpha = 69°1'1''.$$

Sada je lako izračunati tupi kut romba:

$$\beta = 180° - \alpha,$$
$$\beta = 180° - 69°1'1''$$
$$\beta = 110°58'59''.$$

275. *Polumjer jednakokračnom trokutu opisane kružnice jednak je* 5 cm, *a kut uz osnovicu* 65°. *Izračunajte polumjer tom trokutu upisane kružnice.*

Rješenje: Označimo s a duljinu osnovice promatranoga jednakokračnoga trokuta, a s b duljinu svakoga od njegovih krakova. U skladu s tim, neka je β kut uz osnovicu trokuta i neka je v visina na osnovicu trokuta. Prema sinusovu poučku je

$$2R = \frac{b}{\sin \beta}$$

otkuda je

$$b = 2R \sin \beta.$$

No, s druge je strane

$$b = \frac{v}{\sin \beta}$$

pa uvrštavanjem

$$b = 2R \sin \beta$$

u tu jednakost dobijemo:

$$\frac{v}{\sin \beta} = 2R \sin \beta,$$

odnosno

$$v = 2R \sin^2 \beta.$$

Budući da vrijedi jednakost

$$\frac{a}{2} = b \cos \beta$$

uvrštavanjem izraza

$$b = 2R \sin \beta$$

dobivamo:

$$\frac{a}{2} = b \cos \beta$$
$$\frac{a}{2} = 2R \sin \beta \cos \beta$$

Polumjer ρ trokutu upisane kružnice računamo pomoću izraza:

$$\rho = \frac{P}{s}$$

Budući da vrijede formule

$$P = \frac{1}{2} a v = \frac{a}{2} \cdot v$$
$$s = \frac{a + b + b}{2} = \frac{a}{2} + b$$

to je

$$\rho = \frac{\frac{a}{2} \cdot v}{\frac{a}{2} + b}$$

Uvrstimo u tu formulu

$$\frac{a}{2} = 2R \sin\beta \cos\beta$$
$$v = 2R \sin^2\beta$$
$$b = 2R \sin\beta$$

pa dobijemo

$$\rho = \frac{2R\sin\beta \cdot \cos\beta \cdot 2R\sin^2\beta}{2R\sin\beta \cdot \cos\beta + 2R\sin\beta} \qquad / \frac{: 2R\sin\beta}{: 2R\sin\beta}$$
$$\rho = \frac{2R\cos\beta \cdot \sin^2\beta}{\cos\beta + 1}$$
$$\rho = \frac{2R\cos\beta \cdot (1 - \cos^2\beta)}{\cos\beta + 1}$$
$$\rho = \frac{2R\cos\beta \cdot (1 - \cos\beta)(1 + \cos\beta)}{\cos\beta + 1}$$
$$\rho = 2R\cos\beta - 2R\cos^2\beta$$

Preostaje nam uvrstiti R = 5 cm i β = 65°, te dobiti:

$$\rho = 2.4401206658396909934830019460136\text{2 cm}$$

ili približno

$$\rho \approx 2.44 \text{ cm.}$$

276. *Površina jednakokračnoga trokuta iznosi* 30 cm^2, *a kut nasuprot osnovici* 104°. *Izračunajte opseg ovoga trokuta.*

Rješenje: U rješenju zadatka 267. izveli smo sljedeću formulu koja određuje površinu jednakokračnoga trokuta ako su zadani opseg toga trokuta i kut nasuprot osnovici trokuta:

$$P=\left(\frac{O\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}+2}\right)^2\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

Iz te formule lagano izrazimo opseg O pomoću površine P i trigonometrijskih funkcija kuta α:

$$O=\sqrt{P\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}+2}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Preostaje nam u dobiveni izraz uvrstiti P = 30 cm^2 i α = 104°, te dobiti:

$$O = 28.12054206132953547810849810365 33\text{ cm}$$

ili približno

$$O \approx 28.12\text{ cm.}$$

277. *Koliki obodni kut pripada tetivi dugoj* 7 cm *u kružnici polumjera* 10 cm?

Rješenje: Određenosti radi, neka je S središte kružnice, a AB promatrana tetiva. Promotrimo trokut SAB. On je jednakokračan. Duljine krakova jednake su duljini polumjera kružnice, a duljina osnovice jednaka je duljini tetive AB. Kut kod vrha S toga trokuta je središnji kut za tetivu AB. Odredimo ga primjenom kosinusova poučka:

$$\cos\alpha=\frac{2r^2-|AB|^2}{2r^2}$$
$$\cos\alpha=\frac{2\cdot10^2-7^2}{2\cdot10^2}$$
$$\cos\alpha=\frac{151}{200}$$
$$\alpha=40.974630229445326933513163318875 6°$$
$$\alpha=40°58'29''$$

Prema poučku o obodnom i središnjem kutu, obodni je kut dvostruko manji od središnjega. Stoga je traženi obodni kut jednak

$$\beta=\frac{1}{2}\alpha=20°29'14''$$

278. *U trokutu ABC zadani su sljedeći elementi*: a = 13 cm, b = 7 cm, v_a = 6 cm. *Izračunajte duljinu stranice c*.

Rješenje: Najprije izračunamo sinus kuta γ:

$$\sin\gamma=\frac{v_a}{b}$$
$$\sin\gamma=\frac{6}{7}$$

Nakon toga računamo kosinus toga kuta:

$$\cos\gamma = \pm\sqrt{1-\sin^2\gamma}$$
$$\cos\gamma = \pm\sqrt{1-\left(\frac{6}{7}\right)^2}$$
$$\cos\gamma = \pm\sqrt{1-\frac{36}{49}}$$
$$\cos\gamma = \pm\sqrt{\frac{13}{49}}$$
$$\cos\gamma = \pm\frac{1}{7}\sqrt{13}$$

Uzmimo najprije da je

$$\cos\gamma = \frac{1}{7}\sqrt{13}$$

Prema kosinusovom poučku

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

tada je

$$c^2 = 13^2 + 7^2 - 2 \cdot 13 \cdot 7 \cdot \frac{1}{7}\sqrt{13}$$
$$c^2 = 218 - 26\sqrt{13}$$
$$c = 11.1470025943271529490232223226534 \text{ cm}$$
$$c \approx 11.15 \text{ cm}$$

Sada uzmimo da je

$$\cos\gamma = -\frac{1}{7}\sqrt{13}$$

pa prema istom obliku kosinusova poučka dobivamo:

$$c^2 = 13^2 + 7^2 + 2 \cdot 13 \cdot 7 \cdot \frac{1}{7}\sqrt{13}$$
$$c^2 = 218 + 26\sqrt{13}$$
$$c = 17.6562831072132427342272531360621 \text{ cm}$$
$$c \approx 17.66 \text{ cm}$$

Stoga postavljeni zadatak ima dva rješenja: $c_1 \approx 11.15$ cm i $c_2 \approx 17.66$ cm.

279. *Razlika kuta uz osnovicu i kuta pri vrhu jednakokračnoga trokuta iznosi* 12°. *Krak je za* 3 cm *dulji od osnovice trokuta. Izračunajte površinu ovoga trokuta.*

Rješenje: Neka je β kut uz osnovicu, a α kut nasuprot osnovici promatranoga jednakokračnoga trokuta. Podatak da je razlika tih dvaju kutova jednaka 12° možemo zapisati kao:

$$\beta - \alpha = 12°$$

Budući da je zbroj svih kutova u trokutu jednak 180°, mora vrijediti i jednakost:

$$\beta + \beta + \alpha = 180°,$$

tj.

$$2\beta + \alpha = 180°.$$

Tako smo dobili sustav od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= 12° \\ 2\beta + \alpha &= 180° \end{aligned}$$

Njihovim zbrajanjem dobivamo

$$3\beta = 192°,$$

pa je $\beta = 64°$. Sada je lako izračunati

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta - 12° \\ \alpha &= 64° - 12° \\ \alpha &= 52°. \end{aligned}$$

Tako smo zadatak sveli na zadatak 270. U njemu smo izveli sljedeću formulu:

$$P = \left(\frac{3\cos\frac{\alpha}{2}}{1 - 2\sin\frac{\alpha}{2}} \right)^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

(oprez s vrijednostima veličina: ako je krak dulji od osnovice za d cm, u brojniku razlomka u zagradi broj 3 valja zamijeniti s vrijednošću broja d!). U tu formulu uvrstimo $\alpha = 52°$ pa konačno dobijemo

$$P = 233.40840650637095535052962522448 9\text{ cm}^2$$

ili približno

$$P \approx 233.41\text{ cm}^2.$$

280. *Riješite jednadžbu*:

$$\left(\frac{25}{9}\right)^{-\frac{1}{2}x^2+1} = (0.6)^{|2x+1|}$$

Rješenje: Zadanu jednadžbu najprije transformirajmo na sljedeći način:

$$\left(\frac{25}{9}\right)^{-\frac{1}{2}x^2+1}=(0.6)^{|2x+1|}$$

$$\left[\left(\frac{5}{3}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}x^2+1}=\left(\frac{3}{5}\right)^{|2x+1|}$$

$$\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}x^2+1}=\left(\frac{3}{5}\right)^{|2x+1|}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2-2}=\left(\frac{3}{5}\right)^{|2x+1|}$$

Izjednačavanjem eksponenata dobivamo jednadžbu:

$$x^2 - 2 = |2x + 1|.$$

Razlikujemo dva slučaja:

1.) $2x + 1 \geq 0$

U ovome je slučaju $|2x + 1| = 2x + 1$ pa dobivamo jednadžbu:

$$x^2 - 2 = 2x + 1$$

koja je ekvivalentna jednadžbi

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su $x_1 = -1$ i $x_2 = 3$. Kako za $x_1 = -1$ ne vrijedi nejednakost $2x_1 + 1 \geq 0$, $x_1 = -1$ nije rješenje polazne jednadžbe. Za $x_2 = 3$ vrijedi nejednakost $2x_2 + 3 \geq 0$, pa je taj broj rješenje polazne jednadžbe.

2) $2x + 1 \leq 0$

U ovome je slučaju $|2x + 1| = -(2x + 1) = -2x - 1$ pa dobivamo jednadžbu:

$$x^2 - 2 = -2x - 1$$

koja je ekvivalentna jednadžbi

$$x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su $x_3 = -1 - \sqrt{2}$ i $x_4 = -1 + \sqrt{2}$. Kako za $x_4 = -1 + \sqrt{2}$ ne vrijedi nejednakost $2x_4 + 1 \leq 0$, $x_4 = -1 + \sqrt{2}$ nije rješenje polazne jednadžbe. Za $x_3 = -1 - \sqrt{2}$ vrijedi nejednakost $2x_2 + 3 \leq 0$, pa je taj broj rješenje polazne jednadžbe.

Zaključimo: Polazna jednadžba ima točno dva rješenja: $x_1 = -1 - \sqrt{2}$ i $x_2 = 3$.

281. *Riješite jednadžbu*:

$$3 \log x^2 - \log^2(-x) = 9.$$

Rješenje: Izraz $3 \cdot \log x^2$ ima smisla za sve $x \in \mathbf{R}$, ali izraz $\log^2(-x)$ ima smisla ako i samo ako je

$$-x > 0,$$

odnosno

$$x < 0.$$

Zbog toga moramo uzeti da je $x < 0$. Za negativne x je

$$3 \cdot \log x^2 = 3 \cdot \log (-x)^2 = 3 \cdot 2 \cdot \log(-x) = 6 \cdot \log(-x).$$

Zbog toga uvedimo zamjenu

$$t = \log(-x),$$

pa dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$6t - t^2 = 9$$

koja je ekvivalentna jednadžbi

$$t^2 - 6t + 9 = 0,$$

odnosno jednadžbi

$$(t - 3)^2 = 0,$$

odnosno jednadžbi

$$t - 3 = 0.$$

Iz posljednje je jednadžbe izravno

$$t = 3.$$

Iz $t = 3$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo logaritamsku jednadžbu

$$\log(-x) = 3$$

iz koje je

$$-x = 10^3,$$

odnosno

$$x = -10^3 = -1000.$$

282. *Riješite nejednadžbu*:

$$5^x - 3^{x+1} > 2 \cdot (5^{x-1} - 3^{x-2})$$

Rješenje: Zadanu nejednadžbu najprije transformiramo na sljedeći način:

$$5^x - 3^x \cdot 3^1 > 2 \cdot 5^x \cdot 5^{-1} - 2 \cdot 3^x \cdot 3^{-2}$$

$$5^x - 2 \cdot 5^x \cdot 5^{-1} > 3^x \cdot 3^1 - 2 \cdot 3^x \cdot 3^{-2}$$
$$5^x \cdot (1 - 2 \cdot 5^{-1}) > 3^x \cdot (3^1 - 2 \cdot 3^{-2})$$
$$5^x \cdot (1 - 2 \cdot \frac{1}{5}) > 3^x \cdot (3 - 2 \cdot \frac{1}{9})$$
$$5^x \cdot (1 - \frac{2}{5}) > 3^x \cdot (3 - \frac{2}{9})$$
$$5^x \cdot \frac{3}{5} > 3^x \cdot \frac{25}{9} \quad /: \frac{3}{5}$$
$$5^x > 3^x \cdot \frac{25}{9} : \frac{3}{5} \quad /: 3^x$$
$$\frac{5^x}{3^x} > \frac{25}{9} \cdot \frac{5}{3}$$
$$\left(\frac{5}{3}\right)^x > \frac{5^2}{3^2} \cdot \frac{5}{3}$$
$$\left(\frac{5}{3}\right)^x > \frac{5^3}{3^3}$$
$$\left(\frac{5}{3}\right)^x > \left(\frac{5}{3}\right)^3$$

Tako na objema stranama nejednadžbe imamo iste baze, i te baze su realni brojevi strogo veći od 1. Usporedbom eksponenata dobivamo nejednadžbu

$$x > 3$$

pa je skup svih rješenja polazne nejednadžbe otvoreni interval $\langle 3, +\infty\rangle$.

283. *Izračunajte*:

$$\left(\frac{1}{0.01}\right)^{-\frac{1}{2}\log 2 + 2\log 0.5}$$

__Rješenje:__ Koristit ćemo formulu

$$10^{\log x} = x$$

koja vrijedi za sve $x > 0$. Tako je zadani izraz jednak:

$$\left(\frac{1}{0.01}\right)^{-\frac{1}{2}\log 2 + 2\log 0.5} = \left(\frac{100}{1}\right)^{-\frac{1}{2}\log 2 + 2\log 0.5} = 100^{-\frac{1}{2}\log 2 + 2\log 0.5} = \left[(10)^2\right]^{-\frac{1}{2}\log 2 + 2\log 0.5} = 10^{2\cdot(-\frac{1}{2}\log 2 + 2\log 0.5)} =$$
$$= 10^{-\log 2 + 4\log 0.5} = 10^{4\log 0.5 - \log 2} = 10^{\log(0.5^4) - \log 2} = 10^{\log\frac{0.5^4}{2}} = \frac{0.5^4}{2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{2} = \frac{\frac{1}{2^4}}{2} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

284. *Izračunajte*:

$$\frac{\log 45 + 2\log\frac{1}{3}}{\log 75 - \log 3}$$

Rješenje: Imamo redom:

$$\frac{\log 45 + 2\log\frac{1}{3}}{\log 75 - \log 3} = \frac{\log 45 + \log\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\log 75 - \log 3} = \frac{\log\left[45 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2\right]}{\log\frac{75}{3}} = \frac{\log\left[45 \cdot \frac{1}{9}\right]}{\log 25} = \frac{\log 5}{\log 25} = \frac{\log 5}{\log(5^2)} = \frac{\log 5}{2\log 5} = \frac{1}{2}$$

285. *Riješite jednadžbu*:

$$\log(\log x) + \log(\log x^3 - 2) = 0.$$

Rješenje: Najprije postavimo sljedeće uvjete na x:

$x > 0$ (da bi $\log x$ bio definiran)
$\log x > 0$ (da bi $\log(\log x)$ bio definiran)
$\log x^3 - 2 > 0$ (da bi $\log(\log x^3 - 2)$ bio definiran)

Uvažavajući te uvjete, jednadžbu možemo transformirati ovako:

$$\log(\log x) + \log(3 \cdot \log x - 2) = 0$$
$$\log[(\log x) \cdot (3 \cdot \log x - 2)] = 0.$$

Antilogaritmiranjem dobijemo:

$$(\log x) \cdot (3 \cdot \log x - 2) = 10^0,$$

što množenjem faktora na lijevoj strani prelazi u

$$3 \cdot \log^2 x - 2 \cdot \log x = 1,$$

odnosno

$$3 \cdot \log^2 x - 2 \cdot \log x - 1 = 0.$$

Uvedimo zamjenu $t = \log x$ pa dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$3t^2 - 2t - 1 = 0.$$

Njezina rješenja su $t_1 = -\frac{1}{3}$ i $t_2 = 1$. Iz $t_1 = -\frac{1}{3}$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo:

$$\log x = -\frac{1}{3}.$$

No, jednakost $\log x = -\frac{1}{3}$ proturječi uvjetu

$$\log x > 0$$

pa mogućnost $\log x = -\frac{1}{3}$ odbacujemo. Iz $t_2 = 1$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo:

$$\log x = 1,$$

a odatle antilogaritmiranjem izravno nalazimo

$$x = 10^1 = 10.$$

$x = 10$ zadovoljava uvjete $x > 0$, $\log x > 0$ i $\log x^3 - 2 > 0$, pa je to jedino rješenje polazne jednadžbe.

286. *Riješite nejednadžbu*:

$$\frac{4^x - 2^{x+1} + 8}{2^{1-x}} < 8^x$$

Rješenje: Zadanu nejednadžbu pomnožimo s 2^{1-x}, što smijemo jer je svaka potencija broja 2 strogo veća od nule. Pri ovom se množenju znak nejednakosti ne mijenja jer nejednadžbu množimo sa strogo pozitivnim realnim brojem. Dobivamo:

$$4^x - 2^{x+1} + 8 < 8^x \cdot 2^{1-x}$$

Budući da vrijede jednakosti

$$\begin{aligned} 4^x &= (2^2)^x = 2^{2x}, \\ 2^{x+1} &= 2^x \cdot 2^1 = 2^x \cdot 2 = 2 \cdot 2^x \\ 8^x &= (2^3)^x = 2^{3x} \\ 2^{1-x} &= 2^1 \cdot 2^{-x} = 2 \cdot 2^{-x} \end{aligned}$$

to dobivenu nejednadžbu možemo zapisati u sljedećem obliku:

$$2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 8 < 2^{3x} \cdot 2 \cdot 2^{-x},$$

odnosno

$$2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 8 < 2 \cdot 2^{2x},$$

otkuda sređivanjem dobijemo

$$2^{2x} + 2 \cdot 2^x - 8 > 0.$$

Uvedimo zamjenu $t = 2^x$. Tada je

$$2^{2x} = (2^2)^x = (2^x)^2 = t^2,$$

pa dobivamo kvadratnu nejednadžbu

$$t^2 + 2t - 8 > 0.$$

Nultočke pripadne kvadratne funkcije su $t_1 = -4$ i $t_2 = 2$. Budući da je koeficijent uz x^2 jednak 1, taj je koeficijent strogo pozitivan, pa graf funkcije (parabola) ima oblik $\cup$. Stoga funkcija poprima strogo pozitivne vrijednosti svuda osim za realne brojeve koji se nalaze između njezinih nultočaka. To znači da je rješenje gornje kvadratne nejednadžbe

$$t \in \langle -\infty, -4\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$$

(nultočke isključujemo iz toga skupa zbog znaka stroge nejednakosti). Vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo:

$$2^x \in \langle -\infty, -4\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle,$$

otkuda slijedi da mora vrijediti barem jedna od sljedećih relacija:

$$2^x \in \langle -\infty, -4\rangle$$

ili

$$2^x \in \langle 2, +\infty\rangle.$$

Relacija

$$2^x \in \langle -\infty, -4\rangle$$

zapravo znači da vrijedi nejednakost

$$-\infty < 2^x < -4.$$

No, kako za sve $x \in \mathbf{R}$ vrijedi nejednakost

$$2^x > 0,$$

to ni za koji $x \in \mathbf{R}$ ne može vrijediti nejednakost

$$-\infty < 2^x < -4.$$

Zato u ovom slučaju polazna nejednadžba nema rješenja. Nadalje, relacija

$$2^x \in \langle 2, +\infty\rangle$$

zapravo znači da vrijedi nejednakosti

$$2 < 2^x < +\infty$$

koja je ekvivalentna nejednakosti

$$2^x > 2,$$

odnosno

$$2^x > 2^1.$$

Odavde usporedbom eksponenata dobivamo

$$x > 1,$$

pa je u ovom slučaju rješenje nejednadžbe otvoreni interval $\langle 1, +\infty\rangle$. Kako slučaj $2^x \in \langle -\infty, -4\rangle$ nema rješenja, to je skup svih rješenja polazne nejednadžbe otvoreni interval $\langle 1, +\infty\rangle$.

287. *Riješite jednadžbu*:

$$\log(10x^2) \cdot \log x = 1.$$

Rješenje: Jedini uvjet na x je $x > 0$ (da bi $\log x$ bio definiran) jer za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi nejednakost

$$10x^2 > 0,$$

što znači da je izraz $\log(10x^2)$ definiran za svaki $x \in \mathbf{R}$, pa iz njega ne dobivamo nikakav uvjet na x. Primjenom pravila za logaritmiranje umnoška dobivamo:

$$[\log 10 + \log(x^2)] \cdot \log x = 1,$$
$$(1 + 2 \cdot \log x) \cdot \log x = 1,$$
$$\log x + 2 \cdot \log^2 x = 1$$
$$2 \cdot \log^2 x + \log x - 1 = 0$$

Uvedimo zamjenu $t = \log x$, pa dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$2t^2 + t - 1 = 0.$$

Njezina su rješenja $t_1 = -1$ i $t_2 = \frac{1}{2}$. Iz $t_1 = -1$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo logaritamsku jednadžbu

$$\log x = -1$$

iz koje antilogaritmiranjem slijedi

$$x = 10^{-1} = \frac{1}{10}.$$

Kako $x = \frac{1}{10}$ zadovoljava uvjet $x > 0$, to je ujedno i rješenje polazne jednadžbe. Nadalje, iz $t_2 = \frac{1}{2}$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo logaritamsku jednadžbu

$$\log x = \frac{1}{2}$$

iz koje antilogaritmiranjem slijedi

$$x = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$$

Kako $x = \sqrt{10}$ zadovoljava uvjet $x > 0$, to je ujedno i rješenje polazne jednadžbe.
Stoga možemo zaključiti da polazna jednadžba ima točno dva rješenja:

$$x_1 = \frac{1}{10} \text{ i } x_2 = \sqrt{10}.$$

288. *Izračunajte*:

$$\left(\sqrt{0.1}\right)^{-2\log 2 + \log 9}$$

<u>Rješenje:</u> Imamo redom:

$$\left(\sqrt{0.1}\right)^{-2\log 2+\log 9} = \left(\sqrt{\frac{1}{10}}\right)^{-2\log 2+\log 9} = \left(\sqrt{10^{-1}}\right)^{-2\log 2+\log 9} = \left[\left(10^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-2\log 2+\log(3^2)} = 10^{-1\cdot\frac{1}{2}\cdot(-2\log 2+2\log 3)} =$$
$$= 10^{\log 2-\log 3} = 10^{\log\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

289. *Izračunajte*:

$$\frac{\log 2+\log 3}{1+\log 3.6}$$

Rješenje: Sjetimo se da je 1 = log 10, pa imamo redom:

$$\frac{\log 2+\log 3}{1+\log 3.6}=\frac{\log 2+\log 3}{\log 10+\log 3.6}=\frac{\log(2\cdot 3)}{\log(10\cdot 3.6)}=\frac{\log 6}{\log 36}=\frac{\log 6}{\log(6^2)}=\frac{\log 6}{2\log 6}=\frac{1}{2}$$

290. *Riješite jednadžbu*:

$$(0.75)^{x|x-1|}=\frac{16}{9}$$

Rješenje: Najprije uočimo da vrijede jednakosti:

$$0.75=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{16}{9}=\left(\frac{9}{16}\right)^{-1}=\left(\frac{3^2}{4^2}\right)^{-1}=\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]^{-1}=\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$$

Stoga polaznu jednadžbu možemo zapisati u obliku:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{x|x-1|}=\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$$

Izjednačavanjem eksponenata dobivamo jednadžbu:

$$x\cdot|x-1|=-2.$$

Razlikujemo dva slučaja:

1.) $x-1\geq 0$

U ovom je slučaju $|x-1|=x-1$ pa dobivamo:

$$x\cdot(x-1)=-2,$$
$$x^2-x+2=0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su kompleksni brojevi, a za njih eksponencijalna funkcija nije definirana. Stoga u ovom slučaju polazna eksponencijalna jednadžba nema rješenja.

2.) $x-1\leq 0$
U ovom je slučaju $|x-1|=-(x-1)=1-x$ pa dobivamo:

$$x\cdot(1-x)=-2,$$
$$x-x^2=-2$$
$$x^2-x-2=0$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$. Rješenje $x_1 = -1$ zadovoljava uvjet $x - 1 \leq 0$ pa je to ujedno i rješenja polazne jednadžbe. No, rješenje $x_2 = 2$ ne zadovoljava uvjet $x - 1 \leq 0$ pa to nije rješenje polazne jednadžbe.

Zaključujemo da polazna jednadžba ima jedinstveno rješenje $x = -1$.

291. *Izračunajte*:

$$\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^{2\cdot(\log 3-1)}$$

Rješenje: Najprije uočimo da je $1 = \log 10$. Tako redom imamo:

$$\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^{2\cdot(\log 3-1)}=\left[\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^{2}\right]^{\log 3-\log 10}=\left[\frac{(\sqrt{10})^2}{10^2}\right]^{\log 3-\log 10}=\left(\frac{10}{100}\right)^{\log 3-\log 10}=\left(\frac{1}{10}\right)^{\log 3-\log 10}=$$

$$\left[(10)^{-1}\right]^{\log 3-\log 10}=10^{\log 10-\log 3}=10^{\log\frac{10}{3}}=\frac{10}{3}$$

292. *Riješite jednadžbu*:

$$\frac{\log(2x-5)}{\log(x^2-8)}=\frac{1}{2}$$

Rješenje: Najprije postavimo uvjete na vrijednost nepoznanice x:

$2x - 5 > 0$ (da bi izraz $\log(2x - 5)$ bio definiran)
$x^2 - 8 > 0$ (da bi $\log(x^2 - 8)$ bio definiran)
$\log(x^2 - 8) \neq 0$ (da bi razlomak $\frac{\log(2x-5)}{\log(x^2-8)}$ bio definiran)

Uvažavajući te uvjete, zadanu jednadžbu smijemo pomnožiti s najmanjim zajedničkim višekratnikom svih razlomaka koji se u njoj pojavljuju. Taj najmanji zajednički višekratnik je izraz $2 \cdot \log(x^2 - 8)$, pa množenjem cijele jednadžbe tim izrazom dobivamo:

$$2 \cdot \log(2x - 5) = \log(x^2 - 8),$$

što možemo zapisati u obliku

$$\log(2x - 5)^2 = \log(x^2 - 8).$$

Izjednačavanjem logaritmanada slijedi:

$$(2x - 5)^2 = x^2 - 8,$$

odnosno

$$4x^2 - 20x + 25 = x^2 - 8,$$

odnosno

$$3x^2 - 20x + 33 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1 = 3$ i $x_2 = \frac{11}{3}$. $x_1 = 3$ zadovoljava uvjete $2x - 5 > 0$ i $x^2 - 8 > 0$, ali ne zadovoljava uvjet $\log(x^2 - 8) \neq 0$, pa to nije rješenje polazne jednadžbe. $x_2 = \frac{11}{3}$ zadovoljava sva tri postavljena uvjeta na nepoznanicu x, pa to jest rješenje polazne jednadžbe.

Zaključimo: Polazna jednadžba ima jedinstveno rješenje $x = \frac{11}{3}$.

293. *Riješite nejednadžbu*:

$$\frac{-2x - x^2}{\log(-x)} \geq 0$$

Rješenje: Vrijednost nekoga razlomka je nenegativna ako i samo ako su brojnik i nazivnik toga razlomka istoga predznaka, a nazivnik razlomka različit od nule. Stoga razlikujemo dva slučaja:

1.) $-2x - x^2 \geq 0$
$\log(-x) > 0$
$-x > 0$ (kako bi $\log(-x)$ uopće bio definiran)

Rješavanjem prve (kvadratne) nejednadžbe dobiva se $x \in [-2, 0]$, druge (logaritamske) $-x > 10^0$, odnosno $x < -1$, a treće $x < 0$. Presjek svih tih rješenja je poluzatvoreni interval $[-2, -1\rangle$.

1.) $-2x - x^2 \leq 0$
$\log(-x) < 0$
$-x > 0$ (kako bi $\log(-x)$ uopće bio definiran)

Rješavanjem prve (kvadratne) nejednadžbe dobiva se $x \in \langle-\infty, -2] \cup [0, +\infty\rangle$, druge (logaritamske) $-x < 10^0$, odnosno $x > -1$, a treće $x < 0$. Presjek svih tih rješenja je prazan skup $\emptyset$.

Stoga je skup svih rješenja zadane nejednadžbe poluzatvoreni interval $[-2, -1\rangle$.

294. *Izračunajte*:

$$0.1^{1-2\log 3}$$

Rješenje: Sjetimo se da je $1 = \log 10$, te uočimo da vrijede jednakosti:

$$0.1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$$
$$2\log 3 = \log(3^2) = \log 9$$

Tako je zadani izraz jednak

$$\left(10^{-1}\right)^{\log 10 - \log 9} = 10^{-1 \cdot (\log 10 - \log 9)} = 10^{\log 9 - \log 10} = 10^{\log \frac{9}{10}} = \frac{9}{10}.$$

295. *Riješite jednadžbu*:

$$3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 5$$

Rješenje: Transformirajmo zadanu jednadžbu na sljedeći način:

$$3^x \cdot 3^{-1} + 3^x + 3^x \cdot 3^1 = 5$$
$$3^x \cdot (3^{-1} + 1 + 3^1) = 5$$
$$3^x \cdot (\frac{1}{3} + 1 + 3) = 5$$
$$3^x \cdot \frac{13}{3} = 5 \qquad / : \frac{13}{3}$$
$$3^x = 5 \cdot \frac{3}{13}$$
$$3^x = \frac{15}{13}$$

Odavde logaritmiranjem po bazi 3 izravno slijedi:

$$x = \log_3 \frac{15}{13},$$

što (radi lakšega računanja pomoću džepnoga računara) možemo dalje transformirati ovako:

$$x = \log_3 \frac{15}{13} = \frac{\log \frac{15}{13}}{\log 3} = \frac{\log 15 - \log 13}{\log 3} =$$
$$= \frac{1.1760912590556812420812890085306\,2 - 1.1139433523068367692065051579423\,3}{0.47712125471966243729502790325511\,5} =$$
$$= 0.1302560012451344738174380004341\,12$$

ili približno

$$x \approx 0.1303.$$

296. *Izračunajte*:

$$3^{\log_{\sqrt{3}} 7 - 2\log_{\frac{1}{3}} 7}$$

<u>Rješenje:</u> Primijenit ćemo formulu

$$\log_{b^k} a = \frac{1}{k} \log_b a$$

koja vrijedi za sve cijele brojeve $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$, i sve strogo pozitivne realne brojeve $b \neq 1$ i a. Prema toj je formuli

$$\log_{\sqrt{3}} 7 = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 7 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_3 7 = 2\log_3 7 = \log_3(7^2) = \log_3 49$$
$$2\log_{\frac{1}{3}} 7 = 2\log_{3^{-1}} 7 = 2 \cdot \frac{1}{-1} \log_3 7 = -2\log_3 7 = \log_3(7^{-2}) = \log_3 \frac{1}{7^2} = \log_3 \frac{1}{49}$$

Tako sada imamo:

$$3^{\log_{\sqrt{3}} 7 - 2\log_{\frac{1}{3}} 7} = 3^{\log_3 49 - \log_3 \frac{1}{49}} = 3^{\log_3 \frac{49}{\frac{1}{49}}} = 3^{\log_3 49^2} = 49^2 = 2401$$

297. *Riješite jednadžbu*:

$$\log(10x) \cdot \log(0.1 \cdot x) = \log x^3 - 3.$$

Rješenje: Najprije postavimo uvjete na vrijednost nepoznanice x:

$10x > 0$ (da bi $\log(10x)$ bio definiran)
$0.1 \cdot x > 0$ (da bi $\log(0.1 \cdot x)$ bio definiran)
$x^3 > 0$ (da bi $\log x^3$ bio definiran)

Primijetimo da ta tri uvjeta možemo objediniti u jedan uvjet

$$x > 0$$

jer se dijeljenjem prve jednadžbe s 10, druge s 0.1 i korjenovanjem treće dobiva jedan te isti uvjet: $x > 0$. Uz uvažavanje toga uvjeta, primjenom pravila za logaritmiranje umnoška dobivamo:

$$\begin{aligned}(\log 10 + \log x) \cdot (\log 0.1 + \log x) &= 3 \cdot \log x - 3,\\ (1 + \log x) \cdot (-1 + \log x) &= 3 \cdot \log x - 3,\\ \log^2 x - 1 &= 3 \cdot \log x - 3,\end{aligned}$$

a odavde slijedi

$$\log^2 x - 3 \cdot \log x + 2 = 0.$$

Uvedimo zamjenu $t = \log x$. Tada dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

čija su rješenja $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. Iz $t_1 = 1$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo logaritamsku jednadžbu

$$\log x = 1$$

čije je rješenje $x = 10^1 = 10$. Kako $x = 10$ zadovoljava uvjet $x > 0$, to je ujedno i rješenje polazne jednadžbe. Nadalje, iz $t_2 = 2$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo logaritamsku jednadžbu

$$\log x = 2$$

čije je rješenje $x = 10^2 = 100$. Kako $x = 100$ zadovoljava uvjet $x > 0$, to je ujedno i rješenje polazne jednadžbe.
Stoga polazna jednadžba ima točno dva realna rješenja: $x_1 = 10$ i $x_2 = 100$.

298. *Izračunajte*:

$$\log_{\frac{1}{4}}(\log_2 3 \cdot \log_3 4)$$

Rješenje: Primijenit ćemo formule

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Tako redom dobivamo:

$$\log_{\frac{1}{4}}(\log_2 3 \cdot \log_3 4) = \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{\log_3 2} \cdot \log_3 4\right) = \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\log_3 4}{\log_3 2}\right) = \log_{\frac{1}{4}}(\log_2 4) = \log_{\frac{1}{4}}\left[\log_2(2^2)\right] = \log_{\frac{1}{4}}\left[2\log_2 2\right] =$$
$$= \log_{\frac{1}{4}}(2 \cdot 1) = \log_{\frac{1}{4}} 2 = \log_{\frac{1}{2^2}} 2 = \log_{2^{-2}} 2 = \frac{1}{-2}\log_2 2 = -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

299. *Riješite jednadžbu*:

$$\log_3(3^x - 8) = 2 - x.$$

Rješenje: Jedini uvjet na vrijednost nepoznanice x jest

$$3^x - 8 > 0 \text{ (da bi } \log_3(3^x - 8) \text{ bio definiran)}$$

Uvažavajući taj uvjet zadanu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$3^x - 8 = 3^{2-x},$$

pa množenjem lijeve i desne strane sa strogo pozitivnim brojem 3^x dobivamo:

$$3^x \cdot 3^x - 8 \cdot 3^x = 3^{2-x} \cdot 3^x,$$

odnosno

$$3^{2x} - 8 \cdot 3^x = 3^2,$$

odnosno

$$3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0.$$

Uvedimo zamjenu $t = 3^x$. Tada vrijedi

$$3^{2x} = (3^x)^2 = t^2$$

pa dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$t^2 - 8t - 9 = 0$$

čija su rješenja $t_1 = -1$ i $t_2 = 9$. Iz $t_1 = -1$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo eksponencijalnu jednadžbu

$$3^x = -1$$

koja nema rješenja u skupu **R** (sve potencije broja 3 su strogo pozitivni brojevi). Iz $t_2 = 9$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo eksponencijalnu jednadžbu

$$3^x = 9$$

koju možemo zapisati u obliku

$$3^x = 3^2,$$

a odavde izjednačavanjem eksponenata izravno slijedi

$$x = 2.$$

Kako $x = 2$ zadovoljava uvjet $3^x - 8 > 0$, zaključujemo da je to jedino rješenje polazne jednadžbe.

300. *Riješite nejednadžbu*:

$$\frac{1+\log_{x+1}(x-3)}{\log_{x+1} 3} < \log_3(2x-3)$$

Rješenje: Najprije postavimo uvjete na vrijednost nepoznanice x:

$x + 1 > 0$ (baza logaritma mora biti strogo veća od nule)
$x + 1 \neq 1$ (baza logaritma mora biti različita od 1)
$x - 3 > 0$ (da bi $\log_{x+1}(x - 3)$ bio definiran)
$2x - 3 > 0$ (da bi $\log_3(2x - 3)$ bio definiran)

Ta tri uvjeta mogu se objediniti u uvjet

$$x > 3$$

jer rješavanjem prve nejednadžbe dobijemo $x > -1$, druge $x \neq 0$, treće $x > 3$, a četvrte $x > 1.5$. Presjek svih tih rješenja je upravo uvjet $x > 3$.
Uvažavajući taj uvjet i jednakosti

$$1 = \log_{x+1}(x + 1)$$
$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

zadanu nejednadžbu transformiramo ovako:

$$\frac{1+\log_{x+1}(x-3)}{\log_{x+1} 3} < \log_3(2x-3)$$
$$\frac{\log_{x+1}(x+1)+\log_{x+1}(x-3)}{\log_{x+1} 3} < \log_3(2x-3)$$
$$\frac{\log_{x+1}\left[(x+1)(x-3)\right]}{\log_{x+1} 3} < \log_3(2x-3)$$
$$\log_3\left[(x+1)(x-3)\right] < \log_3(2x-3)$$

Budući da je baza logaritma realan broj strogo veći od 1 (tj. 3), usporedbom logaritmanada dobijemo:

$$(x + 1) \cdot (x - 3) < 2x - 3.$$

Množenjem faktora na lijevoj strani te nejednakosti dobivamo:

$$x^2 - 2x - 3 < 2x - 3,$$

a odavde sređivanjem i reduciranjem dobivamo kvadratnu nejednadžbu

$$x^2 - 4x < 0$$

čije je rješenje otvoreni interval $\langle 0, 4\rangle$. Zbog uvjeta $x > 3$, skup svih rješenja polazne nejednadžbe jest otvoreni interval $\langle 3, 4\rangle$.

301. *Izračunajte*:

$$\log_{0.25}25 + \log_{0.5}1.6$$

Rješenje: Uočimo da vrijedi jednakost

$$0.25 = 0.5^2.$$

Primjenom formule

$$\log_{b^k} a = \frac{1}{k}\log_b a$$

dobivamo:

$$\log_{0.25} 25 + \log_{0.5} 1.6 = \log_{0.5^2} 25 + \log_{0.5} 1.6 = \frac{1}{2}\log_{0.5} 25 + \log_{0.5} 1.6 = \log_{0.5}(25^{\frac{1}{2}}) + \log_{0.5} 1.6 =$$
$$= \log_{0.5}\sqrt{25} + \log_{0.5} 1.6 = \log_{0.5} 5 + \log_{0.5} 1.6 = \log_{0.5}(5\cdot 1.6) = \log_{0.5} 8 = \log_{\frac{1}{2}}(2^3) = 3\log_{2^{-1}} 2 =$$
$$= 3\cdot\frac{1}{-1}\cdot\log_2 2 = -3\cdot 1 = -3$$

302. *Riješite jednadžbu*:

$$2^{2\log_3 x}\cdot 5^{\log_3 x} = 400$$

Rješenje: Jedini uvjet na x jest

$x > 0$ (da bi $\log_3 x$ bio definiran)

Uočimo da vrijede jednakosti

$$2^{2\log_3 x} = (2^2)^{\log_3 x} = 4^{\log_3 x}$$
$$400 = 20^2$$

Tako zadanu jednadžbu možemo napisati u obliku

$$4^{\log_3 x}\cdot 5^{\log_3 x} = 20^2$$
$$(4\cdot 5)^{\log_3 x} = 20^2$$
$$20^{\log_3 x} = 20^2$$

otkuda izjednačavanjem eksponenata dobivamo logaritamsku jednadžbu

$$\log_3 x = 2$$

iz koje je antilogaritmiranjem izravno

$$x = 3^2 = 9.$$

Kako $x = 9$ zadovoljava uvjet $x > 0$, to je $x = 9$ ujedno i jedino rješenje polazne jednadžbe.

303. *Riješite jednadžbu*:

$$0.4^{\log^2 x+1}=6.25^{2-\log x^3}$$

Rješenje: Jedini uvjet na x jest

$x > 0$ (da bi $\log^2 x$ i $\log x^3$ bili definirani).

Nadalje, uočimo da vrijede sljedeće jednakosti:

$$0.4=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$
$$6.25=\frac{625}{100}=\frac{25}{4}=\frac{5^2}{2^2}=\left(\frac{5}{2}\right)^2=\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}\right]^2=\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$$

Stoga polaznu jednadžbu možemo zapisati u obliku:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\log^2 x+1}=\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\right]^{2-3\log x}$$
$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\log^2 x+1}=\left(\frac{2}{5}\right)^{6\log x-4}$$

Izjednačavanjem eksponenata slijedi:

$$\log^2 x + 1 = 6 \log x - 4,$$

odnosno

$$\log^2 x - 6 \log x + 5 = 0.$$

Uvedimo zamjenu $t = \log x$, pa dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$t^2 - 6t + 5 = 0.$$

Njezina su rješenja $t_1 = 1$ i $t_2 = 5$. Iz $t_1 = 1$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo logaritamsku jednadžbu

$$\log x = 1$$

iz koje antilogaritmiranjem izravno slijedi $x = 10^1 = 10$. Kako $x = 10$ zadovoljava uvjet $x > 0$, to je ujedno i rješenje polazne jednadžbe. Nadalje, iz $t_2 = 5$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo logaritamsku jednadžbu

$$\log x = 5$$

iz koje antilogaritmiranjem izravno slijedi $x = 10^5 = 100\,000$. Kako $x = 100\,000$ zadovoljava uvjet $x > 0$, to je ujedno i rješenje polazne jednadžbe.
Stoga polazna jednadžba ima točno dva rješenja: $x_1 = 10$ i $x_2 = 100\,000$.

304. *Riješite jednadžbu*:

$$\log_8\{3+\log_2[1+\log_5(11-3\log_2 x)]\}=\frac{2}{3}$$

Rješenje: Antilogaritmiranjem polazne jednadžbe (po bazi 8) dobivamo:

$$3 + \log_2[1 + \log_5(11 - 3\log_2 x)] = 8^{\frac{2}{3}}$$

Kako je

$$8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4\,,$$

to dalje imamo:

$$3 + \log_2[1 + \log_5(11 - 3\log_2 x)] = 4$$
$$\log_2[1 + \log_5(11 - 3\log_2 x)] = 4 - 3$$
$$\log_2[1 + \log_5(11 - 3\log_2 x)] = 1.$$

Antilogaritmiranjem po bazi 2 dobijemo:

$$1 + \log_5(11 - 3\log_2 x) = 2^1,$$
$$1 + \log_5(11 - 3\log_2 x) = 2,$$
$$\log_5(11 - 3\log_2 x) = 2 - 1$$
$$\log_5(11 - 3\log_2 x) = 1.$$

Antilogaritmiranjem po bazi 5 slijedi:

$$11 - 3\log_2 x = 5^1,$$
$$11 - 3\log_2 x = 5,$$

otkuda je

$$3\log_2 x = 11 - 5,$$
$$3\log_2 x = 6$$

pa dijeljenjem s 3 dobivamo logaritamsku jednadžbu

$$\log_2 x = 2.$$

Antilogaritmiranjem po bazi 2 odavde izravno slijedi $x = 2^2 = 4$. Izravnim uvrštavanjem $x = 4$ u polaznu jednadžbu dobiva se identitet

$$\frac{2}{3} \equiv \frac{2}{3}$$

pa je $x = 4$ jedino rješenje polazne jednadžbe.

305. *Riješite jednadžbu*:

$$\log_2(9 - 2^x) = 3 - x.$$

Rješenje: Jedini uvjet na x jest

$$9 - 2^x > 0 \text{ (da bi } \log_2(9 - 2^x \text{ bio definiran)}$$

Antilogaritmiranjem dobivamo:

$$9 - 2^x = 2^{3-x}.$$

Pomnožimo ovu jednadžbu s 2^x pa dobijemo:

$$9 \cdot 2^x - (2^x)^2 = 2^3,$$

otkuda slijedi

$$(2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 2^3 = 0,$$

odnosno

$$(2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 8 = 0.$$

Uvedimo zamjenu $t = 2^x$, pa dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$t^2 - 9t - 8 = 0$$

čija su rješenja $t_1 = 1$ i $t_2 = 8$. Iz $t_1 = 1$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo eksponencijalnu jednadžbu

$$2^x = 1$$

koju možemo zapisati u obliku

$$2^x = 2^0,$$

a odavde izjednačavanjem eksponenata izravno slijedi $x = 0$. Kako $x = 0$ zadovoljava uvjet $9 - 2^x > 0$, to je jedno rješenje polazne jednadžbe. Nadalje, iz $t_2 = 8$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo eksponencijalnu jednadžbu

$$2^x = 8$$

koju možemo zapisati u obliku

$$2^x = 2^3,$$

a odavde izjednačavanjem eksponenata izravno slijedi $x = 3$. Kako $x = 3$ zadovoljava uvjet $9 - 2^x > 0$, to je jedno rješenje polazne jednadžbe.
Stoga možemo zaključiti da polazna jednadžba ima točno dva rješenja: $x_1 = 0$ i $x_2 = 3$.

306. *Izračunajte*:

$$\log_{\sqrt{3}}(\log_2 5 \cdot \log_{0.2} \frac{1}{8})$$

Rješenje: Drugi faktor u zagradi transformirajmo ovako:

$$\log_{0.2} \frac{1}{8} = \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{2^3} = \log_{5^{-1}} (2^{-3}) = -3 \cdot \frac{1}{-1} \cdot \log_5 2 = 3 \cdot \frac{1}{\log_2 5} = \frac{3}{\log_2 5}.$$

Tako dalje imamo:

$$\log_{\sqrt{3}}(\log_2 5\cdot\log_{0.2}\frac{1}{8})=\log_{\sqrt{3}}(\log_2 5\cdot\frac{3}{\log_2 5})=\log_{\sqrt{3}}3=\log_{3^{\frac{1}{2}}}3=\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_3 3=2\cdot 1=2$$

307. *Riješite jednadžbu*:

$$\log_{25}\left[\frac{1}{5}\log_3(2-\log_{\frac{1}{2}}x)\right]=-0.5$$

Rješenje: Imamo redom:

$$\log_{25}\left[\frac{1}{5}\log_3(2-\log_{\frac{1}{2}}x)\right]=-0.5$$
$$\frac{1}{5}\log_3(2-\log_{\frac{1}{2}}x)=25^{-0.5}$$
$$\frac{1}{5}\log_3(2-\log_{\frac{1}{2}}x)=(5^2)^{-0.5}$$
$$\frac{1}{5}\log_3(2-\log_{\frac{1}{2}}x)=5^{2\cdot(-0.5)}$$
$$\frac{1}{5}\log_3(2-\log_{\frac{1}{2}}x)=5^{-1}$$
$$\log_3(2-\log_{\frac{1}{2}}x)=5^{-1}\cdot 5$$
$$\log_3(2-\log_{\frac{1}{2}}x)=5^{0}$$
$$\log_3(2-\log_{\frac{1}{2}}x)=1$$
$$2-\log_{\frac{1}{2}}x=3^1$$
$$2-\log_{\frac{1}{2}}x=3$$
$$\log_{\frac{1}{2}}x=2-3$$
$$\log_{\frac{1}{2}}x=-1$$
$$x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$$

Izravnim uvrštavanjem $x = 2$ u polaznu jednadžbu dobiva se identitet

$$-0.5\equiv-0.5,$$

pa je $x = 2$ jedino rješenje polazne jednadžbe.

308. *Riješite jednadžbu*:

$$\log_2 x+\log_2(x+1)=1$$

Rješenje: Najprije postavimo uvjete na vrijednost nepoznanice x:

$x > 0$ (da bi $\log_2 x$ bio definiran)
$x + 1 > 0$ (da bi $\log_2(x + 1)$ bio definiran)

Uvažavajući te uvjete, polaznu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$\log_2[x \cdot (x+1)] = 1,$$

a otuda antilogaritmiranjem dobivamo

$$x \cdot (x+1) = 2^1,$$

odnosno

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1 = -2$ i $x_2 = 1$. Rješenje $x_1 = -2$ ne zadovoljava niti jedan od uvjeta na vrijednost nepoznanice x, pa to nije rješenje polazne jednadžbe. $x_2 = 1$ zadovoljava oba uvjeta, pa to jest rješenje polazne jednadžbe. Stoga polazna jednadžba ima točno jedno rješenje: $x = 1$.

309. *Izračunajte*:

$$\log_2 \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \log_{25} \sqrt[3]{2}\,.$$

Rješenje: Transformirajmo zasebno svaki od faktora na sljedeći način:

$$\log_2 \sqrt{\frac{1}{5}} = \log_2 \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \log_2 \left[(5)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}} = \log_2 (5^{-\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{2}\log_2 5\,;$$
$$\log_{25} \sqrt[3]{2} = \log_{5^2} (2^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_5 2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\log_2 5}\,.$$

Tako je vrijednost zadanoga izraza jednaka:

$$\log_2 \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \log_{25} \sqrt[3]{2} = -\frac{1}{2}\log_2 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\log_2 5} = -\frac{1}{12}\,.$$

310. *Riješite jednadžbu*:

$$3 \cdot \log_{3x} x = 2 \cdot \log_{9x}(x^2).$$

Rješenje: Najprije postavimo sljedeće uvjete na vrijednost nepoznanice x:

$3x > 0$ (baza logaritma mora biti strogo pozitivan realan broj)
$3x \neq 1$ (baza logaritma ne smije biti jednaka 1)
$x > 0$ (da bi $\log_{3x} x$ bio definiran)
$9x > 0$ (baza logaritma mora biti strogo pozitivan realan broj)
$9x \neq 1$ (baza logaritma ne smije biti jednaka 1)

Tih pet uvjeta možemo objediniti u dva:

$$x > 0$$

i

$$x \notin \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right\}.$$

Nadalje, primijettimo da vrijede sljedeće jednakosti:

$$\log_{3x} x = \frac{\log_3 x}{\log_3(3x)} = \frac{\log_3 x}{\log_3 3 + \log_3 x} = \frac{\log_3 x}{1 + \log_3 x}$$

$$\log_{9x} x^2 = 2\log_{9x} x = 2 \cdot \frac{\log_3 x}{\log_3(9x)} = \frac{2\log_3 x}{\log_3 9 + \log_3 x} = \frac{\log_3 x}{\log_3(3^2) + \log_3 x} = \frac{2\log_3 x}{2\log_3 3 + \log_3 x} = \frac{2\log_3 x}{2 + \log_3 x}$$

Stoga polaznu jednadžbu možemo zapisati u obliku:

$$3 \cdot \frac{\log_3 x}{1 + \log_3 x} = 2 \cdot \frac{2\log_3 x}{2 + \log_3 x}$$

odnosno, u obliku

$$\frac{3\log_3 x}{1 + \log_3 x} = \frac{4\log_3 x}{2 + \log_3 x}$$

Pomnožimo tu jednadžbu s najmanjim zajedničkim nazivnikom svih razlomaka koji se pojavljuju u njoj. Taj nazivnik je izraz $(1 + \log_3 x) \cdot (2 + \log_3 x)$, a njegovu različitost od nule osigurava nam uvjet $x \notin \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right\}$. Tako dobivamo:

$$3 \log_3 x \cdot (2 + \log_3 x) = 4 \log_3 x \cdot (1 + \log_3 x),$$

odnosno

$$6 \log_3 x + 3\log_3^2 x = 4 \log_3 x + 4\log_3^2 x,$$

a odavde je

$$\log_3^2 x - 2 \log_3 x = 0.$$

Uvedimo zamjenu $t = \log_3 x$, pa dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$t^2 - 2t = 0.$$

Njezina su rješenja $t_1 = 0$ i $t_2 = 2$. Iz $t_1 = 0$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo logaritamsku jednadžbu

$$\log_3 x = 0$$

iz koje antilogaritmiranjem izravno slijedi

$$x = 3^0 = 1.$$

Kako $x = 1$ zadovoljava uvjete $x > 0$ i $x \notin \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right\}$, to je rješenje polazne jednadžbe. Nadalje, iz $t_2 = 2$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo logaritamsku jednadžbu

$$\log_3 x = 2$$

iz koje antilogaritmiranjem izravno slijedi

$$x = 3^2 = 9$$

Kako $x = 1$ zadovoljava uvjete $x > 0$ i $x \notin \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right\}$, to je rješenje polazne jednadžbe. Stoga možemo zaključiti da polazna jednadžba ima točno dva rješenja: $x_1 = 1$ i $x_2 = 9$.

311. *Riješite sustav jednadžbi*:

$$\begin{aligned} 2^x + y &= 5 \\ x - 2 &= \log_2 y \end{aligned}$$

<u>Rješenje:</u> Jedini uvjet na vrijednosti nepoznanica x i y jest

$$y > 0 \text{ (da bi } \log_2 y \text{ bio definiran)}$$

Uvažavajući taj uvjet, iz druge jednadžbe zadanoga sustava antilogaritmiranjem dobivamo:

$$y = 2^{x-2},$$

pa uvrštavanjem toga izraza u prvu jednadžbu sustava dobivamo eksponencijalnu jednadžbu

$$2^x + 2^{x-2} = 5$$

koju riješimo na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
&2^x + 2^{x-2} = 5 \\
&2^x + 2^x \cdot 2^{-2} = 5 \\
&2^x \cdot (1 + 2^{-2}) = 5 \\
&2^x \cdot (1 + \frac{1}{2^2}) = 5 \\
&2^x \cdot (1 + \frac{1}{4}) = 5 \\
&2^x \cdot \frac{5}{4} = 5 \qquad / : \frac{5}{4} \\
&2^x = 5 : \frac{5}{4} \\
&2^x = 5 \cdot \frac{4}{5} \\
&2^x = 4 \\
&2^x = 2^2 \\
&x = 2
\end{aligned}$$

Prema tome je

$$y = 2^{x-2} = 2^{2-2} = 2^0 = 1.$$

Kako $y = 1$ zadovoljava uvjet $y > 0$, to je rješenje polaznoga sustava uređeni par (2, 1).

312. *Riješite sustav jednadžbi*:

$$\begin{aligned} 5^{2x-1} \cdot 3^{y+1} &= 135 \\ 1 + \log_2 x &= \log_2 y \end{aligned}$$

Rješenje: Uvjeti na vrijednosti nepoznanica x i y su:

$x > 0$ (da bi $\log_2 x$ bio definiran)
$y > 0$ (da bi $\log_2 y$ bio definiran)

Uvažavajući te uvjete, drugu jednadžbu zadanoga sustava transformiramo ovako:

$$\begin{aligned} &1 + \log_2 x = \log_2 y \\ &\log_2 y - \log_2 x = 1 \\ &\log_2 \frac{y}{x} = 1 \\ &\frac{y}{x} = 2^1 \\ &\frac{y}{x} = 2 \\ &y = 2x \end{aligned}$$

Uvršetenjem toga izraza u prvu jednadžbu zadanoga sustava dobivamo:

$$5^{2x-1} \cdot 3^{2x+1} = 135,$$

a tu jednadžbu dalje riješimo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} &5^{2x-1} \cdot 3^{2x+1} = 135 \\ &5^{2x-1} \cdot (3^{2x-1} \cdot 3^2) = 135 \\ &5^{2x-1} \cdot 3^{2x-1} \cdot 9 = 135 \\ &(5 \cdot 3)^{2x-1} = \frac{135}{9} \\ &15^{2x-1} = 15 \\ &15^{2x-1} = 15^1 \\ &2x - 1 = 1 \\ &2x = 2 \\ &x = 1 \end{aligned}$$

Sada je lako izračunati

$$y = 2x = 2 \cdot 1 = 2.$$

Kako $x = 1$ i $y = 2$ zadovoljavaju uvjete $x > 0$, $y > 0$, to je rješenje polaznoga sustava uređeni par (1, 2).

313. *Riješite sustav jednadžbi*:

$$5^x \cdot 2^y = 320$$
$$\log_{\sqrt{5}}(y - x) = 2$$

Rješenje: Jedini uvjet na vrijednosti nepoznanica x i y jest

$$y - x > 0$$

koji je ekvivalentan uvjetu

$$y > x.$$

Uvažavajući taj uvjet, antilogaritmiranjem druge jednadžbe dobijemo:

$$y - x = \left(\sqrt{5}\right)^2,$$

odnosno

$$y - x = 5,$$

odnosno

$$y = x + 5.$$

Uvrštavanjem toga izraza u prvu jednadžbu zadanoga sustava dobivamo:

$$5^x \cdot 2^{x+5} = 320,$$

a tu eksponencijalnu jednadžbu riješimo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} 5^x \cdot 2^{x+5} &= 320 \\ 5^x \cdot (2^x \cdot 2^5) &= 320 \\ 5^x \cdot 2^x \cdot 32 &= 320 \quad /:32 \\ (5 \cdot 2)^x &= 10 \\ 10^x &= 10 \\ 10^x &= 10^1 \end{aligned}$$

i konačno

$$x = 1$$

Sada je lako izračunati

$$y = x + 5 = 1 + 5 = 6.$$

Kako $x = 1$ i $y = 6$ zadovoljavaju uvjet $y - x > 0$, to je jedino rješenje polaznoga sustava uređeni par $(1, 6)$.

314. *Osnovka uspravne prizme je romb. Prikloni kut jedne prostorne dijagonale prizme prema osnovki prizme jednak je* 60°, *a prikloni kut druge prostorne dijagonale prizme prema osnovki prizme iznosi* 45°. *Ako je visina prizme* 5 cm, *izračunajte obujam te prizme*.

Rješenje: Prikloni kut prostorne dijagonale prizme prema osnovki prizme jest kut koji ta prostorna dijagonala tvori s jednom od dijagonala osnovke. Pritom su veličina kuta i duljina dijagonale osnovke obrnuto razmjerni: duljoj dijagonali osnovke odgovara manji prikloni kut, a kraćoj veći. Stoga uočimo dva pravokutna trokuta:

1.) pravokutan trokut kojega tvore prostorna dijagonala prizme (kao hipotenuza), dulja dijagonala romba i visina prizme (kao katete). Kut između prostorne dijagonale prizme i dulje dijagonale romba u takvom trokutu mora biti 45° (manji od dva zadana priklona kuta). Označimo li s v visinu prizme, a s e dulju dijagonalu romba, vrijedi jednakost:

$$\mathrm{tg}45° = \frac{v}{e}$$

Odatle slijedi

$$e = \frac{v}{\mathrm{tg}45°} = \frac{v}{1} = v$$

2.) pravokutan trokut kojega tvore prostorna dijagonala prizme (kao hipotenuza), kraća dijagonala romba i visina prizme (kao katete). Kut između prostorne dijagonale prizme i kraće dijagonale romba u takvom trokutu mora biti 60° (veći od dva zadana priklona kuta). Označimo li s v visinu prizme, a s f kraću dijagonalu romba, vrijedi jednakost

$$\mathrm{tg}60° = \frac{v}{f}$$

Odatle slijedi

$$f = \frac{v}{\mathrm{tg}60°} = \frac{v}{\sqrt{3}} = \frac{v\sqrt{3}}{3}$$

Budući da je površina romba – kao četverokuta s okomitim dijagonalama – jednaka polovici umnoška njegovih dijagonala, površina osnovke prizme jednaka je

$$B = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

U tu formulu uvrstimo $e = v$ i $f = \frac{v\sqrt{3}}{3}$, pa dobijemo:

$$B = \frac{1}{2} \cdot v \cdot \frac{v\sqrt{3}}{3} = \frac{v^2\sqrt{3}}{6}$$

Stoga je obujam prizme

$$V = B \cdot v$$
$$V = \frac{v^2\sqrt{3}}{6} \cdot v$$
$$V = \frac{v^3\sqrt{3}}{6}$$

Preostaje nam uvrstiti $v = 5$ cm u gornju formulu i izračunati

$$V = \frac{125\sqrt{3}}{6} \text{ cm}^3.$$

315. *Osnovni bridovi pravilne uspravne krnje trostrane piramide dugi su* 2 cm *i* 6 cm. *Pobočke s većom osnovkom zatvaraju kut od* 60°. *Izračunajte duljinu visine ove piramide.*

Rješenje: Neka je S_1 središte donje (veće), a S_2 središte gornje (manje) osnovke. Iz tih vrhova povucimo dvije usporedne okomice na bilo koja dva usporedna brida jedne pobočke i neka te okomice sijeku te bridove redom u točkama T_1 i T_2. Promotrimo četverokut $T_1S_1S_2T_2$. Taj četverokut je pravokutan trapez (pravi kut je kod vrha S_2 jer je spojnica S_1S_2 visina zadane piramide koja je okomita i na donju i na gornju osnovicu) kojemu je kut između kraka i osnovice jednak kutu između pobočke i veće osnovke, dakle, 60°. Visina toga trapeza jednaka je upravo traženoj visini piramide. Iz vrha T_2 povucimo okomicu na stranicu T_1S_1 i neka je N nožište te okomice. Promotrimo trokut T_1NT_2. Taj trokut je pravokutan (s pravim kutom kod vrha N), jedan njegov šiljasti kut (kod vrha T_1) iznosi 60°, a katete su mu T_1N i NT_2. Duljina dužine NT_2 jednaka je duljini visine piramide. Odredimo duljinu dužine T_1N:

$$|T_1N| = |T_1S_1| - |NS_1|.$$

Budući da je piramida pravilna trostrana, obje osnovke su jednakostranični trokuti. Stoga je duljina dužine T_1S_1 jednaka duljini polumjera kružnice upisane donjoj osnovki. Analogno, iz $|NS_1| = |T_2S_2|$ (jer je četverokut $NS_1S_2T_2$ pravokutnik) slijedi da je duljina dužine NS_1 (odnosno, duljina dužine T_2S_2) jednaka duljini polumjera kružnice upisane gornjoj osnovki. Taj se polumjer računa prema formuli

$$\rho = \frac{a}{6}\sqrt{3}$$

Tako dobivamo:

$$|T_1S_1| = \frac{a_1}{6}\sqrt{3} = \frac{6}{6}\sqrt{3} = \sqrt{3},$$
$$|NS_1| = |T_2S_2| = \frac{a_2}{6}\sqrt{3} = \frac{2}{6}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Stoga je

$$|T_1N| = |T_1S_1| - |NS_1|$$
$$|T_1N| = \sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3}$$
$$|T_1N| = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

Sada iz pravokutnoga trokuta T_1NT_2 nalazimo:

$$\text{tg}60° = \frac{|NT_2|}{|T_1N|}$$

otkuda slijedi

$$v = |NT_2| = |T_1N| \cdot \text{tg } 60°,$$

pa uvrštavanjem $|T_1N| = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ konačno dobivamo:

$$v = \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot \text{tg}60°$$
$$v = \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$$
$$v = \frac{2}{3} \cdot 3$$
$$v = 2\,\text{cm}$$

Dakle, tražena duljina visine piramide jednaka je 2 cm.

316. *Duljine dijagonala strana kvadra jednake su* 10 cm, 17 cm *i* $3\sqrt{29}$ cm. *Izračunajte duljinu prostorne dijagonale toga kvadra.*

Rješenje: Označimo duljine bridove kvadra redom s a, b i c. Strane kvadra su pravokutnici kojima su stranice duge redom a i b, b i c, te c i a. Odatle slijedi da su duljine dijagonala strana kvadra $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{b^2+c^2}$ i $\sqrt{c^2+a^2}$. Mi tražimo duljinu prostorne dijagonale kvadra, a nju određujemo prema formuli

$$D = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \ .$$

Iz podataka o duljinama dijagonala strana kvadra možemo postaviti sljedeći sustav jednadžbi:

$$\sqrt{a^2+b^2} = 10$$
$$\sqrt{b^2+c^2} = 17$$
$$\sqrt{c^2+a^2} = 3\sqrt{29}$$

Kvadriranjem svake jednadžbe dobivamo:

$$a^2 + b^2 = 100$$
$$b^2 + c^2 = 289$$
$$c^2 + a^2 = 9 \cdot 29 = 261$$

Zbrojimo sve tri dobivene jednadžbe:

$$a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 = 100 + 289 + 261,$$

pa reduciranjem slijedi

$$2 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = 650,$$

odnosno

$$a^2 + b^2 + c^2 = 325.$$

Tako je konačno

$$D = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$
$$D = \sqrt{325}$$
$$D = \sqrt{25 \cdot 13}$$
$$D = 5\sqrt{13}\ \text{cm}$$

Dakle, duljina prostorne dijagonale kvadra iznosi $D = 5\sqrt{13}$ cm.

317. *Površine pobočaka uspravne trostrane prizme iznose* 9 cm^2, 10 cm^2 *i* 17 cm^2, *dok je površina osnovke jednaka* 4 cm^2. *Izračunajte obujam ove prizme*.

Rješenje: Za računanje obujma trebamo dva podatka: površinu osnovke i duljinu visine prizme. Površina osnovke nam je zadana:

$$B = 4 \text{ cm}^2.$$

Znači, još trebamo odrediti visinu prizme. Osnovka uspravne trostrane prizme je raznostraničan trokut. Označimo duljine njegovih stranica s a, b i c i bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da vrijedi nejednakost

$$a \leq b \leq c$$

Pobočje prizme tvore pravokutnici. Jedna stranica svakoga od tih pravokutnika podudara se s jednom od stranica osnovke, dok je visina svakoga od tih pravokutnika jednaka visini prizme. Označimo visinu prizme s v. Zbog pretpostavke $a \leq b \leq c$, najmanju površinu ima bočna strana kojoj jedna stranica ima duljinu a (i širinu v), a najveću površinu bočna strana kojoj jedna stranica ima duljinu c (i širinu v). U skladu s tim, podatke o površini pobočaka možemo zapisati u obliku sljedećih jednakosti:

$$\begin{aligned} av &= 9 \\ bv &= 10 \\ cv &= 17 \end{aligned}$$

Iz tih jednakosti redom slijedi

$$\begin{aligned} a &= \frac{9}{v} \\ b &= \frac{10}{v} \\ c &= \frac{17}{v} \end{aligned}$$

Nadalje, budući da je osnovka trokut, njegova je površina dana Heronovom formulom

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

pri čemu je

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) \ .$$

U skladu s tim je

$$s - a = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2}$$

i na potpuno isti način

$$s-b=\frac{a+c-b}{2}$$
$$s-c=\frac{a+b-c}{2}$$

Sada u jednakosti

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$$
$$s-a=\frac{b+c-a}{2}$$
$$s-b=\frac{a+c-b}{2}$$
$$s-c=\frac{a+b-c}{2}$$

uvrstimo

$$a=\frac{9}{v}$$
$$b=\frac{10}{v}$$
$$c=\frac{17}{v}$$

pa dobijemo:

$$s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{\frac{9}{v}+\frac{10}{v}+\frac{17}{v}}{2}=\frac{36}{2v}=\frac{18}{v}$$
$$s-a=\frac{b+c-a}{2}=\frac{\frac{10}{v}+\frac{17}{v}-\frac{9}{v}}{2}=\frac{18}{2v}=\frac{9}{v}$$
$$s-b=\frac{a+c-b}{2}=\frac{\frac{9}{v}+\frac{17}{v}-\frac{10}{v}}{2}=\frac{16}{2v}=\frac{8}{v}$$
$$s-c=\frac{a+b-c}{2}=\frac{\frac{9}{v}+\frac{10}{v}-\frac{17}{v}}{2}=\frac{2}{2v}=\frac{1}{v}$$

Dobivene izraze uvrstimo u formulu

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

zajedno s $P = B = 4$, pa slijedi:

$$4=\sqrt{\frac{18}{v}\cdot\frac{9}{v}\cdot\frac{8}{v}\cdot\frac{1}{v}}$$
$$4=\sqrt{\frac{1296}{v^4}}$$
$$4=\frac{36}{v^2}$$

Iz posljednje jednadžbe slijedi

$$v^2=9.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $v_1 = -3$ i $v_2 = 3$. Budući da je v duljina visine prizme, v mora biti strogo pozitivan realan broj. Zbog toga rješenje $v_1 = -3$ odbacujemo, pa slijedi da je duljina visine prizme $v = v_2 = 3$ cm. Sada je lako izračunati traženi obujam prizme:

$$V = B\cdot v$$
$$V = 4\cdot 3$$
$$V = 12\text{ cm}^3.$$

Dakle, traženi je obujam jednak 12 cm^3.

318. *Odredite kut između dviju strana pravilnoga tetraedra.*

Rješenje: Pretpostavimo da je $a > 0$ duljina osnovnoga brida tetraedra. Postavimo tetraedar tako da leži na jednoj od strana i tu stranu nazovimo osnovkom tetraedra. Tada je traženi kut jednak kutu koji zatvara bočna visina s polumjerom osnovki tetraedra upisane kružnice. Drugim riječima, promatramo pravokutan trokut kojemu je hipotenuza jednaka bočnoj visini (tj. visini jednoga od jednakostraničnih trokuta koji tvore pobočje), a jedna od kateta polumjer osnovki tetraedra upisane kružnice. Odredimo duljine ovih elemenata.
Kako smo već rekli, hipotenuza promatranoga pravokutnoga trokuta je zapravo visina jednoga od jednakostraničnih trokuta koji tvore pobočje tetraedra. Budući da sve strane toga jednakostraničnoga trokuta imaju duljinu jednaku a, to je duljina bočne visine jednaka duljini visine jednakostraničnoga trokuta čija stranica ima duljinu a. Dakle,

$$v_b=\frac{a}{2}\sqrt{3}\,.$$

Nadalje, osnovka tetraedra je jednakostraničan trokut čije sve stranice imaju duljinu a. Polumjer tom trokutu upisane kružnice dan je formulom

$$\rho=\frac{a}{6}\sqrt{3}\,.$$

Vratimo se sada na promatrani pravokutan trokut. Označimo li traženi kut s α, onda je

$$\cos\alpha=\frac{\rho}{v_b}\,.$$

U tu formulu uvrstimo izraze

$$\rho=\frac{a}{6}\sqrt{3}$$
$$v_b=\frac{a}{2}\sqrt{3}$$

pa dobijemo:

$$\cos\alpha=\frac{\rho}{v_b}$$
$$\cos\alpha=\frac{\frac{a}{6}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}}$$
$$\cos\alpha=\frac{2}{6}$$
$$\cos\alpha=\frac{1}{3}$$

Iz posljednje trigonometrijske jednadžbe lako nalazimo

$$\alpha = 70.528779365509308630754000660037 6°$$

ili približno

$$\alpha = 70°31'44''.$$

Dakle, traženi je kut jednak 70°31'44".

319. *Oplošje pravilne uspravne četverostrane piramide iznosi* 108 cm^2. *Kut između pobočke i osnovke iznosi* 60°. *Izračunajte obujam te piramide.*

<u>Rješenje:</u> Neka je a duljina osnovnoga brida te piramide, h duljina visine piramide, a v duljina bočne visine. Promotrimo pravokutan trokut kojega tvore polovica osnovnoga brida i visina piramide (kao katete), te bočna visina (kao hipotenuza). U tome je trokutu kut između bočne visine i polovice osnovnoga brida jednak kutu između pobočke i osnovke, dakle, 60°. Prema tome, vrijede sljedeće jednakosti:

$$\cos 60°=\frac{\frac{a}{2}}{v}$$
$$\operatorname{tg}60°=\frac{h}{\frac{a}{2}}$$

Iz prve od njih proizlazi

$$v=\frac{\frac{a}{2}}{\cos 60°}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{1}{2}}=a$$

Oplošje pravilne uspravne četverostane piramide jednako je zbroju površina osnovke i površine pobočja:

$$O = B + P$$

Osnovka je kvadrat čija je stranica a pa je njegova površina

$$B = a^2.$$

Pobočje tvore četiri sukladna jednakokračna trokuta čiji je osnovni brid a, a visina v. Njihova je ukupna površina:

$$P = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot v,$$

odnosno

$$P = 2 \cdot a \cdot v,$$

Dobivene izraze uvrstimo u formulu

$$O = B + P$$

pa dobijemo:

$$O = a^2 + 2av.$$

Već smo utvrdili da je $v = a$, pa slijedi:

$$O = a^2 + 2a \cdot a,$$

otkuda je

$$O = 3a^2.$$

U zadatku je naveden podatak da oplošje piramide iznosi 108 cm^2. Stoga dobivamo jednadžbu:

$$3a^2 = 108$$

koja je ekvivalentna jednadžbi

$$a^2 = 36$$

čije je strogo pozitivno rješenje $a = 6$ (rješenje $a = -6$ odbacujemo jer duljina osnovnoga brida ne može biti strogo negativan realan broj). Nadalje, iz

$$\text{tg}60° = \frac{h}{\frac{a}{2}}$$

slijedi

$$h = \frac{a}{2}\,\text{tg}\,60°,$$

pa kad ovamo uvrstimo $a = 6$, dobijemo:

$$h = 3\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Tako konačno imamo:

$$V=\frac{1}{3}B\cdot v$$
$$V=\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot v$$
$$V=\frac{1}{3}\cdot 6^2\cdot 3\sqrt{3}$$
$$V=36\sqrt{3}\ \text{cm}^3$$

Dakle, traženi obujam piramide iznosi $V = 36\sqrt{3}$ cm^3.

320. *Osnovka uspravne prizme je romb čije su dijagonale duge* 18 cm *i* 24 cm. *Duljina dijagonale jedne bočne strane iznosi* 25 cm. *Izračunajte oplošje ove prizme.*

Rješenje: Izračunajmo najprije duljinu osnovnoga brida prizme. Osnovni brid prizme, te polovice dijagonala osnovke tvore pravokutan trokut kojemu su polovice dijagonala osnovke katete, a osnovni brid prizme hipotenuza. Označimo osnovni brid prizme s a, a dijagonale s e i f, pri čemu bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $e > f$. Dobivamo:

$$a=\sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2+\left(\frac{f}{2}\right)^2}$$
$$a=\sqrt{\left(\frac{24}{2}\right)^2+\left(\frac{18}{2}\right)^2}$$
$$a=\sqrt{12^2+9^2}$$
$$a=15\,\text{cm}$$

Sve bočne strane ove uspravne prizme su pravokutnici. Njihova je duljina jednaka duljini osnovnoga brida, a širina visini prizme. Označimo visinu prizme s v. Tada je duljina dijagonale bočne strane dana formulom:

$$d=\sqrt{a^2+v^2}$$

Kvadriramo ovu jednakost i iz nje izrazimo v. Dobivamo:

$$v=\sqrt{d^2-a^2}$$
$$v=\sqrt{25^2-15^2}$$
$$v=20\,\text{cm}$$

Oplošje zadane prizme jednako je zbroju površina obiju osnovaka i površine pobočja. Površina jedne osnovke (odnosno, površina romba) jednaka je polovici umnoška njezinih dijagonala, a površina pobočja jednaka je zbroju površina četiriju sukladnih pravokutnika čija je duljina a, a širina v. Stoga je

$$O=2\cdot\frac{1}{2}\cdot e\cdot f+4\cdot a\cdot v,$$

tj.

$$O=e\cdot f+4\cdot a\cdot v.$$

Uvrštavanjem e = 24 cm, f = 18 cm (ili obrnuto), te a = 15 cm i v = 20 cm, konačno dobivamo:

$$O = 24 \cdot 18 + 4 \cdot 15 \cdot 20,$$

odnosno

$$O = 1632 \text{ cm}^2.$$

321. *Površine strana kvadra iznose* 20 cm^2, 28 cm^2 *i* 35 cm^2. *Izračunajte obujam toga kvadra.*

Rješenje: Označimo duljinu kvadra s a, širinu s b, a visinu s c. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi nejednakost $a \leq b \leq c$ jer kvadar uvijek možemo postaviti tako da vrijedi navedena nejednakost. Strane kvadra tvore ukupno 6 u parovima sukladnih pravokutnika (svake dvije nasuprotne strane su međusobno sukladne). Površine međusobno nesukladnih strana računamo pomoću izraza

$$P_1 = ab$$
$$P_2 = bc$$
$$P_3 = ac$$

Uvažavajući pretpostavku $a \leq b \leq c$ podatke navedene u zadatku možemo zapisati u obliku sljedećih jednakosti:

$$ab = 20$$
$$ac = 28$$
$$bc = 35$$

Množenjem tih jednakosti dobivamo:

$$a \cdot b \cdot a \cdot c \cdot b \cdot c = 20 \cdot 28 \cdot 35,$$

odnosno

$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = (5 \cdot 4) \cdot (7 \cdot 4) \cdot (7 \cdot 5),$$

odnosno

$$(abc)^2 = (4 \cdot 5 \cdot 7)^2,$$

otkuda je

$$abc = 4 \cdot 5 \cdot 7,$$

odnosno

$$abc = 140.$$

No, obujam kvadra jednak je umnošku njegove duljine, širine i visine:

$$V = abc,$$

pa konačno zaključujemo:

$$V = 140 \text{ cm}^3.$$

322. *Ako se obujmovi dviju kocaka odnose kao* $125 : 343$, *u kojemu su omjeru njihova oplošja*?

Rješenje: Označimo duljinu osnovnoga brida manje kocke s a_1, a duljinu osnovnoga brida veće kocke s a_2. Obujam manje kocke jednak je

$$V_1 = a_1^3,$$

a obujam veće

$$V_2 = a_2^3.$$

Dijeljenjem tih dvaju izraza dobivamo:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{a_1^3}{a_2^3},$$

odnosno

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$$

U zadatku nam je naveden podatak:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{125}{343}$$

pa slijedi:

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 = \frac{125}{343},$$

otkuda uzimanjem trećega korijena dobivamo:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{5}{7}$$

Oplošje manje kocke računamo prema formuli

$$O_1 = 6\,a_1^2,$$

a oplošje veće prema formuli

$$O_2 = 6\,a_2^2.$$

Dijeljenjem tih dvaju izraza dobivamo:

$$\frac{O_1}{O_2} = \frac{6a_1^2}{6a_2^2},$$

odnosno nakon kraćenja sa 6:

$$\frac{O_1}{O_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2.$$

U tu jednakost uvrstimo

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{5}{7}$$

pa konačno dobivamo:

$$\frac{O_1}{O_2} = \left(\frac{5}{7}\right)^2,$$

odnosno

$$\frac{O_1}{O_2} = \frac{35}{49}.$$

Dakle, oplošja tih kocaka su u omjeru 35 : 49.

323. *Osnovka uspravne prizme je trokut u kojemu je*: $a = 12$ cm, $b + c = 20$ cm *i* $\beta = 60°$. *Ako je duljina visine prizme trostruko manja od opsega osnovke*, *izračunajte obujam prizme*.

Rješenje: Utvrdimo najprije koji su nam podaci potrebni za računanje traženoga obujma. Obujam prizme jednak je umnošku površine osnovke (B) i duljine visine prizme (v). Budući da su nam poznati duljina stranice a i kut β, to ćemo površinu osnovke B računati prema formuli

$$B = \frac{1}{2} ac \sin \beta.$$

Dakle, za izračunavanje površine osnovke nedostaje nam samo podatak o duljini stranice c. U tu svrhu zapišimo kosinusov poučak za određivanje stranice b:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta.$$

Iz jednakosti $b + c = 20$ izrazimo b:

$$b = 20 - c$$

i, zajedno s $a = 12$ i $\beta = 60°$, uvrstimo u zapisani kosinusov poučak. Dobivamo:

$$(20 - c)^2 = 12^2 + c^2 - 2 \cdot 12 \cdot c \cdot \cos 60°.$$

Kvadriranjem i uvažavanjem jednakosti

$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

slijedi:

$$400 - 40c + c^2 = 144 + c^2 - 12c,$$

a odavde se reduciranjem i sređivanjem dobiva linearna jednadžba

$$-28c = -256$$

čije je rješenje $c = \frac{64}{7}$. Sada uvrstimo $a = 12$, $c = \frac{64}{7}$ i $\beta = 60°$ u formulu

$$B = \frac{1}{2} ac \sin \beta$$

pa dobijemo:

$$B = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{64}{7} \sin 60°$$
$$B = \frac{192}{7}\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Napokon, odredimo duljinu visine prizme. Kako je opseg osnovke prizme jednak

$$O = a + b + c = a + (b + c) = 12 + 20 = 32 \text{ cm},$$

to je duljina visine prizme

$$v = \frac{O}{3},$$

odnosno

$$v = \frac{32}{3} \text{ cm}.$$

Tako konačno imamo:

$$V = B \cdot v$$
$$V = \frac{192}{7}\sqrt{3} \cdot \frac{32}{3}$$
$$V = \frac{2048}{7}\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

324. *Jedinična kocka i pravilna uspravna četverostrana piramida imaju iste osnovke i jednake obujmove. Izračunajte obujam onoga dijela piramide koji se nalazi izvan kocke.*

Rješenje: Označimo s a duljinu osnovnoga brida kocke (odnosno, piramide) i s v visinu piramide. Budući da je kocka jedinična, to je

$$a = 1.$$

Izračunajmo najprije visinu piramide. U tu svrhu iskoristimo podatak da kocka i piramida imaju jednake obujmove. Obujamo kocke jednak je

$$V_k = a^3,$$

dok je obujam piramide

$$V_p = \frac{1}{3} B \cdot v$$
$$V_p = \frac{1}{3} a^2 \cdot v$$

jer je osnovka piramide kvadrat čija je stranica ima duljinu a. Izjednačavanjem

$$V_k = V_p$$

dobivamo:

$$a^3 = \frac{1}{3} a^2 \cdot v,$$

a odavde dijeljenjem s a^2 i množenjem s 3 slijedi

$$v = 3a.$$

Kako je $a = 1$, to je $v = 3$. Promotrimo presjek piramide i gornje osnovke kocke. To je ponovno kvadrat čiju površinu označimo s B_1. Taj je kvadrat udaljen od osnovke piramide za $a = 1$, a od vrha piramide za

$$v_1 = v - a = 2.$$

Prema Cavalierievu načelu, za površinu osnovke B, površinu presjeka B_1, visinu piramide v i visinu dopunjka v_1 vrijedi razmjer

$$B : B_1 = v^2 : v_1^2.$$

U ovom zadatku dio piramide koji se nalazi izvan kocke možemo shvatiti kao dopunjak. No, to je zapravo još jedna pravilna četverostrana piramida čija osnovka ima površinu B_1, a visina duljinu v_1. Uvrštavanjem $B = 1$, $v = 3$ i $v_1 = 2$ u gornji razmjer dobivamo:

$$1 : B_1 = 9 : 4,$$

otkuda je

$$9B_1 = 4,$$

te

$$B_1 = \frac{4}{9}.$$

Tako je obujam dijela piramide koji se nalazi izvan kocke jednak

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot B_1 \cdot v_1$$
$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \cdot 2$$
$$V_1 = \frac{8}{27}$$

325. *Zadana je uspravna piramida čija je visina duga* 2 cm. *Na kojoj udaljenosti od vrha piramide treba presjeći piramidu ravninom usporednom s ravninom osnovke tako da presijecanjem dobijemo tijela jednakih obujmova*?

Rješenje: Presijecanjem zadane piramide ravninom usporednom s ravninom osnovke nastaju dva tijela: uspravna piramida (istoga tipa kao i zadana piramida) i krnja piramida. Označimo sa B površinu osnovke zadane piramide, s v visinu zadane piramide, s B_1 površinu presjeka, a s x traženu udaljenost. B_1 je osnovka uspravne piramide kojoj je duljina visine jednaka x. Njezin obujam treba biti jednak polovici obujma zadane piramide, što možemo zapisati u obliku sljedećega uvjeta:

$$V = 2 \cdot V_1,$$

gdje je V obujam zadane, a V_1 obujam presijecanjem dobivene uspravne piramide. Obujam zadane piramide V računa se prema formuli

$$V = \frac{1}{3} B v ,$$

a na isti je način obujam presjecanjem dobivene piramide V_1 dan formulom

$$V_1 = \frac{1}{3} B_1 x .$$

Uvrstimo li te jednakosti u uvjet

$$V = 2 \cdot V_1,$$

dobit ćemo:

$$\frac{1}{3} B v = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} B_1 x\right) ,$$

odnosno (množenjem s 3)

$$B v = 2 B_1 x,$$

a odavde je

$$\frac{B}{B_1} = \frac{2x}{v} .$$

No, s druge je strane, prema Cavalierievu načelu,

$$\frac{B}{B_1} = \frac{v^2}{x^2} .$$

Lijeve strane posljednjih dviju jednakosti su jednake, pa takve moraju biti i desne strane. To znači da mora vrijediti jednakost:

$$\frac{2x}{v} = \frac{v^2}{x^2}$$

koja je ekvivalentna jednakosti

$$2x^3 = v^3,$$

odnosno

$$x^3 = \frac{v^3}{2}$$

iz koje uzimanjem trećega korijena dobivamo:

$$x = \frac{v}{\sqrt[3]{2}}.$$

U ovu jednakost uvrstimo $v = 2$, pa dobijemo:

$$x = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{4}}{2} = \sqrt[3]{4}$$

Dakle, piramidu treba presjeći na udaljenosti $\sqrt[3]{4}$ cm ≈ 1.6 cm od njezina vrha.

326. *Pravilnoj uspravnoj jednakobridnoj četverostranoj piramidi opisana je i upisana kugla. Izračunajte omjer obujmova tih kugala.*

Rješenje: Osnovka zadane piramide je kvadrat, pa neka je $a > 0$ duljina njegova osnovnoga brida. Izračunajmo najprije duljinu visine piramide. U tu svrhu promotrimo pravokutan trokut kojemu su katete visina piramide i polovica dijagonale osnovke, a hipotenuza bočni brid piramide. Polovica dijagonale osnovke ima duljinu

$$d_1 = \frac{1}{2} \cdot (a\sqrt{2}) = \frac{a}{2}\sqrt{2},$$

a, budući da je piramida jednakobridna, duljina njezina bočnoga brida jednaka je a. Prema Pitagorinu poučku, duljina visine piramide v jednaka je

$$v = \sqrt{a^2 - d_1^2}$$
$$v = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$
$$v = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{4}}$$
$$v = \sqrt{\frac{2a^2}{4}}$$
$$v = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Izračunajmo sada polumjere opisane, odnosno upisane kugle. Najprije izračunajmo polumjer opisane kugle. U tu svrhu najprije odredimo njezino središte. Središte zadanoj piramidi opisane kugle jest točka koja je jednako udaljena od svih pet vrhova zadane piramide. U ovome je slučaju ta točka sjecište dijagonala osnovke. Naime, budući da je osnovka kvadrat, udaljenost sjecišta dijagonala od svakoga vrha osnovke jednaka je polovici dijagonale, odnosno

$\frac{a}{2}\sqrt{2}$. Ali, upravo smo izračunali da je istu duljinu ima i visina piramide, što znači da je udaljenost vrha piramide od sjecišta dijagonala osnovke također jednaka $\frac{a}{2}\sqrt{2}$. Stoga je sjecište dijagonala osnovke ujedno i središte piramidi opisane kugle, pa je polumjer te kugle jednak

$$R = \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

Odredimo sada polumjer piramidi upisane kugle. Taj se polumjer računa prema formuli

$$r = \frac{3V}{O},$$

gdje je V obujam, a O oplošje zadane piramide. Obujam zadane piramide jednak je

$$V = \frac{1}{3}Bv,$$

pa budući da je površina osnovke $B = a^2$ i $v = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, slijedi

$$V = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

a otuda je

$$3V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$$

Izračunajmo sada oplošje piramide. Kako smo već uočili, osnovka zadane piramide je kvadrat čija stranica ima duljinu a, pa je površina osnovke

$$B = a^2.$$

Pobočje piramide tvore četiri jednakostranična trokuta (jer je piramida jednakobridna) čija stranica ima duljinu a, pa je njihova ukupna površina

$$P = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$$

Stoga je oplošje zadane piramide jednako

$$O = B + P$$
$$O = a^2 + a^2\sqrt{3},$$
$$O = a^2 \cdot (1 + \sqrt{3}).$$

Prema tome, polumjer upisane kugle jednak je

$$r = \frac{3V}{O}$$
$$r = \frac{\frac{a^3\sqrt{2}}{2}}{a^2(1+\sqrt{3})}$$
$$r = \frac{a\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{3})}$$
$$r = \frac{a\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}$$
$$r = \frac{a\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2(3-1)}$$
$$r = \frac{a\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$$

Omjer obujmova opisane i upisane kugle jest

$$\frac{V_{op}}{V_{up}} = \frac{\frac{4}{3}R^3\pi}{\frac{4}{3}r^3\pi}$$
$$\frac{V_{op}}{V_{up}} = \frac{R^3}{r^3}$$
$$\frac{V_{op}}{V_{up}} = \left(\frac{R}{r}\right)^3$$

pa uvrštavanjem $R = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ i $r = \frac{a\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$ u tu jednakost dobivamo redom:

$$\frac{V_{op}}{V_{up}}=\left(\frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{\frac{a}{4}\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)}\right)^3$$

$$\frac{V_{op}}{V_{up}}=\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}\right)^3$$

$$\frac{V_{op}}{V_{up}}=\left(\frac{2\cdot(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}\right)^3$$

$$\frac{V_{op}}{V_{up}}=\left(\frac{2\cdot(\sqrt{3}+1)}{3-1}\right)^3$$

$$\frac{V_{op}}{V_{up}}=(\sqrt{3}+1)^3$$

$$\frac{V_{op}}{V_{up}}=3\sqrt{3}+3\cdot 3\cdot 1+3\cdot\sqrt{3}\cdot 1+1$$

$$\frac{V_{op}}{V_{up}}=10+6\sqrt{3}$$

Dakle, traženi je omjer jednak $10 + 6\sqrt{3}$.

327. *Zadana je pravilna uspravna trostrana prizma čiji je osnovni brid dug* 6 cm, *a visina* 4 cm. *Izračunajte polumjer sfere opisane toj prizmi.*

Rješenje: Sfera je krivulja sa svojstvom da je svaka njezina točka jednako udaljena od fiksne točke (koju nazivamo središte sfere). Sfera opisana zadanoj prizmi mora prolaziti kroz svih njezinih 6 vrhova. Njezino središte mora biti jednako udaljeno od svih tih vrhova. Točka koja je jednako udaljena od triju vrhova donje osnovke prizme jest težište jednakostraničnoga trokuta (koji je osnovka prizme), a isti je slučaj i s vrhovima gornje osnovke prizme. Budući da je prizma uspravna, spojnica tih dvaju težišta okomita je i na donju i na gornju osnovku, a njezina je duljina jednaka duljini visine prizme. Zbog toga se središte prizmi opisane sfere mora na pravcu koji spaja težišta dviju osnovki prizme, a jedina točka toga pravca koja je jednako udaljena od svih šest točaka jest polovište te spojnice. Da odredimo njegovu udaljenost do bilo kojega vrha prizme (jer je to baš traženi polumjer), promotrimo pravokutan trokut kojega tvore središte sfere S, težište bilo koje osnovke T i jedan vrh iste osnovke (radi određenosti, označimo ga s A). Duljine kateta toga trokuta su:

$|ST| = \frac{v}{2}$ (jer je S polovište visine prizme, odnosno polovište dužine koja spaja težišta osnovki);

$|TA| = \frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{a}{3}\sqrt{3}$ (Naime, u jednakostraničnom se trokutu težišnica podudara s visinom. Jedna od posljedica poučka o težištu trokuta kaže da je udaljenost težišta trokuta od ma kojega vrha trokuta jednaka $\frac{2}{3}$ duljine težišnice povučene iz toga vrha trokuta. U našem slučaju to znači da je tražena udaljenost jednaka $\frac{2}{3}$ duljine visine jednakostraničnoga trokuta, a otprije znamo da je duljina te visine jednaka $\frac{a}{2}\sqrt{3}$.)

a duljina hipotenuze jest

$|SA| = R$ (A je vrh osnovke prizme, pa, prema definiciji sfere opisane prizmi, njegova udaljenost od središta sfere mora biti jednaka polumjeru sfere).

Pitagorin poučak primijenjen na trokut TAS daje:

$$|SA|^2 = |ST|^2 + |TA|^2,$$

pa kad ovamo uvrstimo $|ST| = \frac{v}{2}$, $|TA| = \frac{a}{3}\sqrt{3}$ i $|SA| = R$, dobijemo:

$$R = \sqrt{\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2}$$

$$R = \sqrt{\frac{v^2}{4} + \frac{a^2}{3}}$$

Preostaje nam uvrstiti numeričke podatke: $a = 6$ cm i $v = 4$ cm, te dobiti:

$$R = \sqrt{\frac{4^2}{4} + \frac{6^2}{3}}$$

$$R = \sqrt{4+12}$$

$$R = 4$$

Dakle, polumjer sfere opisane toj zadanoj prizmi jednak je 4 cm.

328. *Izračunajte omjer obujmova pravilne uspravne šesterostrane piramide i toj piramidi upisanoga stošca.*

Rješenje: Osnovka pravilne uspravne šesterostrane piramide je pravilan šesterokut. Broj njegovih stranica (ili vrhova) jest $n = 6$. Stoga je njegov središnji kut jednak

$$\alpha = \frac{360°}{n} = \frac{360°}{6} = 60°.$$

Nadalje, neka je a duljina stranice pravilnoga šesterokuta (to je ujedno i duljina osnovoga broda piramide). Polumjer osnovke upisanoga stošca jednak je polumjeru pravilnom šesterokutu upisanoga kruga, a taj je

$$\rho = \frac{1}{2} a \cdot \operatorname{ctg} \frac{60°}{2},$$

odnosno

$$\rho = \frac{1}{2} a\sqrt{3}.$$

Visina piramide (označimo je s v) jednaka je visini stošca. Tako sada imamo:

$$\frac{V_p}{V_s} = \frac{\frac{1}{3} B_p \cdot v}{\frac{1}{3} B_s \cdot v} = \frac{B_p}{B_s},$$

gdje su V_p i B_p obujam, odnosno površina osnovke piramide, a V_s i B_s obujam, odnosno površina osnovke piramidi upisanoga stošca. Stoga je omjer obujmova jednak omjeru površine pravilnoga šesterokuta i površine tome šesterokutu upisanoga kruga. Površina pravilnoga šesterokuta čija stranica ima duljinu a dana je formulom:

$$B_p = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Površina kruga čiji je polumjer jednak $\rho = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$ dana je formulom:

$$B_s = \rho^2\pi$$

$$B_s = \left(\frac{1}{2}a\sqrt{3}\right)^2\pi$$

$$B_s = \frac{3a^2}{4}\pi$$

Tako konačno dobivamo:

$$\frac{V_p}{V_s} = \frac{B_p}{B_s}$$

$$\frac{V_p}{V_s} = \frac{\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}}{\frac{3a^2}{4}\pi}$$

$$\frac{V_p}{V_s} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}$$

Dakle, traženi je omjer $2\sqrt{3} : \pi$.

329. *Ako se plašt uspravnoga kružnoga stošca razvije u ravninu, dobije se četvrtina kruga čiji je polumjer* $4\sqrt{5}$ cm. *Izračunajte obujam toga stošca.*

Rješenje: Razvijanjem plašta uspravnoga kružnoga stošca u ravninu općenito se dobije kružni isječak čiji je polumjer (označimo ga s r_1) jednak duljini izvodnice stošca (s), a duljina luka opsegu osnovke stošca ($2r\pi$, pri čemu je r polumjer osnovke stošca). U ovom zadatku to znači da je duljina s izvodnice stošca jednaka $s = r_1 = \; = 4\sqrt{5}$ cm. Središnji kut dobivenoga kružnoga isječka jednak je

$$\alpha = \frac{360°}{4} = 90°$$

(cijeli krug ima središnji kut od 360°, pa njegova četvrtina ima četiri puta manji središnji kut, tj. 90°). Duljina luka dobivenoga isječka jednaka je duljini četvrtine kružnice polumjera $4\sqrt{5}$, a ta je

$$l = \frac{1}{4}\cdot 2r_1\pi$$

$$l = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{5}\cdot\pi$$

$$l = 2\sqrt{5}\cdot\pi$$

No, kako smo već zabilježili, s druge je strane l opseg osnovke stošca čiji je polumjer jednak r. Tako iz

$$l = 2r\pi$$

uvrštavanjem $l = 2\sqrt{5}\,\pi$ dobivamo jednadžbu:

$$2\sqrt{5}\,\pi = 2r\pi,$$

iz koje je izravno

$$r = \sqrt{5} \text{ cm}.$$

Da bismo izračunali obujam stošca, treba nam podatak o duljini njegove visine v. Visina v i polumjer osnovke r katete su pravokutnoga trokuta čija hipotenuza ima duljinu s. Zbog toga vrijedi jednakost:

$$r^2 + v^2 = s^2$$

iz koje je

$$v = \sqrt{s^2 - r^2}$$

U dobivenu formulu uvrstimo $s = 4\sqrt{5}$ i $r = \sqrt{5}$ pa dobijemo:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{(4\sqrt{5})^2 - (\sqrt{5})^2} \\ v &= \sqrt{80 - 5} \\ v &= \sqrt{75} \\ v &= 5\sqrt{3} \text{ cm} \end{aligned}$$

Tako je konačno obujam stošca jednak:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} B \cdot v \\ V &= \frac{1}{3} \cdot r^2 \pi \cdot v \\ V &= \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{5})^2 \pi \cdot 5\sqrt{3} \\ V &= \frac{1}{3} \cdot 5\pi \cdot 5\sqrt{3} \\ V &= \frac{25\sqrt{3}}{3} \pi \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

330. *Osnovka uspravne piramide je trokut čije su stranice duge redom* 13 cm, 20 cm *i* 21 cm. *Pobočke piramide zatvaraju s ravninom osnovice kut od* 30°. *Izračunajte obujam te piramide*.

Rješenje: Za određivanje obujma piramide trebaju nam podaci o vrijednostima dviju veličina: površini osnovke piramide i duljini visine piramide. U ovome je zadatku osnovka raznostraničan trokut kojemu su zadane duljine svih triju stranica. Njegovu površinu možemo izračunati rabeći Heronovu formulu. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je a = 13 cm, b = 20 cm i c = 21 cm, pa imamo:

$$B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$B = \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right) \cdot \left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}$$
$$B = \sqrt{\left(\frac{13+20+21}{2}\right) \cdot \left(\frac{20+21-13}{2}\right)\left(\frac{13+21-20}{2}\right)\left(\frac{13+20-21}{2}\right)}$$
$$B = 126 \text{ cm}^2$$

Nadalje, uočimo pravokutan trokut kojega tvore visina piramide i polumjer osnovki upisane kružnice (kao katete) i jedna bočna visina piramide (kao hipotenuza). Kut između te bočne visine i polumjera osnovki upisane kružnice jednak je kutu kojega bilo koja pobočka zatvara s ravninom osnovice, a taj kut iznosi 30°. Kako je polumjer osnovki upisane kružnice jednak

$$\rho = \frac{B}{s}$$
$$\rho = \frac{B}{\frac{a+b+c}{2}}$$
$$\rho = \frac{126}{\frac{13+20+21}{2}}$$
$$\rho = \frac{126}{27}$$
$$\rho = \frac{14}{3} \text{ cm}$$

to iz navedenoga pravokutnoga trokuta slijedi da je duljina visine piramide v jednaka

$$v = \rho \cdot \operatorname{tg} 30°$$

pa je

$$v = \frac{14}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$v = \frac{14}{9}\sqrt{3} \text{ cm}$$

Prema tome, obujam zadane piramide jednak je

$$V = \frac{1}{3} Bv$$
$$V = \frac{1}{3} \cdot 126 \cdot \frac{14}{9}\sqrt{3}$$
$$V = \frac{196}{3}\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

331. *Duljina osnovice jednakokračnoga trokuta iznosi* 10 cm*, a duljina kraka* 13 cm*. Izračunajte oplošje rotacijskoga tijela koje nastaje vrtnjom toga trokuta oko jednoga njegovoga kraka.*

Rješenje: Vrtnjom zadanoga trokuta oko njegovoga kraka nastaju dva uspravna kružna stošca sa spojenim osnovkama. Odredimo osnovne veličine svakoga od njih:

1. stožac: polumjer osnovke jednak je duljini visine na krak, a izvodnica kraku zadanoga trokuta.

2. stožac: polumjer osnovke jednak je duljini visine na krak , a izvodnica osnovici zadanoga trokuta.

Budući da duljine kraka, odnosno osnovice zadanoga trokuta znamo, za računanje oplošja treba nam još duljina visine na krak. U tu svrhu, izračunajmo najprije duljinu visine na osnovicu zadanoga trokuta. Duljina osnovice toga trokuta jednaka je a = 10 cm, a duljina kraka b = 13 cm, pa je duljina visine na osnovicu jednaka

$$v_a = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$
$$v_a = \sqrt{13^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2}$$
$$v_a = 12\,\text{cm}$$

Površinu jednakokračnoga trokuta možemo izračunati na dva načina: iz formule

$$P = \frac{1}{2} a v_a$$

ili iz formule

$$P = \frac{1}{2} b v_b\,,$$

gdje je v_b duljina visine na krak. Lijeve strane tih formula su jednake, pa takve moraju biti i desne strane. To znači da mora vrijediti jednakost:

$$a v_a = b v_b$$

iz koje je

$$v_b = \frac{a v_a}{b}$$

pa uvršavanjem a = 10 cm, v_a = 12 cm i b = 13 cm dobivamo:

$$v_b = \frac{120}{13}\,\text{cm}\,.$$

Zapišimo sada još jednom pregledno vrijednosti osnovnih veličina potrebnih za računanje oplošja dobivenoga tijela:

1. stožac: $r = v_b = \frac{120}{13}$ cm , $s_1 = b$ = 13 cm,
2. stožac: $r = v_b = \frac{120}{13}$ cm , $s_2 = a$ = 10 cm.

Tako je traženo oplošje jednako zbroju površina plašteva prvoga i drugoga stošca (jer su osnovke "spojene"):

$$O = r\pi(s_1 + s_2)$$

$$O=\frac{120}{13}\cdot\pi\cdot(13+10)$$
$$O=\frac{2760}{13}\ \pi\ \text{cm}^2$$

Ili približno

$$O=667\ \text{cm}^2.$$

332. *Zadan je trokut ABC čije su stranice redom duge* 13 cm, 14 cm *i* 15 cm. *Odredite obujam rotacijskoga tijela koje nastaje vrtnjom zadanoga trokuta oko njegove najdulje stranice*.

Rješenje: Određenosti radi, označimo a = 13 cm, b = 14 cm i c = 15 cm. Vrtnjom zadanoga trokuta oko njegove najdulje stranice (c) nastaju dva uspravna kružna stošca sa spojenim osnovkama. Polumjer osnovke tih stožaca jednak je visini na najdulju stranice trokuta (c), a zbroj njihovih visina jednak je najduljoj stranici. Stoga izračunajmo najprije duljinu visine na stranicu c. Koristit ćemo formulu

$$P=\frac{1}{2}cv_c$$

iz koje je

$$v_c=\frac{2P}{c}.$$

S druge strane, površinu P zadanoga trokuta možemo izračunati rabeći Heronovu formulu:

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

gdje je $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$. Tako dobivamo:

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$P=\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\cdot\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\cdot\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\cdot\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}$$
$$P=\sqrt{\left(\frac{13+14+15}{2}\right)\cdot\left(\frac{14+15-13}{2}\right)\cdot\left(\frac{13+15-14}{2}\right)\cdot\left(\frac{13+14-15}{2}\right)}$$
$$P=84\,\text{cm}^2$$

Stoga je

$$v_c=\frac{2P}{c}$$
$$v_c=\frac{2\cdot 84}{15}$$
$$v_c=\frac{56}{5}$$

pa je polumjer zajedničke osnovke dobivenih stožaca jednak

$$r = v_c = \frac{56}{5} \text{ cm} = 11.2 \text{ cm},$$

Prema tome, traženi obujam stošca jednak je:

$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi (v_1 + v_2)$$
$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot c$$
$$V = \frac{1}{3} \cdot 11.2^2 \pi \cdot 15$$
$$V = 627.2\pi \text{ cm}^3$$

333. *Površina plašta uspravnoga kružnoga stošca iznosi* 4π cm^2. *Razvijanjem toga plašta u ravninu dobiva se četvrtina kruga. Izračunajte duljinu visine toga stošca.*

Rješenje:

Razvojem plašta uspravnoga kružnoga stošca u ravninu općenito se dobiva kružni isječak čiji je polumjer r_1 jednak duljini izvodnice stošca s:

$$r_1 = s,$$

središnji kut jednak α, a duljina pripadnoga luka isječka jednaka opsegu osnovke stošca. U ovom zadatku je navedeno da je taj kružni isječak zapravo četvrtina kruga. To znači da je središnji kut isječka jednak

$$\alpha = \frac{360°}{4} = 90°$$

Stoga je duljina luka toga isječka jednaka

$$l = \frac{r_1 \pi \alpha}{180°}$$
$$l = \frac{s \cdot \pi \cdot 90°}{180°}$$
$$l = \frac{s \cdot \pi}{2}$$

No, već smo zabilježili da je duljina luka jednaka opsegu osnovke stošca, što znači da vrijedi jednakost:

$$l = 2r\pi,$$

gdje je r polumjer osnovke stošca. Lijeve strane posljednjih dviju jednakosti su jednake, pa takve moraju biti i desne strane. To znači da mora vrijediti jednakost:

$$\frac{s \cdot \pi}{2} = 2r\pi$$

iz koje se množenjem s 2 i dijeljenjem s π lako dobiva:

$$s = 4r.$$

Sada se prisjetimo da se površina plašta stošca računa prema formuli:

$$P = r \cdot \pi \cdot s.$$

U tu formulu uvrstimo $P = 4\pi$ i $s = 4r$ pa dobivamo jednadžbu:

$$4r^2\pi = 4\pi$$

iz koje odmah dobivamo $r = 1$ cm (rješenje $r = -1$ ne dolazi u obzir jer polumjer osnovke stošca ne može biti strogo negativan realan broj). Prema tome je

$$s = 4r,$$

tj.

$$s = 4 \text{ cm},$$

pa je tražena duljina visine stošca jednaka

$$v = \sqrt{s^2 - r^2}$$
$$v = \sqrt{4^2 - 1^2}$$
$$v = \sqrt{15} \text{ cm}$$

334. *Dvije jednake sfere polumjera R smještene su tako da se središte prve sfere nalazi na drugoj i obrnuto. Izračunajte duljinu presječnice ovih sfera.*

Rješenje: Označimo sa S_1 središte prve sfere, a sa S_2 središte druge sfere. Presječnica tih sfera je kružnica i neka je S njezino središte, a r njezin polumjer. Presijecimo obje sfere i presječnicu ravninom okomitom na presječnicu. Dobiveni presjek su dvije kružnice (sa središtima u S_1 i S_2) koje se sijeku u dvije točke (označimo ih s A i B) čija je spojnica promjer presječnice, a S polovište te spojnice. Sada uočimo četverokut S_1AS_2B. Zbog činjenice da se središte prve sfere nalazi na drugoj i obrnuto, vrijedi jednakost:

$$|S_1A| = |S_1B| = |S_2A| = |S_2B| = R.$$

Stoga je četverokut S_1AS_2B romb. Njegove su dijagonale spojnica S_1S_2 i spojnica AB. Kako se dijagonale svakoga romba sijeku pod pravim kutom i raspolavljaju, slijedi da je spojnica S_1S_2 okomita na spojnicu AB koju siječe u točki S (polovištu spojnice AB). Zbog toga je trokut S_1SA (ili S_1SB) pravokutan. Duljine njegovih kateta su:

$|S_1S| = \frac{1}{2} \cdot |S_1S_2|$ (jer S raspolavlja obje dijagonale romba S_1AS_2B) $= \frac{1}{2} \cdot R$

$|SA| = r$

a duljina njegove hipotenuze je

$|S_1A| = R.$

Pitagorin poučak primijenjen na trokut S_1SA daje:

$$\left(\frac{1}{2} \cdot R\right)^2 + r^2 = R^2,$$

odnosno

$$\frac{R^2}{4}+r^2=R^2,$$
$$r^2=\frac{3R^2}{4}$$
$$r=\frac{R}{2}\sqrt{3}$$

Duljina presječnice jednaka je opsegu kružnice polumjera r:

$$l=2r\pi$$
$$l=2\cdot\frac{R}{2}\sqrt{3}\cdot\pi$$
$$l=R\sqrt{3}\pi$$

335. *Polumjer osnovke, duljina visine i duljina izvodnice uspravnoga kružnoga stošca u danom su poretku tri uzastopna člana istoga aritmetičkoga niza. Izračunajte kut među dvjema nasuprotnim izvodnicama toga stošca.*

Rješenje: Označimo s r polumjer osnovke, s v duljinu visine, a sa s duljinu izvodnice zadanoga stošca. Promotrimo poprečni presjek stošca ravninom okomitom na ravninu osnovke stošca. Budući da je stožac uspravan, taj je presjek jednakokračan trokut. Duljina kraka toga trokuta jednaka je duljini izvodnice stošca (s), a duljina osnovice trokuta jednaka je duljini promjera osnovke ($2r$). Visina na osnovicu toga trokuta jednaka je visini stošca (v). Zbog toga vrijedi jednakost:

$$v^2+\left(\frac{2r}{2}\right)^2=s^2,$$

odnosno

$$v^2+r^2=s^2.$$

Označimo traženi kut s α. α je zapravo kut među krakovima gore opisanoga jednakokračnoga trokuta. Prema kosinusovu poučku, vrijedi:

$$(2r)^2=s^2+s^2-2\cdot s\cdot s\cdot\cos\alpha,$$

odnosno

$$4r^2=2s^2-2s^2\cdot\cos\alpha,$$

a odavde je

$$\cos\alpha=\frac{s^2-2r^2}{s^2}.$$

Da bismo mogli izračunati $\cos\alpha$, trebamo ili efektivno izračunati vrijednosti veličina r i s ili odrediti omjer tih veličina (odnosno, izraziti s kao funkciju varijable r ili obrnuto). U tu ćemo svrhu primijeniti činjenicu da brojevi r, v i s u danom poretku tvore tri uzastopna člana aritmetičkoga niza. Prema osnovnome svojstvu aritmetičkoga niza to znači da mora vrijediti sljedeća jednakost:

$$v=\frac{r+s}{2}$$

(jer je svaki član aritmetičkoga niza artimetička sredina njemu neporesredno susjednih članova toga niza). Tu jednakost uvrstimo u jednakost

$$v^2 + r^2 = s^2$$

pa dobivamo redom:

$$\left(\frac{r+s}{2}\right)^2 + r^2 = s^2$$
$$\frac{r^2+2rs+s^2}{4} + r^2 - s^2 = 0 \qquad / \cdot 4$$
$$r^2 + 2rs + s^2 + 4r^2 - 4s^2 = 0$$
$$5r^2 + 2rs - 3s^2 = 0$$

Budući da su r i s polumjer osnovke, odnosno duljina izvodnice zadanoga stošca, to su strogo pozitivni realni brojevi. Stoga posljednju jednakost smijemo podijeliti sa s^2. Tako ćemo dobiti:

$$5 \cdot \frac{r^2}{s^2} + 2 \cdot \frac{r}{s} - 3 = 0$$
$$5 \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^2 + 2 \cdot \frac{r}{s} - 3 = 0$$

Uvedimo zamjenu $t = \frac{r}{s}$ pa dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$5t^2 + 2t - 3 = 0$$

čija su rješenja $t_1 = -1$ i $t_2 = \frac{3}{5}$. Kako je omjer dvaju strogo pozitivnih realnih brojeva ponovno strogo pozitivan realan broj, rješenje $t_1 = -1$ ne dolazi u obzir. Stoga preostaje

$$\frac{r}{s} = \frac{3}{5},$$

otkuda je

$$r = \frac{3}{5} s .$$

Taj izraz sada uvrstimo u formulu za računanje kosinusa traženoga kuta

$$\cos\alpha = \frac{s^2 - 2r^2}{s^2}$$

pa dobivamo:

$$\cos\alpha = \frac{s^2 - 2r^2}{s^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{s^2 - 2\cdot\left(\frac{3}{5}s\right)^2}{s^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{s^2 - 2\cdot\frac{9}{25}s^2}{s^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{s^2 - \frac{18}{25}s^2}{s^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{s^2\cdot(1 - \frac{18}{25})}{s^2}$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{18}{25}$$

$$\cos\alpha = \frac{7}{25}$$

Odatle slijedi:

$$\alpha = 73.7397952916880425937112251181868°,$$

odnosno približno

$$\alpha \approx 73°44'23''.$$

336. *Površina osnovke, površina plašta i oplošje uspravnoga kružnoga stošca u danom su poretku tri uzastopna člana istoga aritmetičkoga niza. Odredite kut među dvjema nasuprotnim izvodnicama toga stošca.*

Rješenje: Postupit ćemo slično kao i u prethodnom zadatku. Označimo polumjer osnovke stošca s r, a duljinu izvodnice sa s. Traženi kut ponovno ćemo odrediti iz jednakosti

$$\cos\alpha = \frac{s^2 - 2r^2}{s^2}.$$

Površina osnovke stošca dana je izrazom

$$B = r^2\pi,$$

površina njegova plašta izrazom

$$P = r\pi s,$$

a oplošje izrazom

$$O = r\pi(r + s).$$

Prema pretpostavci, P, B i O su tri uzastopna člana aritmetičkoga niza, pa vrijedi jednakost

$$P = \frac{B+O}{2}.$$

U tu jednakost uvrstimo $B = r^2\pi$, $P = r\pi s$ i $O = r\pi(r + s)$ pa dobijemo:

$$r\pi s = \frac{r^2\pi + r\pi(r+s)}{2}$$
$$2r\pi s = r^2\pi + r^2\pi + r\pi s$$
$$r\pi s = 2r^2\pi$$

otkuda dijeljenjem s $r\pi$ slijedi:

$$s = 2r.$$

Taj izraz uvrstimo u izraz

$$\cos\alpha = \frac{s^2 - 2r^2}{s^2}$$

pa dobijemo:

$$\cos\alpha = \frac{(2r)^2 - 2r^2}{(2r)^2}$$
$$\cos\alpha = \frac{(2r)^2 - 2r^2}{(2r)^2}$$
$$\cos\alpha = \frac{4r^2 - 2r^2}{4r^2}$$
$$\cos\alpha = \frac{2r^2}{4r^2}$$
$$\cos\alpha = \frac{1}{2}$$

Odatle slijedi

$$\alpha = 60°.$$

(To smo mogli zaključiti i odmah jer ako su s, s i $2r$ duljine stranica trokuta i ako vrijedi jednakost $s = 2r$, onda su duljine stranica trokuta $2r$, $2r$ i $2r$, pa je trokut jednakostraničan i svi kutovi su mu jednaki 60°.)

337. *Duljina najdulje izvodnice kosoga kružnoga stošca iznosi* $s_1 = 6\sqrt{3}$, *a duljina najkraće izvodnice toga stošca jednaka je* $s_2 = 6$. *Ako te izvodnice zatvaraju kut od* 30°, *izračunajte obujam stošca*.

Rješenje: Označimo s r polumjer osnovke zadanoga stošca, a s v njegovu visinu. Promotrimo poprečni presjek stošca ravninom okomitom na ravninu osnovke stošca. To je trokut kojemu je jedna stranica jednaka najduljoj izvodnici stošca (s_1), druga najkraćoj izvodnici (s_2), a treća promjeru osnovke stošca ($2r$). Kut nasuprot stranici duljine $2r$ jednak je $\alpha = 30°$. Stoga, prema kosinusovu poučku, vrijedi jednakost:

$$(2r)^2 = s_1^2 + s_2^2 - 2 \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot \cos\alpha .$$

Uvrštavanjem vrijednosti $s_1 = 6\sqrt{3}$, $s_2 = 6$ i $\alpha = 30°$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
(2r)^2 &= (6\sqrt{3})^2 + 6^2 - 2 \cdot 6\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \cos 30° \\
4r^2 &= 36 \cdot 3 + 36 - 2 \cdot 6\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\
4r^2 &= 36 \\
r^2 &= 9
\end{aligned}$$

i konačno

$$r = 3 \text{ cm}.$$

Duljina visine stošca v jednaka je duljini visine trokuta v_1 povučene na stranicu duljine $2r$. Duljinu visine v_1 odredit ćemo rabeći izraze za površinu trokuta. S jedne je strane površina P dana izrazom:

$$P = \frac{1}{2} s_1 s_2 \sin\alpha,$$

a s druge

$$P = \frac{1}{2}(2r) \cdot v_a$$

Izjednačavanjem tih dvaju izraza dobivamo:

$$s_1 s_2 \sin\alpha = (2r) \cdot v_a$$

a odavde je

$$v_a = \frac{s_1 s_2 \sin\alpha}{2r}$$

Uvrštavanjem $s_1 = 6\sqrt{3}$, $s_2 = 6$, $r = 3$ i $\alpha = 30°$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
v_a &= \frac{6\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \sin 30°}{2 \cdot 3} \\
v_a &= 3\sqrt{3} \text{ cm}
\end{aligned}$$

Zbog toga je duljina visine stošca jednaka

$$v = v_a = 6\sqrt{3}$$

pa je traženi obujam zadanoga stošca jednak

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3} r^2 \pi v \\
V &= \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \pi \cdot 3\sqrt{3} \\
V &= 9\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3
\end{aligned}$$

338. *Polumjer osnovke uspravnoga kružnoga stošca jednak je* $r = 3$ cm, *a duljina visine stošca* $v = 4$ cm. *Izračunajte polumjer kugle upisane u taj stožac.*

Rješenje: 1. način: Promotrimo poprečni presjek zadanoga stošca i njemu upisane kugle ravninom okomitom na osnovku stošca. To je jednakokračan trokut. Duljina osnovice toga trokuta jednaka je

$$a = 2r = 6 \text{ cm},$$

duljina visine na osnovicu

$$v_a = v = 4 \text{ cm},$$

a duljina kraka trokuta jednaka je duljini izvodnice stošca

$$b = s.$$

Kako je

$$s = \sqrt{r^2 + v^2}$$
$$s = \sqrt{3^2 + 4^2}$$
$$s = 5 \text{ cm}$$

to je duljina kraka dobivenoga trokuta

$$b = 5 \text{ cm}.$$

Presjek u stožac upisane kugle ravninom okomitom na osnovku stošca je krug. Polumjer ρ toga kruga jednak je polumjeru kružnice upisane u promatrani jednakokračan trokut. Taj se polumjer računa iz formule

$$\rho = \frac{P}{s}.$$

Budući da vrijede formule

$$P = \frac{1}{2} a v_a$$

i

$$s = \frac{1}{2}(a + b + b) = \frac{1}{2}(a + 2b),$$

uvrštavanjem tih jednakosti u formulu

$$\rho = \frac{P}{s}$$

dobivamo:

$$\rho = \frac{a v_a}{a + 2b}.$$

Preostaje uvrstiti $a = 6$ cm, $v_a = 4$ cm i $b = 5$ cm u ovaj izraz:

$$\rho = \frac{6 \cdot 4}{6 + 2 \cdot 5}$$
$$\rho = \frac{24}{16}$$
$$\rho = \frac{3}{2} \text{ cm.}$$

<u>2. način:</u> Označimo traženi polumjer s ρ. Tada ρ možemo izračunati rabeći formulu

$$\rho = \frac{3V}{O},$$

gdje su V obujam i O oplošje zadanoga stošca. Budući da je

$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot v$$

i

$$O = r^2 \pi + r \cdot \pi \cdot s,$$

što zbog

$$s = \sqrt{r^2 + v^2}$$

možemo zapisati u obliku

$$O = r^2 \pi + r \cdot \pi \cdot \sqrt{r^2 + v^2} \quad ,$$

uvrštavanjem tih izraza u formulu za ρ slijedi:

$$\rho = \frac{3V}{O}$$
$$\rho = \frac{3 \cdot \frac{1}{3} r^2 \pi v}{r^2 \pi + r \cdot \pi \cdot \sqrt{r^2 + v^2}}$$
$$\rho = \frac{r^2 \pi v}{r\pi \cdot (r + \sqrt{r^2 + v^2})}$$
$$\rho = \frac{rv}{r + \sqrt{r^2 + v^2}}$$

Uvrštavanjem $r = 3$ cm i $v = 4$ cm dobivamo:

$$\rho = \frac{3 \cdot 4}{3 + \sqrt{3^2 + 4^2}}$$
$$\rho = \frac{12}{3+5}$$
$$\rho = \frac{12}{8}$$
$$\rho = \frac{3}{2} \text{ cm}$$

339. *Šuplja kugla ima vanjski promjer* d = 18 cm, *te stijenku čija je debljina* d_1 = 3 mm. *Izračunajte obujam te stijenke*.

Rješenje: Iz podatka o vanjskom promjeru šuplje kugle slijedi da je njezin vanjski polumjer jednak

$$r = \frac{d}{2}$$
$$r = \frac{18}{2}$$
$$r = 9 \text{ cm}$$

Unutrašnji polumjer šuplje kugle jednak je razlici vanjskoga polumjera i debljine stijenke. Označimo li taj polumjer s d_2, vrijedi:

$$d_2 = r - d_1$$

pa uvrštavanjem r = 9 cm i d_1 = 3 mm = 0.3 cm dobivamo:

$$d_2 = 9 - 0.3$$
$$d_2 = 8.7 \text{ cm}$$

Traženi obujam stijenke jednak je razlici ukupnoga obujma šuplje kugle te unutrašnjega obujma kugle (obujam prostora od središta kugle do stijenke):

$$V_s = V - V_u$$

Kako je ukupan obujam kugle

$$V = \frac{4}{3} r^3 \pi ,$$

a unutrašnji obujam kugle

$$V_u = \frac{4}{3} d_2^3 \pi ,$$

to uvrštavanjem tih izraza u izraz

$$V_s = V - V_u$$

dobivamo:

$$V_s = \frac{4}{3} r^3 \pi - \frac{4}{3} d_2^3 \pi$$

$$V_s = \frac{4}{3}(r^3 - d_2^3)\pi$$

Preostaje nam uvrstiti $r = 9$ cm i $d_2 = 8.7$ cm u posljednji izraz, te konačno dobiti:

$$V_s = \frac{4}{3} \cdot (9^3 - 8.7^3) \cdot \pi$$

$$V_s \approx 94\pi \text{ cm}^3$$

340. *Tri jednake kugle polumjera R postavljene su tako da se u parovima dodiruju. Koliki je polumjer kugle koja dodiruje sve tri zadane kugle*?

Rješenje: Tražena kugla smještena je u prostoru omeđenom plohama triju zadanih kugala. Budući da se kugle u parovima dodiruju i da su jednakih polumjera, to su središta S_1, S_2 i S_3 zadanih kugala vrhovi jednakostraničnoga trokuta čija stranica ima duljinu $2R$. Označimo sa S središte tražene kugle, a s r njezin polumjer. Budući da ona dodiruje sve tri zadane kugle i jer sve zadane kugle imaju isti polumjer, njezino središte mora ležati unutar trokuta $S_1S_2S_3$, te biti jednako udaljeno od vrhova toga trokuta. Jedina točka ma kojega trokuta koja je jednako udaljena od svih njegovih vrhova jest središte trokutu opisane kružnice. U ovom slučaju, to znači da je S središte kružnice opisane jednakostraničnom trokutu $S_1S_2S_3$. Polumjer jednakostraničnom trokutu opisane kružnice općenito se računa prema formuli

$$R = \frac{a}{3}\sqrt{3}$$

gdje je a duljina stranice jednakostraničnoga trokuta. U našem je slučaju ta duljina jednaka

$$a = 2R$$

pa je polumjer R_1 jednakostraničnom trokutu $S_1S_2S_3$ opisane kružnice jednak

$$R_1 = \frac{2R}{3}\sqrt{3}.$$

Sada uočimo sljedeće: Neka je D npr. diralište tražene kugle i kugle čije je središte S_1. Upravo smo izračunali da je

$$|SS_1| = R_1 = \frac{2R}{3}\sqrt{3}.$$

Zapišimo duljinu dužine SS_1 u obliku zbroja dviju duljina: duljine dužine SD i duljine dužine S_1D:

$$|SS_1| = |SD| + |S_1D|.$$

Budući da točka D pripada traženoj kugli, to je

$$|SD| = r.$$

No, D pripada i kugli sa središtem u S_1 pa je

$$|S_1D| = R.$$

Prema tome, u jednakost

$$|SS_1| = |SD| + |S_1D|$$

uvrstimo

$$|SS_1| = \frac{2R}{3}\sqrt{3},$$
$$|SD| = r,$$
$$|S_1D| = R$$

pa dobivamo jednakost:

$$\frac{2R}{3}\sqrt{3} = r + R.$$

Odatle izravno slijedi da je polumjer tražene kugle jednak

$$r = \frac{2R}{3}\sqrt{3} - R$$

odnosno, nakon svođenja na zajednički nazivnik,

$$r = \frac{2\sqrt{3} - 3}{3} \cdot R\,.$$

341. *U kuglu promjera* 10 cm *upisan je valjak čija osnovka ima promjer* 6 cm. *Koliki je obujam toga valjka*?

<u>Rješenje:</u> Poprečni presjek kugle i njoj upisanoga valjka je krug u kojega je upisan pravokutnik. Promjer toga kruga jednak je promjeru kugle:

$$d = 10 \text{ cm},$$

duljina upisanoga pravokutnika jednaka je promjeru osnovke valjka:

$$a = 6 \text{ cm},$$

a širina toga pravokutnika jednaka je visini upisanoga valjka:

$$b = v.$$

No, promjer pravokutniku opisanoga kruga jednak je duljini dijagonale toga pravokutnika, pa vrijedi jednakost:

$$d^2 = a^2 + b^2$$

(jer dvije susjedne stranice pravokutnika zajedno s jednom njegovom dijagonalom tvore pravokutan trokut). Odavde je

$$b = \sqrt{d^2 - a^2}$$

pa uvrštavanjem $d = 10$, $a = 6$ dobivamo:

$$b = \sqrt{10^2 - 6^2}$$
$$b = 8 \text{ cm}$$

Tako je onda i duljina visine valjka

$$v = b = 8 \text{ cm}.$$

Prema tome, traženi obujam valjka je jednak

$$V = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi v$$
$$V = \left(\frac{6}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 8$$
$$V = 24\pi \text{ cm}^3$$

342. *Osni presjek uspravnoga kružnoga valjka je kvadrat. Ako oplošje kvadra iznosi* 54π cm^2, *izračunajte obujam valjka.*

Rješenje: Označimo sa r polumjer osnovke valjka, a s v njegovu visinu. Osni presjek uspravnoga kružnoga valjka općenito je pravokutnik kojemu je duljina jednaka promjeru osnovke ($2r$), a širina visini valjka (v). U ovome je zadatku taj presjek kvadrat što znači da je promjer osnovke jednak visini valjka:

$$2r = v$$

Oplošje valjka računamo prema formuli

$$O = 2r\pi \cdot (r + v).$$

U ovu formulu uvrstimo $O = 54\pi$ i $v = 2r$ pa dobivamo:

$$54\pi = 2r\pi \cdot (r + 2r),$$

odnosno

$$6r^2\pi = 54\pi,$$

otkuda dijeljenjem s 9π slijedi

$$r^2 = 9,$$

odnosno

$$r = 3 \text{ cm}.$$

Tako je

$$v = 2r = 6 \text{ cm},$$

pa je traženi obujam valjka jednak

$$V = r^2\pi \cdot v,$$
$$V = 3^2\pi \cdot 6,$$
$$V = 54\pi \text{ cm}^3.$$

343. *U uspravni kružni valjak upisana je pravilna četverostrana piramida. Izračunajte omjer njihovih obujmova.*

Rješenje: Označimo sa r polumjer osnovke valjka, a sa v njegovu visinu. Budući da je osnovka valjka krug, to je osnovka piramide kvadrat upisan u taj krug. Duljina njegove dijagonale jednaka je promjeru osnovke valjka, pa ako s a označimo duljinu osnovnoga brida upisane četverostrane piramide, vrijedi jednakost:

$$a\sqrt{2} = 2r$$

(jer se duljina dijagonale kvadrata određuje prema formuli

$$d = a\sqrt{2}\ ,$$

gdje je a duljina stranice kvadrata). Iz te jednakosti proizlazi:

$$a = \frac{2r}{\sqrt{2}}$$

odnosno, nakon racionalizacije nazivnika brojem $\sqrt{2}$,

$$a = r \cdot \sqrt{2}\ .$$

Visina piramide jednaka je visini valjka v. Tako je traženi omjer obujmova jednak:

$$\frac{V_{valjak}}{V_{piramida}} = \frac{B_{valjak} \cdot v}{\frac{1}{3} \cdot B_{piramida} \cdot v} = 3 \cdot \frac{r^2 \cdot \pi}{a^2} = 3 \cdot \frac{r^2 \cdot \pi}{(r\sqrt{2})^2} = 3 \cdot \frac{r^2 \cdot \pi}{2r^2} = \frac{3\pi}{2}\ .$$

345. *Dijagonale osnoga presjeka uspravnoga kružnoga valjka zatvaraju kut od* 60°. *Ako je površina toga presjeka* $100\sqrt{3}$ cm^2, *izračunajte obujam valjka.*

Rješenje: Označimo s r polumjer osnovke valjka, a s v njegovu visinu. Osni presjek uspravnoga kružnoga valjka je pravokutnik. Stranice toga pravokutnika su promjer osnovke valjka ($2r$) i visina valjka (v). Određenosti radi, neka su vrhovi toga pravokutnika na donjoj osnovki valjka A i B, a na gornjoj osnovki valjka C i D. Nadalje, neka je S sjecište dijagonala AC i BD pravokutnika $ABCD$. Budući da je svaki pravokutnik usporednik, njegove se dijagonale raspolavljaju. To znači da je S polovište i dužine AC i dužine CD. Nadalje, dijagonale pravokutnika imaju jednake duljine, što znači da je $|AC| = |BD|$. Promotrimo trokut ABS. Budući da je S zajedničko polovište jednako dugih dijagonala AC i BD, to je $|AS| = |BS|$, pa je trokut ABS jednakokračan. Njegov kut kod vrha S jednak je 60°. No, u jednakokračnom trokutu su oba kuta na osnovici jednaka, što znači da je kut kod vrha A jednak kutu kod vrha B. Označimo li kut kod vrha A s α, onda je i kut kod vrha B također jednak α, pa zbroj kutova u trokutu ABS iznosi:

$$\alpha + \alpha + 60°.$$

Budući da je zbroj kutova u svakom trokutu jednak 180°, dobivamo jednadžbu:

$$\alpha + \alpha + 60° = 180°,$$

iz koje je $\alpha = 60°$. Tako zaključujemo da svi kutovi trokuta ABS iznose 60°, pa je taj trokut jednakostraničan. To znači da vrijedi jednakost:

$$|AS| = |BS| = |AB| = 2r.$$

Sada promotrimo pravokutan trokut ABC. Duljina jedne njegove katete je

$$|AB| = 2r,$$

duljina katete BC jednaka je visini valjka:

$$|BC| = v,$$

a duljina hipotenuze AC dvostruko je veća od duljine dužine AS (jer je S polovište dužine AC). Već smo zaključili da je $|AS| = 2r$ pa je

$$|AC| = 2 \cdot |AS| = 2 \cdot 2r = 4r.$$

Pitagorin poučak primijenjen na trokut ABC daje:

$$(2r)^2 + v^2 = (4r)^2,$$

odnosno

$$4r^2 + v^2 = 16r^2.$$

Odatle slijedi:

$$v^2 = 12r^2,$$

te je

$$v = 2\sqrt{3} \cdot r$$

Površina osnoga presjeka jednaka je površini pravokutnika kojemu su duljine stranica $2r$ i v:

$$P = 2r \cdot v.$$

U ovu jednakost uvrstimo $P = 100\sqrt{3}$ i $v = 2\sqrt{3} \cdot r$ pa dobivamo jednadžbu:

$$100\sqrt{3} = 2r \cdot (2\sqrt{3} \cdot r),$$

odnosno, nakon dijeljenja s $4\sqrt{3}$,

$$r^2 = 25.$$

Stoga je $r = 5$ pa je duljina visine valjka jednaka

$$v = 2\sqrt{3} \cdot r,$$
$$v = 2\sqrt{3} \cdot 5,$$
$$v = 10\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Konačno, obujam valjka jednak je:

$$V = r^2\pi \cdot v,$$
$$V = 5^2 \cdot \pi \cdot 10\sqrt{3}$$
$$V = 250\sqrt{3} \cdot \pi \text{ cm}^3.$$

346. *Dijagonala u osnom presjeku valjka ima duljinu* $d = 4$ cm *i s ravninom osnovke valjka zatvara kut od* $30°$. *Izračunajte obujam toga valjka.*

Rješenje: Postupit ćemo analogno kao u rješenju prethodnoga zadatka. Uz iste oznake kao u tome zadatku, promotrimo pravokutan trokut ABC. Duljine stranica toga trokuta su:

$$|AB| = 2r,$$
$$|BC| = v,$$
$$|AC| = d = 4 \text{ cm}.$$

Kut kod vrha A toga trokuta jednak je kutu koji dijagonala osnoga presjeka tvori s ravninom osnovke valjka, dakle, $\alpha = 30°$. Koristeći trigonometrijske funkcije kuta α odredit ćemo duljine kateta trokuta ABC:

$$2r = |AB| = |AC| \cdot \cos\alpha = 4 \cdot \cos 30° = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ cm},$$
$$v = |BC| = |AC| \cdot \sin\alpha = 4 \cdot \sin 30° = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \text{ cm}.$$

Iz tih jednakosti slijedi:

$$r = \sqrt{3} \text{ cm}, \; v = 2 \text{ cm},$$

pa je traženi obujam valjka jednak

$$V = r^2\pi \cdot v,$$
$$V = (\sqrt{3})^2 \cdot \pi \cdot 2$$
$$V = 6 \cdot \pi \text{ cm}^3.$$

347. *Zadani su uspravni kružni valjak i uspravni kružni stožac takvi da je promjer osnovke valjka jednak visini stošca, a visina valjka jednaka promjeru osnovke stošca. Ako je omjer promjera osnovke i visine valjka jednak* $3 : 2$, *izračunajte omjer obujmova valjka i stošca.*

Rješenje: Označimo s r_v polumjer osnovke valjka, a s v_v njegovu visinu. Tada je polumjer r_s osnovke stošca jednak

$$r_s = \frac{1}{2} v_v$$

(jer je duljina promjera osnovke stošca jednaka duljini visine valjka), a visina v_s stošca jednaka

$$v_s = 2r_v$$

(jer je duljina visine stošca jednaka duljini promjera osnovke valjka). Obujam valjka je:

$$V_v = r_v^2 \cdot \pi \cdot v_v,$$

dok je obujam stošca jednak

$$V_s = \frac{1}{3} r_s^2 \cdot \pi \cdot v_s$$
$$V_s = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} v_v \right)^2 \cdot \pi \cdot (2r_v)$$
$$V_s = \frac{1}{6} \cdot r_v \cdot v_v^2 \cdot \pi$$

pa dijeljenjem izraza

$$V_v = r_v^2 \cdot \pi \cdot v_v$$

s izrazom

$$V_s = \frac{1}{6} \cdot r_v \cdot v_v^2 \cdot \pi$$

dobivamo:

$$\frac{V_v}{V_s} = \frac{r_v^2 \cdot \pi \cdot v_v}{\frac{1}{6} \cdot v_v^2 \cdot \pi \cdot r_v}$$
$$\frac{V_v}{V_s} = 6 \frac{r_v}{v_v}$$

Preostaje nam iskoristiti podatak da je omjer promjera osnovke i visine valjka jednak 3 : 2. To znači da je

$$(2r_v) : v_v = 3 : 2,$$

a odatle je

$$r_v : v_v = 3 : 4,$$

odnosno

$$\frac{r_v}{v_v} = \frac{3}{4}.$$

Uvrštavanjem te jednakosti u jednakost

$$\frac{V_v}{V_s} = 6 \frac{r_v}{v_v}$$

dobivamo:

$$\frac{V_v}{V_s} = 6 \cdot \frac{3}{4}$$
$$\frac{V_v}{V_s} = \frac{9}{2}$$

pa je traženi omjer obujmova valjka i stošca jednak 9 : 2.

348. *Izvodnica kosoga valjka duga je* 6 cm, *a s ravninom osnovke zatvara kut od* 30°. *Ako se duljine promjera osnovke i visine toga valjka odnose kao* 5 : 6, *izračunajte obujam valjka.*

Rješenje: Označimo s r polumjer osnovke valjka, a s v njegovu visinu. Osni presjek kosoga valjka je usporednik kojemu je jedna stranica jednaka promjeru osnovke kosoga valjka ($2r$), a druga izvodnici toga valjka (s). Visina toga usporednika jednaka je visini valjka (v). Određenosti radi, neka je $ABCD$ osni presjek kosoga valjka takav da vrhovi A i B leže na donjoj osnovki, a vrhovi C i D na gornjoj. Povucimo iz vrha C okomicu na stranicu AB i neka je N nožište te visine. Trokut ANC je pravokutan, duljina njegove katete CN jednaka je v, duljina njegove hipotenuze AC jednaka je duljini izvodnice valjka:

$$|AC| = 6 \text{ cm},$$

a kut α kod vrha A jednak je kutu koji izvodnica kosoga valjka zatvara s ravninom osnovke valjka:

$$\alpha = 30°.$$

Tako je

$$v = |CN| = |AC| \cdot \sin \alpha = 6 \cdot \sin 30° = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 \text{ cm}.$$

Sada iz

$$(2r) : v = 5 : 6$$

slijedi

$$r = \frac{5}{12} \cdot v \, ,$$

pa uvrštavanjem $v = 3$ cm dobivamo:

$$r = \frac{5}{12} \cdot 3 = \frac{5}{4} \text{ cm}.$$

Tako konačno imamo:

$$V = r^2 \pi \cdot v$$
$$V = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \pi \cdot 3$$
$$V = \frac{75}{16} \pi \text{ cm}^3.$$

349. *Jednakostraničan stožac i jednakostraničan valjak imaju jednaka oplošja. U kojemu su omjeru njihovi obujmovi?*

Rješenje: Pojam *jednakostraničan stožac* znači da je riječ o uspravnom kružnom stošcu čiji je osni presjek jednakostraničan trokut. Pojam *jednakostraničan valjak* znači da je riječ o uspravnom kružnom valjku čiji je osni presjek kvadrat. Neka je r_s polumjer osnovke stošca, a r_v polumjer osnovke valjka. Budući da je stožac jednakostraničan, duljina njegove izvodnice jednaka je promjeru osnovke stošca:

$$s = 2 \cdot r_s,$$

pa je oplošje stošca

$$O_s = r_s \cdot \pi \cdot (r_s + s),$$
$$O_s = r_s \cdot \pi \cdot (r_s + 2r_s),$$
$$O_s = 3\, r_s^2\, \pi.$$

Nadalje, budući da je valjak jednakostraničan, duljina njegove visine jednaka je duljini promjera osnovke:

$$v_v = 2 \cdot r_v.$$

Stoga je oplošje valjka jednako

$$O_v = 2\, r_v^2\, \pi + 2r_v \cdot \pi \cdot v_v,$$
$$O_v = 2\, r_v^2\, \pi + 2r_v \cdot \pi \cdot 2 \cdot r_v,$$
$$O_v = 2\, r_v^2\, \pi + 4\, r_v^2 \cdot \pi,$$
$$O_v = 6\, r_v^2\, \pi.$$

Prema uvjetu iskazanom u zadatku, oplošja valjka i stošca moraju biti jednaka. Stoga iz

$$O_s = O_v$$

slijedi:

$$3\, r_s^2\, \pi = 6\, r_v^2\, \pi,$$

a odatle dijeljenjem s 3π i uzimanjem drugoga korijena dobivamo:

$$r_s = r_v \cdot \sqrt{2}\,.$$

Izračunajmo sada obujam stošca, odnosno obujam valjka. Odredimo najprije duljinu visine stošca v_s. Budući da vrijedi jednakost

$$s^2 = r_s^2 + v_s^2$$

uvrštavanjem

$$r_s = r_v \cdot \sqrt{2}$$

i

$$s = 2 \cdot r_s = 2\sqrt{2} \cdot r_v$$

dobivamo:

$$(2\sqrt{2} \cdot r_v)^2 = (r_v \cdot \sqrt{2}\,)^2 + v_s^2,$$

odnosno

$$8\, r_v^2 = 2\, r_v^2 + v_s^2,$$

a odatle slijedi

$$v_s = \sqrt{6} \cdot r_v .$$

Tako sada imamo:

$$\frac{V_s}{V_v} = \frac{\frac{1}{3} r_s^2 \pi \cdot v_s}{r_v^2 \pi \cdot v_v} = \frac{\frac{1}{3}(r_v \cdot \sqrt{2})^2 \pi \cdot \sqrt{6} \cdot r_v}{r_v^2 \pi \cdot 2r_v} = \frac{2r_v^2 \pi \cdot \sqrt{6} \cdot r_v}{3r_v^2 \pi \cdot 2r_v} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

pa zbog

$$\frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{\frac{6}{3^2}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

slijedi da se obujmovi stošca i valjka odnose kao $\sqrt{2} : \sqrt{3}$.

350. *Duljine kateta pravokutnoga trokuta su* 12 *i* 16*. Izračunajte obujam rotacijskoga tijela koje nastaje vrtnjom toga trokuta oko njegove najdulje stranice.*

Rješenje: Radi određenosti, pretpostavimo da je $a = 12$ i $b = 16$. Najdulja stranica pravokutnoga trokuta jest njegova hipotenuza. Njezina je duljina

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$c = \sqrt{12^2 + 16^2}$$
$$c = 20$$

Duljinu visine na hipotenuzu dobijemo iz izraza

$$v = \frac{ab}{c}$$

pa uvrštavanjem $a = 12$, $b = 16$ i $c = 20$ dobijemo

$$v = 9.6.$$

Vrtnjom zadanoga trokuta oko visine na njegovu najdulju stranicu nastaju dva uspravna kružna stošca koja imaju zajedničku osnovku. Polumjer te osnovke jednak je visini na hipotenuzu zadanoga trokuta:

$$r = v = 9.6 \text{ cm}$$

Visina jednoga od njih jednaka je ortogonalnoj projekciji jedne katete na hipotenuzu (p), a visina drugoga ortogonalnoj projekciji druge katete na hipotenuzu (q). Traženi obujam jednak je zbroju obujmova tih dvaju stožaca:

$$V = V_1 + V_2$$
$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot p + \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot q$$
$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot (p + q)$$

Budući da vrijedi jednakost

$$p + q = c,$$

konačno dobivamo:

$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot c$$
$$V = \frac{1}{3} \cdot 9.6^2 \cdot \pi \cdot 20$$
$$V = 614.4\pi \text{ cm}^3$$

351. *Riješite nejednadžbu*:

$$\frac{x+1}{x+2} > \frac{x+3}{x+4}$$

<u>Rješenje:</u> Najprije postavimo uvjete na vrijednost nepoznanice x:

$x + 2 \neq 0$ (da bi prvi razlomak bio definiran)
$x + 4 \neq 0$ (da bi drugi razlomak bio definiran)

Sada zadanu nejednadžbu transformirajmo ovako:

$$\frac{x+1}{x+2} - \frac{x+3}{x+4} > 0$$
$$\frac{(x+1)(x+4)-(x+3)(x+2)}{(x+2)(x+4)} > 0$$
$$\frac{x^2+5x+4-(x^2+5x+6)}{(x+2)(x+4)} > 0$$
$$\frac{-2}{(x+2)(x+4)} > 0$$

Budući da je brojnik posljednjega razlomka strogo negativan, i njegov nazivnik mora biti takav (kako bi vrijednost razlomka bila strogo pozitivna), pa dobivamo nejednadžbu:

$$(x + 2)(x + 4) < 0.$$

Uočimo da će svi realni brojevi x koji budu zadovoljavali gornju nejednakost ujedno zadovoljavati i oba uvjeta na vrijednost nepoznanice x:

$$x + 2 \neq 0$$
$$x + 4 \neq 0$$

pa će skup svih rješenja polazne nejednadžbe biti skup svih rješenja nejednadžbe

$$(x + 2)(x + 4) < 0.$$

Tu nejednadžbu najbrže možemo riješiti uočimo li da je zapravo riječ o kvadratnoj nejednadžbi, pri čemu pripadna kvadratna funkcija ima nultočke $x_1 = -4$ i $x_2 = 2$, te graf okrenut prema gore. Stoga ta kvadratna funkcija poprima negativne vrijednosti između svojih nultočaka (nultočke se isključuju), te je skup svih rješenja polazne nejednadžbe otvoreni interval $\langle -4, -2 \rangle$.

352. *Odredite vrijednost realnoga parametra* $m \in \mathbf{R}$ *tako da apsolutna vrijednost razlike rješenja jednadžbe*

$$x^2 - 5x + m = 0$$

bude jednaka 3.

Rješenje: Najprije primijetimo da vrijedi jednakost:

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4(x_1 x_2)}$$

Primjena Vièteovih formula na zadanu jednadžbu daje sljedeće jednakosti:

$$x_1 + x_2 = 5,$$
$$x_1 x_2 = m.$$

Uvrštavanjem tih jednakosti i jednakosti

$$|x_1 - x_2| = 3$$

u jednakost

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4(x_1 x_2)}$$

dobivamo:

$$3 = \sqrt{5^2 - 4m},$$

a odavde kvadriranjem slijedi:

$$9 = 25 - 4m,$$

te je konačno $m = 4$.

353. *Riješite nejednadžbu:*

$$4x - x^2 \geq -2x + 8$$

Rješenje: Zadanu nejednadžbu možemo zapisati u obliku:

$$x^2 - 2x - 4x + 8 \leq 0,$$

odnosno u obliku

$$x^2 - 6x + 8 \leq 0.$$

Pripadna kvadratna funkcija je $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Njezine su nultočke $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, a graf parabola okrenuta prema gore. Stoga ona poprima nepozitivne vrijednosti između svojih nultočaka (nultočke se uključuju). Prema tome, rješenje polazne nejednadžbe je segment [2, 4].

354. *Graf kvadratne funkcije prolazi točkama* $A(-1, 0)$, $B(0, 1)$ *i* $C(2, 0)$. *Zadajte analitički tu kvadratnu funkciju.*

Rješenje: Odmah uočimo da su $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$ nultočke tražene funkcije (jer su nultočke sjecišta grafa kvadratne funkcije s osi Ox, a u ovom su slučaju to točke A i C), pa koristeći oblik:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2),\ a \in \mathbf{R},$$

dobivamo:

$$f(x) = a(x + 1)(x - 2).$$

Preostaje nam odrediti vrijednost realnoga parametra a. U tu svrhu iskoristimo podatak da graf tražene funkcije prolazi točkom $B(0, 1)$. To znači da je $f(0) = 1$ pa u jednakost

$$f(x) = a(x + 1)(x - 2)$$

uvrstimo $x = 0$:

$$f(0) = a(0 + 1)(0 - 2),$$

a potom i $f(0) = 1$:

$$1 = -2a,$$

pa je $a = -\frac{1}{2}$. Tako je konačno:

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x + 1)(x - 2),$$

odnosno nakon izvršenoga množenja:

$$f(x) = -\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x + 1.$$

355. *Odredite* $|z|$ *ako je* $z = \frac{1+2i}{2-i}$.

Rješenje: Primijenit ćemo formulu

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

i dobiti:

$$|z| = \frac{|1+2i|}{|2-i|} = \frac{\sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1.$$

356. *Odredite vrijednost realnoga parametra k tako da polinom $p(x) = x^8 + x^5 + kx^3 - 1$ bude djeljiv polinomom $q(x) = x^5 - 1$.*

Rješenje: Primijenit ćemo sljedeću tvrdnju: *Polinom p je djeljiv polinomom q ako i samo ako je polinom $(p - q)$ djeljiv polinomom q.* U našem slučaju to znači da je djeljivost polinoma p i q ekvivalentna djeljivosti polinoma

$$p - q = (x^8 + x^5 + kx^3 - 1) - (x^5 - 1) = x^8 + kx^3 = x^3 \cdot (x^5 + k)$$

i polinoma q. Budući da $q(x)$ očito ne dijeli faktor x^3, mora dijeliti faktor $x^5 + k$. To je moguće ako i samo ako je $k = -1$.

357. *Odredite vrijednosti realnoga parametra* $m \in \mathbf{R}$ *tako da jednadžba*

$$\left(\frac{1}{x} - 4\right)^2 + \frac{1}{x} = m$$

ima dva različita realna rješenja.

Rješenje: Stavimo $t = \frac{1}{x}$, pa dobivamo jednadžbu:

$$(t - 4)^2 + t = m,$$

odnosno, nakon kvadriranja i sređivanja, jednadžbu

$$t^2 - 7t + 16 - m = 0.$$

Da bi ova kvadratna jednadžba imala dva različita realna rješenja, nužno je i dovoljno da njezina diskriminanta bude nenegativna, odnosno da vrijedi nejednakost

$$7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (16 - m) \geq 0,$$

odnosno nejednakost

$$4m \geq 15.$$

Odavde je $m \geq 3.75$ pa je skup svih vrijednosti realnoga parametra m za koje polazna jednadžba ima dva realna rješenja poluzatvoreni interval $[3.75, +\infty\rangle$.

358. *Jedna cijev sama napuni bazen za* 20 *sati*, *a ako se otvori i druga cijev*, *bazen će biti napunjen za* 8 *sati*. *Za koliko bi sati druga cijev sama napunila bazen*?

Rješenje: Neka je t traženo vrijeme. Za 1 sat prva cijev napuni $\frac{1}{20}$ bazena, a druga $\frac{1}{t}$ bazena, pa za 1 sat zajedno napune $\frac{1}{20} + \frac{1}{t}$ bazena. No, s druge strane, ako se bazen pomoću obje cijevi napuni za 8 sati, onda obje cijevi za 1 sat zajedno napune $\frac{1}{8}$ bazena. Stoga mora vrijediti jednakost:

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{t} = \frac{1}{8}.$$

Tako smo dobili jednadžbu s nepoznanicom t. Budući da je $t > 0$, pomnožimo tu jednadžbu s najmanjim zajedničkim višekratnikom nazivnika svih razlomaka koji se pojavljuju u njoj. Taj višekratnik je $40 \cdot t$, pa množenjem tim izrazom dobivamo:

$$2t + 40 = 5t,$$

a odavde je

$$t = \frac{40}{3} \text{ sati} = (13 + \frac{1}{3}) \text{ sati} = 13 \text{ sati} + \frac{1}{3} \text{ sati} = 13 \text{ sati} + \frac{1}{3} \cdot 60 \text{ minuta} = 13 \text{ sati i } 20 \text{ minuta.}$$

359. *Dvije jednake vojničke brigade treba smjestiti u vlak tako da svaki vojnik sjedne na točno jedno sjedaće mjesto. Ako se postavi* 15 *jednakih vagona,* 16 *sjedaćih mjesta će ostati prazno*, *a ako se postavi* 14 *jednakih vagona*, 20 *vojnika će morati stajati*. *Koliko je vojnika u svakoj brigadi*?

Rješenje: Označimo s v ukupan broj vojnika, a s m broj sjedaćih mjesta u jednom vagonu. U 15 vagona ima ukupno $15 \cdot m$ sjedaćih mjesta, a kako će nakon smještaja svih vojnika 16 mjesta ostati prazno, vrijedi jednakost:

$$15 \cdot m - 16 = v$$

Nadalje, u 14 vagona ima ukupno $14 \cdot m$ sjedaćih mjesta, a kako će nakon smještaja svih vojnika 20 vojnika morati stajati, vrijedi jednakost:

$$14 \cdot m + 20 = v.$$

Tako smo dobili sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{gathered} 15 \cdot m - 16 = v \\ 14 \cdot m + 20 = v \end{gathered}$$

Riješimo ga metodom komparacije:

$$\begin{gathered} 15 \cdot m - 16 = 14 \cdot m + 20 \\ m = 36. \end{gathered}$$

Tako je $v = 15 \cdot 36 - 16 = 524$ pa u svakoj brigadi ima $524 : 2 = 262$ vojnika.

360. *Racionalizirajte nazivnik razlomka*:

$$\frac{1+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-2}.$$

Rješenje: Pomnožimo brojnik i nazivnik zadanoga razlomka s $\sqrt{2}+\sqrt{3}+2$. Dobivamo:

$$\frac{1+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-2} = \frac{(1+2\sqrt{6})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-2)(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)} = \frac{(1+2\sqrt{6})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-2^2} = \frac{(1+2\sqrt{6})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)}{2+2\sqrt{6}+3-4} =$$
$$\frac{(1+2\sqrt{6})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)}{1+2\sqrt{6}} = \sqrt{2}+\sqrt{3}+2$$

361. *Ako je* $f(x+\frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, *odredite* $f(\frac{1}{x})$.

Rješenje: Uočimo da vrijedi jednakost

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = (x+\frac{1}{x})^2 - 2,$$

što znači da je

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\ .$$

Zamjenom $t = x+\frac{1}{x}$ odmah dobivamo

$$f(t) = t^2 - 2.$$

U tu jednakost uvrstimo $t = \frac{1}{x}$ pa konačno dobijemo:

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2-2$$
$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}-2$$
$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-2x^2}{x^2}$$

362. *Odredite inverznu funkciju za funkciju* $f(x) = 2^{-x} - 1$.

<u>Rješenje:</u> Primijenimo standardni postupak:

1.) Zamijenimo $f(x)$ s y:

$$y = 2^{-x} - 1$$

2.) Zamijenimo x i y:

$$x = 2^{-y} - 1$$

3.) Izrazimo y pomoću x:

$$2^{-y} = x + 1$$
$$-y = \log_2(x + 1)$$
$$y = -\log_2(x + 1)$$

4.) Zamijenimo y s $f^{-1}(x)$:

$$f^{-1}(x) = -\log_2(x + 1).$$

Dakle, tražena inverzna funkcija je $f^{-1}(x) = -\log_2(x + 1)$.

363. *Odredite realne brojeve a i b tako da polinom* $p(x) = x^4 + ax^2 + b$ *bude djeljiv polinomom* $q(x) = x^2 + 2x + 5$.

<u>Rješenje:</u> Podijelimo zadane polinome prema pravilima za dijeljenje polinoma:

$$\begin{array}{l}
(x^4 + \qquad ax^2 + b) : (x^2 + 2x + 5) = x^2 - 2x + (a - 1) \\
\underline{-x^4 - 2x^3 - 5x^2} \\
\quad -2x^3 + (a - 5)x^2 \\
\quad \underline{2x^3 + 4x^2 + 10x} \\
\qquad\quad (a - 1)x^2 \qquad + 10x \qquad + b \\
\qquad \underline{-(a - 1)x^2 - 2(a - 1)x - 5(a - 1)}
\end{array}$$

$$(12 - 2a)x + (b - 5a + 5)$$

Želimo li da zadani polinomi budu djeljivi, ostatak pri njihovu dijeljenju mora biti nulpolinom. Prema poučku o nulpolinomu slijedi da moraju vrijediti sljedeće jednakosti:

$$12 - 2a = 0$$
$$b - 5a + 5 = 0.$$

Iz prve jednakosti se odmah dobiva $a = 6$, pa kad tu vrijednost uvrstimo u drugu jednakost, dobivamo $b = 25$. Dakle, traženi realni brojevi su $a = 6$ i $b = 25$.

364. *Riješite sljedeću jednadžbu u skupu* **C**:

$$|z| - z = 1 + 2i.$$

<u>Rješenje:</u> Stavimo $z = a + bi$, pri čemu su $a, b \in$ **R**. Tada je

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

pa dobivamo:

$$\sqrt{a^2 + b^2} - (a + bi) = 1 + 2i,$$

odnosno

$$\sqrt{a^2 + b^2} - a - bi = 1 + 2i.$$

Odatle izjednačavanjem realnih i imaginarnih dijelova dobivamo sustav:

$$\sqrt{a^2 + b^2} - a = 1$$
$$-b = 2$$

Iz druge jednadžbe toga sustava je izravno $b = -2$ pa kad to uvrstimo u prvu jednadžbu dobivamo:

$$\sqrt{a^2 + (-2)^2} - a = 1$$
$$\sqrt{a^2 + 4} = a + 1.$$

Lijeva strana posljednje jednakosti je uvijek nenegativna, pa takva mora biti i desna strana, što znači da realan broj a mora zadovoljavati nejednakost:

$$a + 1 \geq 0.$$

Uz uvažavanje te nejednakosti kvadriranjem slijedi

$$a^2 + 4 = a^2 + 2a + 1,$$

otkuda je $a = \frac{3}{2}$. $a = \frac{3}{2}$ zadovoljava nejednakost $a + 1 \geq 0$ pa je taj broj rješenje jednadžbe $\sqrt{a^2 + 4} = a + 1$. Prema tome, traženi kompleksni broj je $z = \frac{3}{2} - 2i$.

365. *Riješite nejednadžbu*:

$$\frac{x+2}{x^3+x^2+x+1} \le 0 .$$

Rješenje: Kako je

$$x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x + 1) + (x + 1) = (x + 1)(x^2 + 1),$$

to množenjem polazne nejednadžbe sa strogo pozitivnim izrazom $x^2 + 1$ dobivamo ekvivalentnu nejednadžbu:

$$\frac{x+2}{x+1} \le 0$$

Razlikujemo dva slučaja:

1.) $x + 2 \le 0$
$x + 1 > 0$

Iz prve se nejednadžbe dobiva $x \le -2$, a iz druge $x > -1$. Presjek tih rješenja je prazan skup ϕ.

2.) $x + 2 \ge 0$
$x + 1 < 0$

Iz prve se nejednadžbe dobiva $x \ge -2$, a iz druge $x < -1$. Presjek tih rješenja je poluzatvoreni interval $[-2, 1\rangle$.

Stoga je skup svih rješenja polazne nejednadžbe poluzatvoreni interval $[-2, 1\rangle$.

366. *Riješite nejednadžbu*:

$$1 \le |x - 2| \le 2.$$

Rješenje: Razlikovat ćemo dva slučaja:

1.) $x - 2 \ge 0$

U ovome je slučaju $|x - 2| = x - 2$ pa dobivamo nejednadžbu:

$$1 \le x - 2 \le 2,$$

a odatle je

$$3 \le x \le 4,$$

odnosno $x \in [3, 4]$. Budući da svaki x iz segmenta $[3, 4]$ zadovoljava nejednakost $x - 2 \ge 0$, to je segment $[3, 4]$ skup rješenja polazne nejednadžbe.

2.) $x - 2 \le 0$

U ovome je slučaju $|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$ pa dobivamo nejednadžbu:

$$1 \le 2 - x \le 2,$$

a odatle je

$$-1 \leq -x \leq 0,$$

odnosno

$$0 \leq x \leq 1,$$

odnosno $x \in [0, 1]$. Budući da svaki $x \in [0, 1]$ zadovoljava nejednakost $x - 2 \leq 0$, to je $[0, 1]$ skup rješenja polazne nejednadžbe.

Stoga je skup svih rješenja polazne nejednadžbe unija segmenata $[0, 1] \cup [3, 4]$.

367. *Odredite vrijednost realnoga parametra $k \in \mathbf{R}$ tako da zbroj recipročnih vrijednosti rješenja jednadžbe*

$$kx^2 - (k + 1)x - 1 = 0$$

bude strogo veći od 1.

<u>Rješenje:</u> Ako je $k = 0$, dobivamo linearnu jednadžbu

$$-x - 1 = 0$$

čije je jedino rješenje $x = 1$. Tada je zbroj recipročnih vrijednosti rješenja polazne jednadžbe jednak 1, što se protivi zahtjevu da taj zbroj bude strogo veći od 1. Stoga mora biti $k \neq 0$, pa polaznu jednadžbu smijemo podijeliti s k. Tako dobivamo ekvivalentnu jednadžbu:

$$x^2 - \frac{k+1}{k}x - \frac{1}{k} = 0 .$$

Zahtjev da zbroj recipročnih rješenja polazne jednadžbe bude strogo veći od 1 zapišimo u sljedećem obliku:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 1,$$

otkuda je

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} > 1.$$

Primjenom Vièteovih formula na jednadžbu

$$x^2 - \frac{k+1}{k}x - \frac{1}{k} = 0$$

dobivamo:

$$x_1 + x_2 = \frac{k+1}{k}$$

$$x_1 x_2 = -\frac{1}{k}$$

Uvrštavanjem tih izraza u nejednadžbu

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} > 1$$

dobivamo:

$$\frac{\frac{k+1}{k}}{-\frac{1}{k}} > 1,$$

tj.

$$-(k + 1) > 1,$$

odnosno

$$k < -2.$$

368. *Izračunajte vrijednost izraza*

$$\log_2 1.6 + \log_4 25.$$

<u>Rješenje:</u> Ponovno koristimo formulu

$$\log_{b^k} a = \frac{1}{k}\log_b a.$$

Primjenom navedene formule i pravila za logaritmiranje redom imamo:

$$\log_2 1.6 + \log_4 25 = \log_2 \frac{8}{5} + \log_{2^2}(5^2) = \log_2 \frac{8}{5} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_2 5 = \log_2 \frac{8}{5} + \log_2 5 = \log_2 (\frac{8}{5} \cdot 5) = \log_2 8 = \log_2 (2^3) =$$
$$= 3\log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3$$

369. *Odredite zbroj svih rješenja jednadžbe*:

$$2^x \cdot 8^{\frac{1}{x}} - 16 = 0$$

<u>Rješenje:</u> Zadanu jednadžbu najprije transfomirajmo ovako:

$$2^x \cdot 8^{\frac{1}{x}} - 16 = 0$$
$$2^x \cdot (2^3)^{\frac{1}{x}} = 16$$
$$2^x \cdot 2^{\frac{3}{x}} = 2^4$$
$$2^{x+\frac{3}{x}} = 2^4$$

Izjednačavanjem eksponenata dobivamo jednadžbu:

$$x + \frac{3}{x} = 4$$

koju smijemo pomnožiti s x jer vrijednost te nepoznanice ne može biti jednaka nuli (u suprotnom razlomak $\frac{1}{x}$ ne bi bio definiran). Slijedi:

$$x^2 - 4x + 3 = 0,$$

a odavde je $x_1 = 1$ i $x_2 = 3$. Ti brojevi su različiti od nule pa su to ujedno i sva rješenja polazne jednadžbe. Njihov je zbroj jednak 4.

370. *Riješite jednadžbu*:

$$\log_5[2 + \log_3(x + 3)] = 0.$$

Rješenje: Antilogaritmiranjem po bazi 5 dobivamo:

$$2 + \log_3(x + 3) = 5^0,$$
$$2 + \log_3(x + 3) = 1,$$

a odavde je

$$\log_3(x + 3) = -1.$$

Antilogaritmiranjem po bazi 3 dalje slijedi:

$$x + 3 = 3^{-1}$$
$$x + 3 = \frac{1}{3}$$

i konačno

$$x = -\frac{8}{3}.$$

Izravnim uvrštavanjem u polaznu jednadžbu provjeravamo da je $x = -\frac{8}{3}$ uistinu rješenje te jednadžbe.

371. *Broj stanovnika nekoga grada u* 10 *se godina povećao na* 21 008. *Da se u istomu razdoblju broj stanovnika umanjio za isti postotak*, *u gradu bi danas bilo ukupno* 19 392 *stanovnika*. *Izračunajte postotak povećanja broja stanovnika*.

Rješenje: Označimo sa S broj stanovnika na početku promatranoga razdoblja, a sa p traženi postotak povećanja. Tada je broj stanovnika na kraju promatranoga razdoblja $S + P$ (gdje je P broj novih stanovnika), pa primjenom postotnoga računa više sto dobivamo:

$$S = \frac{(S + P) \cdot 100}{100 + p}.$$

Da se broj stanovnika umanjio za isti postotak, u gradu bi danas bilo $S - P$ stanovnika, pa primjenom postotnoga računa niže sto dobivamo:

$$S=\frac{(S-P)\cdot 100}{100-p}.$$

Lijeve strane posljednjih dviju jednakosti su jednake, pa takve moraju biti i desne strane. To znači da mora vrijediti jednakost:

$$\frac{(S+P)\cdot 100}{100+p}=\frac{(S-P)\cdot 100}{100-p}.$$

Iz te je jednakosti redom:

$$\frac{(S+P)}{100+p}=\frac{(S-P)}{100-p}$$

$$\frac{100-p}{100+p}=\frac{(S-P)}{(S+P)}$$

$$100-p=\frac{(S-P)}{(S+P)}\cdot(100+p)$$

$$100-p=\frac{(S-P)}{(S+P)}\cdot 100+\frac{(S-P)}{(S+P)}\cdot p$$

$$p\cdot\left[1+\frac{(S-P)}{(S+P)}\right]=100-\frac{(S-P)}{(S+P)}\cdot 100$$

$$p=\frac{100\cdot\left[1-\frac{(S-P)}{(S+P)}\right]}{1+\frac{(S-P)}{(S+P)}}$$

Preostaje nam uvrstiti $S - P = 19\ 392$ i $S + P = 21\ 008$ u posljednju jednakost, te izračunati:

$$p=\frac{100\cdot\left[1-\frac{19392}{21008}\right]}{1+\frac{19392}{21008}},$$

$$p = 4.$$

Dakle, traženi postotak povećanja broja stanovnika iznosi 4%.

372. *Na pismenom ispitu postavljeno je točno* 20 *zadataka. Svaki točno riješen zadatak donosi* 4 *boda, svaki neriješen ili netočno riješen zadatak donosi gubitak od* 3 *boda. Koliko je zadataka točno riješio učenik koji je ostvario ukupno* 38 *bodova*?

Rješenje: Označimo s x broj točno riješenih zadataka, a s y broj neriješenih ili netočno riješenih zadataka. Kako svaki zadatak mora biti ili točno riješen ili neriješen, odnosno netočno riješen, vrijedi jednakost:

$$x + y = 20.$$

Nadalje, riješivši točno x zadataka učenik je ostvario ukupno $x \cdot 4$ bodova, a neriješivši ili pogrešno riješivši ukupno y zadataka učenik je izgubio ukupno $y \cdot 3$ bodova. Kako je ukupan broj bodova jednak 38, mora vrijediti jednakost:

$$x \cdot 4 - y \cdot 3 = 38.$$

Tako smo dobili sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} x + y &= 20 \\ 4x - 3y &= 38. \end{aligned}$$

Pomnožimo prvu jednadžbu s 3 i dobivenu jednadžbu pribrojimo drugoj jednadžbi sustava. Dobivamo:

$$7x = 98,$$

odnosno $x = 14$. Dakle, učenik je točno riješio ukupno 14 zadataka.

373. 21 *radnik treba obaviti neki posao za* 41 *dan. Nakon* 7 *dana zajedničkoga rada na bolovanje su otišla* 4 *radnika. Za koliko će se dana produljiti predviđeno vrijeme obavljanja posla*? (*Pretpostavlja se da svi radnici rade jednakom brzinom u jednakim uvjetima*.)

Rješenje: Ako 21 radnik može obaviti predviđeni posao za 41 dan, onda jedan radnik za jedan dan može obaviti $\frac{1}{21 \cdot 41} = \frac{1}{861}$ posla. 21 radnik radi ukupno 7 dana, pa se u tih 7 dana obavi ukupno $21 \cdot 7 \cdot \frac{1}{861} = \frac{7}{41}$ posla. Preostali dio posla koji još treba obaviti iznosi $1 - \frac{7}{41} = \frac{34}{41}$. Taj dio posla radi ukupno $21 - 4 = 17$ radnika, pa će im trebati ukupno $\dfrac{\frac{34}{41}}{17 \cdot \frac{1}{861}} = 42$ dana za njegovo obavljanje. Stoga će cijeli posao biti gotov za ukupno 7 + + 42 = 51 dan. Kako je predviđeno vrijeme trajanja posla 41 dan, ono će se produljiti za $51 - 41 = 10$ dana.

374. 24 *kg kave čija je cijena* 60 kn/kg *miješamo s kavom čija je cijena* 70 kn/kg *tako da dobijemo mješavinu čija će cijena biti* 64 kn/kg. *Koliko kilograma kave čija je cijena* 70 kn/kg *trebamo uzeti*?

Rješenje: Koristit ćemo jednostavni račun smjese, odnosno pravilo zvijezde:

60 - - - - - - - - - 70 – 64 = 6

64

70 - - - - - - - - - 64 – 60 = 4

pa zaključujemo da kave treba miješati u omjeru 6 : 4, odnosno 3 : 2. Označimo li s x traženu količinu kave, onda iz razmjera

$$24 : x = 3 : 2$$

lako dobivamo $x = 16$. Dakle, treba uzeti 16 kg kave čija je cijena 70 kn/kg.

375. *Dva vrha usporednika ABCD su A*(–3, –1) *i B*(2, 0). *Točka S*(1, 2) *sjecište je njegovih dijagonala AC i BD. Izračunajte površinu toga usporednika*.

Rješenje: Iskoristit ćemo činjenicu da dijagonale usporednika dijele taj usporednik na četiri dijela jednakih površina (oprez: to ne znači da dijagonale dijele usporednik na četiri jednaka (odnosno, sukladna) dijela!). Stoga je površina trokuta ABS jednaka četvrtini površine cijeloga usporednika. Kako je

$$P_{ABS}=\frac{1}{2}|x_A(y_B-y_S)+x_B(y_S-y_A)+x_C(y_A-y_B)|$$
$$P_{ABS}=\frac{1}{2}|(-3)(0-2)+2(2+1)+1(-1-0)|\qquad ,$$
$$P_{ABS}=\frac{11}{2}$$

to je površina cijeloga usporednika

$$P=4\cdot\frac{11}{2}=22 \text{ kv. jed.}$$

376. *Duljine stranica pravokutnika razlikuju se za* 4 *cm. Vrtnjom pravokutnika oko njegove dulje stranice nastane rotacijsko tijelo čije je oplošje* 192π cm^2. *Izračunajte obujam rotacijskoga tijela koje nastane vrtnjom toga pravokutnika oko njegove kraće stranice.*

Rješenje: Označimo duljine stranica pravokutnika s a i b. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a > b$ (ako nije, jednostavno drugačije označimo stranice, što nimalo ne utječe na daljnja razmatranja). Budući da se duljine stranica pravokutnika razlikuju za 4 cm, vrijedi jednakost:

$$a-b=4.$$

Nadalje, vrtnjom pravokutnika oko njegove dulje stranice nastane uspravni kružni valjak čiji je polumjer osnovke jednak duljini kraće stranice (b), a visina duljini veće stranice (a). Stoga je oplošje toga valjka:

$$O=2b\pi\cdot(b+a).$$

Kako to oplošje mora biti jednako 192π cm^2, vrijedi jednakost:

$$192\pi=2b\pi\cdot(b+a),$$

tj.

$$b(a+b)=96.$$

Tako smo dobili sustav:

$$a-b=4$$
$$b(a+b)=96.$$

Izrazimo a iz prve jednadžbe toga sustava:

$$a=b+4$$

i uvrstimo u drugu:

$$b(b+4+b)=96,$$

otkuda je

$$2b^2+4b-96=0,$$

odnosno

$$b^2 + 2b - 48 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $b_1 = -8$ i $b_2 = 6$. Kako duljina niti jedne stranice bilo kojega geometrijskoga lika ne može biti strogo negativan broj, rješenje $b_1 = -8$ odbacujemo pa preostaje

$$b = b_2 = 6 \text{ cm}.$$

Tada je

$$a = b + 4 = 6 + 4 = 10 \text{ cm}.$$

Vrtnjom zadanoga pravokutnika oko njegove kraće stranice nastane uspravni kružni valjak čiji je polumjer osnovke jednak duljini veće stranice (a), a visina duljini manje stranice (b). Njegov je obujam:

$$V = a^2\pi \cdot b$$
$$V = 10^2 \cdot \pi \cdot 6,$$
$$V = 600\pi \text{ cm}^3.$$

377. *Zadan je skup* $S = \{-3, -2, -1, 0, 4, 5\}$. *Izračunajte vjerojatnost da slučajno odabrani element skupa S bude strogo negativan cijeli broj.*

Rješenje: U ovome je zadatku slučajni pokus *biranje elementa skupa S*. Taj pokus ima ukupno 6 mogućih ishoda (jer skup S sadrži 6 različitih elemenata), a od toga su svega 3 povoljna: -3, -2 i -1. Stoga je tražena vjerojatnost p jednaka

$$p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

378. *Zadan je skup* $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. *Koliko ima različitih četveroznamenkastih parnih prirodnih brojeva koji počinju znamenkom* 2 *i kojima su sve znamenke elementi skupa S?*

Rješenje: Prva znamenka svih tih brojeva jednoznačno je određena – to je znamenka 2. Druga i treća znamenka može biti bilo koji element skupa S, pa svaku od njih možemo izabrati na ukupno 5 različitih načina (jer skup S ima 5 različitih elemenata). Da bismo osigurali parnost formiranoga broja, njegova posljednja znamenka mora biti ili 0 ili 2 ili 4, što znači da je možemo izabrati na ukupno 3 različita načina. Prema načelu umnoška, traženi je broj jednak $5 \cdot 5 \cdot 3 = 75$.

379. *Izračunajte zbroj svih rješenja jednadžbe*

$$\log(2x - 1) - \log(x - 2) = \log(x + 2).$$

Rješenje: Najprije postavimo uvjete na vrijednost nepoznanice x:

$$2x - 1 > 0 \text{ (da bi } \log(2x - 1) \text{ bio definiran)}$$
$$x - 2 > 0 \text{ (da bi } \log(x - 2) \text{ bio definiran)}$$
$$x + 2 > 0 \text{ (da bi } \log(x + 2) \text{ bio definiran)}$$

Rješavajući ovaj sustav nejednadžbi dobijemo $x > 2$. Sada zadanu jednadžbu transformirajmo ovako:

$$\log(2x - 1) = \log(x + 2) + \log(x - 2),$$
$$\log(2x - 1) = \log[(x + 2)(x - 2)],$$

a odavde izjednačavanjem logaritmanada dobivamo:

$$2x - 1 = (x + 2)(x - 2),$$

odnosno

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1 = -1$ i $x_2 = 3$. $x_1 = -1$ ne zadovoljava uvjet $x > 2$ pa to nije rješenje polazne jednadžbe. $x_2 = 3$ zadovoljava uvjet $x > 2$ pa to jest rješenje polazne jednadžbe. Stoga zaključujemo da polazna jednadžba ima točno jedno rješenje: $x = 3$, pa je zbroj svih njezinih rješenja jednak 3.

380. *Proda li se neka roba po cijeni od* 840 kn, *zaradi se* 12%. *Kolika je zarada ako se roba proda za* 885 kn?

Rješenje: Neka je S cijena po kojoj je kupljena ta roba. Tada možemo postaviti jednadžbu:

$$S + 12\% \cdot S = 840,$$

odnosno

$$S + \frac{12}{100} \cdot S = 840 .$$

Množenjem sa 100 dobivamo:

$$100S + 12S = 84\,000,$$

a odavde je $S = 750$ kn. Ako se roba proda za 885 kn, zarada je

$$885 \text{ kn} - 750 \text{ kn} = 135 \text{ kn},$$

odnosno u postotcima

$$p = \frac{135}{750} = \frac{9}{50} = 18\% .$$

381. *Ako bi biciklist povećao svoju voznu brzinu za* 4 km/h, *za prelazak puta od* 240 km *trebalo bi mu* 3 sata *manje*. *Izračunajte sadašnju voznu brzinu biciklista*.

Rješenje: Neka je v sadašnja vozna brzina biciklista iskazana u km/h. Vozeći tom brzinom, put od 240 km biciklist će prijeći za

$$t_1 = \frac{240}{v} \text{ sati.}$$

Poveća li biciklist brzinu za 4 km/h, ona će iznositi $v + 4$ km/h, pa će put od 240 km biciklist prijeći za

$$t_2 = \frac{240}{v+4} \text{ sati.}$$

Prema uvjetu zadatka, razlika vremena t_1 i t_2 iznosi 3 sata:

$$t_1 - t_2 = 3 \text{ sata,}$$

pa uvrštavanjem gore navedenih izraza za t_1 i t_2 u tu jednakost dobivamo:

$$\frac{240}{v}-\frac{240}{v+4}=3,$$

odnosno množenjem sa stogo pozitivnim izrazom $v(v + 4)$

$$240(v + 4) - 240v = 3v(v + 4),$$

a odavde reduciranjem i sređivanjem dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$v^2 + 4v - 320 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su $v_1 = -20$ i $v_2 = 16$. Kako vozna brzina biciklista ne može biti strogo negativna, rješenje $v_1 = -20$ odbacujemo, pa slijedi da je tražena vozna brzina $v = v_2 = 16$ km/h.

382. *Ako se polumjer osnovke jednakostraničnoga stošca uveća za* 30%, *za koliko će se postotaka uvećati njegov obujam*?

Rješenje: Povećanje polumjera r jednakostraničnoga stošca za 30% uzrokuje i povećanje duljine njegove visine v za 30%. Naime, visina jednakostraničnoga stošca čiji je polumjer osnovke jednak r dana je formulom

$$v=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot r$$

iz koje izravno slijedi da su v i r upravno razmjerne veličine.To znači da za koliko se posto uveća jedna od njih, za toliko će se posto uvećati i druga. Stoga su polumjer osnovke i visina novoga stošca

$$r_1 = r + \frac{30}{100}\cdot r = r + 0.3\cdot r = 1.3\cdot r$$
$$v_1 = (\text{na isti način kao i } r) = 1.3\cdot v.$$

Prema tome, obujam V_1 novoga stošca jednak je

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{1}{3}r_1^2\pi\cdot v_1\\
V_1 &= \frac{1}{3}(1.3\cdot r)^2\pi\cdot(1.3\cdot v)\\
V_1 &= \frac{1}{3}\cdot 1.69\cdot r^2\pi\cdot 1.3\cdot v\\
V_1 &= 2.197\cdot(\frac{1}{3}\cdot r^2\pi\cdot v)\\
V_1 &= 2.197\cdot V
\end{aligned}$$

pri čemu je V obujam polaznoga stošca. Traženo povećanje (u postotcima) iznosi:

$$p=\frac{100(V_1-V)}{V}$$
$$p=\frac{100(2.197\cdot V-V)}{V}$$
$$p=\frac{219.7\cdot V-100V}{V}$$
$$p=\frac{119.7V}{V}$$
$$p=119.7$$

pa slijedi da će se obujam polaznoga stošca povećati za 119.7%.

383. 32 *radnika trebalo je obaviti neki posao za* 36 *dana. Nakon* 6 *dana zajedničkoga rada poslu se priključilo još* 8 *radnika. Za koliko će se dana smanjiti predviđeno vrijeme obavljanja posla*? (*Pretpostavlja se da svi radnici rade jednakom brzinom u jednakim uvjetima rada.*)

Rješenje: Ako 32 radnika može obaviti taj posao za 36 dana, onda jedan radnik za jedan dan obavi $\frac{1}{32\cdot 36}$ posla. Zbog toga za 6 dana 32 radnika obave 32 · 6 · $\frac{1}{32\cdot 36}=\frac{1}{6}$ posla, pa za obaviti ostaje još 1 – $\frac{1}{6}$ = $\frac{5}{6}$ posla. Taj dio posla obavlja ukupno 32 + 8 = 40 radnika, pa je vrijeme potrebno za obavljanje toga dijela posla $\frac{\frac{5}{6}}{40\cdot\frac{1}{32\cdot 36}}=24$ dana. Tako će cijeli posao biti obavljen za 6 + 24 = 30 dana umjesto za predviđenih 36 dana, pa će se predviđeno vrijeme obavljanja posla smanjiti za 6 dana.

384. *Izračunajte zbroj kubova koordinata središta kružnice*

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0.$$

Rješenje: Zadanu jednadžbu kružnice najprije prevedimo iz razvijenoga u opći oblik:

$$(x + 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 - 3 = 0,$$

otkuda je

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16.$$

Središte kružnice je točka $S(-3, 2)$ pa je zbroj kubova njegovih koordinata

$$(-3)^3 + 2^3 = -27 + 8 = -19.$$

385. *Šiljasti kut romba iznosi* 60°, *a duljina kraće dijagonale jednaka je* 8 cm. *Izračunajte površinu toga romba.*

Rješenje: Određenosti radi, neka je $ABCD$ romb čije stranice imaju duljinu a. Iz podataka iskazanih u zadatku slijedi da je kut kod vrha A jednak α = 60°, a duljina dužine BD jednaka 8 cm. Promotrimo trokut ABD. Taj je trokut jednakokračan (jer je $|AB| = |AD| = a$) i kut nasuprot osnovici BD jednak je 60°. U istom su trokutu kutovi kod vrhova B i D jednaki jer se nalaze nasuprot jednakim stranicama. Označimo jedan od njih s β. Budući da je zbroj kutova u svakom trokutu jednak 180°, mora vrijediti jednakost:

$$\beta + \beta + 60° = 180°,$$

a odatle je $\beta = 60°$. Stoga su sva tri kuta trokuta ABD jednaka 60°, a kako se nasuprot jednakim kutovima moraju nalaziti i jednake stranice, slijedi da je taj trokut jednakostraničan. No, to onda znači da je $a = |AB| = |BD| = 8$ cm. Tako je površina zadanoga romba jednaka

$$P = a^2 \cdot \sin\alpha,$$
$$P = 8^2 \cdot \sin 60°,$$
$$P = 64 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$P = 32\sqrt{3}\text{ cm}^2.$$

386. *Društvo od* 4 *žene i* 6 *muškaraca između sebe mora odabrati tročlano izaslanstvo u kojemu će većina biti muškarci. Na koliko se različitih načina može izvršiti taj izbor*?

Rješenje: Razlikovat ćemo dva slučaja:

1.) Izaslanstvo čine 3 muškarca:

Broj različitih načina na koje se mogu izabrati 3 muškarca između njih 6 jednak je $\binom{6}{3} = \frac{6\cdot5\cdot4}{3!} = \frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3} = \frac{120}{6} =$ 20.

2.) Izaslanstvo čine dva muškarca i jedna žena:

Broj različitih načina na koje se mogu izabrati dva muškarca između njih 6 jednak je $\binom{6}{2} = \frac{6\cdot5}{2!} = \frac{6\cdot5}{1\cdot2} = \frac{30}{2} = 15$, a broj različitih načina na koje se može izabrati jedna ženu između njih 4 očito je jednak 4. Prema načelu umnoška, ukupan broj različitih načina na koje se mogu izabrati 2 muškarca i jedna žena jednak je $15 \cdot 4 = 60$.

Prema načelu zbroja, ukupan broj različitih načina na koji se može izvršiti traženi izbor jednak je $20 + 60 = 80$.

387. *Nepismeno dijete sastavlja* 10-*slovčanu riječ od slova* A, A, A, E, I, K, M, M, T, T. *Izračunajte vjerojatnost da će biti sastavljena riječ* MATEMATIKA.

Rješenje: Neka je $S = \{$A, A, A, E, I, K, M, M, T, T$\}$. S se očito sastoji od ukupno 10 elemenata, među kojima ima 3 jednaka slova A, dva jednaka slova M i dva jednaka slova T. Stoga je ukupan broj mogućih ishoda promatranoga slučajnoga pokusa jednak ukupnom broju različitih permutacija skupa od 10 elemenata među kojima ima 3 elementa jedne vrste, 2 elementa druge vrste i 3 elementa treće vrste, a taj je jednak:

$$P_{3,2,2}(10) = \frac{10!}{3!2!2!} = 151200$$

Kako je broj povoljnih ishoda u ovom slučaju jednak 1 (riječ MATEMATIKA može se dobiti na jedan jedini način), tražena je vjerojatnost jednaka

$$p = \frac{1}{151200} = 0{,}0000066137566137566137566137566137566 1,$$

odnosno približno

$$p \approx 0{,}00066\%.$$

388. *Zlatni predmet finoće* 75% *ima masu* 4.5 kg. *Izračunajte masu čistoga zlata u tom predmetu.*

Rješenje: Podatak da zlatni predmet ima finoću 75% znači da 75% njegove mase tvori čisto zlato. Stoga je tražena masa čistoga zlata jednaka 75% od 4.5 kg, a to je

$$m_z = \frac{75}{100} \cdot 4.5 = 3.375 \text{ kg} = 337.5 \text{ dkg}.$$

389. *Darko prodaje sladoled po* 5% *nižoj cijeni od Ivana. Za koliko postotaka Ivan treba sniziti cijenu svojega sladoleda da bi ga prodavao po* 5% *nižoj cijeni od Darka*?

Rješenje: 1. način: Neka je C cijena Ivanova sladoleda. Tada je cijena Darkova sladoleda

$$D = C - 5\% \cdot C = C - 0.05 \cdot C = 0.95 \cdot C.$$

Cijena niža za 5% od cijene Darkova sladoleda iznosi

$$C_1 = D - 5\% \cdot D = D - 0.05 \cdot D = 0.95 \cdot D,$$

pa kad ovamo uvrstimo $D = 0.95 \cdot C$ dobijemo:

$$C_1 = 0.95^2 \cdot C,$$

Odnosno

$$C_1 = 0.9025 \cdot C.$$

Stoga je traženi postotak jednak

$$\begin{aligned}
p &= \frac{100(C - C_1)}{C} \\
p &= \frac{100(C - 0.9025C)}{C} \\
p &= \frac{100C - 90.25C}{C} \\
p &= \frac{9.75C}{C} \\
p &= 9.75
\end{aligned}$$

Dakle, Ivan treba sniziti cijenu svojega sladoleda za 9.75%.

2. način: Uočimo da je zadatak ekvivalentan zadatku: *Cijena neke robe se smanji za* 5%, *a potom za još* 5%. *Izračunajte ukupno smanjenje cijene u postotcima*. Taj zadatak rješava se primjenom formule za računanje ukupne promjene osnovne veličine pri njezinim sukcesivnim promjenama:

$$R = 100 \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) - 100$$

u koju treba uvrstiti $p_1 = p_2 = -5$. Tako se dobije $R = -9.75$, pa je ukupno smanjenje polazne cijene 9.75%.

390. *Izračunajte*:

$$\log 5 \cdot \log 20 + \log^2 2.$$

Rješenje: Imamo redom:

$$\log 5 \cdot \log 20 + \log^2 2 = \log \frac{10}{2} \cdot \log(10 \cdot 2) + \log^2 2 = (\log 10 - \log 2) \cdot (\log 10 + \log 2) + \log^2 2 =$$
$$(1 - \log 2)(1 + \log 2) + \log^2 2 = 1 - \log^2 2 + \log^2 2 = 1$$

391. *Izračunajte:*

$$16^{0.5 \log_4 10 + 1}.$$

Rješenje: Imamo redom:

$$16^{0.5 \log_4 10+1} = (4^2)^{0.5 \log_4 10+1} = 4^{2\cdot(0.5 \log_4 10+1)} = 4^{\log_4 10+2} = 4^{\log_4 10+2\cdot 1} = 4^{\log_4 10+2\cdot \log_4 4} = 4^{\log_4 10+\log_4 (4^2)} = 4^{\log_4 (10\cdot 4^2)} =$$
$$= 10 \cdot 4^2 = 10 \cdot 16 = 160$$

392. *Izračunajte*:

$$\frac{1}{2}\log_3 36 - 2\log_3 \sqrt{54}.$$

Rješenje: Imamo redom:

$$\frac{1}{2}\log_3 36 - 2\log_3 \sqrt{54} = \log_3\left(36^{\frac{1}{2}}\right) - \log_3\left(\sqrt{54}\right)^2 = \log_3 \frac{\sqrt{36}}{54} = \log_3 \frac{6}{54} = \log_3 \frac{1}{9} = \log_3(9^{-1}) = \log_3\left[(3^2)\right]^{-1} =$$
$$= \log_3 3^{-2} = (-2)\log_3 3 = (-2)\cdot 1 = -2$$

393. *Ako je* $\log_{\frac{9}{16}} x = -\frac{3}{2}$, *izračunajte* $10^{1-\log(3x)}$.

Rješenje: Najprije izračunajmo x. Iz $\log_{\frac{9}{16}} x = -\frac{3}{2}$ antilogaritmiranjem slijedi:

$$x = \left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}\right]^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$$

pa je

$$10^{1-\log(3x)} = 10^{\log 10 - \log(3x)} = 10^{\log \frac{10}{3x}} = \frac{10}{3x} = \frac{10}{3\cdot\frac{64}{27}} = \frac{45}{32}.$$

394. *Riješite jednadžbu*:

$$\log_{25}\left[\frac{1}{5}\log_3\left(2 - \log_{\frac{1}{2}} x\right)\right] = -\frac{1}{2}.$$

Rješenje: Imamo redom:

$$\log_{25}\left[\frac{1}{5}\log_3\left(2-\log_{\frac{1}{2}} x\right)\right]=-\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{5}\log_3\left(2-\log_{\frac{1}{2}} x\right)=25^{-\frac{1}{2}}$$
$$\log_3\left(2-\log_{\frac{1}{2}} x\right)=5\cdot(5^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\log_3\left(2-\log_{\frac{1}{2}} x\right)=5\cdot 5^{-1}$$
$$\log_3\left(2-\log_{\frac{1}{2}} x\right)=1$$
$$2-\log_{\frac{1}{2}} x=3^1$$
$$2-\log_{\frac{1}{2}} x=3$$
$$\log_{\frac{1}{2}} x=-1$$
$$x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$
$$x=2$$

Izravnim uvrštavanjem u polaznu jednadžbu lako se provjerava da je $x = 2$ uistinu rješenje te jednadžbe.

395. *Riješite jednadžbu*:

$$0.2^{1-2x} - 25^{x-1} = 20.$$

Rješenje: Uočimo da je $0.2 = \frac{1}{5} = 5^{-1}$, te da je $25 = 5^2$. Tako polaznu jednadžbu možemo zapisati u obliku:

$$5^{2x-1} - 5^{2x-2} = 20.$$

Tako redom imamo:

$$5^{2x} \cdot (5^{-1} - 5^{-2}) = 20$$
$$5^{2x} \cdot (\frac{1}{5} - \frac{1}{25}) = 20$$
$$5^{2x} \cdot \frac{4}{25} = 20 \qquad / : \frac{4}{25}$$
$$5^{2x} = 20 \cdot \frac{25}{4}$$
$$5^{2x} = 125$$
$$5^{2x} = 5^3$$
$$2x = 3$$
$$x = \frac{3}{2}$$

396. *Riješite jednadžbu*:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{1-x} = 2\,.$$

<u>Rješenje:</u> Stavimo $t = \left(\frac{3}{5}\right)^{x-1}$. Tada je

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{1-x} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-(x-1)} = \left[\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1}\right]^{-1} = t^{-1} = \frac{1}{t}$$

pa dobivamo jednadžbu:

$$t + \frac{1}{t} = 2.$$

Budući da je $t = \left(\frac{3}{5}\right)^{x-1} > 0$, tu jednadžbu smijemo pomnožiti s t. Dobit ćemo:

$$t^2 - 2t + 1 = 0,$$

a odatle je $t_1 = t_2 = 1$. Sada iz

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1} = 1$$

slijedi

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{3}{5}\right)^{0}$$

pa izjednačavanje eksponenata daje

$$x - 1 = 0,$$

odnosno $x = 1$.

397. *Odredite zbroj rješenja jednadžbe*:

$$4^x - 12 \cdot 2^x + 32 = 0.$$

Rješenje: Uočimo da je $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$. Stoga stavimo $t = 2^x$ pa dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$t^2 - 12t + 32 = 0.$$

Njezina su rješenja $t_1 = 4$ i $t_2 = 8$. Iz $t_1 = 4$ vraćanjem zamijenjenoga izraza slijedi:

$$2^x = 4$$
$$2^x = 2^2$$

i $x = 2$. Iz $t_2 = 8$ vraćanjem zamijenjenoga izraza slijedi

$$2^x = 8$$
$$2^x = 2^3$$

i $x = 3$. Stoga su sva rješenja polazne jednadžbe $x_1 = 2$ i $x_2 = 3$. Njihov je zbroj jednak 5.

398. *Duljine dijagonala romba su* 6 cm *i* 8 cm. *Izračunajte opseg toga romba*.

Rješenje: Radi određenosti neka je $d_1 = 6$ cm i $d_2 = 8$ cm. Duljina stranice romba jednaka je

$$a = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$$
$$a = \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2}$$
$$a = \sqrt{3^2 + 4^2}$$
$$a = 5\,\text{cm}$$

Tako je opseg romba jednak

$$O = 4a = 4 \cdot 5 = 20 \text{ cm}.$$

399. *Duljina osnovice jednakokračnoga trokuta iznosi* 12 cm. *Ako je opseg toga trokuta* 32 cm, *kolika mu je površina*?

Rješenje: Neka je a duljina osnovice trokuta, b duljina njegova kraka, a v duljina visine na osnovicu. Opseg jednakokračnoga trokuta računa se prema formuli

$$O = a + 2b.$$

U tu formulu uvrstimo $a = 12$, $O = 32$ pa dobijemo:

$$32 = 12 + 2b,$$

a odatle je $b = 10$ cm. Duljina visine na osnovicu jednaka je

$$v=\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$$
$$v=\sqrt{10^2-\left(\frac{12}{2}\right)^2}$$
$$v=\sqrt{10^2-6^2}$$
$$v=8\,\text{cm}$$

pa je tražena površina trokuta jednaka

$$P=\frac{1}{2}av$$
$$P=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 8$$
$$P=48\,\text{cm}^2$$

400. *Unutrašnji kutovi konveksnoga četverokuta odnose se kao* 1 : 2 : 5 : 7. *Odredite najveći od njih.*

Rješenje: Neka su α, β, γ i δ unutrašnji kutovi toga četverokuta. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\alpha : \beta : \gamma : \delta = 1 : 2 : 5 : 7$. Prema definiciji produženoga omjera, to znači da postoji realan broj $k \neq 0$ takav da vrijedi:

$$\alpha = 1\cdot k,$$
$$\beta = 2\cdot k,$$
$$\gamma = 5\cdot k,$$
$$\delta = 7\cdot k.$$

Kako zbroj svih unutrašnjih kutova u konveksnom četverokutu mora iznositi 360°, vrijedi jednakost:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 360°.$$

Uvrštavanjem $\alpha = 1\cdot k$, $\beta = 2\cdot k$, $\gamma = 5\cdot k$, $\delta = 7\cdot k$ u tu jednakost dobivamo:

$$k + 2k + 5k + 7k = 360°,$$

tj.

$$15k = 360°,$$

pa je $k = 24°$. Stoga je traženi kut jednak

$$\delta = 7\cdot 24 = 168°.$$

401. *Dva vrha trokuta ABC su* $A(-6, 2)$ *i* $B(2, -2)$. *Ako je ortocentar trokuta* $H(1, 2)$, *odredite koordinate vrha C.*

Rješenje: Pravac AH je jednadžba visine iz vrha A na stranicu $a = BC$. Koeficijent smjera toga pravca je

$$k_{v_a}=\frac{2-2}{1+6}=0\,.$$

Pravac BC je okomit na visinu AH, pa bi njegov koeficijent smjera trebao biti suprotan i recipročan od koeficijenta smjera pravca AH. No, kako je koeficijent smjera pravca AH jednak 0, taj je pravac usporedan s osi Ox. Stoga pravac BC – kao pravac okomit na AH – mora biti usporedan s osi Oy i prolaziti točkom B. Opći oblik jednadžbe pravca usporednoga s osi Oy jest

$$x = d,$$

gdje je $d \in \mathbf{R}$ realan parametar. Kako pravac BC usporedan s osi Oy prolazi točkom B čija je apscisa 2, mora biti $d = 2$ pa je njegova jednadžba

$$BC\ldots\ x = 2.$$

Nadalje, pravac BH je jednadžba visine iz vrha B na stranicu $b = AC$. Koeficijent smjera toga pravca je

$$k_{v_b} = \frac{2+2}{1-2} = -4.$$

Koeficijent smjera stranice b – kao pravca okomitoga na pravac BH – mora biti recipročan i suprotan koeficijentu smjera pravca BH. To znači da je

$$k_b = -\frac{1}{k_{v_b}} = \frac{1}{4}.$$

Jednadžbu stranice BC napisat ćemo koristeći činjenicu da znamo njezin koeficijent smjera k_b, te jednu točku (B) kroz koju prolazi:

$$AC \ldots y - 2 = \frac{1}{4}(x+6).$$
$$AC \ldots y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$$

Sada konačno možemo računati koordinate vrha C. Taj je vrh presjek pravaca AC i BC. Iz sustava

$$x = 2$$
$$y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$$

lagano dobijemo $x = 2$, $y = 4$, pa je $C(2, 4)$.

402. *Izračunajte duljinu tetive koju pravac p…* $3x + 4y + 24 = 0$ *odsijeca na kružnici k…* $x^2 + + y^2 + 8x + 6y = 0$.

Rješenje: Odredimo presjek zadanoga pravca i zadane kružnice. U tu svrhu riješimo sustav:

$$3x + 4y + 24 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$$

Izrazimo npr. y iz prve jednadžbe:

$$y = -\frac{3}{4}x - 6$$

i dobiveni izraz uvrstimo u drugu jednadžbu. Dobivamo:

$$\begin{aligned}
&x^2+(-\frac{3}{4}x-6)^2+8x+6(-\frac{3}{4}x-6)=0\\
&x^2+\frac{9}{16}x^2+9x+36+8x-\frac{9}{2}x-36=0\\
&\frac{25}{16}x^2-\frac{25}{2}x=0 \qquad\qquad / \cdot \frac{16}{25}\\
&x^2-8x=0
\end{aligned}$$

Rješenja ove jednadžbe su $x_1 = 0$ i $x_2 = 8$. Pripadni y su $y_1 = -6$ i $y_2 = -12$, pa su sjecišta pravca i kružnice točke $S_1(0, -6)$ i $S_2(8, -12)$. Tražena duljina tetive jednaka je međusobnoj udaljenosti tih točaka:

$$\begin{aligned}
&d=\sqrt{(8-0)^2+(-12+6)^2}\\
&d=\sqrt{8^2+(-6)^2}\\
&d=10
\end{aligned}$$

403. *Odredite položaj pravca p… $x - y + 2 = 0$ u odnosu na parabolu $y^2 = 8x$.*

<u>Rješenje:</u> Treba riješiti sustav

$$\begin{aligned}
x-y+2&=0\\
y^2&=8x
\end{aligned}$$

Izrazimo x iz prve jednadžbe:

$$x = y - 2$$

pa uvrštavanjem u drugu dobivamo:

$$y^2 = 8(y - 2),$$

odnosno

$$y^2 - 8y + 16 = 0.$$

Jedino rješenje ove jednadžbe jest $y = 4$, pa je pripadni x jednak

$$x = 4 - 2 = 2.$$

Stoga pravac p siječe parabolu u točno jednoj točki ($S(2, 4)$), a to znači da je taj pravac tangenta zadane parabole.

404. *Kružnica prolazi ishodištem, a središte joj je u sjecištu pravaca $x - 2y - 2 = 0$ i $x + y - \quad - 5 = 0$. Izračunajte njezin polumjer.*

<u>Rješenje:</u> Odredimo najprije središte te kružnice. U tu svrhu riješimo sustav

$$\begin{aligned}
x-2y-2&=0\\
x+y-5&=0,
\end{aligned}$$

tj. sustav

$$\begin{aligned}
x-2y&=2\\
x+y&=5
\end{aligned}$$

Oduzimanjem jednadžbi dobivamo

$$-3y = -3,$$

pa je $y = 1$. Sada iz druge jednadžbe sustava slijedi

$$x = 5 - y = 5 - 1 = 4.$$

Dakle, središte kružnice je točka $S(4, 1)$. Traženi polumjer kružnice jednak je udaljenosti točke S od ishodišta:

$$r = \sqrt{4^2 + 1^2}$$
$$r = \sqrt{17}$$

405. *Opseg osnovke pravilne uspravne četverostrane piramide jednak je* 24 cm. *Ako je površina dijagonalnoga presjeka te piramide jednaka* $3\sqrt{14}$ cm^2, *izračunajte oplošje piramide.*

Rješenje: Neka je a duljina osnovnoga brida, b duljina bočnoga brida, a v duljina visine piramide. Osnovka te piramide je kvadrat stranice a. Njegov je opseg jednak $4a$. Tako iz jednadžbe

$$4a = 24$$

slijedi $a = 6$ cm. Nadalje, dijagonalni presjek piramide jest jednakokračan trokut čiji su krakovi bočni bridovi piramide, osnovica dijagonala osnovke piramide, a visina jednaka visini piramide. Budući da je duljina dijagonale osnovke piramide

$$d = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \text{ cm},$$

iz

$$P = \frac{1}{2}dv$$

slijedi

$$v = \frac{2P}{d} = \frac{6\sqrt{14}}{6\sqrt{2}} = \sqrt{7} \text{ cm}.$$

Za oplošje nam još treba duljina bočne visine v_b:

$$v_b = \sqrt{v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$
$$v_b = \sqrt{(\sqrt{7})^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2}$$
$$v_b = \sqrt{7 + 9}$$
$$v_b = 4 \text{ cm}$$

Konačno, oplošje piramide jednako je:

$$O = a^2 + 2av_b$$
$$O = 6^2 + 2 \cdot 6 \cdot 4$$

$$O = 84 \text{ cm}^2.$$

406. *Visina uspravnoga kružnoga stošca ima duljinu* 3, *a obujam stošca je* 27π. *Izračunajte kut pri vrhu osnoga presjeka toga stošca.*

Rješenje: Obujam stošca računamo prema formuli

$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot v .$$

U tu formulu uvrstimo $V = 27\pi$ i $v = 3$, pa dobivamo:

$$27\pi = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot 3 ,$$

otkuda je

$$r^2 = 27,$$

te je $r = 3\sqrt{3}$. Označimo traženi kut s α. Osni presjek stošca je jednakokračan trokut kojemu je krak jednak izvodnici stošca, osnovica jednaka promjeru osnovke stošca, a visina na osnovicu jednaka visini stošca. Kut nasuprot osnovici toga trokuta jednak je upravo α. Budući da je visina na osnovicu jednakokračnoga trokuta ujedno i simetrala kuta nasuprot osnovici, ali i težišnica na osnovicu, slijedi:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{v} .$$

Uvrštavanjem $r = 3\sqrt{3}$ i $v = 3$ dobivamo:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{3} ,$$

otkuda je

$$\frac{\alpha}{2} = 60°$$

i konačno

$$\alpha = 120°.$$

407. *Riješite jednadžbu*:

$$4^{x^2+5x+6} = 2\sqrt{2} .$$

Rješenje: Prelaskom na bazu 2 dobivamo:

$$(2^2)^{x^2+5x+6} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$$

$$2^{2x^2+10x+12} = 2^{\frac{3}{2}}$$

a odatle izjednačavanjem eksponenata dobivamo jednadžbu:

$$2x^2 + 10x + 12 = \frac{3}{2},$$

odnosno

$$4x^2 + 20x + 21 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1 = -\frac{7}{2}$ i $x_2 = -\frac{3}{2}$, i to su sva rješenja polazne jednadžbe.

408. *Zbroj* 6 *uzastopnih prirodnih brojeva jednak je* 57. *Odredite njihov najmanji zajednički višekratnik.*

Rješenje: Neka je x najmanji od tih brojeva. Tada su ostali brojevi $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$, $x + 4$ i $x + 5$, pa dobivamo jednadžbu:

$$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 + x + 5 = 57,$$

odnosno

$$6x + 15 = 57,$$

a odavde je $x = 7$. Stoga su ti brojevi 7, 8, 9, 10, 11 i 12. Budući da je svaki broj djeljiv i s 8 i s 9 nužno djeljiv i s 12, te da je svaki broj djeljiv i s 5 i s 8 nužno djeljiv i s 10, njihov najmanji zajednički višekratnik jednak je $5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11 = 27\,720$.

409. *Cijena nekoga proizvoda se svaka tri mjeseca uvećava za* 5%. *Izračunajte godišnje povećanje te cijene* (*u postotcima*).

Rješenje: Ukupno imamo 12 : 3 = 4 jednake godišnje promjene cijene. Stoga ćemo primijeniti formulu

$$R = 100 \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_3}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_4}{100}\right) - 100$$

u koju ćemo uvrstiti $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = +5$. Kratkim računom dobivamo:

$$R = 21.550625$$

pa zaključujemo da se cijena ukupno povećala za približno 21.55%.

410. *Pojednostavnite izraz*:

$$\left(\frac{1}{2 + 2\sqrt{a}} + \frac{1}{2 - 2\sqrt{a}} - \frac{a^2 + 1}{1 - a^2}\right)\left(1 + \frac{1}{a}\right).$$

Rješenje: Imamo redom:

$$\left(\frac{1}{2+2\sqrt{a}}+\frac{1}{2-2\sqrt{a}}-\frac{a^2+1}{1-a^2}\right)\left(1+\frac{1}{a}\right)=\left(\frac{2-2\sqrt{a}+2+2\sqrt{a}}{(2+2\sqrt{a})(2-2\sqrt{a})}-\frac{a^2+1}{1-a^2}\right)\left(1+\frac{1}{a}\right)=$$

$$\left(\frac{4}{4-4a}-\frac{a^2+1}{(1-a)(1+a)}\right)\left(\frac{a+1}{a}\right)=\left(\frac{1}{1-a}-\frac{a^2+1}{(1-a)(1+a)}\right)\left(\frac{a+1}{a}\right)=\left(\frac{1+a-a^2-1}{(1-a)(1+a)}\right)\left(\frac{a+1}{a}\right)=\left(\frac{a-a^2}{(1-a)(1+a)}\right)\left(\frac{a+1}{a}\right)=$$

$$=\left(\frac{a(1-a)}{(1-a)(1+a)}\right)\left(\frac{a+1}{a}\right)=1.$$

411. *Zbroj prvih* 6 *članova geometrijskoga niza je trostruko veći od zbroja prva* 3 *člana toga niza. Izračunajte količnik toga niza.*

Rješenje: Pretpostavimo da je a_1 prvi član, a q količnik niza. Zbroj prvih n članova geometrijskoga niza dan je formulom

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

U ovu formulu najprije uvrstimo $n = 3$, a potom $n = 6$. Dobivamo:

$$S_3 = a_1 \cdot \frac{q^3 - 1}{q - 1}$$

$$S_6 = a_1 \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1}$$

Prema uvjetu zadatka, zbroj S_6 je trostruko veći od zbroja S_3, što znači da vrijedi jednakost

$$\frac{S_6}{S_3} = 3.$$

Iz gornjih izraza proizlazi da je

$$\frac{S_6}{S_3} = \frac{a_1 \cdot \dfrac{q^6-1}{q-1}}{a_1 \cdot \dfrac{q^3-1}{q-1}} = \frac{q^6-1}{q^3-1} = \frac{(q^3-1)(q^3+1)}{q^3-1} = q^3+1,$$

pa dobivamo jednadžbu:

$$q^3 + 1 = 3.$$

Njezino jedino realno rješenje je $q = \sqrt[3]{2}$, i to je traženi količnik.

412. *Zadani su vrhovi* $A(1, 2)$ *i* $B(3, 1)$ *jednakostraničnoga trokuta* ABC. *Napišite jednadžbu visine trokuta povučene iz vrha* C.

Rješenje: Koeficijent smjera tražene visine je suprotan i recipročan koeficijentu smjera pravca AB, a sama visina prolazi polovištem stranice AB. Prema tome, koeficijent smjera visine v_c jest

$$k_{v_c} = -\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} = -\frac{3-1}{1-2} = 2 \text{ ,}$$

a polovište stranice AB

$$P_{AB} = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+1}{2}\right)$$
$$P_{AB} = \left(2, \frac{3}{2}\right)$$

Preostaje napisati jednadžbu pravca koji ima koeficijent smjera jednak 2, a prolazi točkom (2, $\frac{3}{2}$):

$$y - \frac{3}{2} = 2(x - 2),$$

odnosno

$$v_c \ldots\ y = 2x - \frac{5}{2}$$

ili u implicitnom obliku

$$v_c \ldots\ 4x - 2y - 5 = 0.$$

413. *Duljine stranica pravokutnoga trokuta čine aritmetički niz čija je razlika jednaka 2. Izračunajte polumjer tome trokutu upisane kružnice.*

Rješenje: Označimo duljine kateta trokuta s a i b, a duljinu hipotenuze s c. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a < b$ (ne može biti $a = b$ jer duljine kateta tvore aritmetički podniz s razlikom 2). Stoga vrijede jednakosti:

$$b = a + 2$$
$$c = b + 2 = (a + 2) + 2 = a + 4.$$

Primjena Pitagorina poučka daje

$$a^2 + (a + 2)^2 = (a + 4)^2,$$

odnosno

$$a^2 + a^2 + 4a + 4 = a^2 + 8a + 16,$$

odnosno

$$a^2 - 4a - 12 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $a_1 = -2$ i $a_2 = 6$. Budući da duljina katete ne može biti negativan broj, rješenje $a_1 = -2$ se odbacuje, pa preostaje $a = a_2 = 6$. Tako je traženi polumjer upisane kružnice jednak

$$\rho = \frac{P}{s} = \frac{\frac{ab}{2}}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{a(a+2)}{a+a+2+a+4} = \frac{a(a+2)}{3a+6} = \frac{a(a+2)}{3(a+2)} = \frac{a}{3} = \frac{6}{3} = 2\,.$$

414. *Odredite realan broj* $b \in \mathbf{R}$ *tako da polinom* $p(x) = x^4 - 8x^3 - bx - 1$ *bude djeljiv polinomom* $q(x) = x^2 + 1$.

Rješenje: Zapišimo najprije $p(x)$ na sljedeći način:

$$p(x) = (x^4 - 1) - (8x^3 + bx) = (x^2 - 1)(x^2 + 1) - 8x(x^2 + \frac{b}{8}).$$

Izraz$(x^2 - 1)(x^2 + 1)$ je očito djeljiv s $q(x)$, pa slijedi da i izraz $8x(8x^2 + \frac{b}{8})$ mora biti djeljiv s $q(x)$. Kako $q(x)$ ne dijeli $8x$, to $x^2 + \frac{b}{8}$ mora biti djeljiv s $q(x)$. To će očito vrijediti ako i samo ako je

$$\frac{b}{8} = 1,$$

odnosno $b = 8$.

415. *Skratite razlomak*:

$$\frac{25^n - 2\cdot 10^n + 4^n}{4^n - 25^n}.$$

Rješenje: Rastavimo u faktore zasebno brojnik, a zasebno nazivnik. Imamo redom:

$25^n - 2 \cdot 10^n + 4^n = (5^2)^n - 2 \cdot (5 \cdot 2)^n + (2^2)^n = (5^n)^2 - 2 \cdot 5^n \cdot 2^n + (2^n)^2 = (5^n - 2^n)^2 = (2^n - 5^n)^2$;
$4^n - 25^n = (2^2)^n - (5^2)^n = (2^n)^2 - (5^n)^2 = (2^n - 5^n)(2^n + 5^n)$.

Tako konačno dobivamo:

$$\frac{25^n - 2\cdot 10^n + 4^n}{4^n - 25^n} = \frac{(2^n - 5^n)^2}{(2^n - 5^n)(2^n + 5^n)} = \frac{2^n - 5^n}{2^n + 5^n}$$

416. *Ako je* $\log 64 = a$, *izrazite* $\log\sqrt{25}$ *kao funkciju varijable* a.

Rješenje: Budući da vrijedi jednakost

$$64 = 2^{6,}$$

logaritmiranjem njezine lijeve i desne strane po bazi 10 dobivamo:

$$\log 64 = 6 \log 2,$$

odnosno

$$a = 6 \log 2,$$

odnosno

$$\log 2 = \frac{1}{6} \cdot a.$$

Tako je

$$\log \sqrt{25} = \log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \frac{1}{6} \cdot a .$$

417. *Ako je* $(ab) : (ac) : (bc) = 3 : 2 : 1$, *izračunajte* $\frac{a}{bc} : \frac{b}{ac}$.

Rješenje: Produženi razmjer $(ab) : (ac) : (bc) = 3 : 2 : 1$ zapravo je kraći zapis dvaju razmjera:

$$(ab) : (ac) = 3 : 2,$$
$$(ac) : (bc) = 2 : 1.$$

Skraćivanjem prvoga razmjera s a dobivamo:

$$b : c = 3 : 2,$$

a skraćivanjem drugoga s c

$$a : b = 2 : 1.$$

Odatle proizlazi $a = 2b = 3c$, odnosno

$$b = \frac{a}{2}$$
$$c = \frac{a}{3}$$

pa imamo:

$$\frac{a}{bc} : \frac{b}{ac} = \frac{a}{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3}} : \frac{\frac{a}{2}}{a \cdot \frac{a}{3}} = \frac{6}{a} : \frac{3}{2a} = \frac{6}{a} \cdot \frac{2a}{3} = 4.$$

418. *Stranica jednoga kvadrata je dijagonala drugoga kvadrata. Izračunajte omjer površina krugova upisanih tim kvadratima.*

Rješenje: Neka je a duljina stranice manjega kvadrata. Duljina dijagonale toga kvadrata jednaka je

$$d = a\sqrt{2} ,$$

a to je duljina stranice većega kvadrata:

$$a_1 = d = a\sqrt{2} .$$

Polumjer kružnice upisane manjem kvadratu jednak je

$$r = \frac{a}{2},$$

a polumjer kružnice upisane većem kvadratu

$$r_1 = \frac{a_1}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Tako je traženi omjer površina krugova upisanih tim kvadratima jednak

$$\frac{P}{P_1} = \frac{r^2\pi}{r_1^2\pi} = \frac{r^2}{r_1^2} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{2a^2}{4}} = \frac{1}{2},$$

tj. $P : P_1 = 1 : 2$ (površina većega kruga dvostruko je veća od površine manjega kruga).

419. *Pojednostavnite izraz*:

$$\frac{a^{-1}b^{-1}}{(a^{-2}+b^{-2})^{-1}} \cdot \frac{a^{-2}-2a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}{a^{-4}-b^{-4}}.$$

Rješenje: Uočimo da je

$$a^{-2} - 2 \cdot a^{-1} \cdot b^{-1} + b^{-2} = (a^{-1} - b^{-1})^2,$$

te

$$a^{-4} - b^{-4} = (a^{-2})^2 - (b^{-2})^2 = (a^{-2} - b^{-2})(a^{-2} + b^{-2}) = (a^{-1} - b^{-1})(a^{-1} + b^{-1})(a^{-2} + b^{-2}).$$

Tako imamo:

$$\frac{a^{-1}b^{-1}}{(a^{-2}+b^{-2})^{-1}} \cdot \frac{a^{-2}-2a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}{a^{-4}-b^{-4}} = \frac{a^{-2}+b^{-2}}{ab} \cdot \frac{(a^{-1}-b^{-1})^2}{(a^{-1}-b^{-1})(a^{-1}+b^{-1})(a^{-2}+b^{-2})} =$$

$$= \frac{a^{-1}-b^{-1}}{ab(a^{-1}+b^{-1})} = \frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{b+a} = \frac{\frac{b-a}{ab}}{b+a} = \frac{b-a}{ab(b+a)}.$$

420. *Izračunajte* $f(\sqrt{3}-2)$ *ako je* $f(x) = \sqrt{x^2-2x+1} - \sqrt{x^2+2x+1}$.

Rješenje: Uočimo da je

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

i

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2.$$

Zbog toga je

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} - \sqrt{(x+1)^2} = |x - 1| - |x + 1|.$$

Za $x = \sqrt{3} - 2$ je

$$|x - 1| = |\sqrt{3} - 2 - 1| = |\sqrt{3} - 3| = 3 - \sqrt{3} \text{ (jer je izraz pod apsolutnom vrijednosti manji od nule)}$$

i

$$|x + 1| = |\sqrt{3} - 2 + 1| = |\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} - 1 \text{ (jer je izraz pod apsolutnom vrijednosti veći od nule).}$$

Stoga je

$$f(\sqrt{3} - 2) = (3 - \sqrt{3}) - (\sqrt{3} - 1) = 3 - \sqrt{3} - \sqrt{3} + 1 = 4 - 2\sqrt{3}.$$

421. *Odredite jednadžbe tangenata na krivulju* $x^2 + 4y^2 = 20$ *okomitih na pravac* $p \ldots\ 2x - 2y = 13$.

Rješenje: Zadana krivulja je elipsa čiju jednadžbu najprije moramo napisati u kanonskom obliku:

$$\begin{aligned} &x^2 + 4y^2 = 20 \qquad /:20 \\ &\frac{x^2}{20} + \frac{4y^2}{20} = 1 \\ &\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1 \end{aligned}$$

pa očitavamo: $a^2 = 20$, $b^2 = 5$. Koeficijent smjera tražene tangente mora biti recipročan i suprotan koeficijentu smjera pravca p. Kako je

$$p \ldots\ y = x - \frac{13}{2},$$

to je koeficijent smjera pravca p

$$k_p = 1,$$

pa je koeficijent smjera tangente jednak

$$k_t = -1.$$

Sad iskoristimo uvjet tangencijalnosti za elipsu:

$$a^2k^2 + b^2 = l^2,$$

pa uvrštavanjem $a^2 = 20$, $k = k_t = -1$ i $b^2 = 5$ dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$l^2 = 25$$

čija su rješenja $l_1 = -5$ i $l_2 = 5$. Stoga postoje dvije tangente koje su okomite na zadani pravac:

$$t_1 \ldots\ y = -x - 5 \text{ i } t_2 \ldots\ y = -x + 5.$$

422. *Duljine stranica trokuta zadovoljavaju jednakosti*:

$$a = 2b,$$
$$c = \frac{5}{2}b.$$

Odredite najveći kut toga trokuta.

Rješenje: Iz zadanih jednakosti izravno slijede nejednakosti $a > b$ i $c > b$. Nadalje, množenjem očite nejednakosti $\frac{5}{2} > 2$ strogo pozitivnim brojem b dobivamo

$$\frac{5}{2}b > 2b,$$

odnosno $c > a$. Prema tome, duljine stranica trokuta zadovoljavaju nejednakost $b < a < c$. Budući da se najveći kut trokuta nalazi nasuprot najduljoj stranici trokuta, uz standardne oznake u trokutu zaključujemo da je traženi kut upravo kut γ. Njegov je kosinus jednak

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

pa uvrštavanjem $a = 2b$ i $c = \frac{5}{2}b$ dobivamo:

$$\cos\gamma = \frac{(2b)^2 + b^2 - (\frac{5}{2}b)^2}{2 \cdot 2b \cdot b}$$
$$\cos\gamma = \frac{4b^2 + b^2 - \frac{25}{4}b^2}{4b^2}$$
$$\cos\gamma = \frac{\frac{16 + 4 - 25}{4}b^2}{4b^2}$$
$$\cos\gamma = \frac{\frac{-5}{4}}{4}$$
$$\cos\gamma = \frac{-5}{16}$$

Budući da je γ kut trokuta, njegova je vrijednost manja od 180°, pa tražimo ono rješenje dobivene trigonometrijske jednadžbe koje je u drugom kvadrantu (jer su vrijednosti funkcije kosinus negativne za kutove iz drugoga ili iz trećega kvadranta). Pomoću džepnoga računara nalazimo:

$$\gamma = 108.2099568642830112137280405491650°,$$

odnosno približno

$$\gamma = 108°12'36''.$$

423. *Svaki je član beskonačnoga konvergentnoga geometrijskoga reda jednak zbroju svih članova reda iza njega. Ako je drugi član reda za* 3 *veći od trećega, izračunajte zbroj toga reda.*

Rješenje: Neka je a_1 prvi član toga reda, a q njegov količnik. Tada je a_1 jednak zbroju beskonačnoga konvergentnoga geometrijskoga reda kojemu je prvi član jednak a_2, a količnik q. To znači da vrijedi jednakost:

$$a_1 = \frac{a_2}{1-q}$$

jer je zbroj beskonačnoga geometrijskoga reda kojemu je prvi član a_2, a količnik q dan formulom

$$S_1 = \frac{a_2}{1-q}.$$

No, s druge je strane – prema definiciji geometrijskoga reda – drugi član a_2 jednak umnošku prvoga člana a_1 i količnika q. Dakle, vrijedi jednakost:

$$a_2 = a_1 \cdot q.$$

Kad tu jednakost uvrstimo u

$$a_1 = \frac{a_2}{1-q}$$

dobit ćemo:

$$a_1 = \frac{a_1 \cdot q}{1-q},$$

a odatle dijeljenjem s a_1 (taj je broj različit od nule jer u suprotnom slijedi da su svi članovi reda jednaki nuli, pa drugi član ne može biti za 3 veći od trećega) dobivamo:

$$\frac{q}{1-q} = 1,$$

a odatle je $q = \frac{1}{2}$. Nadalje, treći član reda a_3 jednak je

$$a_3 = a_1 \cdot q^2,$$

pa je razlika drugoga i trećega člana

$$a_2 - a_3 = a_1 q - a_1 q^2.$$

U tu jednakost uvrstimo $a_2 - a_3 = 3$ i $q = \frac{1}{2}$, pa dobivamo:

$$3 = \frac{1}{2} a_1 - \frac{1}{4} a_1,$$

odnosno množenjem s 4

$$a_1 = 12.$$

Stoga je traženi zbroj zadanoga beskonačnoga konvergentnoga geometrijskoga reda jednak

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S = \frac{12}{1-\frac{1}{2}}$$

$$S = 24$$

424. *Riješite jednadžbu*:

$$\frac{1}{9} \cdot \left[5 \cdot \left(\frac{7}{2}x - 5\right) - \frac{1}{2}(22 - 6x)\right] = \frac{7}{3}(x-1) - \frac{10}{6}.$$

Rješenje: Pomnožimo najprije zadanu jednadžbu s 18. Dobivamo:

$$2 \cdot \left[5 \cdot \left(\frac{7}{2}x - 5\right) - \frac{1}{2}(22 - 6x)\right] = 42 \cdot (x-1) - 30.$$

Provedimo sva naznačena množenja:

$$35x - 50 - 22 + 6x = 42x - 42 - 30,$$

a odavde sređivanjem i reduciranjem izravno slijedi

$$x = 0.$$

425. *Zadan je trokut ABC. Točkom D na stranici BC povučena je usporednica sa stranicom AB. Ta usporednica dijeli stranicu BC u omjeru* 5 : 3 *računajući od vrha C, a trokut ABC na dva dijela čije se površine razlikuju za* 56 cm^2. *Izračunajte površinu trokuta ABC.*

Rješenje: Neka je E sjecište povučene usporednice sa stranicom AC. Trokuti ABC i EDC su slični, pa vrijedi jednakost:

$$|AB| : |DE| = |BC| : |DC|.$$

Iz podatka da točka D dijeli stranicu BC u omjeru 5 : 3 računajući od vrha C slijedi da postoji strogo pozitivan realan broj $k > 0$ takav da je

$$|CD| = 5 \cdot k, |DB| = 3 \cdot k.$$

Zbog toga je

$$|BC| = |BD| + |DC| = 5k + 3k = 8k,$$

odnosno

$$|AB| : |DE| = 8k : 5k = 8 : 5.$$

Iz toga razmjera slijedi

$$|AB| = \frac{8}{5}|DE|.$$

Sada povucimo visinu iz vrha C na stranicu AB. Neka je F sjecište te stranice i usporednice DE, a N nožište te visine na stranici AB. Tada su trokuti CNB i CFD slični, pa vrijedi jednakost:

$$|CN| : |CF| = |BC| : |DC| = 8 : 5.$$

Odavde je

$$|CN| = \frac{8}{5}|CF|.$$

Usporednica DE dijeli zadani trokut ABC na dva dijela: trokut CDE i trapez $ABDE$. Površina trokuta CDE jednaka je

$$P_{CDE} = \frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |CF|,$$

dok je površina trapeza $ABDE$

$$P_{ABDE} = \frac{1}{2} \cdot (|AB| + |DE|) \cdot |FN|$$
$$P_{ABDE} = \frac{1}{2} \cdot (|AB| + |DE|) \cdot (|CN| - |CF|)$$

U posljednju jednakost uvrstimo $|AB| = \frac{8}{5}|DE|$ i $|CN| = \frac{8}{5}|CF|$ pa dobijemo:

$$P_{ABDE} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{8}{5}|DE| + |DE|) \cdot (\frac{8}{5}|CF| - |CF|)$$
$$P_{ABDE} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{13}{5}|DE|) \cdot (\frac{3}{5}|CF|)$$
$$P_{ABDE} = \frac{39}{25} \cdot (\frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |CF|)$$
$$P_{ABDE} = \frac{39}{25} \cdot P_{CDE}$$

Budući da je razlika površine trapeza P_{ABDE} i površine trokuta P_{CDE} jednaka 56 cm^2, možemo zapisati:

$$P_{ABDE} - P_{CDE} = 56,$$

pa uvrštavanjem $P_{ABDE} = \frac{39}{25} \cdot P_{CDE}$ dobivamo jednadžbu:

$$\frac{39}{25} \cdot P_{CDE} - P_{CDE} = 56.$$

Množenjem te jednadžbe s 25 dobivamo

$$39 \cdot P_{CDE} - 25 \cdot P_{CDE} = 56 \cdot 25,$$

odnosno

$$14 \cdot P_{CDE} = 56 \cdot 25,$$

pa je $P_{CDE} = 100$ cm^2. Tako je površina trapeza $ABDE$ jednaka

$$P_{ABDE} = P_{CDE} + 56,$$
$$P_{ABDE} = 100 + 56.$$
$$P_{ABDE} = 156 \text{ cm}^2,$$

pa je tražena površina trokuta ABC

$$P_{ABC} = P_{CDE} + P_{ABDE}$$
$$P_{ABC} = 100 + 156$$
$$P_{ABC} = 256 \text{ cm}^2.$$

426. *Izračunajte vrijednost izraza*

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot\left(x^{\frac{1}{p}}+x^{\frac{1}{q}}\right)$$

za $x=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2pq}{q-p}}$.

Rješenje: Zapišimo zadani izraz najprije u obliku:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot\left(x^{\frac{1}{p}}+x^{\frac{1}{q}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot\left[x^{\frac{1}{p}}\cdot\left(1+x^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\right)\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot\left[x^{\frac{1}{p}}\cdot\left(1+x^{\frac{p-q}{pq}}\right)\right].$$

Za $x=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2pq}{q-p}}$ je

$$x^{\frac{1}{p}}=\left[\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2pq}{q-p}}\right]^{\frac{1}{p}}=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2pq}{p(q-p)}}=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2q}{q-p}}$$

i

$$1+x^{\frac{p-q}{pq}}=1+\left[\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2pq}{q-p}}\right]^{\frac{p-q}{pq}}=1+\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2pq}{q-p}\cdot\frac{p-q}{pq}}=1+\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{-2}=1+\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{2}=$$
$$1+\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a+b)^2}=\frac{a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2}{(a+b)^2}=\frac{2a^2+2b^2}{(a+b)^2}=\frac{2(a^2+b^2)}{(a+b)^2}$$

pa je vrijednost zadanoga izraza za zadani x jednaka

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot\left[x^{\frac{1}{p}}\cdot\left(1+x^{\frac{p-q}{pq}}\right)\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot\left[\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2q}{q-p}}\cdot\frac{2(a^2+b^2)}{(a+b)^2}\right]=(a-b)(a+b)\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2q}{q-p}}\cdot\frac{1}{(a+b)^2}=$$

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2q}{q-p}}\cdot\frac{a-b}{a+b}=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2q}{q-p}}\cdot\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{-1}=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2q}{q-p}-1}=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2q-q+p}{q-p}}=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{q+p}{q-p}}$$

427. *Riješite nejednadžbu*:

$$\log(2x-1)>\log(x-2)+1.$$

Rješenje: Zapišimo najprije nejednadžbu u obliku:

$$\log(2x-1)-\log(x-2)>1.$$

Oba logaritma su definirana ako i samo ako istodobno vrijede nejednakosti:

$$\begin{aligned}2x-1&>0\\x-2&>0\end{aligned}$$

odnosno ako i samo ako istodobno vrijede nejednakosti

$$\begin{aligned}x&>\frac{1}{2}\\x&>2\end{aligned}$$

Iz toga sustava nejednadžbi slijedi $x>2$. Uvažavajući taj uvjet, nejednadžbu dalje transformiramo ovako:

$$\begin{aligned}\log\frac{2x-1}{x-2}&>1\\\frac{2x-1}{x-2}&>10^1\\\frac{2x-1}{x-2}&>10\end{aligned}$$

Budući da je $x>2$, to je $x-2>0$, pa nejednadžbu smijemo pomnožiti s tim izrazom. Pritom se znak nejednakosti neće promijeniti. Dobivamo:

$$\begin{aligned}2x-1&>10(x-2),\\2x-1&>10x-20\\-8x&>-19\\x&<\frac{19}{8}.\end{aligned}$$

Konačno, iz sustava nejednadžbi

$$\begin{aligned}x&>2\\x&<\frac{19}{8}\end{aligned}$$

slijedi da je skup svih rješenja polazne jednadžbe otvoreni interval $\langle 2, \frac{19}{8}\rangle$.

428. *Odredite realan broj* $a \in \mathbf{R}$ *tako da temeljni period funkcije* $f(x) = \cos(5ax + \frac{\pi}{3})$ *bude jednak* 4π.

Rješenje: Temeljni period funkcije $f(x) = \cos(Ax + b)$ dan je formulom

$$T = \frac{2\pi}{A}.$$

U tu jednakost uvrstimo $T = 4\pi$ i $A = 5a$ pa dobivamo jednadžbu:

$$4\pi = \frac{2\pi}{5a}$$

čije je rješenje $a = \frac{1}{10}$.

429. *Odredite jednadžbu pravca koji je simetričan pravcu* $p\ldots\ 3x - 2y + 1 = 0$ *u odnosu na točku* $M(5, 1)$.

Rješenje: Odaberimo proizvoljno neke dvije točke zadanoga pravca, npr. $A(1, 2)$ i $B(-1, -1)$. (Odabrali smo točno dvije točke jer je pravac jednoznačno određen zadavanjem bilo kojih dviju svojih točaka.) Odredimo točke A' i B' simetrične točkama A i B s obzirom na točku M. Zapravo tražimo točke A' i B' takve da je M zajedničko polovište dužine AA' i BB'. Označimo li $A'(x_1, y_1)$ i $B'(x_2, y_2)$, onda x_1, y_1, x_2 i y_2 određujemo iz sljedećih jednakosti:

$$5 = \frac{1 + x_1}{2}$$
$$1 = \frac{2 + y_1}{2}$$
$$5 = \frac{-1 + x_2}{2}$$
$$1 = \frac{-1 + y_2}{2}$$

Iz tih jednadžbi se lako dobiva $x_1 = 9$, $y_1 = 0$, $x_2 = 11$ i $y_2 = 3$. Dakle, $A'(9, 0)$ i $B'(11, 3)$. Traženi pravac je pravac kroz točke A' i B':

$$y = \frac{3 - 0}{11 - 9}(x - 9)$$
$$y = \frac{3}{2}x - \frac{27}{2}$$

ili $p'\ldots\ 3x - 2y - 27 = 0$.

430. *Desno žarište krivulje* $25x^2 - 144y^2 = 900$ *je središte kružnice čiji je polumjer* 6. *Odredite kut između tih dviju krivulja.*

Rješenje: Zadana krivulja je hiperbola čiju jednadžbu najprije moramo zapisati u kanonskom obliku:

$$25x^2 - 144y^2 = 900$$
$$\frac{25x^2}{900} - \frac{144y^2}{900} = 1$$
$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1$$

Stoga je $a^2 = 36$, $b^2 = \frac{25}{4}$. Desno žarište hiperbole ima koordinate

$$F_2\left(\sqrt{a^2 + b^2}, 0\right).$$

Uvrštavanjem $a^2 = 36$, $b^2 = \frac{25}{4}$ dobivamo:

$$F_2\left(\sqrt{36 + \frac{25}{4}}, 0\right)$$
$$F_2\left(\sqrt{\frac{144 + 25}{4}}, 0\right)$$
$$F_2\left(\sqrt{\frac{169}{4}}, 0\right)$$
$$F_2\left(\frac{13}{2}, 0\right)$$

Stoga je jednadžba kružnice sa središtem u F_2 i polumjerom 6

$$k \ldots (x - \frac{13}{2})^2 + y^2 = 36.$$

Odredimo sada barem jedno sjecište zadane hiperbole i dobivene kružnice. U tu svrhu riješimo sustav:

$$25x^2 - 144y^2 = 900$$
$$(x - \frac{13}{2})^2 + y^2 = 36$$

Iz druge jednadžbe toga sustava je

$$y^2 = 36 - (x - \frac{13}{2})^2$$

što uvršteno u prvu jednadžbu daje

$$25x^2 - 144 \cdot [36 - (x - \frac{13}{2})^2] - 900 = 0,$$

odnosno

$$25x^2 - 5184 + 144x^2 - 1872x + 6084 - 900 = 0,$$

odnosno

$$169x^2 - 1872x = 0,$$

odnosno

$$13x^2 - 144x = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1 = 0$ i $x_2 = \frac{144}{13}$. Sada iz

$$y^2 = 36 - (x - \frac{13}{2})^2$$

uvrštavanjem $x = 0$ dobivamo čisto imaginarne y, a uvrštavanjem $x_2 = \frac{144}{13}$ dobivamo $y_1 = -\frac{\sqrt{10175}}{26}$ i $y_2 = \frac{\sqrt{10175}}{26}$. Budući da obje koordinate sjecišta moraju biti realni brojevi, u obzir dolaze rješenje x_2 i pripadni y_1 i y_2. Za određivanjem kuta među krivuljama dovoljno je odabrati samo jedno od njih, pa ćemo se opredijeliti za rješenje $y_2 = \frac{\sqrt{10175}}{26}$. Dakle, kut među zadanim krivuljama odredit ćemo pomoću koeficijenata smjerova tangenata na te krivulje u točki $S(\frac{144}{13}, \frac{\sqrt{10175}}{26})$.

Koeficijent smjera tangente na hiperbolu $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ u točki $T(x_1, y_1)$ dan je formulom

$$k_{t_e} = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

U tu formulu uvrstimo $a^2 = 36$, $b^2 = \frac{25}{4}$, $x_1 = \frac{144}{13}$ i $y_1 = \frac{\sqrt{10175}}{26}$ pa dobijemo:

$$k_{t_e} = \frac{\frac{25}{4} \cdot \frac{144}{13}}{36 \cdot \frac{\sqrt{10175}}{26}} = \frac{50}{\sqrt{10175}}.$$

Nadalje, koeficijent smjera tangente na kružnicu $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ u točki $T(x_1, y_1)$ dan je formulom

$$k_{t_k} = -\frac{x_1 - p}{y_1 - q}$$

U tu formulu uvrstimo $x_1 = \frac{144}{13}$, $p = \frac{13}{2}$, $y_1 = \frac{\sqrt{10175}}{26}$ i $q = 0$ pa dobijemo:

$$k_{t_k}=-\frac{\frac{144}{13}-\frac{13}{2}}{\frac{\sqrt{10175}}{26}}=-\frac{119}{\sqrt{10175}}$$

Stoga je tangens traženoga kuta jednak

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_{t_e}-k_{t_k}}{1+k_{t_e}\cdot k_{t_k}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\frac{50}{\sqrt{10175}}+\frac{119}{\sqrt{10175}}}{1-\frac{50}{\sqrt{10175}}\cdot(-\frac{119}{\sqrt{10175}})}$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\frac{169}{\sqrt{10175}}}{1-\frac{5950}{10175}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\frac{169}{\sqrt{10175}}}{\frac{4225}{10175}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{169\sqrt{10175}}{4225}$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{10175}}{25}$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{407}}{5}$$

Pomoću džepnoga računara dobivamo:

$$\varphi = 76.080251443904404266373102230871 1°,$$

odnosno približno

$$\varphi = 76°4'49''.$$

431. *Riješite jednadžbu*:

$$|x-1|^{\log^2 x-\log(x^2)}=|x-1|^3.$$

Rješenje: Primijetimo najprije da za sve $x \in \mathbf{R}$ vrijedi nejednakost

$$|x - 1| \geq 0.$$

Ako je $|x - 1| = 0$, onda je $x = 1$, pa izravnim uvrštavanjem dobivamo jednakost

$$0^0 = 0^3,$$

odnosno

$$1 = 1,$$

što je točno. Stoga je $x = 1$ jedno rješenje polazne jednadžbe. Za sve ostale $x \in \mathbf{R}$ vrijedi

$$|x - 1| > 0$$

pa polaznu nejednadžbu smijemo podijeliti s $|x - 1|^3$. Tako ćemo dobiti:

$$|x-1|^{\log^2 x - \log(x^2) - 3} = |x-1|^0$$

Zbog $|x - 1| > 0$ baza potencije i na lijevoj i na desnoj strani je strogo pozitivan realan broj, pa smijemo provesti izjednačavanje eksponenata:

$$\log^2 x - \log(x^2) - 3 = 0.$$

Budući da je $\log^2 x = (\log x)^2$ definiran samo za $x > 0$, to je

$$\log(x^2) = 2 \log |x| = 2 \log x$$

jer za svaki $x > 0$ vrijedi jednakost $|x| = x$. Tako dobivenu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$\log^2 x - 2\log x - 3 = 0,$$

pa uvođenjem zamjene $t = \log x$ dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

čija su rješenja $t_1 = -1$ i $t_2 = 3$. Iz $t_1 = -1$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo logaritamsku jednadžbu

$$\log x = -1$$

iz koje antilogaritmiranjem slijedi $x = 10^{-1} = \frac{1}{10}$. Iz $t_2 = 3$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo logaritamsku jednadžbu

$$\log x = 3$$

iz koje antilogaritmiranjem slijedi $x = 10^3 = 1000$. Budući da $\frac{1}{10}$, 1 i 1000 zadovoljavaju uvjet $x > 0$, polazna jednadžba ima ukupno tri realna rješenja:

$$x_1 = \frac{1}{10},\ x_2 = 1 \text{ i } x_3 = 1000.$$

432. *Za koje prirodne brojeve* $n \in \mathbf{N}$ *jednadžba* (*po* x)

$$\frac{x-8}{n-10} = \frac{n}{x}$$

nema realnih rješenja?

Rješenje: Odmah uočavamo da je jedan takav broj $n = 10$ jer za $n = 10$ razlomak na lijevoj strani zadane jednadžbe nije definiran ni za jedan $x \in \mathbf{R}$. Uz pretpostavke $n \neq 10$ i $x \neq 0$, polaznu jednadžbu smijemo pomnožiti s $x \cdot (n - 10)$. Nakon sređivanja se dobije jednadžba:

$$x^2 - 8x - n^2 + 10n = 0.$$

Očito je riječ o kvadratnoj jednadžbi (s nepoznanicom x) koja neće imati niti jedno realno rješenje ako i samo ako njezina diskriminanta bude strogo negativna. Kako je diskriminranta te jednadžbe

$$D = 64 - 4 \cdot 1 \cdot (-n^2 + 10n) = 4n^2 - 40n + 64,$$

dobivamo sljedeću kvadratnu nejednadžbu:

$$4n^2 - 40n + 64 < 0,$$

odnosno

$$n^2 - 10n + 16 < 0.$$

Skup svih rješenja te nejednadžbe je otvoreni interval $\langle 2, 8 \rangle$. U tom se intervalu nalaze prirodni brojevi 3, 4, 5, 6 i 7. Stoga možemo zaključiti da polazna jednaddžba neće imati realnih rješenja za $n \in \{3, 4, 5, 6, 7, 10\}$.

433. *Riješite nejednadžbu*:

$$|x - 2| \leq |x + 4|.$$

Rješenje: Kritične točke dobivamo iz jednadžbi $x - 2 = 0$ i $x + 4 = 0$. Njihova su rješenja $x_1 = -4$ i $x_2 = 2$, pa zadanu nejednadžbu razmatramo na tri intervala:

1.) $-\infty < x \leq -4$

Na ovome je intervalu $|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$ i $|x + 4| = -(x + 4) = -x - 4$, pa dobivamo nejednadžbu:

$$2 - x \leq -x - 4$$

koja je ekvivalentna s nejednakosti

$$2 \leq -4,$$

a ta nejednakost nije istinita. Stoga na ovom intervalu polazna nejednadžba nema rješenja.

2.) $-4 \leq x \leq 2$

Na ovome je intervalu $|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$ i $|x + 4| = x + 4$ pa dobivamo nejednadžbu:

$$2 - x \leq x + 4$$

iz koje je

$$x \geq -1.$$

Stoga je u ovom slučaju skup rješenja polazne nejednadžbe segment $[-1, 2]$.

3.) $2 \leq x < +\infty$

Na ovome je intervalu $|x - 2| = x - 2$ i $|x + 4| = x + 4$ pa dobivamo nejednadžbu:

$$x - 2 \leq x + 4$$

koja je ekvivalentna s istinitom nejednakošću

$$-2 \leq 4.$$

Stoga je u ovom slučaju skup rješenja polazne nejednadžbe poluzatvoreni interval $[2, +\infty\rangle$.

Prema tome, skup svih rješenja polazne nejednadžbe je unija skupova $[-1, 2]$ i $[2, +\infty\rangle$, a to je poluzatvoreni interval $[-1, +\infty\rangle$.

434. *Riješite jednadžbu:*

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = 1.$$

Rješenje: Uočimo da je $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$ i $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$, pa zadanu jednadžbu možemo zapisati u obliku:

$$\cos\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\sin x = 1,$$

odnosno u obliku

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 1.$$

Odavde slijedi

$$\frac{\pi}{6} - x = 2k\cdot\pi,\ k \in \mathbf{Z},$$

pa je konačno

$$x = (1 - 12k)\cdot\frac{\pi}{6},\ k \in \mathbf{Z}.$$

435. *Treći član aritmetičkoga niza jednak je* 9, *a razlika sedmoga i drugoga člana jednaka je* 20. *Koliko uzastopnih članova ovoga niza, počevši od prvoga, treba uzeti da njihov zbroj bude jednak* 91?

Rješenje: Neka je a_1 prvi član, a d razlika toga aritmetičkoga niza. Tada n–ti član niza računamo prema formuli

$$a_n = a_1 + (n - 1)\cdot d.$$

To znači da je drugi član niza jednak

$$a_2 = a_1 + (2 - 1)\cdot d = a_1 + d,$$

treći

$$a_3 = a_1 + (3 - 1)\cdot d = a_1 + 2d,$$

a sedmi

$$a_7 = a_1 + (7 - 1) \cdot d = a_1 + 6 \cdot d.$$

Kako je $a_3 = 9$, vrijedi jednakost:

$$a_1 + 2d = 9,$$

a kako je razlika sedmoga i drugoga člana jednaka 20, vrijedi jednakost

$$(a_1 + 6d) - (a_1 + d) = 20.$$

Iz ove jednakosti slijedi

$$5d = 20,$$

odnosno

$$d = 4,$$

pa uvrštavanjem te vrijednosti u

$$a_1 + 2d = 9$$

odmah dobivamo

$$a_1 = 1.$$

Nadalje, znamo da se zbroj n uastopnih članova aritmetičkoga niza (počevši do prvoga) računa prema formuli

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1) \cdot d\right].$$

U tu formulu uvrstimo $S_n = 91$, $a_1 = 1$ i $d = 4$ pa dobivamo:

$$91 = \frac{n}{2}\left[2 + (n-1) \cdot 4\right]$$
$$91 = n + 2n \cdot (n - 1),$$
$$2n^2 - n - 91 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $n_1 = -6.5$ i $n_2 = 7$. Kako je n ukupan broj članova niza koji treba uzeti, taj broj mora biti prirodan. To znači da rješenje $n_1 = -6.5$ zanemarujemo, pa zaključujemo da trebamo uzeti ukupno 7 članova zadanoga niza.

436. *Zadan je usporednik ABCD takav da je kut kod vrha A jednak* $\alpha = 60°$, *a duljina stranice AB jednaka* 3. *Simetrala kuta* α *siječe stranicu BC u točki E. Izračunajte površinu trokuta ABE.*

Rješenje: Odredimo najprije poznate elemente trokuta ABE. Duljina njegove stranice AB iznosi 3, kut kod vrha A iznosi

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \cdot \alpha = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°,$$

a kut kod vrha B

$$\beta = 180° - \alpha = 180° - 60° = 120°$$

(jer je zbroj bilo kojih dvaju susjednih kutova u usporedniku $ABCD$ jednak 180°). Stoga je kut kod vrha E jednak

$$\varphi = 180 - (\alpha_1 + \beta) = 180° - (120° + 30°) = 30°,$$

pa je trokut ABE jednakokračan (jer ima točno dva jednaka kuta: α_1 o ϕ). Budući da se nasuprot jednakim kutovima moraju nalaziti i stranice jednake duljine, slijedi da stranica nasuprot kuta α_1 i stranica nasuprot kuta ϕ imaju jednake duljine. Kako je nasuprot kuta α_1 stranica BE, a nasuprot kuta φ stranica AB, to je

$$|BE| = |AB| = 3.$$

Stoga je površina trokuta ABE jednaka

$$P_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BE| \cdot \sin \beta$$
$$P_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \sin 120°$$
$$P = \frac{9}{4}\sqrt{3}$$

437. *Prodajna cijena neke robe najprije je uvećana za* 15%, *a potom smanjena za* 8%. *Iskažite u postotcima ukupnu promjenu cijene te robe.*

Rješenje: U formulu

$$R = 100 \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) - 100$$

uvrstimo $p_1 = +\ 15$ (jer je riječ o povećanju cijene) i $p_2 = -8$ (jer je riječ o sniženju cijene). Kratkim računom dobijemo:

$$R = +\ 5.8,$$

pa zaključujemo da se cijena ukupno uvećala za 5.8%.

438. *Odredite skup svih točaka Gaussove ravnine za koje je valjana nejednakost*

$$\frac{|z-1|}{|z+1|} < 1.$$

Rješenje: Pretpostavimo da je $z = x + yi$, pri čemu su $x, y \in \mathbf{R}$. Budući da je

$$|z - 1| = |(x - 1) + yi| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

i

$$|z + 1| = |(x + 1) + yi| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}\ ,$$

polaznu nejednakost možemo zapisati u obliku

$$\sqrt{\frac{(x-1)^2 + y^2}{(x+1)^2 + y^2}} < 1$$

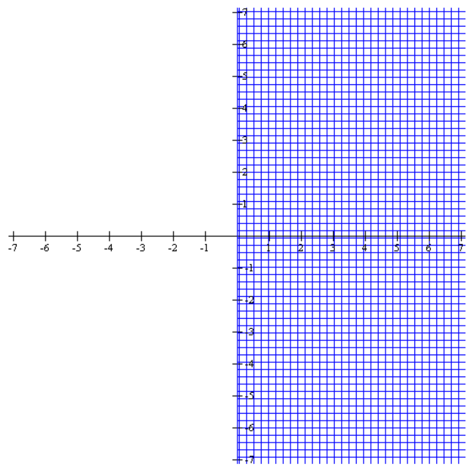
Kvadriranjem te nejednakosti (to smijemo učiniti jer su i na lijevoj i na desnoj strani nenegativni brojevi, pa se znak nejednakosti neće promijeniti), množenjem s nazivnikom razlomka na njezinoj lijevoj strani i provedbom kvadriranja izraza u zagradi dobivamo:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 < x^2 + 2x + 1 + y^2,$$

odnosno nakon reduciranja

$$x > 0.$$

Dakle, jedini uvjet na brojeve x i y jest $x > 0$. Stoga je traženi skup točaka poluravnina desno od imaginarne osi (imaginarna os se isključuje):



439. *Napišite jednadžbu kružnice kojoj je središte na pravcu p…* $2x - y + 5 = 0$ *i koja dira pravce* p_1… $6x - 4y - 4 = 0$ *i* p_2… $3x - 2y - 24 = 0$.

<u>Rješenje:</u> Uočimo odmah da su pravci p_1 i p_2 usporedni. Naime, podijelimo li jednadžbu pravca p_1 s 2 (to smijemo jer množenjem ili dijeljenjem jednadžbe nekoga pravca nekim realnim brojem različitim od nule taj pravac ostaje nepromijenjen), dobijemo:

$$p_1\ldots\ 3x - 2y - 2 = 0,$$

pa su koeficijenti uz varijable x, odnosno y u oba pravca jednaki, a to baš znači da su ti pravci usporedni. Središte tražene kružnice jest sjecište simetrale para pravaca p_1 i p_2 s pravcem p. Budući da jednadžba simetrale para usporednih pravaca q_1.. $Ax + By + C_1 = 0$ i q_2.. $Ax + By + C_2 = 0$ glasi

$$s \equiv Ax + By + \frac{C_1 + C_2}{2} = 0,$$

to je jednadžba simetrale para pravaca p_1 i p_2:

$$s \equiv 3x - 2y + \frac{(-2) + (-24)}{2} = 0,$$

odnosno

$$s \equiv 3x - 2y - 13 = 0$$

Sjecište pravca s s pravcem p je rješenje sustava

$$\begin{aligned} 3x - 2y - 13 &= 0 \\ 2x - y + 5 &= 0. \end{aligned}$$

Njegovim rješavanjem dobivamo $x = -23$, $y = -41$, pa je središte kružnice točka $S(-23, -41)$. Njezin je polumjer jednak udaljenosti točke S od bilo kojega od pravaca p_1 ili p_2, a nama za jednadžbu kružnice treba kvadrat toga polumjera. Izračunajmo zato kvadrat udaljenosti točke S od pravca p_1:

$$r^2 = \frac{|3 \cdot (-23) - 2 \cdot (-41) - 2|^2}{3^2 + 2^2}$$
$$r^2 = \frac{121}{13}$$

Prema tome, tražena jednadžba kružnice glasi:

$$(x + 23)^2 + (y + 41)^2 = \frac{121}{13}.$$

440. *Zbroj duljina dviju stranica trokuta iznosi* 15 cm. *Duljine visina na te stranice iznose* 4 cm, *odnosno* 6 cm. *Izračunajte površinu toga trokuta.*

Rješenje: Označimo duljine tih dviju stranica trokuta s a i b. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $v_a = 4$ cm i $v_b = 6$ cm. Budući da je zbroj duljina tih dviju stranica jednak 15 cm, vrijedi jednakost:

$$a + b = 15.$$

Nadalje, iz

$$P = \frac{1}{2} a v_a$$

i

$$P = \frac{1}{2} b v_b$$

(dvije različite formule za računanje iste veličine) slijedi da vrijedi jednakost:

$$a v_a = b v_b.$$

Uvrštavanjem $v_a = 4$ i $v_b = 6$ dobivamo:

$$4a = 6b,$$

odnosno nakon dijeljenja s 4 i skraćivanja

$$a = \frac{3}{2} b.$$

Uvrštavanjem te jednakosti u jednakost

$$a + b = 15$$

dobivamo:

$$\frac{3}{2}b + b = 15,$$

a iz te je jednadžbe $b = 6$ cm. Tako je površina trokuta jednaka

$$P = \frac{1}{2} b v_b$$
$$P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6$$
$$P = 18 \text{ cm}^2$$

441. *Kut između dviju susjednih stranica usporednika iznosi* $\alpha = 60°$. *Duljina jedne stranice usporednika je* 5, *a duljina kraće dijagonale* 7. *Izračunajte duljinu dulje dijagonale toga usporednika.*

Rješenje: Radi određenosti, označimo s $ABCD$ zadani usporednik, te neka je $|AD| = 5$, $|BD| = 7$. Za izračunavanje duljine dulje dijagonale (AC) treba nam podatak o duljini druge stranice usporednika. U tu svrhu primijenimo kosinusov poučak na trokut ABD:

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \cos \alpha$$

pa uvrštavanjem $|BD| = 7$, $|AD| = 5$ i $\alpha = 60°$ dobivamo:

$$49 = |AB|^2 + 25 - 2 \cdot |AB| \cdot 5 \cdot 0.5,$$

odnosno

$$|AB|^2 - 5 \cdot |AB| - 24 = 0.$$

Tako smo dobili kvadratnu jednadžbu (s nepoznanicom $|AB|$) čija su rješenja $(|AB|)_1 = -3$ i $(|AB|)_2 = 8$. Kako duljina stranice usporednika ne može biti negativan realan broj, prvo rješenje se odbacuje, pa slijedi:

$$|AB| = 8.$$

Duljinu dulje dijagonale odredit ćemo iz trokuta ABC. Znamo duljine dviju stranica toga trokuta:

$$|AB| = 8,\ |BC| = |AD| \text{ (jer je riječ o usporedniku)} = 5,$$

te kut kod vrha B

$$\beta = 180° - \alpha \text{ (jer je zbroj dvaju susjednih kutova u usporedniku jednak } 180°)$$
$$\beta = 180° - 60°$$
$$\beta = 120°.$$

pa primjenom kosinusova poučka dobivamo:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos \beta,$$
$$|AC|^2 = 64 + 25 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot (-0.5),$$
$$|AC|^2 = 129,$$

te konačno

$$|AC| = \sqrt{129}.$$

442. *Izračunajte površinu trokuta kojemu je duljina jedne stranice jednaka* 4, *a kutovi uz tu stranicu* 45° *i* 60°.

Rješenje: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a = 4$. Uz standardne oznake u trokutu, kutovi uz tu stranicu su β i γ, pa ponovno bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\beta = 45°$ i $\gamma = 60°$. Tada kut α nasuprot stranici a iznosi

$$\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$$
$$\alpha = 180° - (45° + 60°)$$
$$\alpha = 75°.$$

Primjenom sinusova poučka možemo izračunati duljinu stranice b nasuprot kuta β. Iz

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

slijedi

$$b = \frac{a}{\sin\alpha} \cdot \sin\beta$$
$$b = \frac{4}{\sin 75°} \cdot \sin 45°$$

Budući da je

$$\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

to je

$$b = \frac{4}{\sin 75°} \cdot \sin 45°$$
$$b = \frac{4}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$b = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$
$$b = \frac{8\sqrt{2} \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{2})}$$
$$b = \frac{8\sqrt{2} \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-2}$$
$$b = 2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{2})$$
$$b = 2\sqrt{12} - 4$$
$$b = 2 \cdot 2\sqrt{3} - 4$$
$$b = 4\sqrt{3} - 4$$
$$b = 4(\sqrt{3} - 1)$$

Prema tome, površina zadanoga trokuta jednaka je

$$P = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$$
$$P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4(\sqrt{3} - 1) \cdot \sin 60°$$
$$P = 8(\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$P = 4\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} - 1)$$
$$P = 12 - 4\sqrt{3}$$

443. *Duljine dviju stranica raznostraničnoga trokuta su* 4 *i* 6. *Tim stranicama nasuprotni kutovi se odnose kao* 1 : 2. *Izračunajte duljinu treće stranice ovoga trokuta.*

Rješenje: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a = 4$ i $b = 6$. Tim stranicama nasuprotni kutovi su α i β, pa vrijedi razmjer:

$$\alpha : \beta = 1 : 2$$

iz kojega je

$$\beta = 2\alpha.$$

Nadalje, iz sinusova poučka

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

slijedi

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b}{a}$$

pa uvrštavanjem $\beta = 2\alpha$, $a = 4$ i $b = 6$ dobivamo:

$$\frac{\sin(2\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{6}{4},$$

odnosno zbog $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{3}{2}$$
$$\cos\alpha = \frac{3}{4}$$

Traženu duljinu treće stranice izračunat ćemo rabeći kosinusov poučak:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Zbog toga izrazimo $\cos\gamma$ pomoću $\cos\alpha$. Iz

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$$

uvrštavanjem $\beta = 2\alpha$ dobivamo

$$\gamma = 180° - 3\alpha,$$

pa slijedi

$\cos\gamma = \cos(180° - 3\alpha) = \cos 180° \cos 3\alpha + \sin 180° \sin 3\alpha = -\cos 3\alpha = 3\cos\alpha - 4\cos^3\alpha = 3 \cdot \frac{3}{4} - 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = = \frac{9}{16}$.

Prema tome je

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$
$$c^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{9}{16},$$
$$c^2 = 25,$$

a odavde je $c = 5$.

444. *Izračunajte opseg pravokutnoga trokuta čija je površina* 1 m^2, *a duljina hipotenuze* 2 m.

<u>Rješenje:</u> Zadane su nam sljedeće veličine:

$$P = 1 \text{ m}^2,$$
$$c = 2 \text{ m}.$$

Označimo katete toga trokuta s a i b. Budući da je površina trokuta $P = 1$ m^2, vrijedi jednakost:

$$\frac{a \cdot b}{2} = 1,$$

a odavde je

$$ab = 2.$$

Nadalje, uvrštavanjem $c = 2$ u Pitagorin poučak

$$a^2 + b^2 = c^2$$

dobivamo

$$a^2 + b^2 = 2^2,$$

odnosno

$$a^2 + b^2 = 4.$$

Dodavanjem $2ab$ ovoj jednakosti dobit ćemo

$$a^2 + b^2 + 2ab = 4 + 2ab,$$

odnosno, zbog $ab = 2$,

$$(a + b)^2 = 4 + 4,$$

tj.

$$(a + b)^2 = 8.$$

Odavde je

$$a + b = \sqrt{8},$$

tj.

$$a + b = 2\sqrt{2},$$

pa je traženi opseg trokuta jednak

$$O = a + b + c,$$
$$O = 2\sqrt{2} + 2,$$
$$O = 2(\sqrt{2} + 1) \text{ m}.$$

445. *Zbroj duljina svih dijagonala pravilnoga peterokuta iznosi* 800. *Odredite najmanji cijeli broj koji je veći od duljine stranice toga peterokuta.*

Rješenje: Označimo duljinu stranice toga peterokuta s a, duljinu jedne njegove dijagonale s d, a s α njegov središnji kut. Broj stranica peterokuta je $n = 5$, pa je ukupan broj njegovih dijagonala jednak

$$N = \frac{n(n-3)}{2}$$
$$N = \frac{5(5-3)}{2}$$
$$N = 5$$

Ukupan zbroj duljina svih dijagonala jednak je $N \cdot d$, pa iz

$$N \cdot d = 800$$

uvrštavanjem $N = 5$ dobivamo jednadžbu

$$5 \cdot d = 800$$

iz koje je $d = 160$. Nadalje, duljina dijagonale pravilnoga peterokuta jednaka je promjeru tome peterokutu opisane kružnice:

$$d = \frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

a odavde je

$$a = d \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Kako je

$$\alpha = \frac{360°}{n}$$
$$\alpha = \frac{360°}{5}$$
$$\alpha = 72°$$

uvrštavanjem $d = 160$ i $\alpha = 72°$ u

$$a = d \sin\frac{\alpha}{2}$$

dobivamo:

$$a = 94{,}0456403667957006669929527422516.$$

Stoga je najmanji cijeli broj veći od duljine stranice toga peterokuta jednak 95.

446. *Iz jednoga vrha kvadrata stranice* 3 *opisan je krug polumjera* 4. *Izračunajte koliki dio* (*u postotcima*) *kvadrata se nalazi izvan kruga.*

Rješenje: Neka je $ABCD$ zadani kvadrat čija je stranica $a = 3$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je središte kruga točka A i neka je $r = 4$ njegov polumjer. Pripadna kružnica siječe točno dvije stranice kvadrata (BC i CD) u po jednoj točki, pa neka su $E \in BC$ i $F \in CD$ sjecišta kružnice i stranica kvadrata. Izvan opisanoga kruga se nalazi kružni siječak CEF. Njegov je središnji kut jednak $\alpha = 90°$, a polumjer

$$r_1 = |BC| - |BE|$$
$$r_1 = |BC| - \sqrt{|AE|^2 - |AB|^2},$$

što je zbog $|BC| = |AB| = a$ i $|AE| = r$ dalje jednako:

$$r_1 = a - \sqrt{r^2 - a^2},$$

pa je površina isječka CEF jednaka

$$P_{CEF} = \frac{r_1^2 \pi \alpha}{360°}$$
$$P_{CEF} = \frac{(a - \sqrt{r^2 - a^2})^2 \pi \cdot 90°}{360°}$$
$$P_{CEF} = \frac{(a^2 - 2a\sqrt{r^2 - a^2} + r^2 - a^2)\pi}{4}$$
$$P_{CEF} = \frac{(r^2 - 2a\sqrt{r^2 - a^2})\pi}{4}$$

pa je postotni udio kružnoga isječka CEF u odnosu na površinu kvadrata P_{ABCD} jednak

$$p = \frac{100 \cdot P_{CEF}}{P_{ABCD}}$$
$$p = \frac{100 \cdot (r^2 - 2a\sqrt{r^2 - a^2})}{a^2}$$

Uvrštavanjem $a = 3$ i $r = 4$ konačno dobivamo

$$p = 1.394357040138405077670060868493750\%$$

ili približno

$$p \approx 1.4\%.$$

447. *U četvrtinu kruga polumjera R upisana je kružnica. Izrazite njezin polumjer kao funkciju varijable R.*

Rješenje: Najprije primijetimo da je četvrtina kruga zapravo kružni isječak čiji je polumjer jednak R, a središnji kut 90°. Označimo s V vrh zadanoga kružnoga isječka, s D_1 dirалište isječku upisane kružnice i kraka isječka, s D_2 diralište upisane kružnice i luka isječka, S središte isječku upisane kružnice, a s r traženi polumjer. Središte S isječku upisane kružnice mora biti na simetrali središnjega kuta toga isječka (jer je od svakoga kraka isječka udaljeno za r). Budući da je pravac VD_1 tangenta isječku upisane kružnice, on mora biti okomit na pravac SD_1 (polumjer upisane kružnice). Zato je trokut VD_1S pravokutan (s pravim kutom kod vrha D_1) i kut kod vrha V jednak $\frac{90°}{2} = 45°$. Duljina njegove katete SD_1 jednaka je r, pa je duljina hipotenuze VS jednaka

$$|VS| = \frac{r}{\sin 45°} = r\sqrt{2}\ .$$

S druge je strane

$$|VS| = |VD_2| - |SD_2| = R - r,$$

pa izjednačavanjem desnih strana posljednjih dviju jednakosti dobivamo jednadžbu:

$$r\sqrt{2} = R - r$$

iz koje je

$$r = R \cdot (\sqrt{2} - 1)\ ,$$

i to je traženi izraz.

448. *Zbroj* 30 *uzastopnih parnih prirodnih brojeva iznosi* 1230. *Odredite najveći od njih.*

Rješenje: Označimo traženi broj s x. Tada su tih 30 uzastopnih parnih prirodnih brojeva tvore aritmetički niz koji ima ukupno $n = 30$ članova, a čiji su prvi član x i razlika (–2). Posljednji (30.) član toga niza dobijemo tako da u formulu za određivanje n – toga člana aritmetičkoga niza

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

uvrstimo $a_1 = x$, $n = 30$ i $d = -2$:

$$a_{30} = x + (30 - 1) \cdot (-2),$$
$$a_{30} = x - 58.$$

Tako je zbroj svih 30 članova niza jednak

$$S_{30} = \frac{30}{2}(a_1 + a_{30}),$$

odnosno

$$S_{30} = 15(x + x - 58),$$

odnosno

$$S_{30} = 30x - 870.$$

U zadatku je navedeno da je $S_{30} = 1230$, pa dobivamo jednadžbu:

$$30x - 870 = 1230$$

iz koje je $x = 70$. Dakle, najveći od tih 30 brojeva jednak je 70.

449. *Tri su broja, od kojih srednji iznosi* 24, *uzastopni članovi istoga rastućega geometrijskoga niza. Ako njihov zbroj iznosi* 126, *odredite najmanji od njih.*

Rješenje: Neka su preostala dva broja a i b. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $a < 24 < b$. Budući da zbroj tih triju brojeva mora biti jednak 126, vrijedi jednakost:

$$a + 24 + b = 126,$$

odnosno

$$a + b = 102.$$

Budući da su ta tri broja uzastopni članovi istoga rastućega geometrijskoga niza, kvadrat srednjega od njih mora biti jednak umnošku najmanjega i najvećega:

$$24^2 = ab,$$

odnosno

$$ab = 576.$$

Tako smo dobili sustav

$$\begin{aligned} a + b &= 102 \\ ab &= 126. \end{aligned}$$

Iz prve je jednadžbe $b = 102 - a$ pa uvrštavanjem u drugu dobijemo:

$$a \cdot (102 - a) = 576,$$

odnosno

$$a^2 - 102a + 576 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $a_1 = 6$ i $a_2 = 96$. Budući da za $a_2 = 96$ ne vrijedi nejednakost

$$a_2 < 24,$$

to rješenje odbacujemo, pa preostaje $a = a_1 = 6$. Dakle, najmanji od tih triju brojeva iznosi 6.

450. *Prvi, drugi i četvrti član rastućega aritmetičkoga niza su tri uzastopna člana rastućega geometrijskoga niza. Ako je treći član aritmetičkoga niza jednak* 12, *odredite četvrti član toga niza.*

Rješenje: Neka je a_1 prvi član aritmetičkoga niza, a d razlika toga niza. Tada su drugi, treći i četvrti član aritmetičkoga niza dani formulama

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_1 + 3d.$$

Iz podatka da su brojevi a_1, a_2 i a_4 tri uzastopna člana geometrijskoga niza i definicije geometrijskoga niza proizlazi da mora vrijediti jednakost

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_4 .$$

Uvrštavanjem

$$a_2 = a_1 + d$$

i

$$a_4 = a_1 + 3d$$

u tu jednakost dobivamo:

$$(a_1 + d)^2 = a_1 \cdot (a_1 + 3d),$$

odnosno

$$a_1^2 + 2a_1 d + d^2 = a_1^2 + 3a_1 d,$$

otkuda je

$$d^2 - a_1 d = 0,$$

odnosno

$$d(d - a_1) = 0.$$

Ako bi bilo $d = 0$, onda bi slijedilo $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, a taj aritmetički niz nije rastući. Zbog toga mora biti $d \neq 0$, pa dijeljenjem posljednje jednadžbe s d dobivamo:

$$a_1 = d$$

Tu jednakost zajedno s $a_3 = 12$ uvrstimo u izraz

$$a_3 = a_1 + 2d$$

pa dobijemo:

$$12 = d + 2d,$$

otkuda je

$$d = 4.$$

Prema tome je i $a_1 = d = 4$, pa je četvrti član zadanoga niza jednak

$$a_4 = 4 + (4 - 1) \cdot 4,$$
$$a_4 = 16.$$

451. *Realni brojevi* a, x, b *i* $2x$ *su prva četiri člana istoga aritmetičkoga niza. Izračunajte količnik brojeva* a i b.

Rješenje: Koristit ćemo osnovno svojstvo aritmetičkoga niza, a to je da je svaki njegov član (osim prvoga) aritmetička sredina njegovih neposrednih susjeda. Zbog toga moraju vrijediti sljedeće jednakosti:

$$x = \frac{a+b}{2}$$
$$b = \frac{x+2x}{2}$$

Drugu jednakost možemo zapisati u obliku

$$b = \frac{3x}{2}$$

pa kad ovamo uvrstimo prvu jednakost dobijemo:

$$b = \frac{3 \cdot \frac{a+b}{2}}{2}$$
$$b = \frac{3 \cdot (a+b)}{4}$$
$$3a + 3b = 4b$$
$$3a = b$$
$$\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$$

Dakle, količnik brojeva a i b jednak je $\frac{1}{3}$.

452. *Četiri realna broja tvore padajući aritmetički niz. Izbacimo li drugi od njih, preostala tri broja u danom poretku tvore padajući geometrijski niz. Ako je najveći od tih četiriju brojeva jednak* 1, *izračunajte njihov zbroj.*

Rješenje: Budući da ta četiri broja tvore padajući aritmetički niz i da je najveći od njih jednak 1, prvi član niza mora biti jednak 1:

$$a_1 = 1.$$

Označimo li s d razliku aritmetičkoga niza, slijedi da su drugi, treći i četvrti član aritmetičkoga niza dani izrazima:

$$a_2 = 1 + (2 - 1) \cdot d = d + 1,$$

$$a_3 = 1 + (3-1) \cdot d = 2d + 1,$$
$$a_4 = 1 + (4-1) \cdot d = 3d + 1.$$

Izbacimo li broj a_2, brojevi $a_1 = 1$, a_3 i a_4 tvore geometrijski niz, što znači da vrijedi jednakost:

$$a_3^2 = a_1 \cdot a_4.$$

Uvrštavanjem $a_1 = 1$, $a_3 = 2d + 1$ i $a_4 = 3d + 1$ dobivamo:

$$(2d + 1)^2 = 1 \cdot (3d + 1),$$

odnosno

$$4d^2 + d = 0.$$

Ako bi bilo $d = 0$, onda bi slijedilo $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$, a to nije padajući aritmetički niz. Zbog toga mora biti $d \neq 0$, pa dijeljenjem posljednje jednadžbe s d dobivamo

$$4d + 1 = 0,$$

odnosno $d = -\frac{1}{4}$. Zbroj tih četiriju brojeva izračunat ćemo tako da u formulu

$$S_n = \frac{n}{2}\,[2a_1 + (n-1)d]$$

uvrstimo $n = 4$, $a_1 = 1$ i $d = -\frac{1}{4}$. Konačno je

$$S_4 = \frac{5}{2}.$$

453. *Cijena nekoga proizvoda najprije poskupi za* 20%, *a potom još za* 10%. *Za koliko bi postotaka trebao pojeftiniti taj proizvod da bi se mogao prodavati po početnoj cijeni*?

Rješenje: Koristit ćemo formulu za izračunavanje ukupne promjene cijene uslijed njezinih sukcesivnih promjena:

$$R = 100 \cdot (1 + \frac{p_1}{100}) \cdot (1 + \frac{p_2}{100}) \cdot (1 + \frac{p_3}{100}) - 100.$$

Promjena p_1 jednaka je +20 (jer se radi o povećanju od 20%), promjena p_2 +10 (jer se radi o povećanju od 10%), promjena p_3 je traženo sniženje, a R je ukupna promjena cijene. Kako je krajnja cijena jednaka početnoj, to je $R = 0$ pa dobivamo jednadžbu:

$$0 = 100 \cdot (1 + \frac{20}{100}) \cdot (1 + \frac{10}{100}) \cdot (1 + \frac{p_3}{100}) - 100,$$

iz koje je

$$132 \cdot (1 + \frac{p_3}{100}) - 100 = 0$$
$$\frac{132 p_3}{100} = -32$$
$$p_3 = -\frac{32 \cdot 100}{132} \approx -24{,}24242424242424242424242424242424242$$

Dakle, traženo pojeftinjenje iznosi 24.24% (predznak – označava da se radi o pojeftinjenju, odnosno smanjenju cijene).

454. *Koji uvjet moraju zadovoljavati realni brojevi a i b tako da pravci* $p_1 \ldots x + by = 3$ *i* $p_2 \ldots ax + y = 4$ *budu usporedni*?

Rješenje: Zapišimo najprije jednadžbe obaju pravaca u eksplicitnomu obliku:

$$p_1 \ldots y = -\frac{1}{b} x + \frac{3}{b}$$
$$p_2 \ldots y = -ax + 4$$

Ti pravci će biti usporedni ako njihovi koeficijenti smjerova budu jednaki. To znači da mora vrijediti jednakost

$$-\frac{1}{b} = -a \ ,$$

a odavde je $ab = 1$, i to je traženi uvjet.

455. *Odredite područje definicije realne funkcije*

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 15x + 54} \ .$$

Rješenje: Zadana funkcija je definirana za one vrijednosti varijable x za koje je izraz pod drugim korijenom nenegativan (jer je drugi korijen definiran samo za nenegativne realne brojeve). To znači da mora vrijediti nejednakost:

$$x^2 - 15x + 54 \geq 0.$$

Tako smo dobili kvadratnu nejednadžbu s nepoznanicom x. Pripadna kvadratna funkcija je $f(x) = x^2 - 15x + 54$. Njezine nultočke dobijemo rješavajući jednadžbu $f(x) = 0$, odnosno jednadžbu

$$x^2 - 15x + 54 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su $x_1 = 6$ i $x_2 = 9$. Kako je vodeći koeficijent (tj. koeficijent uz x^2) funkcije $f(x)$ jednak 1, graf te funkcije je parabola oblika $\cup$ (okrenuta prema gore). Ona poprima nenegativne vrijednosti svuda osim na intervalu između svojih nultočaka. Stoga je rješenje dobivene nejednadžbe

$$x \in \langle -\infty, 6] \cup [9, +\infty \rangle,$$

što kraće možemo zapisati kao

$$x \in \mathbf{R} \setminus \langle 6, 9 \rangle.$$

Prema tome, traženo područje definicije je skup $\mathbf{R} \setminus \langle 6, 9 \rangle$.

456. *Riješite jednadžbu:*

$$3^{2x} + 9 = 6 \cdot 3^x.$$

Rješenje: Zapišimo najprije zadanu jednadžbu na sljedeći način:

$$(3^x)^2 - 6 \cdot 3^x + 9 = 0.$$

Uvedimo zamjenu $t = 3^x$ pa dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$t^2 - 6t + 9 = 0$$

koju možemo zapisati u obliku

$$(t - 3)^2 = 0.$$

Odavde je $t = 3$, pa vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo eksponencijalnu jednadžbu

$$3^x = 3,$$

odnosno

$$3^x = 3^1$$

iz koje izjednačavanjem eksponenata izravno dobivamo $x = 1$, i to je jedino rješenje polazne jednadžbe.

457. *Na intervalu* $\langle 0, 3\rangle$ *riješite jednadžbu*:

$$2\sin\left(\frac{\pi \cdot x}{6}\right) = \sqrt{3}\,.$$

Rješenje: Uvedimo zamjenu $t = \dfrac{\pi \cdot x}{6}$ pa dobivamo trigonometrijsku jednadžbu

$$2\sin t = \sqrt{3}\,,$$

odnosno

$$\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Njezina su rješenja:

$$t_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$t_2 = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Iz $t_1 = \dfrac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo jednadžbu:

$$\frac{\pi \cdot x}{6} = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

koju smijemo podijeliti s π i pomnožiti s 6. Tako ćemo dobiti:

$$x = 2 + 12k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

U intervalu $\langle 0, 3\rangle$ očito se nalazi jedino $x = 2$ kojega dobijemo za $k = 0$ (za sve ostale $k \in \mathbf{Z}$ dobivamo cijele brojeve koji su ili veći od 3 ili manji od 0). Nadalje, iz $t_2 = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo jednadžbu:

$$\frac{\pi \cdot x}{6} = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

koju smijemo podijeliti s π i pomnožiti s 6. Tako ćemo dobiti:

$$x = 4 + 12k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

U intervalu $\langle 0, 3\rangle$ nema niti jednoga x iz ove skupine rješenja (jer za svaki $k \in \mathbf{Z}$ dobivamo rješenje koje je ili veće od 3 ili manje od 0). Prema tome, jedino rješenje polazne jednadžbe u zadanom intervalu jest $x = 2$.

458. *Izračunajte*:

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}\ .$$

Rješenje: Uočimo da je

$$3 + 2\sqrt{2} = 2 + 1 + 2\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} + 1^2 = (\sqrt{2} + 1)^2$$

i analogno

$$3 - 2\sqrt{2} = 2 + 1 - 2\sqrt{2} = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} + 1^2 = (\sqrt{2} - 1)^2.$$

Kako je $\sqrt{2} > 1$, to vrijede nejednakosti $\sqrt{2} + 1 > 0$, $\sqrt{2} - 1 > 0$, pa imamo:

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} = |\sqrt{2}+1| - |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1 = 2\ .$$

459. *Odredite broj različitih cjelobrojnih rješenja nejednadžbe*

$$\sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2-8x+16} \leq 7\ .$$

Rješenje: Uočimo da je

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

i

$$x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2.$$

Tako polaznu nejednadžbu možemo zapisati u obliku:

$$\sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x-4)^2} \leq 7\ ,$$

odnosno, zbog jednakosti $\sqrt{x^2} = |x|$, u obliku

$$|x+1| + |x-4| \leq 7.$$

Kritične točke funkcije $f(x) = |x+1| + |x-4|$ dobivamo rješavajući jednadžbe

$$x + 1 = 0$$

i

$$x - 4 = 0.$$

Rješenja tih jednadžbi su $x = -1$ i $x = 4$, pa dobivenu nejednadžbu rješavamo na ukupno tri intervala:

1.) $-\infty < x \leq -1$

Na ovome je intervalu $|x+1| = -(x+1) = -x - 1$ i $|x-4| = -(x-4) = -x + 4$ pa dobivamo nejednadžbu:

$$-x - 1 + (-x + 4) \leq 7,$$

odnosno

$$x \geq -2.$$

Svi cijeli brojevi koji zadovoljavaju uvjete $-\infty < x \leq -1$ i $x \geq -2$ su -2 i -1, pa u ovom slučaju imamo 2 različita cjelobrojna rješenja.

2.) $-1 \leq x \leq 4$

Na ovome je intervalu $|x+1| = x + 1$ i $|x-4| = -(x-4) = -x + 4$ pa dobivamo nejednadžbu:

$$x + 1 + (-x + 4) \leq 7,$$

odnosno

$$5 \leq 7.$$

Ta nejednakost je istinita za svaki x takav da je $-1 \leq x \leq 4$, pa u ovom slučaju imamo 5 različitih rješenja: 0, 1, 2, 3 i 4 (rješenje $x = -1$ ne uzimamo jer smo ga već uzeli u prethodnom slučaju).

3.) $4 \leq x < +\infty$

Na ovome je intervalu $|x+1| = x + 1$ i $|x-4| = x - 4$ pa dobivamo nejednadžbu:

$$x + 1 + x + 4 \leq 7,$$

odnosno

$$x \leq 1.$$

Ta nejednakost nije istinita niti za jedan $x > 4$, pa u ovom slučaju nejednadžba nema rješenja.

Prema tome, polazna jednadžba ima ukupno 2 + 5 = 7 različitih cjelobrojnih rješenja.

460. *Izračunajte*:

$$\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \ldots \cdot \log_{2004} 2003 \cdot \log_{2005} 2004.$$

Rješenje: Koristit ćemo formulu:

$$\log_b a = \frac{\log a}{\log b}.$$

Tako redom imamo:

$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_{2003} 2004 \cdot \log_{2004} 2005 = \frac{\log 2}{\log 3} \cdot \frac{\log 3}{\log 4} \cdot \frac{\log 4}{\log 5} \cdot \ldots \cdot \frac{\log 2003}{\log 2004} \cdot \frac{\log 2004}{\log 2005} =$ (svi faktori, osim log 2 i log 2005, se međusobno pokrate) $= \frac{\log 2}{\log 2005} = \log_{2005} 2.$

461. *U kakvome su odnosu varijable x i z ako vrijede nejednakosti*:

$$x > 0,\ y > 0,\ z > 0,$$

te jednakosti

$$\begin{aligned} \frac{z}{x+y} &= 2 \\ \frac{z}{y-x} &= 3 \end{aligned} \quad ?$$

Rješenje: Iz prve od zadanih jednakosti dobivamo

$$z = 2x + 2y,$$

a iz druge

$$z = 3y - 3x.$$

Pomnožimo prvu od dviju dobivenih jednakosti s (–3), a drugu s 2. Tako dobivamo:

$$\begin{aligned} -3z &= -6x - 6y \\ 2z &= -6x + 6y. \end{aligned}$$

Zbrajanjem tih jednakosti dobivamo:

$$-z = -12x,$$

odnosno

$$z = 12x.$$

Budući da smo pretpostavili da je $x > 0$, to je $z > x$ (ili ekvivalentno $x < z$).

462. *Odredite zbroj svih realnih rješenja jednadžbe*

$$\log_2(x+1)^2 + \log_2|x+1| - 6 = 0.$$

Rješenje: Budući da su za svaki $x \in \mathbf{R}$ izrazi $(x+1)^2$ i $|x+1|$ nenegativni, jedini uvjet na vrijednost nepoznanice x jest

$$X + 1 \neq 0,$$

odnosno $x \neq 1$. Budući da za svaki realan broj $x \in \mathbf{R}$ vrijedi jednakost

$$\mathrm{Log}_2(x+1)^2 = 2\log_2|x+1|,$$

to uvođenjem zamjene

$$t = \log_2|x+1|$$

dobivamo jednadžbu

$$2t + t - 6 = 0$$

iz koje je $t = 2$. Sada iz $t = 2$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo logaritamsku jednadžbu

$$\log_2|x+1| = 2$$

iz koje je

$$|x+1| = 2^2,$$

odnosno

$$|x+1| = 4.$$

Ovo je jednadžba s jednom apsolutnom vrijednosti koja se razlaže na dvije jednadžbe bez apsolutnih vrijednosti:

1.) $x + 1 = 4$, iz koje je $x_1 = 3$,
2.) $x + 1 = -4$, iz koje je $x_2 = -5$.

Stoga je zbroj svih realnih rješenja polazne jednadžbe jednak

$$x_1 + x_2 = 3 + (-5) = -2.$$

463. *Riješite jednadžbu*:

$$2\sin^2 x - (2-\sqrt{2})\sin x - \sqrt{2} = 0\,.$$

Rješenje: Stavimo $t = \sin x$, pa dobivamo jednadžbu:

$$2t^2 - (2-\sqrt{2})\cdot t - \sqrt{2} = 0\,.$$

Njezina su rješenja $t_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $t_2 = 1$. Iz $t_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo trigonometrijsku jednadžbu

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Njezina su rješenja $x_1 = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi$ i $x_2 = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Nadalje, iz $t_2 = 1$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo trigonometrijsku jednadžbu

$$\sin x = 1.$$

Njezino je rješenje $x_3 = \frac{\pi}{2} + l \cdot 2\pi$, $l \in \mathbf{Z}$. x_1, x_2 i x_3 su sva rješenja polazne jednadžbe.

464. *Odredite vrijednost realnoga parametra* $a \in \mathbf{R}$ *tako da pravac* $p\ldots\ ax + y = 4$ *bude tangenta kružnice* $4(x-1)^2 + 4(y-4)^2 = 1$.

Rješenje: Zapišimo najprije jednadžbu zadanoga pravca u eksplicitnom, a jednadžbu zadane kružnice u kanonskom obliku:

$$p\ldots\ y = -ax + 4,$$
$$k\ldots\ (x-1)^2 + (y-4)^2 = \frac{1}{4}.$$

Tako očitavamo: $k_p = -a$, $l = 4$, $p = 1$, $q = 4$, $r^2 = \frac{1}{4}$. Te vrijednosti uvrstimo u uvjet tangencijalnosti pravca i kružnice

$$r^2(1 + k^2) = (q - kp - l)^2$$

pa dobivamo:

$$\frac{1}{4}(1 + a^2) = (4 + a - 4)^2,$$

odnosno

$$1 + a^2 = 4a^2,$$

odnosno

$$a^2 = \frac{1}{3}.$$

Odatle slijedi $a_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ i $a_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, i to su tražene vrijednosti realnoga parametra a.

465. *Kompleksan broj* $z_1 = 2 + 2i$ *je jedno rješenje jednadžbe* $x^3 + ax^2 + bx - 16 = 0$. *Odredite vrijednost* $a + b$.

Rješenje: Primijenit ćemo Vièteove formule i činjenicu da su dva kompleksksna rješenja bilo koje jednadžbe s realnim koeficijentima uvijek međusobno konjugirano-kompleksni brojevi. Pretpostavka je da je $z_1 = 2 + 2i$ rješenje zadane jednadžbe. No, tada je i $z_2 = 2 - 2i$ također rješenje zadane jednadžbe (prema navedenoj činjenici). Označimo li s z_3 treće rješenje zadane jednadžbe (ona je 3. stupnja pa mora imati 3 rješenja), prema Vièteovim formulama vrijedi

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -16.$$

Ovamo uvrstimo $z_1 = 2 + 2i$ i $z_2 = 2 - 2i$, pa dobivamo:

$$(2 + 2i) \cdot (2 - 2i) \cdot z_3 = -16,$$

odnosno

$$8z_3 = -16,$$

pa je $z_3 = -2$. Ponovnom primjenom Vièteovih formula dobivamo:

$a = -(z_1 + z_2 + z_3) = -(2 + 2i + 2 - 2i - 2) = 2,$
$b = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = (2 - 2i)(2 + 2i) + (2 + 2i)(-2) + (2 - 2i)(-2) = 8 - 4 - 4i - 4 + 4i = 0.$

Stoga je $a + b = 2 + 0 = 2$.

466. *U kakvom su odnosu nejednakosti $x \le 4$ i $x^2 - 15x + 54 > 0$?*

Rješenje: Mi trebamo provjeriti slijedi li iz prve nejednakosti druga, iz druge prva, i jedno i drugo ili ništa od navedenoga. U tu svrhu riješimo kvadratnu nejednadžbu $x^2 - 15x + 54 > 0$. Postupkom opisanim u rješenju zadatka 455. dobivamo da je $x \in \langle -\infty, 6\rangle \cup \langle 9, +\infty\rangle$, što možemo zapisati kao ($x < 6$ ili $x > 9$). Očito je svako rješenje prve nejednadžbe ujedno i rješenje druge, odnosno iz prve nejednakosti slijedi druga. Obrat ne vrijedi jer npr. svaki realan broj $x > 9$ zadovoljava drugu nejednakost, ali ne i prvu. Zaključimo:

$$(x \le 4) \Rightarrow (x^2 - 15x + 54 > 0)$$

467. *Odredite skup svih realnih rješenja jednadžbe*

$$|x^2 - 9| + |x^2 - 4| = 5.$$

Rješenje: Kritične točke su rješenja jednadžbi $x^2 - 9 = 0$ i $x^2 - 4 = 0$. Rješenja tih jednadžbi su $x_1 = -3$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$ i $x_4 = 2$ pa zadanu jednadžbu rješavamo na ukupno 5 intervala:

1.) $-\infty < x \le -3$

Na ovome je intervalu $|x^2 - 9| = x^2 - 9$ i $|x^2 - 4| = x^2 - 4$ pa sređivanjem dobivamo jednadžbu

$$x^2 = 9.$$

Njezina su rješenja $x_1 = -3$ i $x_2 = 3$. No, nejednakost $-\infty < x \le -3$ zadovoljava samo $x_1 = -3$, pa u ovom slučaju polazna jednadžba ima samo jedno rješenje: $x = -3$.

2.) $-3 \le x \le -2$

Na ovome je intervalu $|x^2 - 9| = -(x^2 - 9) = 9 - x^2$ i $|x^2 - 4| = x^2 - 4$ pa sređivanjem dobivamo

$$5 = 5$$

što je valjana jednakost. Stoga su u ovom slučaju rješenja svi realni brojevi između -3 i -2, dakle, $x \in [-3, -2]$.

3.) $-2 \le x \le 2$

Na ovome je intervalu $|x^2 - 9| = -(x^2 - 9) = 9 - x^2$ i $|x^2 - 4| = -(x^2 - 4) = 4 - x^2$ pa sređivanjem dobivamo

$$x^2 = 4$$

Rješenja te jednadžbe su $x_1 = -2$ i $x_2 = 2$. Oba ta rješenja zadovoljavaju nejednakost $-2 \le x \le 2$ pa u ovom slučaju jednadžba ima dva rješenja: $x_1 = -2$ i $x_2 = 2$.

4.) $2 \le x \le 3$

Na ovome je intervalu $|x^2 - 9| = -(x^2 - 9) = 9 - x^2$ i $|x^2 - 4| = x^2 - 4$ pa sređivanjem dobivamo

$$5 = 5$$

što je valjana jednakost. Stoga su u ovom slučaju rješenja polazne jednadžbe svi realni brojevi između 2 i 3, dakle: $x \in [2, 3]$.

5.) $3 \le x < +\infty$

Na ovome je intervalu $|x^2 - 9| = x^2 - 9$ i $|x^2 - 4| = x^2 - 4$ pa sređivanjem dobivamo

$$x^2 = 9.$$

Rješenja ove jednadžbe su $x_1 = -3$ i $x_2 = 3$. No, nejednakost $3 \le x < +\infty$ zadovoljava samo rješenje $x_2 = 3$, pa u ovom slučaju jednadžba ima samo jedno rješenje: $x = 3$.

Skup svih rješenja polazne jednadžbe je unija skupova $\{-3\}$, $[-3, -2]$, $\{-2, 2\}$, $[2, 3]$ i $\{3\}$, a to je skup $[-3, -2] \cup [2, 3]$ (jer je $\{-3\} \subset [-3, -2]$ i $\{3\} \subset [2, 3]$).

468. *Riješite sustav jednadžbi*:

$$x^{2y^2+1} = 5$$
$$x^{y^2+2} = 25$$

Rješenje: Kvadrirajmo drugu jednadžbu ovoga sustava:

$$(x^{y^2+2})^2 = (25)^2$$
$$x^{2y^2+4} = (5^2)^2$$
$$x^{2y^2+4} = 5^4$$

pa dobivenu jednadžbu podijelimo s prvom jednadžbom sustava:

$$\frac{x^{2y^2+4}}{x^{2y^2+1}} = \frac{5^4}{5}$$
$$x^{(2y^2+4)-(2y^2+1)} = 5^3$$
$$x^{2y^2+4-2y^2-1} = 5^3$$
$$x^3 = 5^3$$
$$x = 5$$

Uvrštavanjem $x = 5$ u prvu jednadžbu sustava dobivamo:

$$5^{2y^2+1} = 5$$
$$5^{2y^2+1} = 5^1$$
$$2y^2 + 1 = 1$$
$$y^2 = 0$$
$$y = 0$$

Dakle, rješenje polaznoga sustava jest $x = 5$, $y = 0$, odnosno uređeni par (5, 0).

469. *Postotak vlažnosti pšenice prije sušenja iznosi* 16%. *Ako se nakon sušenja masa od* 3 t *pšenice smanjila za ukupno* 200 kg, *izračunajte postotak vlažnosti pšenice nakon sušenja.*

Rješenje: U 3 tone nesušene pšenice ima ukupno 16% · 3 = 0.48 tona vode. Sušenjem je pšenica izgubila 200 kg = 0.2 tone vode (masa suhe tvari je ostala nepromijenjena), pa je masa vode u pšenici nakon sušenja 0.48 – 0.2 = 0.28 tona, a ukupna masa pšenice 3 – 0.2 = 2.8 tona. Stoga je postotak vlažnosti pšenice nakon sušenja

$$p = \frac{100 \cdot 0.28}{2.8} = 10\,,$$

odnosno 10%.

470. *Pojednostavnite izraz*:

$$(1-\sqrt{2}) \cdot \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}\,.$$

Rješenje: Imamo redom:

$$(1-\sqrt{2}) \cdot \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}-1}} = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2 \cdot \frac{1}{-(1-\sqrt{2})}} = \sqrt{-(1-\sqrt{2})} = \sqrt{\sqrt{2}-1}\,.$$

471. *Riješite nejednadžbu*:

$$\frac{-2x^2+3x-1}{x^2+x+1} > 0.$$

Rješenje: Uočimo odmah da je $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ za svaki realan broj $x \in \mathbf{R}$. Da bi vrijednost lijeve strane zadane nejednadžbe bila strogo pozitivna, mora vrijediti i nejednakost:

$$-2x^2 + 3x - 1 > 0,$$

odnosno nejednakost

$$2x^2 - 3x + 1 < 0.$$

Nultočke pripadne kvadratne funkcije su $x_1 = \frac{1}{2}$ i $x_2 = 1$, pa je rješenje gornje nejednadžbe otvoreni interval $\langle \frac{1}{2}, 1\rangle$. Taj je skup ujedno i skup svih rješenja polazne nejednadžbe.

472. *Izračunajte* $\log_{0.5}8$.

Rješenje: Imamo redom:

$$\log_{0.5} 8 = \log_{\frac{1}{2}}(2^3) = 3\log_{2^{-1}} 2 = 3 \cdot \frac{1}{-1} \cdot \log_2 2 = 3 \cdot \frac{1}{-1} \cdot 1 = -3$$

473. *Odredite područje definicije funkcije*

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+x}.$$

Rješenje: Uvjeti na nepoznanicu x su:

1.) $1 - x^2 \geq 0$ (izraz pod drugim korijenom mora biti nenegativan);
2.) $x^2 + x \neq 0$ (nazivnik razlomka mora biti različit od nule)

Prvi je uvjet kvadratna nejednadžba čije je rješenje $x \in [-1, 1]$. Drugi uvjet možemo zapisati u obliku

$$x \cdot (x + 1) \neq 0,$$

otkuda izravno slijedi $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$ (za $x = -1$ ili $x = 0$ vrijednost nazivnika jednaka je nuli). Traženo područje definicije je presjek skupova $[-1, 1]$ i $\mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$, a to je skup $\langle -1, 0\rangle \cup \langle 0, 1]$.

474. *Koliko je četveroznamenkastih cijelih brojeva u dekadskom brojevnom sustavu zapisano isključivo pomoću parnih znamenaka*?

Rješenje: Parne znamenke u dekadskom brojevnom sustavu su 0, 2, 4, 6 i 8. Na mjesto znamenke tisućica (tj. prve znamenke) možemo izabrati njih četiri: 2, 4, 6 i 8, a na sva ostala mjesta svih 5. Budući da zadatak traži broj *cijelih* brojeva, u obzir valja uzeti i predznak broja kojega možemo izabrati na 2 načina (+ ili –). Prema načelu umnoška, traženi je broj $2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 1\,000$.

475. *Neka su* a, x *i* y *realni brojevi takvi da vrijedi jednakost*:

$$a = x + y = xy = \frac{x}{y}.$$

Izračunajte vrijednost broja a.

Rješenje: Najprije je očito da y ne može biti jednak 0 jer tada razlomak $\frac{x}{y}$ nije definiran. Zato jednakost

$$xy = \frac{x}{y}$$

smijemo pomnožiti s y, pa ćemo dobiti:

$$xy^2 = x,$$

odnosno

$$x \cdot (y^2 - 1) = 0.$$

Ako bi x bio jednak nuli, onda bi umnožak xy također bio jednak nuli, pa uvrštavanjem $x = 0$ i $xy = 0$ u jednakost

$$x + y = xy$$

dobivamo:

$$0 + y = 0,$$

odnosno $y = 0$, a već smo vidjeli da je to nemoguće. Zbog toga mora biti $x \neq 0$, odnosno

$$y^2 - 1 = 0$$

te $y \in \{-1, 1\}$. Za $y = -1$ iz $x + y = xy$ slijedi

$$x - 1 = -x,$$

odnosno $x = \frac{1}{2}$, pa je $a = xy = \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}$, te u ovom slučaju dobivamo:

$$a = -\frac{1}{2},\ x = \frac{1}{2},\ y = -1.$$

Ako je $y = 1$, onda iz $x + y = xy$ slijedi

$$x + 1 = x \cdot 1,$$

odnosno

$$x + 1 = x,$$

odnosno

$$0 = 1,$$

a to je nemoguće. Stoga je jedina vrijednost broja a jednaka $-\frac{1}{2}$.

476. *Riješite jednadžbu*:

$$\log_2(x^2 - 4x + 12) = 3.$$

<u>Rješenje:</u> Uvjet na vrijednost nepoznanice x jest

$$x^2 - 4x + 12 > 0.$$

Uvažavajući taj uvjet antilogaritmiranjem polazne jednadžbe dobivamo:

$$x^2 - 4x + 12 = 2^3,$$

odnosno

$$x^2 - 4x + 12 = 8,$$

odnosno

$$x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Jedino rješenje ove kvadratne jednadžbe jest $x = 2$. Kako $x = 2$ zadovoljava nejednakost $x^2 - 4x + 12 > 0$, taj je broj ujedno i jedino rješenje polazne jednadžbe.

477. *Riješite nejednadžbu*:

$$\log_{0.5}(13x - x^2 - 40) < \log_{0.5}(13x - x^2 - 42).$$

<u>Rješenje:</u> Najprije postavimo uvjete na vrijednost nepoznanice x:

$$13x - x^2 - 40 > 0 \text{ (da bi } \log_{0.5}(13x - x^2 - 40) \text{ bio definiran)}$$
$$13x - x^2 - 42 > 0 \text{ (da bi } \log_{0.5}(13x - x^2 - 42) \text{ bio definiran)}$$

Uočimo odmah da uvjet $13x - x^2 - 42 > 0$ povlači uvjet $13x - x^2 - 40 > 0$ pa je zato dovoljno riješiti drugu nejednadžbu. Zapravo je riječ o kvadratnoj nejednadžbi

$$x^2 - 13x + 42 < 0.$$

Nultočke pripadne kvadratne funkcije su $x_1 = 6$ i $x_2 = 7$, pa je skup svih rješenja te nejednadžbe otvoreni interval $\langle 6, 7\rangle$. Za $x \in \langle 6, 7\rangle$ usporedbom logaritmanada (pazeći na to da se znak nejednakosti mijenja jer je baza logaritma broj strogo manji od 1) dobivamo:

$$13x - x^2 - 40 > 13x - x^2 - 42,$$

odnosno

$$-40 > -42,$$

što je valjana nejednakost. Zbog toga je skup svih rješenja polazne nejednadžbe otvoreni interval $\langle 6, 7\rangle$.

478. *Odredite sva rješenja nejednadžbe*

$$\sin^2 x - 4 \sin x + 3 \le 0$$

na segmentu $[0, 2\pi]$.

<u>Rješenje:</u> Stavimo li $t = \sin x$, dobit ćemo kvadratnu nejednadžbu

$$t^2 - 4t + 3 \le 0$$

čiji je skup svih rješenja $[1, 3]$. To znači da mora vrijediti nejednakost

$$1 \le t \le 3,$$

odnosno vraćanjem zamijenjenoga izraza

$$1 \le \sin x \le 3.$$

Međutim, za svaki $x \in \mathbf{R}$ je valjana nejednakost

$$\sin x \le 1,$$

što zajedno s nejednakosti $1 \le \sin x \le 3$ daje

$$\sin x = 1.$$

Jedino rješenje ove trigonometrijske jednadžbe na segmentu $[0, 2\pi]$ jest $x = \frac{\pi}{2}$. Stoga je skup svih rješenja polazne nejednadžbe na segmentu $[0, 2\pi]$ jednak $\{\frac{\pi}{2}\}$.

479. *Riješite jednadžbu*:

$$2^{2x} + 42 = 13 \cdot 2^x.$$

Rješenje: Stavimo $t = 2^x$ pa dobivamo jednadžbu:

$$t^2 + 42 = 13t,$$

odnosno

$$t^2 - 13t + 42 = 0.$$

Njezina su rješenja $t_1 = 6$ i $t_2 = 7$. Sada iz $t_1 = 6$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo eksponencijalnu jednadžbu

$$2^x = 6$$

čije je rješenje

$$x = \log_2 6 = \frac{\log 6}{\log 2} = 2.5849625007211561814537389439478 2$$

Slično, iz $t_2 = 7$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo eksponencijalnu jednadžbu

$$2^x = 7$$

čije je rješenje

$$x = \log_2 7 = \frac{\log 7}{\log 2} = 2.8073549220576041074419693172318 3$$

Stoga su sva rješenja polazne jednadžbe $x_1 \approx 2.585$ i $x_2 \approx 2.807$.

480. *U kakvom su odnosu uvjeti* $x^2 \geq 13x - 42$ *i* $x \geq 8$?

Rješenje: Prvi je uvjet zapravo kvadratna nejednadžba

$$x^2 - 13x + 42 \geq 0.$$

Njezino je rješenje $x \in \mathbf{R} \setminus \langle 6, 7\rangle$, što znači da vrijedi ili nejednakost $x \leq 6$ ili nejednakost $x \geq 7$. Kako nejednakost $x \geq 8$ očito povlači nejednakost $x \geq 7$ (ako je neki broj veći ili jednak 8, onda je sigurno veći ili jednak 7), zaključujemo da iz $x \geq 8$ slijedi $x^2 - 13x + 42 \geq 0$. Stoga druga nejednakost povlači prvu, tj. nejednakost $x \geq 8$ je dovoljan uvjet za nejednakost $x^2 - 13x + 42 \geq 0$:

$$(x \geq 8) \Rightarrow (x^2 - 13x + 42 \geq 0).$$

481. *Središte kružnice je u točki* $S(-1, 3)$. *Ako kružnica dodiruje os* Oy, *odredite njezinu jednadžbu.*

Rješenje: To što kružnica dodiruje os y znači da je njezin polumjer jednak apsolutnoj vrijednosti apscise njezina središta, tj.

$$r = |p|,$$

gdje je $S(p, q)$ središte kružnice. U ovome je slučaju $p = -1$ pa je

$$r = |-1| = 1.$$

Stoga tražena jednadžba kružnice glasi:

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 1.$$

482. *Odredite središte i polumjer kružnice k…* $x^2 - 4x + 4y + y^2 = 0$.

Rješenje: Transformirajmo zadanu jednadžbu kružnice iz razvijenoga u kanonski oblik:

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 4y) = 0$$
$$(x - 2)^2 - 2^2 + (y + 2)^2 - 2^2 = 0$$
$$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 8.$$

Odatle slijedi da je središte kružnice $S(2, -2)$, a njezin polumjer $r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

483. *Odredite ukupan broj različitih realnih rješenja jednadžbe*

$$|\sqrt{x^2 - 2x + 1} - 3| = 1.$$

Rješenje: Uočimo najprije da je

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2,$$

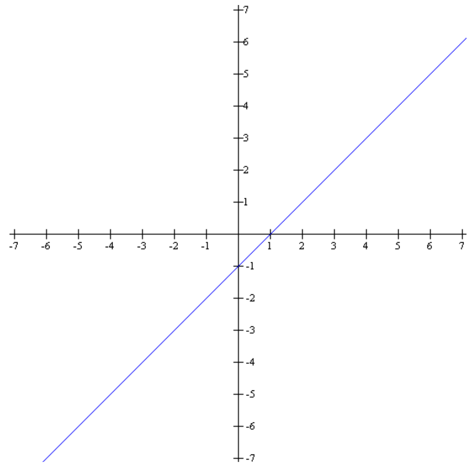
što znači da je

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x - 1|.$$

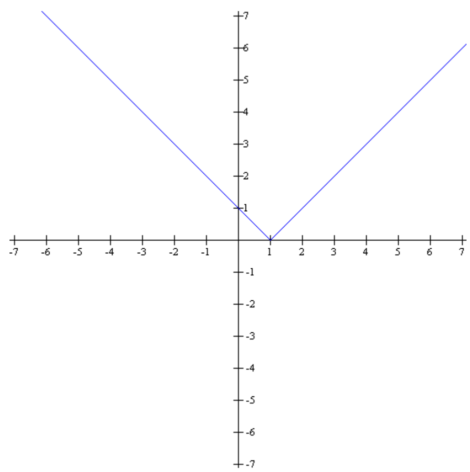
Tako polaznu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$||x - 1| - 3| = 1.$$

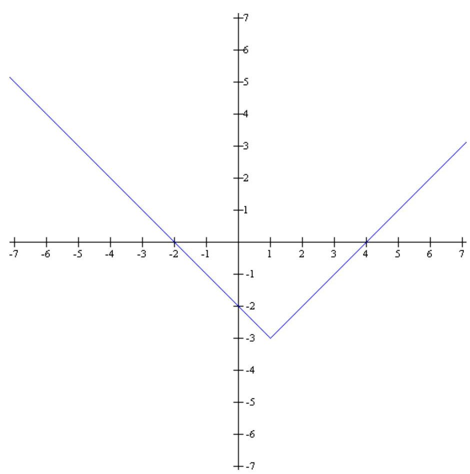
Tu jednadžbu najlakše je riješiti grafički, i to na sljedeći način: Najprije nacrtamo pravac $y = x - 1$.



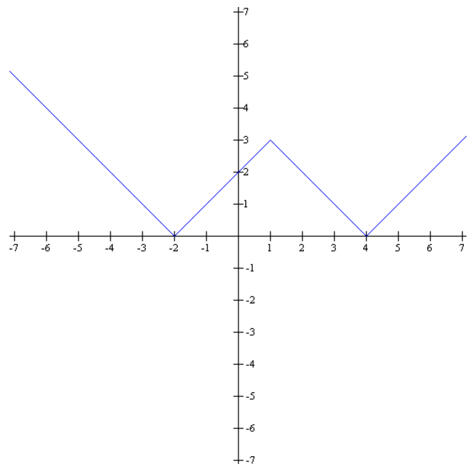
Onaj dio toga pravca koji je ispod osi x zrcalimo simetrično s obzirom na os Ox:



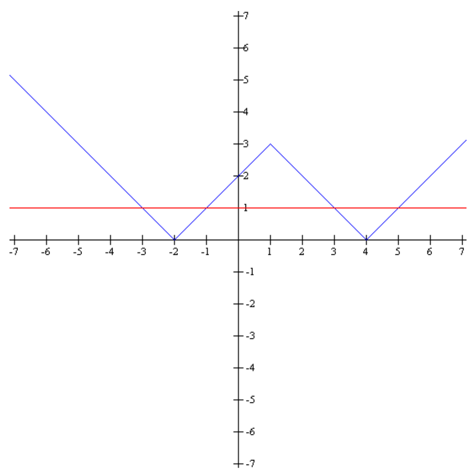
Tako smo dobili graf funkcije $f_1(x) = |x - 1|$. Taj graf sada translatiramo za 3 jedinice usporedno s osi Oy:



Tako smo dobili graf funkcije $f_2(x) = |x - 1| - 3$. Preostaje onaj dio gornjega grafa koji se nalazi ispod osi Ox zrcaliti s obzirom na os Ox:



Tako smo dobili graf funkcije $f_3(x) = ||x - 1| - 3|$, a to je baš lijeva strana polazne jednadžbe. Broj rješenja polazne jednadžbe odredit ćemo tako da najprije presiječemo gornji graf pravcem $y = 1$:



a potom očitamo broj sjecišta tih dviju krivulja. Taj je broj jednak 4, pa polazna jednadžba ima točno 4 različita realna rješenja (ta rješenja je čak lako i očitati: $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ i $x_4 = 5$).

484. *Ako je* $3 \operatorname{ctg} x = 4$ *i* $0 \le 2x \le \pi$, *izračunajte* $5\sin x + 5\cos x$.

Rješenje: Iz $0 \le 2x \le \pi$ dijeljenjem s 2 slijedi

$$0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$$

Budući da vrijednost njegova kotangensa nije niti 0 niti ∞, taj kut nije jednak niti 0 niti $\frac{\pi}{2}$, pa zaključujemo da je

$$0 < x < \frac{\pi}{2},$$

tj. x je kut iz prvoga kvadranta. Vrijednosti njegova sinusa, odnosno njegova kosinusa su strogo pozitivne, a računamo ih pomoću formula:

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{1+\text{ctg}^2 x}}$$

$$\cos x = \frac{\text{ctg}x}{\sqrt{1+\text{ctg}^2 x}}$$

Ovamo uvrstimo ctg $x = \frac{4}{3}$ pa dobivamo:

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{9}}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$\cos x = \frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}} = \frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}} = \frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{\frac{25}{9}}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{4}{5}$$

Tako je vrijednost izraza $5\sin x + 5\cos x$ jednaka

$$5 \cdot \frac{3}{5} + 5 \cdot \frac{4}{5} = 3 + 4 = 7.$$

485. *Izračunajte vrijednost izraza*:

$$\sqrt{10} \cdot 10^{\log \frac{7}{4\sqrt{10}}}.$$

Rješenje: Budući da je $10^{\log a} = a$, za svaki $a > 0$, vrijednost zadanoga izraza je jednaka:

$$\sqrt{10} \cdot 10^{\log \frac{7}{4\sqrt{10}}} = \sqrt{10} \cdot \frac{7}{4\sqrt{10}} = \frac{7}{4}.$$

486. *Ako je* $f(x+1) = \frac{x+1}{x-1}$, *za koje* $x \in \mathbf{R}$ *vrijedi* $f(x-3) > 3$?

Rješenje: Zapišimo najprije

$$f(x+1) = \frac{x+1}{(x+1)-2}$$

pa stavljanjem $t = x + 1$ dobivamo

$$f(t) = \frac{t}{t-2}.$$

Tako je

$$f(x-3) = \frac{x-3}{(x-3)-2} = \frac{x-3}{x-5}.$$

Zbog toga je zahtjev $f(x - 3) > 3$ ekvivalentan nejednadžbi

$$\frac{x-3}{x-5} > 3,$$

odnosno nejednadžbi

$$\frac{x-3}{x-5} - 3 > 0,$$

a odavde svođenjem na zajednički nazivnik dobivamo nejednadžbu

$$\frac{12-2x}{x-5} > 0.$$

Razlikujemo dva slučaja:

1.) $12 - 2x > 0$
$x - 5 > 0$

Iz prve je nejednadžbe $x < 6$, a iz druge $x > 5$. Stoga je u ovom slučaju rješenje polazne nejednadžbe otvoreni interval $\langle 5, 6\rangle$.

2.) $12 - 2x < 0$
$x - 5 < 0$

Iz prve je nejednadžbe $x > 6$, a iz druge $x < 5$. Taj sustav očito nema rješenja.

Zaključujemo da je traženi skup otvoreni interval $\langle 5, 6\rangle$.

487. *Odredite zbroj svih rješenja jednadžbe*

$$\frac{2\sin^2 x + 1}{\sin x} = 3$$

u intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$.

Rješenje: Pomnožimo zadanu jednadžbu sa $\sin x$, pa sređivanjem dobijemo:

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0.$$

Uvođenjem zamjene $t = \sin x$ dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$2t^2 - 3t + 1 = 0.$$

Njezina su rješenja $t_1 = \frac{1}{2}$ i $t_2 = 1$. Iz $t_1 = \frac{1}{2}$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo trigonometrijsku jednadžbu

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

čija su rješenja u intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ $x_1 = \frac{\pi}{6}$ i $x_2 = \frac{5\pi}{6}$. Nadalje, iz $t_2 = 1$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobivamo trigonometrijsku jednadžbu

$$\sin x = 1$$

čije je jedino rješenje u intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ $x_3 = \frac{\pi}{2}$. Budući da za sva tri dobivena rješenja vrijedi nejednakost $\sin x \neq 0$, to su ujedno i rješenja polazne jednadžbe. Njihov je zbroj jednak $\frac{3\pi}{2}$.

488. *Ako za kvadratnu funkciju* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *vrijedi* $f(-2) = 3$, $f(0) = 1$ *i* $f(2) = -3$, *izračunajte* $f(1)$.

Rješenje: Uvrstimo li u izraz $f(x) = ax^2 + bx + c$ redom $x = -2$, $x = 0$ i $x = 2$, dobit ćemo:

$$\begin{aligned} f(-2) &= a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \\ f(0) &= a \cdot (0)^2 + b \cdot (0) + c \\ f(2) &= a \cdot (2)^2 + b \cdot (2) + c, \end{aligned}$$

pa uvrštavanjem $f(-2) = 3$, $f(0) = 1$ i $f(2) = -3$ dobivamo sustav:

$$\begin{aligned} 4a - 2b + c &= 3 \\ c &= 1 \\ 4a + 2b + c &= -3 \end{aligned}$$

Iz druge jednadžbe toga sustava je $c = 1$, zbrajanjem prve i treće (uz uvažavanje $c = 1$) dobivamo $a = -\frac{1}{4}$, a oduzimanjem prve i treće dobivamo $b = -\frac{3}{2}$. Stoga je

$$f(1) = a + b + c = -\frac{3}{4}.$$

489. *Zadane su funkcije* $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = x^3$ *i* $h(x) = \sqrt{x}$. *Izračunajte* $(f \circ g \circ h)(3^{-\frac{2}{3}})$.

Rješenje: Imamo redom:

$$\begin{aligned} &h(3^{-\frac{2}{3}}) = \sqrt{3^{-\frac{2}{3}}} = (3^{-\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{1}{3}} \\ &g(h(3^{-\frac{2}{3}})) = g(3^{-\frac{1}{3}}) = (3^{-\frac{1}{3}})^3 = 3^{-1} \\ &f(g(h(3^{-\frac{2}{3}}))) = f(3^{-1}) = 3 \cdot 3^{-1} - 1 = 3^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Dakle, tražena je vrijednost jednaka 0.

490. *Pojednostavnite izraz*:

$$\frac{(a+3)^6 - (a+3)^4}{(a+2)^4 - (a+2)^2} \cdot \frac{(a+1)^3 - (a+1)}{(a+3)^5 - (a+3)^3}.$$

Rješenje: Imamo redom:

$$\frac{(a+3)^6-(a+3)^4}{(a+2)^4-(a+2)^2}\cdot\frac{(a+1)^3-(a+1)}{(a+3)^5-(a+3)^3}=\frac{(a+3)^4\cdot\left[(a+3)^2-1\right]}{(a+2)^2\cdot\left[(a+2)^2-1\right]}\cdot\frac{(a+1)\cdot\left[(a+1)^2-1\right]}{(a+3)^3\cdot\left[(a+3)^2-1\right]}=\frac{(a+3)\cdot(a+1)\cdot\left[(a+1)^2-1\right]}{(a+2)^2\cdot\left[(a+2)^2-1\right]}=$$

$$=\frac{(a+3)\cdot(a+1)\cdot\left[(a+1-1)(a+1+1)\right]}{(a+2)^2\cdot\left[(a+2-1)(a+2+1)\right]}=\frac{(a+3)\cdot(a+1)\cdot a\cdot(a+2)}{(a+2)^2\cdot(a+1)(a+3)}=\frac{a}{a+2}$$

491. *Pravac* t_1 *je tangenta lijeve grane hiperbole* $x^2 - y^2 = 1$, *a pravac* t_2 *tangenta njezine desne grane. Kolika je međusobna udaljenost tih pravaca ako oba sijeku os Ox pod kutom od* $60°$?

Rješenje: To što oba pravca sijeku os x pod kutom od 60° znači da su usporedni i da im je koeficijent smjera jednak

$$k = \text{tg } 60° = \sqrt{3}\,.$$

Stoga jednadžbe tih tangenata imaju oblik

$$t_1 \ldots\ y = \sqrt{3}\cdot x + l_1,$$
$$t_1 \ldots\ y = \sqrt{3}\cdot x + l_2,$$

gdje su l_1 i l_2 odgovarajući odsječci na osi Oy. Budući da je riječ o tangentama, mora vrijediti uvjet tangencijalnosti za hiperbolu:

$$a^2k^2 - b^2 = l^2.$$

Uvrštavanjem $a^2 = b^2 = 1$ i $k^2 = 3$ dobivamo kvadratnu jednadžbu za l:

$$l^2 = 3 - 1,$$

odnosno

$$l^2 = 2,$$

a odavde je $l_1 = -\sqrt{2}$ i $l_2 = \sqrt{2}$. Prema tome je

$$t_1 \ldots\ \sqrt{3}\cdot x - y - \sqrt{2} = 0$$
$$t_2 \ldots\ \sqrt{3}\cdot x - y + \sqrt{2} = 0$$

Međusobna udaljenost tih pravaca jednaka je

$$d=\frac{|-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{|-2\sqrt{2}\,|}{\sqrt{3+1}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\,.$$

492. *Majka je tri puta starija od svojega sina, četiri puta od svoje kćerke, a od svojega je supruga mlađa* 3 *godine. Ako njezina djeca zajedno imaju* 35 *godina, izračunajte zbroj godina njezina supruga i njezina sina.*

Rješenje: Neka je m broj majčinih godina. Tada je $\frac{1}{3}m$ broj sinovljevih godina, a $\frac{1}{4}m$ broj kćerkinih godina. Budući da sin i kćerka zajedno imaju 35 godina, dobivamo jednadžbu:

$$\frac{1}{3}m + \frac{1}{4}m = 35$$

čije je rješenje $m = 60$. Dakle, majka ima 60 godina, njezin sin $\frac{1}{3} \cdot 60 = 20$ godina, a suprug $m + 3 = 63$ godine. Stoga je zbroj godina njezina supruga i njezina sina jednak $63 + 20 = 83$.

493. *Izračunajte modul kompleksnoga broja*

$$z = \frac{3-4i}{17-11i} \cdot \frac{17+11i}{2-i}.$$

Rješenje: Imamo redom:

$$|z| = \left|\frac{3-4i}{17-11i} \cdot \frac{17+11i}{2-i}\right| = \frac{|3-4i|}{|17-11i|} \cdot \frac{|17+11i|}{|2-i|} = \frac{\sqrt{3^2+(-4)^2}}{\sqrt{17^2+(-11)^2}} \cdot \frac{\sqrt{17^2+11^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{17^2+11^2}} \cdot \frac{\sqrt{17^2+11^2}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

494. *Izračunajte zbroj svih rješenja jednadžbe*

$$\frac{x}{1+\frac{x}{1+\frac{x}{1-x}}} = 1.$$

Rješenje: Transformirajmo najprije lijevu stranu polazne jednadžbe na sljedeći način:

$$\frac{x}{1+\frac{x}{1+\frac{x}{1-x}}} = \frac{x}{1+\frac{x}{\frac{1-x+x}{1-x}}} = \frac{x}{1+\frac{x}{\frac{1}{1-x}}} = \frac{x}{1+x(1-x)} = \frac{x}{1+x-x^2}$$

Tako sada iz jednadžbe

$$\frac{x}{1+x-x^2} = 1$$

dobivamo jednadžbu

$$x^2 - 1 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$. No, $x_2 = 1$ nije rješenje polazne jednadžbe jer razlomak $\frac{x}{1-x}$ nije definiran za $x = 1$. Prema tome, jedino rješenje polazne jednadžbe jest $x = -1$, što znači da je zbroj svih njezinih rješenja također jednak -1.

495. *Odredite vrijednost realnoga parametra* $a \in \mathbf{R}$ *tako da polinom* $p(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 + ax - 2$ *bude djeljiv polinomom* $q(x) = x^2 - 2x + 1$.

Rješenje: Podijelimo zadane polinome prema pravilu za dijeljenje polinoma:

$$
\begin{array}{l}
(x^4 + x^3 - 7x^2 + ax - 2) : (x^2 - 2x + 1) = x^2 + 3x - 2 \\
\underline{x^4 - 2x^3 + x^2} \\
\quad 3x^3 - 8x^2 + ax \\
\quad \underline{3x^3 - 6x^2 + 3x} \\
\qquad -2x^2 + (a-3)x - 2 \\
\qquad \underline{-2x^2 + \quad\; 4x - 2} \\
\qquad\quad (a-7)x
\end{array}
$$

Budući da ostatak $(a - 7)x$ treba biti jednak nuli za svaku vrijednost realnoga broja x, mora vrijediti jednakost:

$$a - 7 = 0.$$

Odatle je $a = 7$, i to je tražena vrijednost realnoga parametra a.

496. *Zadane su funkcije* $f(x) = x^3$ *i* $g(x) = x^5$. *Odredite* $f^{-1}(x \cdot g^{-1}(x))$.

Rješenje: Inverzna funkcija od $h(x) = x^n$ jest $h^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, i to za svaki $n \in \mathbf{N}$. Posebno, za $n = 3$ je inverzna funkcija od $f(x) = x^3$ jednaka $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, a za $n = 5$ je inverzna funkcija od $g(x) = x^5$ jednaka $g^{-1}(x) = \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$. Tako jednostavno imamo:

$$f^{-1}(x \cdot g^{-1}(x)) = \left(x \cdot x^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(x^{1+\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{x^2}\ .$$

497. *Odredite skup svih rješenja nejednadžbe*

$$6^{2x+3} < 2^{x+7} \cdot 3^{3x-1}.$$

Rješenje: Potenciju na lijevoj strani nejednadžbe napišimo ovako:

$$6^{2x+3} = (2 \cdot 3)^{2x+3} = 2^{2x+3} \cdot 3^{2x+3}.$$

Podijelimo sada cijelu nejednadžbu s tim izrazom:

$$\frac{2^{x+7}}{2^{2x+3}} \cdot \frac{3^{3x-1}}{3^{2x+3}} > 1,$$

$$\frac{3^{x-4}}{2^{x-4}} > 1$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x-4} > \left(\frac{3}{2}\right)^{0}$$

pa usporedbom eksponenata dobivamo nejednadžbu:

$$x - 4 > 0.$$

Rješenje te nejednadžbe, a ujedno i skup svih rješenja polazne nejednadžbe, jest otvoreni interval $\langle 4, +\infty\rangle$.

498. *Katete pravokutnoga trokuta imaju duljine* 11 *i* 17. *Izračunajte duljinu simetrale pravoga kuta toga trokuta.*

Rješenje: Određenosti radi, neka je ABC zadani pravokutan trokut s pravim kutom pri vrhu C, te neka su α i β šiljasti kutovi trokuta redom pri vrhovima A i B. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $|AC| = 11$ i $|BC| = 17$. Povucimo simetralu pravoga kuta i neka ona siječe stranicu AB u točki D. Mi trebamo izračunati duljinu dužine CD. U tu svrhu promotrimo trokute ADC i BCD. U svakom je od njih kut kod vrha C jednak $\frac{1}{2} \cdot 90° = 45°$. Primjenom sinusova poučka na trokut ADC dobivamo:

$$\frac{|CD|}{\sin\alpha} = \frac{|AD|}{\sin 45°},$$

a odatle je

$$|AD| = \frac{|CD|}{\sin\alpha} \cdot \sin 45°.$$

Primjenom sinusova poučka na trokut BCD dobivamo:

$$\frac{|CD|}{\sin\beta} = \frac{|BD|}{\sin 45°},$$

a odatle je

$$|BD| = \frac{|CD|}{\sin\beta} \cdot \sin 45°.$$

Budući da je

$$|AD| + |BD| = |AB| = c,$$

uvrštavanjem dobivenih jednakosti za $|AD|$ i $|BD|$ slijedi:

$$\frac{|CD|}{\sin\alpha} \cdot \sin 45° + \frac{|CD|}{\sin\beta} \cdot \sin 45° = c,$$

a odavde je

$$|CD| = \frac{c \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin 45° \cdot (\sin\alpha + \sin\beta)}.$$

No, u pravokutnom trokutu ABC vrijede relacije

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$
$$\sin\beta = \frac{b}{c}$$

pa uvrštavanjem u formulu za $|CD|$ dobivamo:

$$|CD| = \frac{c \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin 45° \cdot (\sin\alpha + \sin\beta)} = \frac{c \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}}{\sin 45° \cdot (\frac{a}{c} + \frac{b}{c})} = \frac{ab}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (a+b)} = \frac{2ab}{\sqrt{2}(a+b)} = \frac{\sqrt{2}ab}{a+b}.$$

Uvrštavanjem $a = |BC| = 17$ i $b = |AC| = 11$ konačno dobivamo:

$$|CD| = 9.4449262915631705044969925 5097191$$

ili približno

$$|CD| \approx 9.445.$$

Prema tome, tražena duljina simetrale pravoga kuta iznosi 9.445.

499. *Zbroj duljina kateta pravokutnoga trokuta jednak je* 17 cm. *Produljimo li jednu katetu za* 1 cm, *a drugu skratimo za* 2 cm, *površina trokuta se neće promijeniti. Izračunajte tu površinu.*

Rješenje: Označimo duljine kateta toga trokuta s a i b. Budući da je zbroj duljina kateta jednak 17 cm, vrijedi jednakost:

$$a + b = 17$$

Produljivanjem, odnosno skraćivanjem kateta ne mijenja se oblik trokuta, tj. dobiveni trokut je ponovno pravokutan. Njegova je površina jednaka

$$P = \frac{(a+1)(b-2)}{2},$$

dok je površina trokuta prije produljivanja, odnosno skraćivanja kateta

$$P = \frac{ab}{2}.$$

U zadatku je naveden podatak da su te dvije površine jednake, što znači da mora vrijediti jednakost:

$$(a + 1)(b - 2) = ab,$$

odnosno

$$b - 2a = 2.$$

Tako smo dobili sustav od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} a + b &= 17 \\ -2a + b &= 2 \end{aligned}$$

Oduzmemo li te jednadžbe, dobivamo

$$3a = 15,$$

a odatle je $a = 5$ cm. Sada je lako naći $b = 12$ cm, pa je tražena površina jednaka

$$P = \frac{ab}{2} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30\,\text{cm}^2.$$

500. *Duljine osnovica trapeza su* 9 cm *i* 3 cm, *a krakova* 3 cm *i* 5 cm. *Izračunajte veličinu manjega kuta uz dulju osnovicu toga trapeza.*

Rješenje: Radi određenosti, neka je $ABCD$ trapez takav da je $|AB| = 9$ cm, $|BC| = |CD| = 3$ cm i $|DA| = 5$ cm. Traženi kut je kut α pri vrhu A jer krak DA ima manji nagib prema osnovici AB od kraka BC. Povucimo vrhom D usporednicu s krakom BC i neka ta usporednica siječe osnovicu AB u točki E. Četverokut $EBCD$ je usporednik pa vrijedi:

$$|EB| = |CD| = 3 \text{ cm},$$
$$|ED| = |BC| = 3 \text{ cm}.$$

Promotrimo sada trokut AED. Duljine njegovih stranica su:

$|AE| = |AB| - |EB| = 9$ cm $- 3$ cm $= 6$ cm,
$|ED| = 3$ cm,
$|DA| = 5$ cm,

a kut kod vrha A je upravo kut α. Rabeći kosinusov poučak dobivamo:

$$\cos\alpha = \frac{|AE|^2 + |AD|^2 - |ED|^2}{2 \cdot |AE| \cdot |AD|}$$
$$\cos\alpha = \frac{6^2 + 5^2 - 3^2}{2 \cdot 6 \cdot 5}$$
$$\cos\alpha = \frac{13}{15}$$
$$\alpha = 29.926434866614243739993877769 4583°$$

ili približno

$$\alpha = 29°55'35''.$$

501. *S iste strane središta nekoga kruga povučene su dvije usporedne tetive čije su duljine* 18 cm *i* 24 cm. *Ako udaljenost tih tetiva iznosi* 3 cm, *izračunajte opseg toga kruga.*

Rješenje: Radi određenosti, neka je S središte kruga, neka je AB tetiva takva da je $|AB| = 24$ cm, a CD tetiva takva da je $|CD| = 18$ cm. Nadalje, neka je E polovište tetive AB, a F polovište tetive CD. Napokon, označimo s R polumjer toga kruga. Uočimo najprije da su trokutovi SAB i SCD jednakokračni jer je $|SA| = |SB| = |SC| = \quad = |SD| = R$. Budući da su E i F polovišta osnovica tih trokutova, to su trokutovi SAE i SCF pravokutni (jer je spojnica polovišta osnovice i vrha nasuprot osnovice jednakokračnoga trokuta upravo visina na osnovicu). U trokutu SAE je $|SA| = R$ i $|AE| = \frac{1}{2} \cdot |AB| = 12$ cm, a na isti je način u trokutu SCF $|SC| = R$ i $|CF| = \frac{1}{2} \cdot |CD| = 9$ cm. Primjenom Pitagorina poučka na trokut SAE dobivamo:

$$|SA|^2 = |AE|^2 + |SE|^2,$$

odnosno

$$R^2 = 12^2 + |SE|^2,$$

odnosno

$$|SE|^2 = R^2 - 144.$$

Na sličan način primjenom Pitagorina poučka na trokut SCF nalazimo:

$$|SC|^2 = |CF|^2 + |FS|^2,$$

odnosno

$$|FS|^2 = |SC|^2 - |CF|^2,$$

odnosno

$$|FS|^2 = R^2 - 9^2,$$

odnosno

$$|FS|^2 = R^2 - 81.$$

Budući da su AB i CD usporedne tetive, a točke E i F leže na SF okomitom na obje tetive, to je međusobna udaljenost tetiva jednaka udaljenosti točaka E i F. Stoga mora vrijediti:

$$|EF| = 3 \text{ cm}.$$

Tako je

$$|SF| = |SE| + |EF|,$$

tj.

$$|SF| = |SE| + 3.$$

Uvrstimo tu jednakost u jednakost

$$|FS|^2 = R^2 - 81$$

pa dobivamo:

$$(|SE| + 3)^2 = R^2 - 81,$$
$$|SE|^2 + 6|SE| + 9 = R^2 - 81.$$

U posljednju jednakost uvrstimo $|SE|^2 = R^2 - 144$ pa dobijemo:

$$R^2 - 144 + 6|SE| + 9 = R^2 - 81,$$

a odavde je

$$|SE| = 9 \text{ cm}.$$

Sada iz

$$|SE|^2 = R^2 - 144$$

uvrštavanjem $|SE| = 9$ lako nalazimo

$$R^2 = 144 + 81,$$
$$R^2 = 225,$$

te je $R = 15$ cm. Traženi opseg kruga jednak je

$$O = 2R \cdot \pi,$$
$$O = 30\pi \text{ cm}.$$

502. *U krnji stožac čija je izvodnica duga* 10 cm *upisana je kugla polumjera* 3 cm *tako da dodiruje obje osnovke i plašt stošca. Izračunajte obujam toga stošca.*

Rješenje: Neka je R_1 polumjer veće osnovke, R_2 polumjer manje osnovke, v visina, s izvodnica knjega stošca, a r polumjer tome stošcu upisane kugle. Znamo da je $s = 10$ cm i $r = 3$ cm. Promatrajmo poprečni presjek toga stošca i njemu upisane kugle. Poprečni presjek krnjega stošca je jednakokračan trapez, a poprečni presjek upisane kugle je trapezu upisana kružnica. Zbog toga taj jednakokračan trapez možemo shvatiti kao tangencijalni četverokut. Njegove su osnovice $2R_1$ i $2R_2$ (promjeri osnovki), visina $2r$ (promjer upisane kružnice), a krakovi s. Budući da je u svakom tangencijalnom četverokutu zbroj duljina osnovica jednak zbroju duljina krakova, vrijedi:

$$2R_1 + 2R_2 = s + s,$$

pa uvrštavanjem $s = 10$ dobivamo:

$$R_1 + R_2 = 10.$$

Budući da je trapez jednakokračan, vrijedi jednakost:

$$s^2 = \left(\frac{2R_1 - 2R_2}{2}\right)^2 + v^2$$

pa uvrštavanjem $s = 10$, $v = 2r = 6$ dobivamo:

$$10^2 = \left(\frac{2R_1 - 2R_2}{2}\right)^2 + 6^2$$
$$(R_1 - R_2)^2 = 100 - 36$$
$$(R_1 - R_2)^2 = 64$$

te

$$R_1 - R_2 = 8.$$

Tako smo dobili sustav od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$R_1 + R_2 = 10$$
$$R_1 - R_2 = 8$$

Zbrajanjem jednadžbi odmah nalazimo $R_1 = 9$ cm, pa je $R_2 = 1$ cm. Tako je traženi obujam krnjega stošca jednak:

$$V = \frac{\pi v}{3}(R_1^2 + R_1 \cdot R_2 + R_2^2)$$
$$V = \frac{\pi \cdot 6}{3}(9^2 + 9 \cdot 1 + 1^2)$$
$$V = 182\pi \text{ cm}^3$$

503. *Posuda oblika šupljega valjka polumjera R i visine H napunjena je vodom do* 80% *visine. Urone li se u posudu tri jednake metalne kugle polumjera* $\frac{R}{2}$, *posuda će biti do vrha napunjena vodom. Izrazite visinu H kao funkciju varijable R.* (*Debljinu stijenki posude zanemarite.*)

Rješenje: Obujam triju metalnih kugli polumjera $\frac{R}{2}$ jednak je 100% – 80% = 20% obujma cijele posude. Kako je obujam jedne kugle polumjera $\frac{R}{2}$ jednak

$$V_k = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^3 \cdot \pi$$
$$V_k = \frac{1}{6} \cdot R^3 \cdot \pi,$$

a obujam cijele posude

$$V_p = B \cdot H$$
$$V_p = R^2 \cdot \pi \cdot H,$$

uvrštavanjem tih jednakosti u jednakost

$$3 \cdot V_k = 20\% \cdot V_p$$

dobivamo:

$$3 \cdot \frac{1}{6} \cdot R^3 \cdot \pi = \frac{20}{100} \cdot R^2 \cdot \pi \cdot H,$$

a odavde je izravno

$$H = \frac{5}{2} \cdot R,$$

i to je tražena funkcija.

504. *Pojednostavnite izraz*:

$$\sin^2 \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right).$$

Rješenje: Primjenom formule za pretvorbu umnoška trigonometrijskih funkcija u zbroj dobivamo:

$$\sin^2 \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha + \frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha - \frac{\pi}{3} - \alpha\right)\right] =$$
$$\sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos(-2\alpha)\right] = \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \cdot \left[-\frac{1}{2} + \cos(2\alpha)\right] = \sin^2 \alpha - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2\alpha)$$

što je, prema identitetu

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$$

dalje jednako

$$\sin^2\alpha-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot(1-2\sin^2\alpha)=\sin^2\alpha-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\sin^2\alpha=\frac{1}{4}.$$

505. *Odredite zbroj svih rješenja jednadžbe*

$$\log_3[\text{tg}(3x)]=\frac{1}{2}$$

u segmentu $[0, \pi]$.

<u>Rješenje:</u> Najprije postavimo uvjete na vrijednost nepoznanice x:

$\text{tg}(3x) > 0$ (da bi $\log(\text{tg}(3x))$ uopće bio definiran)
$3x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbf{Z}$ (da bi $\text{tg}(3x)$ bio definiran)

Uvažavajući te uvjete, antilogaritmiranje polazne jednadžbe dobivamo:

$$\text{tg}(3x) = 3^{\frac{1}{2}}$$
$$\text{tg}(3x) = \sqrt{3}$$

Odavde je

$$3x=\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi$$
$$x=\frac{\pi}{9}+k\cdot\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbf{Z}$$

Posljednju jednakost možemo zapisati u obliku

$$x=\frac{\pi}{9}(1+3k),\ k\in\mathbf{Z}.$$

Sada trebamo odrediti za koje je sve $k \in \mathbf{Z}$ vrijednost nepoznanice x u intervalu $[0, \pi]$. U tu svrhu, riješimo nejednadžbu:

$$0 \le \frac{\pi}{9}(1+3k) \le \pi.$$

Ona je ekvivalentna nejednadžbi

$$0 \le 1 + 3k \le 9.$$

Cjelobrojna rješenja te nejednadžbe su $k = 0$, $k = 1$ i $k = 2$. Za $k = 0$ vrijednost nepoznanice x je

$$x_0=\frac{\pi}{9}(1+3\cdot 0)=\frac{\pi}{9},$$

za $k = 1$

$$x_1 = \frac{\pi}{9}(1 + 3 \cdot 1) = \frac{4\pi}{9},$$

a za $k = 2$

$$x_2 = \frac{\pi}{9}(1 + 3 \cdot 2) = \frac{7\pi}{9}.$$

Lako se provjeri da x_0, x_1 i x_2 zadovoljavaju uvjete $\text{tg}(3x) > 0$ i $3x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbf{Z}$, pa su to ujedno i rješenja polazne jednadžbe. Njihov je zbroj jednak $\frac{12\pi}{9} = \frac{4\pi}{3}$.

506. *Dvije stranice trokuta imaju duljine* 8 cm *i* 10 cm, *a duljina težišnice na treću stranicu iznosi* 8 cm. *Izračunajte duljinu treće stranice toga trokuta.*

Rješenje: Radi određenosti, neka je ABC zadani trokut. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a = |BC| = 8$ cm i $b = |AC| = 10$ cm. Neka je P polovište stranice $c = AB$, te $t_c = |CP| = 8$ cm. Osnosimetrično zrcalimo zadani trokut s obzirom na stranicu AB i neka je D slika točke C pri tom zrcaljenju. Četverokut $ADBC$ je usporednik. Duljine njegovih stranica su $|AD| = |BC| = 8$ cm i $|DB| = |AC| = 10$ cm, a duljina jedne njegove dijagonale je $|CD| = 2 \cdot |CP| = 16$ cm. Mi tražimo duljinu druge dijagonale AB toga usporednika. U tu ćemo svrhu primijeniti poučak o dijagonalama u usporedniku prema kojemu je poluzbroj kvadrata duljina dijagonala jednak zbroju kvadrata duljina dviju susjednih stranica usporednika. To znači da vrijedi jednakost

$$\frac{1}{2} \cdot (|AB|^2 + |CD|^2) = |AD|^2 + |DB|^2,$$

iz koje slijedi

$$|AB| = \sqrt{2 \cdot (|AD|^2 + |DB|^2) - |CD|^2}.$$

Uvrštavanjem podataka konačno dobivamo

$$|AB| = \sqrt{2 \cdot (8^2 + 10^2) - 16^2}$$
$$|AB| = \sqrt{72}$$
$$|AB| = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

507. *Zadane su točke* $A(5, 3)$ *i* $B(1, 7)$. *Odredite udaljenost ishodišta od simetrale dužine* AB.

Rješenje: Odredimo najprije jednadžbu simetrale dužine AB. To je pravac koji prolazi polovištem P dužine AB okomito na pravac kroz točke A i B, što znači da je njegov koeficijent smjera k_s recipročan i suprotan koeficijentu smjera pravca kroz točke A i B:

$$k_s = -\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$$
$$k_s = -\frac{1 - 5}{7 - 3}$$
$$k_s = 1$$

Polovište dužine AB je točka

$$P = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$
$$P = \left(\frac{5+1}{2}, \frac{3+7}{2} \right)$$
$$P(3, 5)$$

Tako jednadžba pravca s kroz točku P s koeficijentom smjera k_s glasi:

$$y - 5 = 1 \cdot (x - 3),$$

odnosno

$$s \ldots\ x + y - 2 = 0.$$

Udaljenost ishodišta od pravca s jednaka je

$$d = \frac{|0 + 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,.$$

508. *Vrhovi trokuta ABC su točke* $A(3, 4)$, $B(-5, 2)$ *i* $C(-1, -6)$. *Odredite sjecište pravca koji prolazi težištem trokuta ABC i točkom A sa stranicom BC.*

Rješenje: Točkom A i težištem trokuta ABC prolazi težišnica t_a na stranicu $a = BC$. Ona siječe stranicu BC u njezinu polovištu. Stoga je tražena točka polovište stranice BC:

$$P = \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2} \right)$$
$$P = \left(\frac{-5 + (-1)}{2}, \frac{2 + (-6)}{2} \right)$$
$$P(-3, -2)$$

509. *Kružnica prolazi točkom* $A(8, 8)$ *i dira os Ox u točki* $B(4, 0)$. *Odredite udaljenost sjecišta te kružnice s osi Oy.*

Rješenje: Neka je $S(p, q)$ središte te kružnice, a r njezin polumjer. To što kružnica dira os Ox znači da je njezin polumjer jednak apsolutnoj vrijednosti ordinate njezina središta

$$r = |q|,$$

te da je apscisa dirališta kružnice s osi Ox jednaka apscisi središta kružnice (p). Tako odmah zaključujemo da je $p = 4$. Budući da kružnica prolazi točkom A koja leži u prvom kvadrantu, njezino središte ne može biti ispod osi Ox (jer bi u suprotnom morala sjeći os Ox u točno dvije točke), već mora biti iznad osi Ox. To znači da je ordinata središta kružnice strogo pozitivan realan broj:

$$q > 0,$$

pa je onda i

$$r = |q| = q.$$

Tako u kanonsku jednadžbu kružnice

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

uvrstimo $p = 4$ i $r = q$, pa dobijemo:

$$(x - 4) + (y - q)^2 = q^2.$$

Kako točka A leži na kružnici, njezine koordinate moraju zadovoljavati gornju jednadžbu. Stoga i umjesto x i umjesto y uvrstimo 8 pa dobijemo:

$$(8 - 4)^2 + (8 - q)^2 = q^2,$$

odnosno nakon kvadriranja i reduciranja

$$16q = 80,$$

a odavde je $q = 5$. Dakle, središte kružnice je $S(4, 5)$, a polumjer $r = q = 5$, pa je njezina jednadžba

$$(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 25.$$

Sjecišta te kružnice s osi Oy dobijemo ako u gornju jednadžbu uvrstimo $x = 0$:

$$(0 - 4)^2 + (y - 5)^2 = 25,$$

otkuda je

$$(y - 5)^2 = 9,$$

odnosno korjenovanjem

$$|y - 5| = 3.$$

Rješenja ove jednadžbe (s jednom apsolutnom vrijednosti) su $y_1 = -3 + 5 = 2$ i $y_2 = 3 + 5 = 8$. Dakle, koordinate tih sjecišta su $S_1(0, 2)$ i $S_2(0, 8)$. Njihova međusobna udaljenost jednaka je $|y_2 - y_1| = |8 - 2| = |6| = 6$.

510. *Odredite vrijednost realnoga parametra $b \in \mathbf{R}$ tako da pravac $t \ldots\ y = 2x + b$ bude tangenta parabole $y = x^2$.*

Rješenje: Pravac t će biti tangenta zadane parabole ako i samo ako sustav jednadžbi

$$\begin{gathered} y = 2x + b \\ y = x^2 \end{gathered}$$

bude imao točno jedno realno rješenje. Metodom uspoređivanja dobivamo:

$$x^2 = 2x + b,$$

odnosno kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - 2x - b = 0.$$

Ta jednadžba mora imati točno jedno realno rješenje, a nužan i dovoljan uvjet za to jest da njezina diskriminanta bude jednaka nuli:

$$(-2)^2 - 4 \cdot (-b) = 0,$$

tj.

$$4b + 4 = 0.$$

Odatle je $b = -1$.

511. *Žarišta elipse* $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ *su u točkama* $F_1(-1, 0)$ *i* $F_2(1, 0)$. *Duljina poluosi a dvostruko je veća od duljine poluosi b. Ako je T bilo koja točka na toj elipsi, izračunajte opseg trokuta* F_1F_2T.

Rješenje: Odredimo najprije jednadžbu te elipse. Znamo da je

$$a = 2b.$$

Nadalje, linearni ekscentricitet elipse jednak je apsolutnoj vrijednosti apscise bilo kojega žarišta elipse. U ovom je slučaju:

$$e = |1| = 1.$$

S druge strane, e određujemo iz formule

$$e^2 = a^2 - b^2.$$

U tu formulu uvrstimo $a = 2b$ i $e = 1$, pa dobijemo:

$$\begin{gathered} 1 = (2b)^2 - b^2, \\ 1 = 4b^2 - b^2, \\ 1 = 3b^2 \\ b^2 = \frac{1}{3}, \end{gathered}$$

pa je

$$a^2 = 4b^2 = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3},$$

odnosno

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Prema definiciji elipse, zbroj udaljenosti bilo koje točke T na elipsi od njezinih žarišta jednak je $2a$, što znači da vrijedi jednakost:

$$|F_1T| + |F_2T| = 2a = 2 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

Nadalje je

$$|F_1F_2| = |1 - (-1)| = |2| = 2.$$

Prema tome, traženi opseg trokuta F_1F_2T jednak je

$$\begin{gathered} O = |F_1F_2| + |F_1T| + |F_2T|, \\ O = 2 + \frac{4}{3}\sqrt{3}. \end{gathered}$$

512. *Izračunajte zbroj*

$$1 + 5 + 9 + \ldots + 101.$$

Rješenje: Brojevi 1, 5, 9, …, 101 tvore aritmetički niz. Njegov je prvi član jednak $a_1 = 1$, a razlika $d = 4$. Da bismo izračunali traženi zbroj, treba nam podatak o tome koji je član toga niza jednak 101. Stoga u formulu

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

uvrstimo $a_n = 101$, $a_1 = 1$ i $d = 4$, pa dobijemo:

$$101 = 1 + (n - 1) \cdot 4,$$

a odavde je $n = 26$. Napokon, u formulu za računanje zbroja prvih n članova arimetičkoga niza

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

uvrstimo $n = 26$, $a_1 = 1$ i $a_n = 101$, te konačno dobijemo:

$$1 + 5 + 9 + \ldots + 101 = 1326.$$

513. *U nekom je razredu ukupno* 28 *učenika. U sportske je aktivnosti uključeno* 15 *učenika, u pjevački zbor njih* 16, *a njih* 7 *nije uključeno niti u sportske aktivnosti niti u pjevački zbor. Koliko je učenika toga razreda uključeno u obje aktivnosti*?

Rješenje: Od 28 učenika njih 7 nije uključeno niti u jednu od aktivnosti, pa slijedi da je njih 28 – 7 = 21 uključeno u barem jednu aktivnost. Označimo skup svih tih učenika s U. Njega dijelimo na dva skupa: na one koji su uključeni u sportske aktivnosti (skup S) i na one koji su uključeni u pjevački zbor (Z). Stoga u formulu

$$\text{card}(S \cup Z) = \text{card}(S) + \text{card}(Z) - \text{card}(S \cap Z)$$

uvrštavamo $\text{card}(S \cup Z) = \text{card}(U) = 21$, $\text{card}(S) = 15$ i $\text{card}(Z) = 16$, pa dobijemo:

$$\text{card}(S \cap Z) = 15 + 16 - 21 = 10.$$

Dakle, 10 učenika je uključeno u obje aktivnosti.

514. *Pojednostavnite izraz*:

$$\left(\frac{a^{-1}}{b^{-1}} - \frac{b^{-1}}{a^{-1}}\right)^{-1} : \left(\frac{1}{a^{-2}} - \frac{1}{b^{-2}}\right)^{-1}.$$

Rješenje: Imamo redom:

$$\left(\frac{a^{-1}}{b^{-1}} - \frac{b^{-1}}{a^{-1}}\right)^{-1} : \left(\frac{1}{a^{-2}} - \frac{1}{b^{-2}}\right)^{-1} = \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right)^{-1} : \left(a^2 - b^2\right)^{-1} = \left(\frac{b^2 - a^2}{ab}\right)^{-1} \cdot \left(a^2 - b^2\right) = \frac{ab}{b^2 - a^2} \cdot (a^2 - b^2) = -ab.$$

515. *Ako je polinom* $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + ax + b$ *djeljiv polinomom* $q(x) = x^2 - x + 2$, *odredite* $a + b$.

Rješenje: Podijelimo zadane polinome prema pravilu za dijeljenje polinoma:

$$
\begin{array}{l}
(x^4 + x^3 + x^2 + ax + b) : (x^2 - x + 2) = x^2 + 2x + 1 \\
\underline{x^4 - x^3 + 2x^2} \\
\quad 2x^3 - \; x^2 + ax \\
\quad \underline{2x^3 - 2x^2 + 4x} \\
\qquad\quad x^2 + (a-4)x + b \\
\qquad\quad \underline{x^2 - \qquad x + 2} \\
\qquad\qquad (a-3)x + (b-2)
\end{array}
$$

Budući da je $p(x)$ djeljiv s $q(x)$, ostatak pri gornjem dijeljenju mora biti jednak nuli, i to za svaki $x \in \mathbf{R}$. To je moguće ako i samo ako vrijede jednakosti

$$
\begin{aligned}
a - 3 &= 0 \\
b - 2 &= 0
\end{aligned}
$$

Zbrajanjem tih jednakosti dobivamo

$$a + b = 5.$$

516. *Odredite skup svih realnih rješenja nejednadžbe*

$$\frac{2x}{x+3} < 1$$

<u>Rješenje:</u> Transformirajmo zadanu nejednadžbu na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
&\frac{2x}{x+3} < 1 \\
&\frac{2x}{x+3} - 1 < 0 \\
&\frac{2x - (x+3)}{x+3} < 0 \\
&\frac{x-3}{x+3} < 0
\end{aligned}
$$

Razlikujemo dva slučaja:

1.) $x - 3 > 0$
$x + 3 < 0$

Iz prve nejednadžbe je $x > 3$, a iz druge $x < -3$. Stoga ovaj sustav nejednadžbi nema rješenja.

2.) $x - 3 < 0$
$x + 3 > 0$

Iz prve nejednadžbe je $x < 3$, a iz druge $x > -3$. Stoga je u ovom slučaju skup rješenja otvoreni interval $\langle -3, 3\rangle$.

Prema tome, skup svih realnih rješenja polazne jednadžbe je otvoreni interval $\langle -3, 3\rangle$.

517. *Točke $A(-3, -3)$, $B(6, 2)$ i $C(0, 8)$ vrhovi su trokuta ABC. Izračunajte duljinu težišnice povučene iz vrha A.*

<u>Rješenje:</u> Težišnica trokuta povučena iz vrha A je spojnica vrha A i polovišta tom vrhu nasuprotne stranice BC. Stoga najprije odredimo koordinate toga polovišta:

$$P_{BC}=\left(\frac{x_B+x_C}{2},\ \frac{y_B+y_C}{2}\right)$$
$$P_{BC}=\left(\frac{6+0}{2},\ \frac{2+8}{2}\right)$$
$$P_{BC}(3,5)$$

Stoga je tražena duljina težišnice iz vrha A jednaka

$$t_a=\sqrt{(x_{P_{BC}}-x_A)^2+(y_{P_{BC}}-y_A)^2}$$
$$t_a=\sqrt{(3-(-3))^2+(5-(-3))^2}$$
$$t_a=\sqrt{6^2+8^2}$$
$$t_a=10$$

518. *Središte kružnice upisane jednakokračnom trokutu dijeli visinu na osnovicu u omjeru* 12 : 5. *Ako je duljina kraka jednaka* 60, *izračunajte duljinu osnovice toga trokuta.*

Rješenje: Neka je a duljina osnovice toga trokuta, v duljina visine na osnovicu, b duljina kraka toga trokuta, a ρ polumjer tome trokutu upisane kružnice. Središte S te kružnice dijeli visinu v na dijelove duge ρ i $v-\rho$, pri čemu je $v-\rho>\rho$. Stoga možemo postaviti razmjer:

$$(v-\rho):\rho=12:5,$$

iz kojega lako dobivamo

$$v=\frac{17}{5}\cdot\rho\,.$$

Nadalje, polumjer ρ (bilo kojem) trokutu upisane kružnice dan je formulom

$$\rho=\frac{P}{s},$$

gdje je P površina, a s poluopseg trokuta. U našem je slučaju

$$P=\frac{1}{2}av\,,$$

Te

$$s=\frac{1}{2}\cdot(a+2b)\,.$$

Stoga je

$$\rho = \frac{P}{s}$$

$$\rho = \frac{\frac{1}{2}av}{\frac{1}{2}\cdot(a+2b)}$$

$$\rho = \frac{av}{a+2b}$$

U posljednju jednakost uvrstimo $v = \frac{17}{5}\cdot\rho$ i $b = 60$ pa dobivamo:

$$\rho = \frac{a\cdot\frac{17}{5}\rho}{a+2\cdot 60} \quad /:\rho$$

$$1 = \frac{\frac{17}{5}a}{a+120}$$

$$1 = \frac{17a}{5a+600}$$

otkuda slijedi

$$17a = 5a + 600,$$

te konačno $a = 50$.

519. *Sjecište dijagonala trapeza ABCD dijeli dijagonalu BD u omjeru* 5 : 3 *računajući od vrha B. Ako je razlika duljina osnovica toga trapeza jednaka* 8 cm, *izračunajte duljinu njegove srednjice.*

Rješenje: Neka je $a = |AB|$ i $c = |CD|$. Uočimo trokutove ABS i CDS. Ti trokuti su slični prema poučku $K - K - K$. Naime, kut kod vrha B u trokutu ABS jednak je kutu kod vrha D prema poučku o kutovima uz presječnicu, a na isti je način kut kod vrha A u trokutu ABS jednak kutu kod vrha C u trokutu CDS. Budući da je zbroj kutova u svakom trokutu konstantan i iznosi 180°, jednaki moraju biti i kutovi kod vrha S u tim trokutima. Tako možemo postaviti razmjer:

$$|AB| : |BS| = |CD| : |SD|,$$

otkuda je

$$|AB| : |CD| = |BS| : |SD|.$$

Prema pretpostavci je $|BS| : |SD| = 5 : 3$, pa slijedi:

$$a : c = 5 : 3,$$

tj.

$$a = \frac{5}{3}\cdot c.$$

Budući da je razlika duljina osnovica jednaka 8 cm, vrijedi jednakost:

$$a - c = 8.$$

Uvrštavanjem $a = \frac{5}{3} \cdot c$ u tu jednakost dobivamo:

$$\frac{5}{3} \cdot c - c = 8,$$

a odavde je $c = 12$ cm. Tako je $a = 20$ cm pa je tražena duljina srednjice

$$s = \frac{a+c}{2}$$
$$s = \frac{20+12}{2}$$
$$s = 16 \text{ cm}$$

520. *Površina kružnoga vijenca iznosi* 12.5π cm^2. *Izračunajte duljinu one tetive većega kruga koja dodiruje manju kružnicu toga vijenca.*

Rješenje: Neka je S središte toga vijenca (zapravo, zajedničko središte većega i manjega kruga), R polumjer većega kruga, r polumjer manjega kruga, AB tetiva većega kruga koja dodiruje manju kružnicu i D njezino diralište. Trokut SAB je jednakokračan (jer je $|SA| = |SB| = R$) i točka D je polovište njegove osnovice AB (jer je pravac AB – kao tangenta manje kružnice – okomit na pravac SD, što znači da je SD visina na osnovicu trokuta SAB, odnosno da je D polovište dužine AB). Iz pravokutnoga trokuta ASD dobivamo:

$$|SD|^2 + |DA|^2 = |SA|^2,$$

a odavde uvrštavanjem $|DA| = \frac{1}{2}|AB|$ slijedi

$$|AB|^2 = 4(|SA|^2 - |SD|^2),$$

tj.

$$|AB|^2 = 4(R^2 - r^2)$$

S druge strane, površina zadanoga kružnoga vijenca jednaka je

$$P = (R^2 - r^2)\pi$$

pa uvrštavanjem $P = 12.5\pi$ dobivamo:

$$R^2 - r^2 = 12.5.$$

Stoga je

$$|AB|^2 = 4(R^2 - r^2) = 4 \cdot 12.5 = 50$$

i konačno

$$|AB| = 5\sqrt{2} \text{ cm}.$$

521. *Izračunajte središnji kut kružnoga isječka čija je površina jednaka* 16% *površine odgovarajućega kruga.*

Rješenje: Neka je r polumjer toga kružnoga isječka, a α njegov središnji kut. Budući da je površina isječka dana formulom

$$P_i = \frac{r^2 \pi \alpha}{360°},$$

a površina kruga formulom

$$P_k = r^2 \pi,$$

uvrštavanjem tih formula u jednakost

$$P_i = 16\% \cdot P_k$$

dobivamo:

$$\frac{r^2 \pi \alpha}{360°} = \frac{16}{100} \cdot r^2 \pi \quad / : r^2 \pi$$
$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{16}{100}$$

pa je $\alpha = 57.6°$.

522. *Dvije kružnice polumjera* $R = 12$ cm *i* $r = 3$ cm *dodiruju se izvana. Izračunajte površinu trokuta kojega omeđuju tri zajedničke tangente tih kružnica.*

Rješenje: Radi određenosti neka je S_1 središte veće kružnice, S_2 središte manje kružnice, t_1 tangenta koja dira veću kružnicu u točki D_1, a manju u točki D_2, t_2 tangenta koja dira veću kružnicu u točki D_3, a manju u točki D_4, a t_3 tangenta koja dodiruje i veću i manju kružnicu u njihovom diralištu D. Nadalje, neka je A sjecište pravaca t_1 i t_3, B sjecište pravaca t_2 i t_3, a C sjecište pravaca t_1 i t_2. (Nacrtajte sliku!) Pravac CS_2 prolazi točkama C, S_2, D i S_1 (to smo dokazali u jednom od ranijih zadataka) i – kao spojnica točaka S_2 i D – okomit je na tangentu t_3, te je simetrala kuta ACB. Iz toga zaključujemo da je simetrala kuta pri vrhu C trokuta ABC ujedno i visina na osnovicu AB, što znači da je ABC jednakokračan trokut i da je D polovište osnovice AB. Površina trokuta ABC jednaka je

$$P = \frac{1}{2} |AB| \cdot |CD|,$$

što zbog $|AD| = \dfrac{1}{2} |AB|$ možemo zapisati u obliku

$$P = |AD| \cdot |CD|.$$

Odredimo sada duljine dužina $|AD|$ i $|CD|$. Iz sličnosti pravokutnih trokutova CD_2S_2 i CD_1S_1 (slični su prema poučku $K - K - K$ jer su oba pravokutna i imaju zajednički kut kod vrha C) slijedi razmjer:

$$|D_2S_2| : |CS_2| = |D_1S_1| : |CS_1|.$$

Kako je $|D_2S_2| = r = 3$ cm, $|D_1S_1| = R = 12$ cm i

$$|CS_1| = |CS_2| + |S_2D| + |DS_1| = |CS_2| + r + R = |CS_2| + 3 + 12 = |CS_2| + 15,$$

uvrštavanjem dobivamo:

$$3 : |CS_2| = 12 : (|CS_2| + 15),$$

a odavde je $|CS_2| = 5$ cm. Tako je

$$|CD| = |CS_2| + |S_2D| = 5 + 3 = 8 \text{ cm},$$

te prema Pitagorinu poučku

$$|CD_2|^2 = |CS_2|^2 - |S_2D_2|^2 = 5^2 - 3^2 = 16,$$

odnosno $|CD_2| = 4$ cm. Nadalje, iz sličnosti pravokutnih trokutova CD_2S_2 i ADC (slični su prema poučku $K - K - K$ jer su oba pravokutna i imaju zajednički kut kod vrha C) slijedi:

$$|S_2D_2| : |CD_2| = |AD| : |CD|,$$

pa uvrštavanjem $|S_2D_2| = r = 3$ cm, $|CD_2| = 4$ cm i $|CD| = 8$ cm dobivamo:

$$3 : 4 = |AD| : 8,$$

a odavde je $|AD| = 6$ cm. Stoga je tražena površina trokuta ABC jednaka

$$P = |AD| \cdot |CD| = 6 \cdot 8 = 48 \text{ cm}^2.$$

523. *Točke A, B, C, D i E su pet uzastopnih vrhova pravilnoga dvanaesterokuta. Odredite kut između pravaca AB i DE.*

Rješenje: Zadatak ćemo najlakše i najbrže riješiti metodom koordinatizacije. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je taj pravilan dvanaesterokut upisan u jediničnu kružnicu (opći pravilni dvanaesterokut nekom homotetijom uvijek možemo preslikati na onaj upisan u jediničnu kružnicu, pri čemu ta homotetija ne mijenja veličinu traženoga kuta). Stoga su apscisa, odnosno ordinata svakoga vrha toga dvanaesterokuta realni, odnosno imaginarni dio točno jednoga rješenja jednadžbe

$$z^{12} = 1.$$

Prema Moivrèovoj formuli rješenja te jednadžbe su

$$z_k = \cos(k \cdot \frac{\pi}{6}) + i \sin(k \cdot \frac{\pi}{6}),\ k = 0, 1, 2, ..., 11,$$

odnosno koordinate vrhova upisanoga pravilnoga dvanaesterokuta su

$$A_k = (\cos(k \cdot \frac{\pi}{6}),\ \sin(k \cdot \frac{\pi}{6})),\ k = 0, 1, 2, ..., 11.$$

Opet bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su A, B, C, D i E prvih pet vrhova pravilnoga dvanaesterokuta (jer rotacijom – koja ne mijenja veličinu traženoga kuta – taj dvanaesterokut uvijek možemo dovesti u položaj takav da pet njegovih uzastopnih vrhova budu upravo vrhovi A_1, A_2, A_3, A_4 i A_5). Dakle,

$$A = (\cos(0 \cdot \frac{\pi}{6}),\ \sin(0 \cdot \frac{\pi}{6})) = (\cos 0, \sin 0) = (1, 0)$$
$$B = (\cos(1 \cdot \frac{\pi}{6}),\ \sin(1 \cdot \frac{\pi}{6})) = (\cos\frac{\pi}{6},\ \sin\frac{\pi}{6}) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$$

$$C = (\cos(2 \cdot \frac{\pi}{6}),\ \sin(2 \cdot \frac{\pi}{6})) = (\cos\frac{\pi}{3},\ \sin\frac{\pi}{3}) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$
$$D = (\cos(3 \cdot \frac{\pi}{6}),\ \sin(3 \cdot \frac{\pi}{6})) = (\cos\frac{\pi}{2},\ \sin\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$$
$$E = (\cos(4 \cdot \frac{\pi}{6}),\ \sin(4 \cdot \frac{\pi}{6})) = (\cos\frac{2\pi}{3},\ \sin\frac{2\pi}{3}) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

Koeficijentsmjera pravca AB jednak je

$$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$
$$k_{AB} = \frac{\frac{1}{2} - 0}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1} = \frac{1}{\sqrt{3} - 2}$$

a koeficijent smjera pravca DE

$$k_{DE} = \frac{y_E - y_D}{x_E - x_D}$$
$$k_{DE} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-\frac{1}{2} - 0} = -(\sqrt{3} - 2)$$

Očito je

$$k_{AB} \cdot k_{DE} = -1,$$

što znači da su ti pravci okomiti. Stoga je traženi kut jednak 90°.

524. *Zadan je kompleksan broj* $z = (1 + i)(2 - i)(3 + i)(4 - i)$. *Odredite* $\bar{z}$.

Rješenje: Pomnožimo zasebno prva dva i zasebno druga dva faktora u zapisu broja z:

$$z = [(1 + i)(2 - i)] \cdot [(3 + i)(4 - i)]$$
$$z = (2 + 2i - i - i^2)(12 + 4i - 3i - i^2)$$
$$z = (3 + i)(13 + i)$$
$$z = 39 + 13i + 3i + i^2$$
$$z = 38 + 16i$$

Stoga je $\bar{z} = 38 - 16i$.

525. *Odredite sve vrijednosti realnoga parametra* $m \in \mathbf{R}$ *tako da nultočke polinoma* $p(x) = mx^2 + (m - 1)x + 3$ *budu realne i suprotnoga predznaka.*

Rješenje: Nultočke zadanoga polinoma će biti realne ako i samo ako diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$mx^2 + (m - 1)x + 3 = 0$$

bude nenegativna. To znači da mora vrijediti $m \neq 0$ i

$$(m-1)^2 - 4 \cdot m \cdot 3 \geq 0,$$

odnosno

$$m^2 - 14m + 1 \geq 0.$$

Odatle slijedi

$$m \in \left\langle -\infty, 7-4\sqrt{3} \right\rangle \cup \left\langle 7+4\sqrt{3}, +\infty \right\rangle.$$

Nadalje, uvjet da nultočke budu suprotnoga predznaka ekvivalentan je uvjetu da njihov umnožak bude strogo negativan. Prema Vièteovim formulama umnožak tih nultočaka jednak je $\frac{3}{m}$, pa iz uvjeta

$$\frac{3}{m} < 0$$

lagano slijedi $m < 0$, odnosno $m \in \langle -\infty, 0\rangle$. Dakle, mora biti $m \in \left\langle -\infty, 7-4\sqrt{3} \right\rangle \cup \left\langle 7+4\sqrt{3}, +\infty \right\rangle$ i $m \in \langle -\infty, 0\rangle$. Presjek tih dvaju skupova jest otvoreni interval $\langle -\infty, 0\rangle$ i to je traženi skup.

526. *Ako je* $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, *izračunajte vrijednost izraza* $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha}$.

Rješenje: Zadani izraz najprije transfomirajmo ovako:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha \cdot \sin\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha \cdot \sin\alpha}} = \frac{1}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{1}{(1-\cos^2\alpha) - \cos^2\alpha} = \frac{1}{1 - 2\cos^2\alpha}$$

Uvrštavanjem $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ dobivamo:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha} == \frac{1}{1-2\cos^2\alpha} = \frac{1}{1 - 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{1}{1 - 2 \cdot \frac{16}{25}} = -\frac{25}{7}$$

527. *Odredite zbroj svih rješenja jednadžbe*

$$\log(x^2) + \log(x-2)^2 = 2 \cdot \log 8.$$

Rješenje: Budući da su logaritmandi nenegativni realni brojevi, uvjeti na vrijednost nepoznanice x su:

$$x \neq 0$$
$$x - 2 \neq 0$$

Uvažavajući te uvjete i koristeći identitet

$$\log(x^2) = 2 \cdot \log |x|$$

zadanu jednadžbu transformiramo ovako:

$$2 \cdot \log |x| + 2 \cdot \log |x - 2| = 2 \cdot \log 8,$$
$$\log |x| + \log |x - 2| = \log 8,$$
$$\log(|x \cdot (x - 2)|) = \log 8,$$
$$|x^2 - 2x| = 8$$

Sada razlikujemo dva slučaja:

1.) $x^2 - 2x = 8$

Odavde dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

čija su rješenja $x_1 = -2$ i $x_2 = 4$. Oba ta rješenja zadovoljavaju uvjete $x \neq 0$ i $x - 2 \neq 0$, pa su to ujedno i rješenja polazne jednadžbe.

2.) $x^2 - 2x = -8$

Odavde dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - 2x + 8 = 0,$$

a ta jednadžba nema realnih rješenja (tražimo samo realna rješenja jer logaritamska funkcija nije definirana za kompleksne brojeve).

Stoga su sva rješenja polazne jednadžbe $x_1 = -2$ i $x_2 = 4$. Njihov je zbroj jednak 2.

528. *Opseg osnoga presjeka uspravnoga kružnoga valjka iznosi* 20 cm, *a površina toga presjeka* 16 cm^2. *Ako je polumjer osnovke valjka strogo manji od visine valjka*, *izračunajte oplošje toga valjka*.

Rješenje: Neka je r polumjer osnovke valjka, a v visina valjka. Osni presjek valjka je pravokutnik čija je dužina jednaka $2r$, a širina v. Njegov je opseg $2 \cdot (2r + v)$, a površina $2r \cdot v$. Tako dobivamo sustav jednadžbi:

$$2 \cdot (2r + v) = 20$$
$$2r \cdot v = 16$$

Iz prve je jednadžbe

$$v = 10 - 2r$$

pa kad to uvrstimo u drugu jednadžbu dobijemo

$$10r - 2r^2 = 8,$$

odnosno

$$r^2 - 5r + 4 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su $r_1 = 1$ i $r_2 = 4$, pa slijedi:

$$v_1 = 10 - 2r_1 = 8$$

i

$$v_2 = 10 - 2r_2 = 2.$$

Prema pretpostavci, polumjer osnovke valjka je strogo manji od njegove visine, što znači da mora biti $r = r_1 =$ = 1 cm i $v = v_1 = 8$ cm. Stoga je oplošje valjka jednako

$$O = 2r\pi \cdot (r + v)$$
$$O = 2 \cdot 1 \cdot \pi \cdot (1 + 8)$$
$$O = 18\pi \text{ cm.}$$

529. *Ako je* $(f \circ g)(x) = \frac{1-x^2}{x^2}$ *i* $g(x) = 1 - x^2$, *izračunajte* $f(\frac{1}{2})$.

<u>Rješenje:</u> Uočimo da je

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = \frac{1-x^2}{x^2} = \frac{1-x^2}{1-(1-x^2)} = \frac{g(x)}{1-g(x)}$$

pa zamjenom $t = g(x)$ dobivamo:

$$f(t) = \frac{t}{1-t}$$

Preostaje nam uvrstiti $t = \frac{1}{2}$:

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Dakle, $f(\frac{1}{2}) = 1$.

530. *Odredite zbroj svih rješenja jednadžbe*

$$\sin 2x = 2 \sin^2 x$$

koja se nalaze u intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$.

<u>Rješenje:</u> Zbog identiteta

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

polaznu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$2\sin x\cos x - 2\sin^2 x = 0,$$

odnosno u obliku

$$\sin x(\cos x - \sin x) = 0.$$

Moguća su dva slučaja:

1.) $\sin x = 0$

Jedino rješenje ove jednadžbe u intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ jest $x = \pi$.

2.) $\cos x - \sin x = 0$

Jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$\sin x = \cos x.$$

Ako bi bilo $\cos x = 0$, onda bi zbog osnovnoga trigonometrijskoga identiteta $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ slijedilo $|\sin x| = 1$, pa ne bi mogla vrijediti jednakost $\sin x = \cos x$. Zato je $\cos x \neq 0$ pa dijeljenjem gornje jednadžbe s $\cos x$ dobivamo:

$$\operatorname{tg} x = 1.$$

Rješenja ove trigonometrijske jednadžbe u intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ su $x_1 = \frac{\pi}{4}$ i $x_2 = \frac{5\pi}{4}$.

Stoga su sva rješenja polazne jednadžbe u intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$

$$x_1 = \pi,\ x_2 = \frac{\pi}{4} \text{ i } x_3 = \frac{5\pi}{4}.$$

Njihov je zbroj jednak $\frac{5\pi}{2}$.

531. *Odredite jednadžbu pravca kojemu je odsječak na osi Ox jednak* 2, *a koji prolazi točkom* $T(-1, -6)$.

<u>Rješenje:</u> Koristit ćemo segmentni oblik jednadžbe pravca:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

pri čemu je m odsječak na osi Ox, a n odsječak na osi Oy. U tu jednadžbu uvrstimo $m = 2$, $x = -1$ i $y = -6$ (jer koordinate točke T moraju zadovoljavati jednadžbu traženoga pravca):

$$\frac{-1}{2} + \frac{-6}{n} = 1,$$

a odatle lako dobijemo $n = -4$. Stoga je tražena jednadžba pravca

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1,$$

odnosno u implicitnom obliku

$$p \ldots\ 2x - y - 4 = 0.$$

532. *Odredite površinu trokuta kojega zajedno s koordinatnim osima zatvara tangenta na krivulju* $y^2 = 6x$ *povučena u točki* $T(6, y > 0)$ *te krivulje.*

Rješenje: Bilo koji pravac zajedno s koordinatnim osima tvori pravokutan trokut. Katete toga trokuta su duljine odsječaka toga pravca na osima Ox i Oy, a ti se odsječci pojavljuju u segmentnom obliku jednadžbe pravca. Stoga ćemo odrediti segmentni oblik jednadžbe zangente iz zadatka, očitati odsječak na osi Ox (m) i odsječak na osi Oy (n), te pomoću njihovih duljina izračunati traženu površinu.

Odredimo najprije drugu koordinatu točke T. U jednadžbu krivulje uvrstimo $x = 6$ pa dobijemo:

$$y^2 = 36,$$

a odavde zbog $y > 0$ slijedi $y = 6$. Dakle, $T(6, 6)$. Uočimo nadalje da je zadana krivulja parabola oblika $y^2 = 2px$, pa jednadžba tangente u njezinoj točki $A(x_1, y_1)$ glasi:

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Uvrštavanjem $x_1 = y_1 = 6$ i $p = \frac{6}{2} = 3$ u tu jednadžbu dobijemo:

$$6y = 3(x + 6),$$

a odavde je

$$x - 2y + 6 = 0,$$

odnosno

$$\frac{x}{-6} + \frac{y}{3} = 1$$

Sada očitamo: $m = -6$, $n = 3$, pa je tražena površina jednaka:

$$P = \frac{1}{2} | mn |$$
$$P = \frac{1}{2} | (-6) \cdot 3 |$$
$$P = \frac{1}{2} \cdot 18$$
$$P = 9$$

533. *Odredite kut kojega zatvaraju spojnice jednoga žarišta elipse* $x^2 + 4y^2 = 8$ *s krajevima njezine male osi*.

Rješenje: Zadanu jednadžbu elipse dijeljenjem s 8 prevedimo u kanonski oblik:

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

Odatle očitamo: $a^2 = 8$, $b^2 = 2$. Tako je linearni ekscentricitet te elipse

$$e^2 = a^2 - b^2.$$
$$e^2 = 8 - 2$$
$$e^2 = 6$$

pa su koordinate njezinih žarišta $F_1(-\sqrt{6}, 0)$ i $F_2(\sqrt{6}, 0)$, a koordinate vrhova male osi $B_1(0, \sqrt{2})$ i $B_2(0, -\sqrt{2})$. Odaberimo žarište F_2, pa izračunajmo koeficijente smjerova pravaca $p\ldots B_1F_2$ i $q\ldots B_2F_2$:

$$k_p = \frac{\sqrt{2}-0}{0-\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$k_q = \frac{-\sqrt{2}-0}{0-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Označimo li traženi kut s α, onda je njegov tangens jednak

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k_q - k_p}{1 + k_q k_p}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - (-\frac{1}{\sqrt{3}})}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(-\frac{1}{\sqrt{3}})}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{3}}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Iz te trigonometrijske jednadžbe je $\alpha = 60°$ i to je traženi kut.

534. *Pojednostavnite izraz*:

$$\left[\left(\frac{a}{0.01}\right)^{-0.01}\cdot\left(\frac{b}{0.02}\right)^{0.02}\right]^{100}.$$

Rješenje: Imamo redom:

$$\left[\left(\frac{a}{0.01}\right)^{-0.01}\cdot\left(\frac{b}{0.02}\right)^{0.02}\right]^{100} = \left(\frac{a}{0.01}\right)^{-0.01\cdot 100}\cdot\left(\frac{b}{0.02}\right)^{0.02\cdot 100} = \left(\frac{a}{0.01}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{b}{0.02}\right)^{2} = \frac{0.01}{a}\cdot\frac{b^2}{(0.02)^2} =$$
$$= \frac{0.01}{a}\cdot\frac{b^2}{(0.01\cdot 2)^2} = \frac{0.01}{a}\cdot\frac{b^2}{0.01^2\cdot 2^2} = \frac{b^2}{a\cdot 0.01\cdot 4} = \frac{b^2}{a\cdot 0.04} = \frac{b^2}{a\cdot\frac{4}{100}} = \frac{100b^2}{4a} = \frac{25b^2}{a}$$

535. *Kojemu od sljedećih brojeva nije jednak broj* $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ (*pri čemu je* $a > 0$):

$$\frac{a}{\sqrt{2a}+\sqrt{3a}},\ \sqrt{3a}-\sqrt{2a},\ \frac{-a}{\sqrt{3a}-\sqrt{2a}}\ \textit{ili}\ \frac{\sqrt{2a}}{2+\sqrt{6}}\ ?$$

Rješenje: Broj $\frac{a}{\sqrt{2a}+\sqrt{3a}}$ dobiven je proširivanjem razlomka $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ s $\sqrt{a}$, a budući da se proširivanjem razlomka ne mijenja njegova vrijednost, slijedi:

$$\frac{a}{\sqrt{2a}+\sqrt{3a}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

Broj $\sqrt{3a}-\sqrt{2a}$ dobiven je proširivanjem razlomka $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ s $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, pa iz istoga razloga kao i za broj $\frac{a}{\sqrt{2a}+\sqrt{3a}}$ slijedi:

$$\sqrt{3a}-\sqrt{2a}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$$

Broj $\frac{\sqrt{2a}}{2+\sqrt{6}}$ dobiven je proširivanjem razlomka $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ s $\sqrt{2}$ pa opet vrijedi:

$$\frac{\sqrt{2a}}{2+\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

No, proširivanjem razlomka $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ s brojem $-\sqrt{a}$ dobivamo razlomak $\frac{-a}{-\sqrt{2a}-\sqrt{3a}}$, a taj razlomak nije jednak razlomku $\frac{-a}{\sqrt{3a}-\sqrt{2a}}$. Zbog toga vrijedi nejednakost:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\neq\frac{-a}{\sqrt{3a}-\sqrt{2a}}.$$

536. *Četvrtina neke ekipe radnika za trećinu dana obavi pola nekoga posla. Za koliko će dana četiri ekipe radnika obaviti* 24 *puta veći posao*?

Rješenje: Zadatak najlakše i najbrže možemo riješiti rabeći složeno pravilo trojno:

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{4}\text{ ekipe} & \frac{1}{3}\text{ dana} & \frac{1}{2}\text{ posla} \\ 4\text{ ekipe} & x\text{ dana} & 24\text{ posla} \end{array}$$

Budući da su broj dana i broj ekipa obrnuto razmjerne, a broj dana i količina posla razmjerne veličine, strelice postavljamo ovako:

$$\begin{array}{lll} \downarrow\ \frac{1}{4}\text{ ekipe} & \uparrow\ \frac{1}{3}\text{ dana} & \uparrow\ \frac{1}{2}\text{ posla} \\ \ 4\text{ ekipe} & \ x\text{ dana} & \ 24\text{ posla} \end{array}$$

Odavde slijede sljedeći razmjeri:

$$x : \frac{1}{3} = \frac{1}{4} : 4$$
$$= 24 : \frac{1}{2},$$

odnosno

$$x : \frac{1}{3} = (\frac{1}{4} \cdot 24) : (4 \cdot \frac{1}{2}),$$

odnosno

$$x : \frac{1}{3} = 6 : 2$$

Iz ovoga razmjera dobivamo jednadžbu

$$2x = \frac{1}{3} \cdot 6$$

iz koje je $x = 1$. Dakle, 4 ekipe će obaviti 24 puta veći posao za 1 dan.

537. *Pravci* $2x - y - 1 = 0$ *i* $4x + y - 5 = 0$ *sijeku se u točki A, a pravci* $2x + y - 6 = 0$ *i* $x - y = 0$ *sijeku se u točki B. Odredite eksplicitni oblik jednadžbe pravca AB.*

Rješenje: Koordinate točke A dobivamo iz sustava:

$$\begin{aligned} 2x - y - 1 &= 0 \\ 4x + y - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Zbrajanjem jednadžbi odmah se dobije $x = 1$, pa je i $y = 1$. Dakle, $A(1, 1)$. Na isti način koordinate točke B dobivamo iz sustava

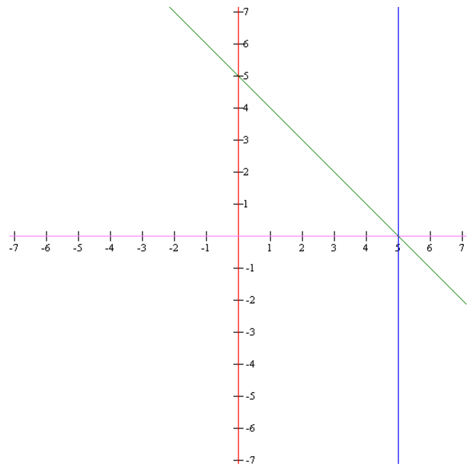
$$\begin{aligned} 2x + y - 6 &= 0 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

pa zbrojanjem jednadžbi slijedi $x = 3$, te je $y = 3$. Dakle, $B(3, 3)$. Lako je uočiti da je kod obiju točaka apscisa jednaka ordinati, što znači da je tražena jednadžba pravca AB

$$y = x.$$

538. *Neka je* $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{x$: *x je broj točaka u kojima se mogu sjeći četiri različita pravca u ravnini*$\}$. *U kakvom su odnosu skupovi A i B?*

Rješenje: Četiri različita pravca u ravnini se ne moraju sjeći (ako su sva četiri pravca usporedna) i tada je broj njihovih sjecišta jednak 0. Nadalje, svi oni mogu prolaziti jednom točkom (takav je npr. slučaj s familijom pravaca p_i… $y = ix$, $i = 1, 2, 3, 4$, čiji svi pravci prolaze ishodištem) i tada je broj njihovih sjecišta jednak 1. Ti pravci mogu određivati četverokut, pa je tada broj njihovih sjecišta jednak 4. Slučaj kada se ti pravci sijeku u tri točke prikazan je na donjoj slici:



(ti pravci su $y = 0$, $x = 0$, $x = 5$ i $y = -x + 5$). No, četiri različita pravca u ravnini se ne mogu sjeći u dvije točke. Naime, svaki je pravac jednoznačno određen s bilo koje dvije svoje zadane točke. Ako se pravci p_1 i p_2 već sijeku u točki A, onda povlačenjem novoga pravca p_3 dobivamo ili još jedno novo sjecište B (ako je p_3 usporedan bilo s p_1, bilo s p_2) ili još dva nova sjecišta (u svim ostalim slučajevima). Tako bi četvrti pravac obavezno morao prolaziti točkama A i B, a njima već prolazi jedan od pravaca p_1, p_2 ili p_3. Stoga tim točkama ne možemo povući niti jedan novi pravac, pa se četiri pravca u ravnini ne mogu sjeći u dvije točke.

Prema tome, skup B sadrži sljedeće elemente: 0, 1, 3, 4, tj. $B = \{0, 1, 3, 4\}$, pa lako vidimo da je B pravi podskup skupa A, tj. $B \subset A$.

539. *Odredite skup svih realnih rješenja nejednadžbe*

$$|2x - 3| - |2 - 3x| < 3x - 2.$$

Rješenje: Iz jednadžbi $2x - 3 = 0$ i $2 - 3x = 0$ slijedi da su kritične točke $x_1 = \frac{3}{2}$ i $x_2 = \frac{2}{3}$. Zbog toga zadanu nejednadžbu razmatramo na sljedećim intervalima:

1.) $-\infty < x \leq \frac{2}{3}$

Na ovome je intervalu $|2x - 3| = -(2x - 3) = 3 - 2x$ i $|2 - 3x| = 2 - 3x$ pa dobivamo nejednadžbu:

$$3 - 2x - (2 - 3x) < 3x - 2,$$

odnosno

$$x > \frac{3}{2}.$$

Kako niti jedan realan broj istovremeno ne zadovoljava nejednakosti $x > \frac{3}{2}$ i $-\infty < x \leq \frac{2}{3}$, u ovom slučaju polazna nejednadžba nema rješenja.

2.) $\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}$

Na ovome je intervalu $|2x - 3| = -(2x - 3) = 3 - 2x$ i $|2 - 3x| = -(2 - 3x) = 3x - 2$ pa dobivamo nejednadžbu:

$$3 - 2x - (3x - 2) < 3x - 2,$$

odnosno

$$x > \frac{7}{8}.$$

Tako iz nejednakosti $x > \frac{7}{8}$ i $\frac{2}{3} \le x \le \frac{3}{2}$ slijedi $x \in \langle \frac{7}{8}, \frac{3}{2}]$ pa je u ovom slučaju skup rješenja polazne nejednadžbe poluotvoreni interval $\langle \frac{7}{8}, \frac{3}{2}]$.

3.) $\frac{3}{2} \le x < +\infty$

Na ovome je intervalu $|2x - 3| = 2x - 3$ i $|2 - 3x| = -(2 - 3x) = 3x - 2$ pa dobivamo nejednadžbu:

$$2x - 3 - (3x - 2) < 3x - 2,$$

odnosno

$$x > \frac{1}{4}.$$

Tako iz nejednakosti $x > \frac{1}{4}$ i $\frac{3}{2} \le x < +\infty$ slijedi $x \in [\frac{3}{2}, +\infty\rangle$ pa je u ovom slučaju skup rješenja polazne nejednadžbe poluzatvoreni interval $[\frac{3}{2}, +\infty\rangle$.

Napokon, skup svih rješenja polazne nejednadžbe je unija skupova $\langle \frac{7}{8}, \frac{3}{2}]$ i $[\frac{3}{2}, +\infty\rangle$, a to je skup $\langle \frac{7}{8}, +\infty\rangle$.

540. *Odredite broj različitih realnih rješenja nejednadžbe*

$$\frac{-x^2 - 1}{|x^3 - 1|} > x^2.$$

Rješenje: Za sve realne brojeve x vrijedi nejednakost

$$x^2 + 1 > 0,$$

otkuda množenjem s (–1) slijedi

$$-x^2 - 1 < 0.$$

Nadalje, za sve realne brojeve x vrijedi nejednakost

$$|x^3 - 1| \ge 0$$

(jer je apsolutna vrijednost realnoga broja uvijek nenegativna). Kako se taj izraz nalazi u nazivniku razlomka na lijevoj strani nejednadžbe, njegova vrijednost ne smije biti jednaka nuli, što znači da svako rješenje polazne nejednadžbe mora zadovoljavati nejednakost

$$|x^3 - 1| > 0.$$

Stoga je brojnik razlomka na lijevoj strani polazne nejednadžbe strogo negativan, a nazivnik strogo pozitivan, pa je vrijednost lijeve strane polazne nejednadžbe je uvijek strogo negativna. Ali, za sve realne brojeve x vrijedi

$$x^2 \geq 0,$$

tj. vrijednost desne strane polazne nejednadžbe je uvijek nenegativna. Zbog toga za sve realne brojeve x (osim za $x = 1$ za koji razlomak na lijevoj strani polazne nejednadžbe nije definiran) vrijedi nejednakost

$$\frac{-x^2-1}{|x^3-1|} < x^2,$$

pa polazna nejednadžba nema niti jedno realno rješenje.

541. *Neka je x broj različitih prirodnih djelitelja broja* 180, *a y broj različitih prirodnih djelitelja broja* 252. *Izračunajte* $x - y$.

Rješenje: Rastavom obaju brojeva na umnožak prostih faktora dobivamo:

$$180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$$
$$252 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^1$$

Tipični djelitelj broja 180 je oblika $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, gdje su $a \in \{0, 1, 2\}$, $b \in \{0, 1, 2\}$ i $c \in \{0, 1\}$. Kako broj a možemo izabrati na 3 načina, broj b također na 3, a broj c na 2, ukupan broj različitih prirodnih djelitelja broja 180 jednak je $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$. Dakle, $x = 18$. Na potpuno isti način se dobije da je i ukupan broj djelitelja broja 252 jednak $y = 18$ (broj 5 se zamijeni brojem 7 i provede potpuno isti postupak). Stoga je $x - y = 18 - 18 = 0$.

542. *Dvije kokoši u tri ljetna dana snesu pet jaja, a u dva zimska dana dva jaja. Koliko će jaja snijeti* 20 *kokoši tijekom* 90 *ljetnih i* 90 *zimskih dana*?

Rješenje: Dva puta ćemo primijeniti složeno pravilo trojno:

2 kokoši	3 ljetna dana	5 jaja
20 kokoši	90 ljetnih dana	x jaja

Kako je broj jaja razmjeran i broju kokoši i broju ljetnih dana, postavljamo shemu:

↑ 2 kokoši	↑ 3 ljetna dana	↑ 5 jaja
20 kokoši	90 ljetnih dana	x jaja

iz koje dobivamo razmjere:

$$x : 5 = 90 : 3$$
$$= 20 : 2$$

Odavde je $x : 5 = (90 \cdot 20) : (3 \cdot 2)$, tj. $x : 5 = 1800 : 6$ pa iz toga razmjera slijedi $x = 1500$. Nadalje, iz sheme

↑ 4 kokoši	↑ 2 zimska dana	↑ 2 jaja
20 kokoši	90 zimskih dana	y jaja

slijede razmjeri:

$$y : 2 = 90 : 2$$
$$= 20 : 4$$

iz kojih se dobiva razmjer $y : 2 = 1800 : 8$, a odavde je $y = 450$. Prema tome, 20 kokoši u 90 ljetnih i 90 zimskih dana snesu ukupno $x + y = 1500 + 450 = 1950$ jaja.

543. *Između 5 muškaraca i 2 žene treba izabrati tročlanu ili četveročlanu ekipu u kojoj će biti barem 2 muškarca. Na koliko se različitih načina to može učiniti?*

Rješenje: Razlikujemo ukupno 5 mogućih slučajeva:

1.) Biramo tročlanu ekipu u kojoj su točno 2 muškarca.

Tada ta dva muškarca možemo izabrati na $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}$ = 10 različitih načina, a preostaloga člana ekipe – jednu ženu – na točno dva različita načina. Stoga u ovom slučaju ekipu možemo izabrati na $10 \cdot 2 = 20$ načina.

2.) Biramo tročlanu ekipu u kojoj su točno 3 muškarca.

Tada ta tri muškarca možemo izabrati na $\binom{5}{3} = \binom{5}{5-3} = \binom{5}{2}$ = 10 različitih načina, a budući da oni tvore cijelu ekipu (tj. ne biramo niti jednu ženu), u ovom slučaju imamo još 10 različitih načina za izbor ekipe.

3.) Biramo četveročlanu ekipu u kojoj su točno 2 muškarca.

Tada ta dva muškarca opet možemo izabrati na $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}$ = 10 različitih načina, a preostale članove ekipe – dvije žene – na jedan jedini način. Stoga u ovom slučaju ekipu možemo izabrati na $10 \cdot 1 = 10$ različitih načina.

4.) Biramo četveročlanu ekipu u kojoj su točno 3 muškarca.

Tada ta tri muškarca možemo izabrati na $\binom{5}{3} = \binom{5}{5-3} = \binom{5}{2}$ = 10 različitih načina, a preostaloga člana ekipe – jednu ženu – na točno dva različita načina. Stoga u ovom slučaju ekipu možemo izabrati na $10 \cdot 2 = 20$ različitih načina.

5.) Biramo četveročlanu ekipu u kojoj su točno 4 muškarca.

Tada ta četiri muškarca možemo izabrati na $\binom{5}{4} = \binom{5}{5-4} = \binom{5}{1}$ = 5 različitih načina, a budući da oni tvore cijelu ekipu (tj. ne biramo niti jednu ženu), imamo još 5 različitih načina za izbor ekipe.

Time smo iscrpili sve moguće slučajeve, pa je – prema načelu umnoška – ukupan broj različitih načina na koje možemo izvršiti željeni izbor ekipe jednak $20 + 10 + 10 + 20 + 5 = 65$.

544. *Odredite $|z|$ ako je z rješenje jednadžbe*

$$z + \frac{1}{z} = 1 .$$

Rješenje: Budući da je očito $z \neq 0$, množenjem jednadžbe sa z dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$z^2 - z + 1 = 0.$$

Budući da vrijedi identitet

$$z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1),$$

zaključujemo dasu sva rješenja polazne jednadžbe zapravo kompleksni treći korijeni iz (–1). U Gaussovoj ravnini oni leže na jediničnoj kružnici $x^2 + y^2 = 1$, što znači da je njihova udaljenost od ishodišta jednaka 1. Stoga prema geometrijskoj interpretacijiapsolutne vrijednosti kompleksnoga broja slijedi da je $|z| = 1$.

545. *Koliko kompleksnih rješenja može imati jednadžba* $ux^4 + v = 0$, *gdje su* $u, v \in \mathbf{Z}\backslash\{0\}$?

Rješenje: Ako su u i v različitoga predznaka, onda dobivamo jednadžbu oblika

$$x^4 = a,$$

gdje je $a > 0$. Ta jednadžba ima dva realna ($\pm\sqrt{a}$) i dva kompleksna rješenja ($\pm\sqrt{a} \cdot i$). Ako su u i v istoga predznaka, onda dobivamo jednadžbu oblika:

$$x^4 = b,$$

gdje je $b < 0$. Prema Moivrèovim formulama, ta jednadžba ima sva četiri kompleksna rješenja:

$$x_k = \sqrt[4]{|b|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right],\ k = 0, 1, 2, 3\ .$$

Stoga je traženi broj jedan od elemenata skupa $\{2, 4\}$.

546. *Odredite broj različitih realnih rješenja jednadžbe*

$$z^2 - \frac{1}{z^2} = 1\ .$$

Rješenje: Očito mora biti $z \neq 0$, pa množenjem polazne jednadžbe sa z^2 dobivamo bikvadratnu jednadžbu:

$$z^4 - z^2 - 1 = 0.$$

Stavimo $t = z^2$ pa dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$t^2 - t - 1 = 0.$$

Njezina su rješenja $t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Odmah uočimo da je $t_1 > 0$, a $t_2 < 0$. Zbog toga ćemo iz jednadžbe $z^2 = t_1$ dobiti ukupno dva različita realna rješenja, a iz jednadžbe $z^2 = t_2$ dva konjugirano–kompleksna rješenja. Prema tome, traženi je broj jednak 2.

547. *Pomoću kojega se od dolje navedenih parova podataka pravokutan trokut ne može konstruirati na jedinstven način* (*oznake u trokutu su standardne*):

$$(a, b),\ (\beta, b),\ (\beta, c)\ \textit{ili}\ (\alpha, \beta)?$$

Rješenje: Pravokutan trokut ne možemo konstruirati na jedinstven način ako su nam zadani kutovi α i β, što slijedi izravno iz poučka $K - K - K$ o sličnosti trokutova (dva trokuta su *slična* ako i samo ako se podudaraju u svim trima kutovima, a za jedinstvenost konstrukcije trokutovi bi morali biti sukladni). U svim ostalim slučajevima trokut se može konstruirati na jedinstven način:

1) za zadane a i b, prema Pitagorinu poučku, jednoznačno je određena i treća stranica c, a time i cijeli pravokutan trokut (što znači da ako bi neki drugi trokut također imao stranice a, b i c, on bi, prema poučku $S - S - S$ o skuladnosti trokutova, morao biti sukladan zadanom);
2) za zadane β i b izračunamo $c = \frac{b}{\cos\beta}$ i $a = \frac{b}{\operatorname{tg}\beta}$ (što možemo jer su kosinus i tangens zadanoga kuta uvijek jedinstveni), pa se slučaj svodi na slučaj 1.);
3) za zadane β i c izračunamo $a = c \cdot \cos\beta$ i $b = c \cdot \sin\beta$ (što možemo jer su sinus i kosinus zadanoga kuta uvijek jedinstveni), pa i ovaj slučaj svodimo na slučaj 1.)

548. *Duljina težišnice na hipotenuzu jednakoračnoga pravokutnoga trokuta jednaka je* 10 cm. *Uz standardne oznake u pravokutnom trokutu*, *izračunajte* $\sin\alpha$.

Rješenje: Oba šiljasta kuta jednakokračnoga pravokutnoga trokuta jednaka su 45°. Zbog toga je

$$\sin\alpha = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

549. *Odredite inverz funkcije* $f(x) = \log_6 \frac{2+x}{2-x}$

Rješenje: Imamo redom:

1.) Zamijenimo $f(x)$ s y:

$$y = \log_6 \frac{2+x}{2-x}$$

2.) Zamijenimo x i y:

$$x = \log_6 \frac{2+y}{2-y}$$

3.) Izrazimo y pomoću x:

$$\frac{2+y}{2-y} = 6^x$$
$$2 + y = 6^x \cdot (2 - y)$$
$$y \cdot (1 + 6^x) = 2 \cdot (6^x - 1)$$
$$y = \frac{2 \cdot (6^x - 1)}{6^x + 1}$$

4.) Zamijenimo y s $f^{-1}(x)$:

$$f^{-1}(x) = \frac{2 \cdot (6^x - 1)}{6^x + 1}.$$

550. *Kosinusi kutova pravokutnoga trokuta tvore rastući aritmetički niz. Odredite najmanji kut toga trokuta.*

Rješenje: Neka su α i β šiljasti kutovi toga trokuta, pri čemu bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\alpha \leq \beta$, te neka je $\gamma = 90°$ Budući da je $f(x) = \cos x$ strogo padajuća funkcija na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$, to je najmanji član aritmetičkoga niza kojega tvore kosinusi kutova jednak $\cos 90° = 0$, srednji $\cos \beta$, a najveći $\cos \alpha$. Tako imamo aritmetički niz $0, \cos \beta, \cos \alpha$. Prema definiciji aritmetičkoga niza, srednji je član aritmetička sredina svojih neposrednih susjeda, što znači da mora vrijediti jednakost:

$$\cos \beta = \frac{0 + \cos \alpha}{2},$$

a odavde je

$$\cos \alpha = 2 \cos \beta.$$

Uvrstimo li ovamo

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c}$$

dobit ćemo

$$b = 2a,$$

a odavde je

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2}.$$

No, u pravokutnom je trokutu

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$$

pa dobivamo trigonometrijsku jednadžbu:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}.$$

Njezino je rješenje $\alpha = 26.565051177077989351572193720453 3° \approx 26°33'54''$, i to je veličina traženoga kuta.

551. *Sinusi kutova pravokutnoga trokuta tvore geometrijski niz. Odredite najmanji kut toga trokuta.*

Rješenje: Neka su α i β šiljasti kutovi toga trokuta, pri čemu bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\alpha \leq \beta$, te neka je $\gamma = 90°$ Budući da je $f(x) = \sin x$ strogo rastuća funkcija na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$, to je najveći član geometrijskoga niza kojega tvore sinusi kutova jednak $\sin 90° = 1$, srednji $\sin \beta$, a najmanji $\cos \alpha$. Tako imamo geometrijski niz sin α, sin β, 1 Prema definiciji geometrijskoga niza, srednji je član geometrijska sredina svojih neposrednih susjeda, što znači da mora vrijediti jednakost:

$$\sin \beta = \sqrt{\sin \alpha \cdot 1}\,,$$

a odavde je

$$\sin^2\beta = \sin \alpha.$$

No, u pravokutnom je trokutu

$$\sin^2\beta = (\sin \beta)^2 = (\cos \alpha)^2 = \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

pa uvrštavanjem u jednakost

$$\sin^2\beta = \sin \alpha$$

dobivamo trigonometrijsku jednadžbu

$$\sin^2\alpha + \sin \alpha - 1 = 0.$$

Stavimo li $t = \sin \alpha$, dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$t^2 + t - 1 = 0$$

čija su rješenja $t_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ i $t_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Uočimo odmah da je $t_1 > 0$, a $t_2 < 0$, pa kako sinusi šiljastih kutova moraju biti strogo pozitivni, rješenje t_2 odbacujemo. Sada iz trigonometrijske jednadžbe

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

određujemo veličinu traženoga kuta:

$$\alpha = 38.1727076270122474934683013328502° \approx 38°10'22''.$$

552. *Pojednostavnite izraz*:

$$\left(\frac{2+3a}{2a-4}+\frac{3a-1}{a-1}\right)\cdot\left(\frac{15a-12}{3a^2b}-\frac{3}{ab}\right)\cdot\frac{a\sqrt{b^3}}{9}\,.$$

<u>Rješenje:</u> Imamo redom:

$$\left(\frac{2+3a}{2a-4}+\frac{3a-1}{a-2}\right)\cdot\left(\frac{15a-12}{3a^2b}-\frac{3}{ab}\right)\cdot\frac{a\sqrt{b^3}}{9}=\left(\frac{2+3a}{2(a-2)}+\frac{3a-1}{a-2}\right)\cdot\left(\frac{15a-12}{3a^2b}-\frac{3}{ab}\right)\cdot\frac{ab\sqrt{b}}{9}=$$
$$\left(\frac{2+3a+2\cdot(3a-1)}{2(a-2)}\right)\cdot\left(\frac{15a-12-9a}{3a^2b}\right)\cdot\frac{ab\sqrt{b}}{9}=\left(\frac{2+3a+6a-2}{2(a-2)}\right)\cdot\left(\frac{6a-12}{3a^2b}\right)\cdot\frac{ab\sqrt{b}}{9}=$$
$$\left(\frac{9a}{2(a-2)}\right)\cdot\left(\frac{6(a-2)}{3a^2b}\right)\cdot\frac{ab\sqrt{b}}{9}=\sqrt{b}$$

553. *Izračunajte*:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left[\left(\frac{2^{-1}}{3^{-2}}\right)^{-1} : \left(\frac{2}{3^{-1}}\right)^{-3}\right].$$

Rješenje: Imamo redom:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left[\left(\frac{2^{-1}}{3^{-2}}\right)^{-1} : \left(\frac{2}{3^{-1}}\right)^{-3}\right] = \frac{1}{2^5} \cdot \left[\frac{2^{(-1)\cdot(-1)}}{3^{(-2)\cdot(-1)}} : \frac{2^{-3}}{3^{(-1)\cdot(-3)}}\right] = 2^{-5} \cdot \left[\frac{2^1}{3^2} \cdot \frac{3^{(-1)\cdot(-3)}}{2^{-3}}\right] = 2^{-5} \cdot \left[\frac{2^1}{3^2} \cdot 3^3 \cdot 2^3\right] = 2^{-5+1+3} \cdot$$
$$\cdot 3^{-2+3} = 2^{-1} \cdot 3^1 = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

554. *Odredite* $f(x)$ *ako je* $f\left(\frac{2+x}{4}\right) = 2x$.

Rješenje: Stavimo $t = \frac{2+x}{4}$. Odavde je $x = 4t - 2$ pa uvrštavanjem tih dvaju izraza u

$$f\left(\frac{2+x}{4}\right) = 2x$$

dobijemo:

$$f(t) = 2 \cdot (4t - 2),$$

odnosno

$$f(t) = 8t - 4.$$

Preostaje nam samo "preimenovati" nezavisnu varijablu:

$$f(x) = 8x - 4.$$

555. *Odredite jednadžbu pravca koji prolazi sjecištima krivulja* $y = 2x^2 - 4x + 2$ *i* $y = x^2 + x - 4$.

Rješenje: Najprije riješimo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 4x + 2 \\ y &= x^2 + x - 4 \end{aligned}$$

Metodom usporedbe dobijemo:

$$2x^2 - 4x + 2 = x^2 + x - 4,$$

otkuda je

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1 = 2$ i $x_2 = 3$. Pripadne vrijednosti y određujemo iz bilo koje jednadžbe polaznoga sustava pa je

$$y_1 = 2^2 + 2 - 4 = 2$$
$$y_2 = 3^2 + 3 - 4 = 8$$

Dakle, sjecišta su $S_1(2, 2)$ i $S_2(3, 8)$. Jednadžba pravca kroz te dvije točke jest:

$$y - 2 = \frac{8-2}{3-2}(x-2)$$
$$y - 2 = 6(x-2)$$
$$y = 6x - 10$$

odnosno u implicitnom obliku

$$6x - y - 10 = 0.$$

556. *Odredite strogo pozitivan realan broj* $x \in \mathbf{R}$ *takav da modul kompleksnoga broja* $z = \frac{x + i\sqrt{2}}{1-i}$ *bude jednak* $\sqrt{2}$.

Rješenje: Odredimo najprije modul zadanoga kompleksnoga broja kao funkciju varijable x. Imamo redom:

$$|z| = \left|\frac{x+i\sqrt{2}}{1-i}\right| = \frac{\left|x+i\sqrt{2}\right|}{|1-i|} = \frac{\sqrt{x^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{2}}$$

Izjednačavanjem toga izraza s $\sqrt{2}$ i kvadriranjem dobivamo jednadžbu:

$$\frac{x^2+2}{2} = 2$$

čija su rješenja $x_1 = -\sqrt{2}$ i $x_2 = \sqrt{2}$. Budući da se traži da x bude strogo pozitivan broj, rješenje x_1 se odbacuje, pa preostaje: $x = x_2 = \sqrt{2}$.

557. *Polinom* $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, *ima dvostruku nultočku. Odredite tu nultočku ako je* $p(-1) = p(2)$.

Rješenje: Činjenicu da $p(x)$ ima dvostruku nultočku analitički interpretiramo tako da ustvrdimo da $p(x)$ ima oblik

$$p(x) = \alpha(x - \beta)^2,$$

gdje su α i β realni parametri. Primijetimo odmah da je upravo β tražena dvostruka nultočka polinoma $p(x)$, pa nam je cilj odrediti vrijednost toga parametra. Iskoristimo činjenicu da je da je $p(-1) = p(2)$, pa u gornji izraz umjesto x najprije uvrstimo -1, a potom 2, te dobivene izraze izjednačimo. Dobit ćemo:

$$\alpha(-1 - \beta)^2 = \alpha(2 - \beta)^2.$$

Ako bi bilo $\alpha = 0$, onda bi bilo $p(x) = 0$, što se protivi pretpostavci da je vodeći koeficijent polinoma $p(x)$ različit od nule. Zato je $\alpha \neq 0$, pa dijeljenjem gornje jednadžbe s α i kvadriranjem dobivamo jednadžbu:

$$6\beta = 3,$$

a odavde je $\beta = \frac{1}{2}$. Dakle, tražena nultočka je $x = \frac{1}{2}$.

558. *Riješite nejednadžbu*:

$$\frac{6-2x}{1-2x} > \frac{4x-3}{2x-1}$$

Rješenje: Zadanu nejednadžbu najprije transformirajmo ovako:

$$\frac{-(2x-6)}{-(2x-1)} > \frac{4x-3}{2x-1}$$
$$\frac{2x-6}{2x-1} > \frac{4x-3}{2x-1}$$
$$\frac{2x-6}{2x-1} - \frac{4x-3}{2x-1} > 0$$
$$\frac{2x-6-(4x-3)}{2x-1} > 0$$
$$\frac{-3-2x}{2x-1} > 0$$
$$\frac{2x+3}{2x-1} < 0$$

Tako razlikujemo dva slučaja:
1.) $2x + 3 > 0$
$2x - 1 < 0$

Iz prve nejednadžbe je $x > -\frac{3}{2}$, a iz druge $x < \frac{1}{2}$, Stoga je u ovom slučaju skup rješenja otvoreni interval $\langle -\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \rangle$.

2.) $2x + 3 < 0$
$2x - 1 > 0$

Iz prve nejednadžbe je $x < -\frac{3}{2}$, a iz druge $x > \frac{1}{2}$. Budući da ne postoji realan broj x koji bi istovremeno bio strogo manji od $\frac{3}{2}$ i strogo veći od $\frac{1}{2}$, u ovom slučaju nejednadžba nema rješenja.

Stoga je skup svih rješenja polazne nejednadžbe otvoreni interval $\langle -\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \rangle$.

559. *Koliko rješenja jednadžbe*

$$|4 - |x - 2|| = 2 + |x|$$

pripada skupu $[2, +\infty\rangle$?

Rješenje: Riješimo zadanu jednadžbu na zadanom poluzatvorenom intervalu. Za $x \geq 2$ je $|x - 2| = x - 2$, odnosno $|4 - |x - 2|| = |4 - x + 2| = |6 - x|$, te $|x| = x$. Tako polaznu jednadžbu možemo zapisati u obliku:

$$|6 - x| = 2 + x.$$

Za $2 \le x \le 6$ je $|6 - x| = 6 - x$ pa dobivamo jednadžbu

$$6 - x = 2 + x$$

čije je rješenje $x = 2$. Kako to rješenje pripada segmentu [2, 6], to je ujedno i rješenje polazne jednadžbe. Nadalje, za $x \ge 6$ je $|6 - x| = -(6 - x) = x - 6$ pa dobivamo jednadžbu

$$x - 6 = 2 + x$$

koja prelazi u jednakost

$$-6 = 2,$$

a ta jednakost nije valjana. Stoga na intervalu $[6, +\infty\rangle$ polazna jednadžba nema niti jedno realno rješenje. Prema tome, jedino njezino rješenje koje pripada skupu $[2 +\infty\rangle$ jest $x = 2$, pa je traženi broj jednak 1.

560. *Koliko znamenaka ima broj* 2^{2005}?

Rješenje: Broj znamenki nekoga broja određujemo tako da izračunamo koja je najveća potencija broja 10 manja ili jednaka tom broju, očitamo eksponent te potencije i dobiveni rezultat uvećamo za 1. Naime, ako je $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ dekadski zapis nekoga broja, to je zapravo skraćeni zapis računa $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$. Stoga je 10^n najveća potencija broja 10 manja ili jednaka zadanom broju i njezin je eksponent jednak n. Kako broj $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ očito ima ukupno $n + 1$ znamenaka, slijedi tvrdnja.

Dakle, označimo

$$x = 2^{2005}$$

pa logaritmiranjem te jednakosti po bazi 10 dobijemo:

$$\log x = 2005 \cdot \log 2 \approx 603.565141306282296403546483922609$$

Stoga je 10^{603} najveća potencija broja 10 manja ili jednaka zadanom broju. Njezin je eksponent jednak 603 pa zadani broj ima ukupno $603 + 1 = 604$ znamenke.

561. *Izračunajte*:

$$4 \log_{\frac{1}{4}} \log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{9} - \log_{\sqrt{2}} \log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{27}.$$

Rješenje: Izračunajmo zasebno umanjenik, a zasebno umanjitelj. Imamo redom:

$$4 \log_{\frac{1}{4}} \log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{9} = 4 \log_{\frac{1}{4}} \log_{3^{\frac{1}{2}}} \left(9^{\frac{1}{3}}\right) = 4 \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \log_3 9\right) = 4 \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \log_3 3^2\right) = 4 \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 \log_3 3\right) =$$

$$4 \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{4}{3}\right) = 4 \log_{\frac{1}{2^2}} \left(\frac{2^2}{3}\right) = 4 \log_{2^{-2}} \left(\frac{2^2}{3}\right) = 4 \cdot \frac{1}{-2} \cdot \log_2 \left(\frac{2^2}{3}\right) = (-2) \cdot \log_2 \left(\frac{2^2}{3}\right) = (-2) \cdot (\log_2 2^2 - \log_2 3) =$$

$$= (-2) \cdot (2 \log_2 2 - \log_2 3) = (-2) \cdot (2 - \log_2 3) = 2 \log_2 3 - 4$$

$$\log_{\sqrt{2}}\log_{\frac{1}{9}}\frac{1}{27}=\log_{\sqrt{2}}\log_{\frac{1}{3^2}}\frac{1}{3^3}=\log_{\sqrt{2}}\log_{3^{-2}}3^{-3}=\log_{\sqrt{2}}(-3\cdot\frac{1}{-2}\log_3 3)=\log_{\sqrt{2}}(\frac{3}{2})=\log_{2^{\frac{1}{2}}}\frac{3}{2}=\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_2\frac{3}{2}=$$
$$=2(\log_2 3-\log_2 2)=2\log_2 3-2$$

Tako je vrijednost zadanoga izraza jednaka:

$$4\log_{\frac{1}{4}}\log_{\sqrt{3}}\sqrt[3]{9}-\log_{\sqrt{2}}\log_{\frac{1}{9}}\frac{1}{27}=2\log_2 3-4-(2\log_2 3-2)=2\log_2 3-4-2\log_2 3+2=-2$$

561. *Odredite vrijednost realnoga parametra $p\in\mathbf{R}$ tako da zbroj kvadrata rješenja jednadžbe*

$$(x-1)^2=2p(x-p)$$

bude jednak 0.

Rješenje: Zadanu jednadžbu najprije svedimo na standardni oblik. Imamo:

$$x^2-2x+1=2px-2p^2$$
$$x^2-(2p+2)x+2p^2+1=0$$

Odavde prema Vièteovim formulama slijedi:

$$x_1+x_2=2p+2$$
$$x_1x_2=2p^2+1$$

Tako sada u identitet

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2(x_1x_2)$$

uvrstimo $x_1^2+x_2^2=0$, $x_1+x_2=2p+2$ i $x_1x_2=2p^2+1$, pa dobijemo:

$$(2p+2)^2-2(2p^2+1)=0$$
$$4p^2+8p+4-4p^2-2=0$$
$$8p=2$$

i odavde $p=\frac{1}{4}$.

562. *Izračunajte* $\sin x\cdot\cos x$ *ako je* $\sin x=3\cdot\cos x$.

Rješenje: Iz zadane jednakosti zaključujemo da je $\cos x\neq 0$ jer bi u suprotnom slijedilo $\sin x=\cos x=0$, pa ne bi vrijedio identitet $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Dijeljenjem zadane jednakosti s $\cos x$ dobivamo:

$$\operatorname{tg} x=3$$

pa je

$$\sin x\cdot\cos x=\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}=\frac{\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{3}{1+3^2}=\frac{3}{10}$$

563. *Jedna je kateta pravokutnoga trokuta dva puta kraća od njegove hipotenuze. Izračunajte veličinu manjega od dvaju šiljastih kutova toga trokuta.*

Rješenje: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je a kateta pravokutnoga trokuta koja je dvostruko kraća od njegove hipotenuze c. To znači da vrijedi jednakost

$$c = 2a,$$

a odavde je

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{2}.$$

No, u pravokutnome je trokutu (uz standardne oznake)

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha$$

pa dobivamo trigonometrijsku jednadžbu:

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}.$$

Njezino rješenje u intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ jest $\alpha = 30°$ i to je tražena vrijednost manjega od dvaju šiljastih kutova toga trokuta.

564. *Čitajući neku knjigu student je prvoga dana pročitao* 40% *stranica knjige, drugoga dana* $\frac{2}{3}$ *preostaloga dijela knjige, a trećega dana preostale* 22 *stranice knjige. Odredite broj stranica te knjige.*

Rješenje: Neka je k traženi broj stranica knjige. Prvoga je dana student pročitao $40\% \cdot k = \frac{2}{5} \cdot k$ stranica knjige, pa mu je za pročitati preostalo još $k - \frac{2}{5}k = \frac{3}{5}k$ stranica knjige. Drugoga je dana student pročitao $\frac{2}{3}$ preostaloga dijela knjige, odnosno $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}k = \frac{2}{5}k$ stranica knjige, pa mu je za pročitati preostalo još $\frac{3}{5}k - \frac{2}{5}k = \frac{1}{5}k$ stranica knjige. Prema podacima iz zadatka, taj je broj jednak 22, pa dobivamo jednadžbu:

$$\frac{1}{5}k = 22$$

čije je rješenje $k = 110$. Dakle, knjiga ima ukupno 110 stranica.

565. *Odredite ukupan broj cjelobrojnih rješenja jednadžbe*

$$(x^2 - x - 1)^{x+2} = 1.$$

Rješenje: Broj 1 kao rezultat potencije možemo dobiti na tri načina: kao a^0 (gdje je a bilo koji realan broj različit od nule), kao 1^b (gdje je b bilo koji realan broj) i kao $(-1)^{2n}$, gdje je $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ nenegativan cijeli broj. Razmotrimo zasebno svaku od ovih triju mogućnosti.

1.) Eksponent je jednak 0:

To znači da vrijedi $x + 2 = 0$, otkuda je $x = –2$. Uvrštavanjem u polaznu jednadžbu dobivamo:

$$5^0 = 1$$

što je istinita jednakost, pa je $x = –2$ rješenje polazne jednadžbe. (Uvrštavanje smo morali provesti kako bismo utvrdili je li baza potencije strogo pozitivan realan broj.)

2.) Baza je jednaka 1:

To znači da vrijedi $x^2 – x – 1 = 1$, otkuda je

$$x^2 – x – 2 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su $x_1 = –1$ i $x_2 = 2$. Budući da nemamo nikakvih uvjeta na vrijednost eksponenta, ova dva rješenja su također rješenja polazne jednadžbe.

3.) Baza je jednaka –1, a eksponent je paran broj:

Iz $x^2 – x – 1 = –1$ slijedi

$$x^2 – x = 0,$$

odnosno $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. No, za $x_2 = 1$ vrijednost eksponenta $x + 2$ jednaka je 3, a to nije paran broj. Stoga $x = 1$ nije rješenje polazne jednadžbe. Prema tome, jedino rješenje u ovome slučaju jest $x = 0$ jer se uvrštavanjem $x = 0$ u polaznu jednadžbu dobije istinita jednakost

$$(–1)^2 = 1.$$

Stoga polazna jednadžba ima ukupno četiri cjelobrojna rješenja. $x_1 = –2$, $x_2 = –1$, $x_3 = 0$ i $x_4 = 2$.

566. *Koja je točka krivulje* $x^2 + 4y^2 = 20$ *najbliža pravcu* $p \ldots\ x + y – 7 = 0$?

Rješenje: Ideja rješavanja zadatka je sljedeća: Odredit ćemo jednadžbe tangenata na zadanu krivulju usporednih sa zadanim pravcem, te izračunati udaljenost svake od tih tangenata od zadanoga pravca. Potom ćemo odabrati tangentu s manjom udaljenošću i odrediti njezino sjecište sa zadanom krivuljom. To sjecište je tražena točka.
Uočimo najprije da je zadana krivulja elipsa. Zapišimo njezinu jednadžbu u kanonskom obliku:

$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$$

pa očitajmo: $a^2 = 20$, $b^2 = 5$. Nadalje, zapišimo jednadžbu pravca p u eksplicitnom obliku

$$p \ldots\ y = –x + 7.$$

Koeficijent smjera pravca p jednak je –1, što znači da i koeficijent smjera tangente usporedne s pravcem p također mora biti jednak –1:

$$k = –1.$$

Sada uvrstimo $a^2 = 20$, $b^2 = 5$ i $k = –1$ u uvjet tangencijalnosti za elipsu:

$$a^2k^2 + b^2 = l^2$$

pa dobijemo:

$$l^2 = 20 \cdot 1 + 5$$
$$l^2 = 25,$$

i odatle $l_1 = -5$, $l_2 = 5$. Dakle, tangente usporedne s pravcem p imaju jednadžbe:

$$t_1 \ldots\ y = -x - 5 \Leftrightarrow x + y + 5 = 0$$
$$t_2 \ldots\ y = -x + 5 \Leftrightarrow x + y - 5 = 0$$

Udaljenosti tih tangenata od pravca p su

$$d(p, t_1) = \frac{|5-(-7)|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|12|}{\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$$
$$d(p, t_2) = \frac{|-5-(-7)|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

pa je pravcu p bliža tangenta t_2. Preostaje nam odrediti njezino sjecište sa zadanom elipsom. U tu svrhu riješimo sustav:

$$y = -x + 5$$
$$x^2 + 4y^2 = 20$$

Uvrštavanjem prve jednadžbe u drugu dobivamo:

$$x^2 + 4(-x + 5)^2 = 20,$$

odnosno

$$5x^2 - 40x + 80 = 0,$$

odnosno

$$x^2 - 8x + 16 = 0,$$

odnosno

$$(x - 4)^2 = 0.$$

Odavde je $x = 4$, pa je pripadni y jednak

$$y = -4 + 5$$
$$y = 1.$$

Stoga je tražena točka $T(4, 1)$.

567. *Kutija sadrži* 11 *loptica koje su numerirane redom brojevima* 1, 2, 3, …, 10, 11. *Istovremeno i slučajno iz kutije izvlačimo točno* 6 *loptica. Izračunajte vjerojatnost da je zbroj brojeva na izvučenim lopticama neparan.*

Rješenje: Ukupan broj mogućih ishoda ovoga slučajnoga pokusa jednak je ukupnom broju šesteročlanih podskupova skupa {1, 2, 3, …, 10, 11} koji sadrži točno 11 različitih elemenata, a taj je jednak $\binom{11}{6} = \binom{11}{11-6} = \binom{11}{5} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 462$. Razmotrimo u kojim će sve slučajevima zbroj brojeva na tim lopticama biti neparan, pri čemu odmah uočimo da među 11 loptica imamo njih 6 numerirane neparnim brojevima i njih 5 numerirane parnim brojevima:

1.) 5 izvučenih loptica su numerirane parnim brojevima, a jedna neparnim brojem:

Tada tih 5 loptica možemo izabrati na jedan jedini način (jer ih ima točno 5), a jednu s neparnim brojem na ukupno $\binom{6}{1}$ = 6 različitih načina. Stoga je ukupan broj različitih mogućnosti u ovom slučaju jednak 1 · 6 = 6.

2.) 3 izvučene loptice su numerirane parnim brojevima, a 3 neparnim brojevima:

Tada tri loptice numerirane parnim brojevima možemo izabrati na $\binom{5}{3}=\binom{5}{5-3}=\binom{5}{2}=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}=10$ različitih načina, a tri loptice numerirane neparnim brojevima na $\binom{6}{3}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}=20$ različitih načina. Stoga je ukupan broj različitih mogućnosti u ovom slučaju jednak 10 · 20 = 200.

3.) Jedna izvučena loptica je numerirana parnim brojem, a preostalih 5 neparnim brojevima:

Tada lopticu numeriranu parnim brojem možemo izabrati na ukupno 5 različitih načina, a 5 numeriranih neparnim brojevima na $\binom{6}{5}=\binom{6}{6-5}=\binom{6}{1}=6$ različitih načina. Stoga je ukupan broj različitih mogućnosti u ovom slučaju jednak 5 · 6 = 30.

Time smo iscrpili sve povoljne slučajeve, pa, prema načelu zbroja, zaključujemo da promatrani slučajni pokus ima ukupno 6 + 200 + 30 = 236 povoljnih ishoda. Stoga je tražena vjerojatnost jednaka

$$p=\frac{236}{462}=\frac{118}{231}\approx 0.51082251082251082251082251082251 1$$
$$p\approx 51.08\%$$

568. *Pojednostavnite izraz*:

$$\frac{x^3-y^3}{x+y-\frac{xy}{x+y}}-\frac{x^3+y^3}{x-y+\frac{xy}{x-y}}$$

<u>Rješenje:</u> Iskoristit ćemo identitet

$$x^3\pm y^3=(x\pm y)(x^2\mp xy+y^2).$$

Tako redom imamo:

$$\frac{x^3-y^3}{x+y-\frac{xy}{x+y}}-\frac{x^3+y^3}{x-y+\frac{xy}{x-y}}=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{\frac{(x+y)^2-xy}{x+y}}-\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{\frac{(x-y)^2+xy}{x-y}}=$$

$$\frac{(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x+y)^2-xy}-\frac{(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)^2+xy}=$$

$$=\frac{(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x^2+xy+y^2}-\frac{(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)}{x^2+xy+y^2}=$$

$$=(x+y)(x-y)-(x-y)(x+y)=0$$

569. *Neka su* α *i* β *šiljasti kutovi pravokutnoga trokuta. Ako je* $\sin\alpha=\frac{2}{3}$, *izračunajte* $\operatorname{tg}\beta$.

<u>Rješenje:</u> Uz standardne oznake u pravokutnom trokutu, vrijedi jednakost:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{b}{a}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Tako je

$$\operatorname{tg}\beta=\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}}{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{1-\frac{4}{9}}}{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{\frac{5}{9}}}{\frac{2}{3}}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

570. *Ako je* $\log_7(\log_3(\log_2 x))=0$, *izračunajte* $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

<u>Rješenje</u>: Uzastopnim antilogaritmiranjem dobivamo:

$$\begin{aligned}\log_3(\log_2 x)&=7^0\\ \log_3(\log_2 x)&=1\\ \log_2 x&=3^1\\ \log_2 x&=3\\ x&=2^3\\ x&=8\end{aligned}$$

Prema tome je

$$\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

571. *Racionalizirajte nazivnik razlomka*

$$\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}.$$

<u>Rješenje:</u> Brojnik i nazivnik zadanoga razlomka pomnožimo s $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$. Dobit ćemo:

$$\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{6}\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}=\frac{2\sqrt{6}\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{2\sqrt{6}\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{2+2\sqrt{6}+3-5}=$$
$$=\frac{2\sqrt{6}\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{2\sqrt{6}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$$

572. *Točka* $T_1(-2, 0)$ *leži na paraboli* $y = ax^2 + bx + c$ *čije je tjeme točka* $T(4, 2)$. *Izračunajte vrijednost umnoška* abc.

<u>Rješenje:</u> Iz podatka da točka T_1 leži na paraboli slijedi da njezine koordinate moraju zadovoljavati jednadžbu te parabole. Stoga u jednakost

$$y = ax^2 + bx + c$$

uvrstimo $x = 2$ i $y = 0$, pa dobijemo:

$$4a + 2b + c = 0.$$

Nadalje, tjeme parabole $y = ax^2 + bx + c$ je dano s

$$T\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right).$$

Budući da je tjeme parabole iz zadatka $T(4, 2)$, slijedi da moraju vrijediti jednakosti:

$$-\frac{b}{2a}=4$$
$$\frac{4ac-b^2}{4a}=2$$

odnosno jednakosti

$$b = -8a$$
$$4ac - b^2 = 8a$$

Tako smo dobili sustav triju jednadžbi s tri nepoznanice:

$$\begin{aligned} 4a + 2b + c &= 0 \\ b &= -8a \\ 4ac - b^2 &= 8a \end{aligned}$$

Uvrštavanjem druge jednadžbe u prvu dobivamo:

$$4a + 2\cdot(-8a) + c = 0,$$

odnosno

$$c = 12a.$$

Sada u treću jednadžbu uvrstimo $b = -8a$ i $c = 12a$ pa dobijemo:

$$4a\cdot 12a - (-8a)^2 = 8a,$$

odnosno

$$16a^2 + 8a = 0.$$

Ako bi bilo $a = 0$, ne bismo dobili parabolu (nego pravac), pa posljednju jednadžbu smijemo podijeliti s $8a$. Tako ćemo dobiti

$$2a + 1 = 0,$$

odnosno $a = -\frac{1}{2}$. Sada je lako izračunati $b = -8a = 4$ i $c = 12a = -6$, pa je umožak abc jednak $-\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (-6) = 12$.

573. *Neka je $i \in$ **C** imaginarna jedinica. Izračunajte vrijednost izraza*:

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \ldots + \frac{1}{i^{2003}} + \frac{1}{i^{2004}} + \frac{1}{i^{2005}}.$$

<u>Rješenje:</u> Najprije zapišimo zadani zbroj u obliku:

$$i^{-1} + i^{-2} + i^{-3} + \ldots + i^{-2003} + i^{-2004} + i^{-2005}.$$

Sada primijetimo da za sve $k \in$ **Z** vrijedi jednakost

$$i^k + i^{k-1} + i^{k-2} + i^{k-3} = 0.$$

Naime,

$$i^k + i^{k-1} + i^{k-2} + i^{k-3} = i^{k-3} \cdot (i^3 + i^2 + i^1 + 1) = i^{k-3} \cdot [(-i) + (-1) + i + 1] = 0.$$

Tako za $k = -1$ imamo

$$i^{-1} + i^{-2} + i^{-3} + i^{-4} = 0,$$

za $k = -5$

$$i^{-5} + i^{-6} + i^{-7} + i^{-8} = 0$$

itd. Stoga ćemo sve pribrojnike grupirati u grupe od po četiri uzastopna pribrojnika čiji je zbroj jednak nuli. Kako je 2005 : 4 = 501 i ostatak 1, zaključujemo da ćemo dobiti ukupno 501 grupu od po četiri uzastopna pribrojnika čiji je zbroj jednak 0 i da će nam preostati jedan jedini nerazvrstani pribrojnik: i^{-2005}. Taj je broj jednak:

$$i^{-2005} = i^{4 \cdot (-502) + 3} = i^3 = -i.$$

Stoga je tražena vrijednost izraza jednaka

$$501 \cdot 0 + (-i) = -i.$$

574. *Odredite skup svih rješenja nejednadžbe*

$$\frac{2x+4}{3x} < \frac{2x-2}{x}.$$

<u>Rješenje:</u> Najprije podijelimo zadanu nejednadžbu s 2. Dobit ćemo:

$$\frac{x+2}{3x} < \frac{x-1}{x}$$

Odavde dalje slijedi:

$$\frac{x+2}{3x} - \frac{x-1}{x} < 0$$
$$\frac{x+2-3(x-1)}{3x} < 0$$
$$\frac{5-2x}{3x} < 0 \qquad / \cdot 3$$
$$\frac{5-2x}{x} < 0$$

Razlikujemo dva slučaja:

1.) $5 - 2x > 0$
$x < 0$

Iz prve nejednadžbe je $x < \frac{5}{2}$, što zajedno s $x < 0$ daje skup rješenja $\langle -\infty, 0\rangle$.

2.) $5 - 2x < 0$
$x > 0$

Iz prve nejednadžbe je $x > \frac{5}{2}$, što zajedno s $x > 0$ daje skup rješenja $\langle \frac{5}{2}, +\infty\rangle$.

Stoga je skup svih rješenja polazne nejednadžbe $\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle \frac{5}{2}, +\infty\rangle$, odnosno $\mathbf{R} \setminus [0, \frac{5}{2}]$.

575. *U krug je upisan kvadrat. Izračunajte vjerojatnost da slučajno odabrana točka kruga pripada i upisanom kvadratu.*

Rješenje: Neka je R polumjer kruga. Tada je duljina dijagonale upisanoga kvadrata d jednaka promjeru kruga:

$$d = 2R.$$

Stoga je površina toga kvadrata jednaka

$$P_{\square} = \frac{1}{2} d^2 = \frac{1}{2} \cdot (2R)^2 = 2R^2,$$

dok je površina kruga jednaka

$$P_{\bullet} = R^2\pi.$$

Stoga je tražena (geometrijska) vjerojatnost jednaka

$$p = \frac{P_{\square}}{P_{\bullet}} = \frac{2R^2}{R^2\pi} = \frac{2}{\pi}$$
$$p \approx 0.63661977236758134307553505349005$$

ili približno

$$p \approx 63.66\%.$$

576. *Zbroj kvadrata dvaju uzastopnih neparnih prirodnih brojeva iznosi* 290. *Odredite veći od tih dvaju brojeva*.

Rješenje: Neka je x traženi broj. Tada je $x - 2$ drugi od njih, pa dobivamo jednadžbu:

$$x^2 + (x - 2)^2 = 290,$$

odnosno

$$x^2 - 2x - 143 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1 = -11$ i $x_2 = 13$. Kako je x prirodan broj, u obzir dolazi jedino $x_2 = 13$. Dakle, traženi je broj jednak 13.

577. *Koliko rješenja jednadžbe*

$$|x^2 - 3x + 1| = 6 - x^2$$

pripada skupu svih rješenja nejednadžbe

$$x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} > 0?$$

Rješenje: Riješimo najprije zadanu jednadžbu. Razlikujemo dva slučaja:

1.) $x^2 - 3x + 1 \geq 0$

U ovome je slučaju $|x^2 - 3x + 1| = x^2 - 3x + 1$ pa dobivamo jednadžbu:

$$x^2 - 3x + 1 = 6 - x^2,$$

odnosno

$$2x^2 - 3x - 5 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1 = -1$ i $x_2 = \frac{5}{2}$. No, $x_2 = \frac{5}{2}$ ne zadovoljava uvjet $x^2 - 3x + 1 \geq 0$, pa to nije rješenje polazne jednadžbe. U ovome je slučaju, dakle, rješenje polazne jednadžbe samo $x = -1$.

2.) $x^2 - 3x + 1 \leq 0$

U ovome je slučaju $|x^2 - 3x + 1| = -(x^2 - 3x + 1) = -x^2 + 3x - 1$ pa dobivamo jednadžbu:

$$-x^2 + 3x - 1 = 6 - x^2,$$

otkuda je $x = \frac{7}{3}$. Taj x zadovoljava nejednakost $x^2 - 3x + 1 \leq 0$ pa je to ujedno i rješenje polazne jednadžbe.

Stoga polazna jednadžba ima dva rješenja: $x_1 = -1$ i $x_2 = \frac{7}{3}$. Uvrstimo zasebno svako od tih rješenja u zadanu nejednadžbu

$$x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} > 0$$

i provjerimo hoćemo li dobiti istinite nejednakosti. Za $x = -1$ dobivamo nejednakost

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} > 0$$

koja je očito točna jer su svi pribrojnici na njezinoj lijevoj strani strogo pozitivni brojevi. Za $x = \frac{7}{3}$ primijenimo rastav:

$$x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = (x - \sqrt{2}) \cdot (x - \sqrt{3})$$

i nejednakost

$$\frac{7}{3} > 2 > \sqrt{3} > \sqrt{2}.$$

Zbog te su nejednakosti za $x = \frac{7}{3}$ vrijednosti obaju faktora $x - \sqrt{2}$ i $x - \sqrt{3}$ strogo pozitivni realni brojevi, pa i njihov umnožak mora biti takav. Dakle, i $x = \frac{7}{3}$ zadovoljava zadanu nejednadžbu, pa je ukupan broj rješenja zadane jednadžbe koja zadovoljavaju zadanu nejednadžbu jednak 2.

578. *Riješite nejednadžbu*:

$$2^{-x^2} \geq 2^{-|x|}$$

Rješenje: Baza obiju potencija u zadanoj nejednadžbi je strogo pozitivan realan broj veći od 1. Stoga možemo odmah usporediti eksponente, pri čemu se znak nejednakosti ne mijenja:

$$-x^2 \geq -|x|.$$

Odavde množenjem s –1 i promjenom znaka nejednakosti slijedi:

$$x^2 \leq |x|,$$

odnosno

$$x^2 - |x| \leq 0$$

Sada razlikujemo dva slučaja:

1.) $x \geq 0$

U ovom slučaju je $|x| = x$ pa dobivamo nejednadžbu

$$x^2 - x \leq 0$$

Njezino je rješenje segment [0, 1]. Svaki element toga skupa zadovoljava nejednakost $x \geq 0$, pa je to ujedno i skup rješenja polazne nejednadžbe.

2.) $x \leq 0$

U ovome je slučaju $|x| = -x$ pa dobivamo nejednadžbu:

$$x^2 + x \leq 0$$

Njezino je rješenje segment [–1, 0]. Kako svaki element toga skupa zadovoljava nejednakost $x \leq 0$, to je [–1, 0] ujedno i skup rješenja polazne nejednadžbe.

Tako zaključujemo da je skup svih rješenja polazne nejednadžbe unija skupova [–1, 0] i [0, 1], a to je segment [–1, 1].

579. *Odredite zbroj rješenja jednadžbe*

$$\sqrt{4-x} + \sqrt{5+x} = 3.$$

Rješenje: Najprije odredimo za koje su x definirana gornja dva druga korijena. Izrazi pod tim korijenima istodobno moraju biti nenegativni, pa moraju vrijediti nejednakosti,

$$4 - x \geq 0$$
$$5 + x \geq 0$$

Iz prve je nejednakosti $x \leq 4$, a iz druge $x \geq -5$. Stoga polaznu nejednadžbu ima smila rješavati jedino na segmentu [–5, 4]. Budući da se tada i na lijevoj i na desnoj strani polazne jednadžbe nalaze nenegativni realni brojevi, tu jednadžbu smijemo kvadrirati. Dobit ćemo:

$$4 - x + 2 \cdot \sqrt{4-x} \cdot \sqrt{5+x} + 5 + x = 9,$$

a odavde je

$$\sqrt{4-x} \cdot \sqrt{5+x} = 0.$$

Umnožak dvaju drugih korijena jednak je nuli ako i samo ako je barem jedan od tih korijena jednak nuli. Iz

$$\sqrt{4-x} = 0$$

odmah slijedi $x = 4$, a kako taj broj pripada segmentu [–5, 4], on je i rješenje polazne jednadžbe. Nadalje, iz

$$\sqrt{5+x} = 0$$

slijedi $x = -5$, a kako taj broj pripada segmentu [–5, 4], on je i rješenje polazne jednadžbe. Stoga su sva rješenja polazne jednadžbe $x_1 = -5$ i $x_2 = 4$. Njihov je zbroj jednak –1.

580. *Koliko rješenja jednadžbe*

$$3\sin x + \sin 2x = 1 - 3\cos x$$

pripada segmentu $[-2\pi, \pi]$?

Rješenje: Transofmirajmo najprije zadanu jednadžbu koristeći identitete

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

Imamo redom:

$$3\sin x + 3\cos x = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x$$
$$3(\sin x + \cos x) = (\sin x + \cos x)^2$$
$$(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x - 3) = 0$$

Zbog $\sin x \le 1$, $\cos x \le 1$ vrijednost drugoga faktora ne može biti jednaka nuli, pa nuli mora biti jednak prvi faktor:

$$\sin x + \cos x = 0,$$

otkuda je

$$\sin x = -\cos x.$$

Ako bi bilo $\cos x = 0$, onda bi slijedilo $\sin x = \cos x = 0$ pa ne bi vrijedio osnovni trigonometrijski indetitet $\sin^2 x + + \cos^2 x = 1$. Stoga mora biti $\cos x \ne 0$, pa dijeljenjem gornje jednadžbe s $\cos x$ dobivamo:

$$\mathrm{tg}\, x = -1.$$

Rješenja ove jednadžbe su

$$x_k = \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Iz zahtjeva $x_k \in [-2\pi, \pi]$ slijedi

$$-2\pi \le \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi \le \pi,$$

odnosno (množenjem s 4 i dijeljenjem s π)

$$-8 \le 4k + 3 \le 4,$$

odnosno (oduzimanjem broja 3 od svakoga člana gornje nejednakosti)

$$-11 \le 4k \le 1,$$

te konačno

$$-\frac{11}{4} \le k \le \frac{1}{4}.$$

Cijeli brojevi koji zadovoljavaju ovu nejednakost su: $k = -2$, $k = -1$ i $k = 0$. Stoga ukupno tri rješenja zadane jednadžbe pripadaju zadanom intervalu.

581. *Realni brojevi a, b, c i d zadovoljavaju jednakosti*:

$$a - 1 = b + 2 = c - 3 = d + 4.$$

Koji od njih je najmanji, a koji najveći?

Rješenje: Svakom od tih četiriju brojeva dodajemo ili oduzimamo određeni realan broj, pri čemu uvijek dobijemo isti rezultat R. Dakle, neka je

$$R = a - 1 = b + 2 = c - 3 = d + 4$$

Najmanji od tih četiriju brojeva je onaj kojemu treba najviše dodati da se dobije broj R. To je očito broj d jer njemu treba dodati broj 4 da se dobije R (svima ostalima ili treba dodati broj manji od 4 ili čak treba nešto oduzeti jer su veći od R). Najveći od tih četiriju brojeva je onaj od kojega treba najviše oduzeti da se dobije broj R. To je očito broj c jer od njega treba oduzeti broj 3 da se dobije broj R (svima ostalima ili treba oduzeti broj manji od 3 ili čak treba nešto dodati jer su manji od R). Zaključimo:

$$\min\{a, b, c, d\} = d$$
$$\max\{a, b, c, d\} = c$$

582. *Ako svaku stranicu pravokutnika produljimo za* 10% *njezine početne duljine*, *za koliko će se postotaka promijeniti površina toga pravokutnika*?

Rješenje: Označimo duljine stranica pravokutnika s a i b. Tada su duljine produljenih stranica pravokutnika

$$a_1 = a + \frac{10}{100} \cdot a = a \cdot (1 + \frac{10}{100}) = 1.1 \cdot a$$
$$b_1 = b + \frac{10}{100} \cdot b = b \cdot (1 + \frac{10}{100}) = 1.1 \cdot b$$

Stoga je površina tako dobivenoga pravokutnika

$$P_1 = a_1 \cdot b_1 = (1.1 \cdot a) \cdot (1.1 \cdot b) = 1.1^2 \cdot ab = 1.21 \cdot P,$$

gdje je P površina polaznoga pravokutnika. Stoga je tražena promjena (u postocima) jednaka

$$p = \frac{100 \cdot (1.21P - P)}{P} = \frac{100 \cdot 0.21 \cdot P}{P} = 21,$$

tj. površina pravokutnika se uvećala za 21%.

583. *Odredite realne brojeve* α *i* β *tako da polinom* $p(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 1$ *bude djeljiv polinomom* $q(x) = x^2 - x - 1$.

Rješenje: Podijelimo zadane polinome prema pravilu za dijeljenje polinoma:

$$\begin{array}{l}
(\alpha x^3 + \beta x^2 + 1) : (x^2 - x - 1) = \alpha x + (\alpha + \beta) \\
\underline{\alpha x^3 - \alpha x^2 - \alpha x} \\
\qquad (\alpha + \beta)x^2 \qquad + \alpha x \; + \; 1 \\
\qquad \underline{(\alpha + \beta)x^2 - (\alpha + \beta)x - (\alpha + \beta)} \\
\qquad\qquad\qquad (2\alpha + \beta)x + (\alpha + \beta + 1)
\end{array}$$

Polinomi $p(x)$ i $q(x)$ će biti djeljivi ako i samo ako svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijednost ostatka bude jednaka nuli, odnosno ako i samo ako vrijedi:

$$2\alpha + \beta = 0$$
$$\alpha + \beta + 1 = 0$$

Oduzimanjem tih jednadžbi odmah dobivamo $\alpha = 1$, pa je $\beta = -2$.

584. *Dvije stranice kvadrata leže na pravcima* $p\ldots\ 3x - 4y - 12 = 0$ *i* $q\ldots\ 3x - 4y + 3 = 0$. *Izračunajte površinu toga kvadrata.*

Rješenje: Odmah uočimo da su zadani pravci usporedni, pa je udaljenost između njih jednaka duljini stranice kvadrata. Dakle,

$$a = d = \frac{|-12-3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-15|}{\sqrt{9+16}} = \frac{15}{5} = 3$$

Stoga je površina toga kvadrata jednaka

$$P = a^2 = 3^2 = 9.$$

585. *Riješite nejednadžbu*:

$$\sqrt{1-25x^2} > 5x + 1.$$

Rješenje: Razlikujemo dva slučaja:

1.) $1 - 25x^2 \geq 0$
$5x + 1 < 0$

U ovom je slučaju lijeva strana polazne nejednakosti nenegativan, a desna strogo negativan broj, pa polazna nejednakost vrijedi. Iz prve od dviju gornjih nejednakosti dobivamo:

$$x \in \left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right],$$

a iz druge $x < -\frac{1}{5}$. Kako ne postoji realan broj x koji bi istovremeno bio barem jednak $-\frac{1}{5}$ i strogo manji od $-\frac{1}{5}$, u ovom slučaju polazna nejednadžba nema rješenja.

2.) $1 - 25x^2 \geq 0$
$5x + 1 \geq 0$

Iz ovih dviju nejednakosti dobivamo $x \in \left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$, pa polaznu nejednadžbu dalje rješavamo na tome segmentu. Kvadriranjem dobivamo:

$$1 - 25x^2 > (5x + 1)^2,$$

odnosno

$$1 - 25x^2 > 25x^2 + 10x + 1,$$

odnosno

$$5x^2 + x < 0.$$

Odavde je $x \in \langle -\frac{1}{5}, 0\rangle$ pa iz uvjeta $x \in \left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$ i $x \in \langle -\frac{1}{5}, 0\rangle$ slijedi $x \in \langle -\frac{1}{5}, 0\rangle$. Stoga je skup rješenja polazne nejednadžbe u ovom slučaju otvoreni interval $\langle -\frac{1}{5}, 0\rangle$.

Tako je skup svih rješenja polazne nejednadžbe otvoreni interval $\langle -\frac{1}{5}, 0\rangle$.

586. *Pojednostavnite izraz*:

$$\left[\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2-\dfrac{a-\sqrt{ax}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{a}+1\right)^3-a\sqrt{a}+2}\right]^{-1},$$

pri čemu su $a, x \in \mathbf{R}^+$ *različiti strogo pozitivni realni brojevi*.

Rješenje: Primijenjujući formule za kvadrat i kub zbroja binoma imamo redom:

$$\left[\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)^2-\dfrac{a-\sqrt{ax}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{a}+1\right)^3-a\sqrt{a}+2}\right]^{-1}=\left[\frac{a+2\sqrt{a}+1-\dfrac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{x})}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}}{a\sqrt{a}+3a+3\sqrt{a}+1-a\sqrt{a}+2}\right]^{-1}=\left[\frac{a+2\sqrt{a}+1-\sqrt{a}}{3a+3\sqrt{a}+3}\right]^{-1}=$$

$$=\left[\frac{a+\sqrt{a}+1}{3(a+\sqrt{a}+1)}\right]^{-1}=\left[\frac{1}{3}\right]^{-1}=3$$

587. *Ako je* $f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=\dfrac{x-2}{x-1}$, *odredite* $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.

Rješenje: Stavimo $t=\dfrac{x-1}{x}$, odnosno $x=\dfrac{1}{1-t}$. Uvrštavanjem tih jednakosti u jednakost $f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=\dfrac{x-2}{x-1}$ dobit ćemo:

$$f(t)=\frac{\dfrac{1}{1-t}-2}{\dfrac{1}{1-t}-1}=\frac{\dfrac{1-2(1-t)}{1-t}}{\dfrac{1-(1-t)}{1-t}}=\frac{2t-1}{t},$$

odnosno "preimenovanjem" varijabli

$$f(x)=\frac{2x-1}{x}.$$

Preostaje nam u ovu jednakost umjesto x staviti razlomak $\dfrac{x}{x-1}$:

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{2\cdot\dfrac{x}{x-1}-1}{\dfrac{x}{x-1}}=\frac{\dfrac{2x}{x-1}-1}{\dfrac{x}{x-1}}=\frac{\dfrac{2x-(x-1)}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}}=\frac{x+1}{x}.$$

Dakle, $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\dfrac{x+1}{x}$.

588. *Prvi član geometrijskoga niza s pozitivnim članovima jednak je* $3 - 2\sqrt{2}$, *a peti* $3 + 2\sqrt{2}$. *Odredite zbroj prvih pet članova toga niza.*

Rješenje: Da bismo odredili zbroj prvih pet članova toga niza, najprije moramo izračunati količnik toga niza. Kako se peti član geometrijskoga niza računa prema formuli

$$a_5 = a_1 \cdot q^4,$$

gdje je a_1 prvi član geometrijskoga niza , a q količnik niza, u tu formulu uvrstimo $a_5 = 3 + 2\sqrt{2}$ i $a_1 = 3 - 2\sqrt{2}$ pa dobivamo:

$$3 + 2\sqrt{2} = (3 - 2\sqrt{2}) \cdot q^4.$$

Uočimo nadalje da vrijede jednakosti

$$3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2$$
$$3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$$

pa imamo:

$$q = \sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)^2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1 .$$

Tako je traženi zbroj jednak:

$$S_5 = a_1 \cdot \frac{q^5-1}{q-1} = a_1 \cdot \frac{q^4 \cdot q - 1}{q-1} = a_1 \cdot \frac{\frac{a_5}{a_1} \cdot q - 1}{q-1} = \frac{a_5 \cdot q - a_1}{q-1} = \frac{(3+2\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2}+1) - (3-2\sqrt{2})}{(\sqrt{2}+1)-1} =$$
$$= \frac{3\sqrt{2}+4+3+2\sqrt{2}-3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4+7\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{2} + 7 = 2\sqrt{2} + 7 = 7 + 2\sqrt{2}$$

589. *Odredite zbroj svih peteroznamenkastih prirodnih brojeva u čijem se dekadskom zapisu svaka od znamenki* 1, 2, 3, 4, 5 *pojavljuje točno jednom.*

Rješenje: Neka je $\overline{a_5a_4a_3a_2a_1}$ ($\overline{a_5a_4a_3a_2a_1}$ je kraći zapis izraza: $a_5 \cdot 10\,000 + a_4 \cdot 1000 + a_3 \cdot 100 + a_2 \cdot 10 + a_1 \cdot 1$) jedan od tih brojeva. Pridružimo mu broj $\overline{(6-a_5)(6-a_4)(6-a_3)(6-a_2)(6-a_1)}$. To pridruživanje je očito bijektivno, a zbroj svakoga takvoga para brojeva jednak je 66 666. Ukupan broj peteroznamenkastih prirodnih brojeva u čijem se zapisu svaka od znamenki 1, 2, 3, 4, 5 pojavljuje točno jednom jednak je ukupnom broju različitih načina na koji možemo rasporediti znamenke 1, 2, 3, 4 i 5, a taj je 5! = 120. Stoga parova peteroznamenkastih brojeva takvih da je njihov zbroj jednak 66 666 ima $\frac{1}{2} \cdot 120 = 60$, pa je zbroj svih takvih brojeva jednak je 60 · 66 666 = 3 999 960.

590. *Odredite prirodno područje definicije* (*domenu*) *funkcije*

$$f(x) = \log\left(\sqrt{x^2 - 5x - 24} - x - 2\right).$$

Rješenje: Uvjeti na vrijednost nepoznanice x su:

$$x^2 - 5x - 24 \geq 0 \text{ (da bi drugi korijen bio definiran)}$$
$$\sqrt{x^2 - 5x - 24} - x - 2 > 0 \text{ (da bi logaritam bio definiran)}$$

Iz prve se nejednadžbe dobiva

$$x \in \langle -\infty, -3] \cup [8, +\infty\rangle.$$

Stoga drugu nejednadžbu rješavamo upravo na tom skupu. Zapišimo je u sljedećem obliku:

$$\sqrt{x^2 - 5x - 24} > x + 2$$

Za sve $x \in \langle -\infty, -3]$ vrijednost izraza $\sqrt{x^2 - 5x - 24}$ je nenegativan realan broj, a vrijednost izraza $x + 2$ strogo negativan realan broj. Stoga je za sve $x \in \langle -\infty, -3]$ valjana nejednakost

$$\sqrt{x^2 - 5x - 24} > x + 2$$

pa svaka točka toga intervala pripada području definicije polazne funcije. Nadalje, za $x \in [8, +\infty\rangle$ su obje strane nejednakosti

$$\sqrt{x^2 - 5x - 24} > x + 2$$

nenegativne pa tu nejednakost smijemo kvadrirati. Tako ćemo dobiti:

$$x^2 - 5x - 24 > (x + 2)^2$$
$$x^2 - 5x - 24 > x^2 + 4x + 4$$
$$9x < 28$$

i $x < \frac{28}{9}$. Međutim, niti jedan $x \in [8, +\infty\rangle$ ne zadovoljava nejednakost $x < \frac{28}{9}$ pa na tom skupu nejednadžba

$$\sqrt{x^2 - 5x - 24} > x + 2$$

nema rješenja. Stoga je prirodno područje definicije zadane funkcije

$$D_f = \langle -\infty, -3].$$

591. *Odredite broj uređenih parova* (x, y) *realnih brojeva koji su rješenja sustava jednadžbi*

$$\log_x y = x^3 - 2x^2$$
$$(x^2 - 2x) \cdot \log_y x = 1$$

__**Rješenje:**__ Odmah primijetimo da realni brojevi x i y moraju zadovoljavati uvjete:

$$x > 0, x \neq 1$$
$$y > 0, y \neq 1$$

(jer se oba pojavljuju kao baze logaritma). Iz druge jednadžbe sustava slijedi

$$x^2 - 2x = \frac{1}{\log_y x}$$

No, kako je

$$\frac{1}{\log_y x} = \log_x y$$

to je

$$\log_x y = x^2 - 2x.$$

Taj izraz sada uvrstimo u prvu jednadžbu sustava pa dobijemo:

$$x^2 - 2x = x^3 - 2x^2,$$

odnosno

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0.$$

Zbog uvjeta $x > 0$ tu jednadžbu smijemo podijeliti s x:

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$. Zbog uvjeta $x \neq 1$ rješenje $x_1 = 1$ ne dolazi u obzir, pa preostaje $x = x_2 = 2$. Uvrštavanjem te vrijednosti u prvu jednadžbu polaznoga sustava dobivamo:

$$\log_2 y = 0,$$

odnosno $y = 2^0 = 1$. No, zbog uvjeta $y \neq 1$, dobiveni y nije rješenje polaznoga sustava. To znači da polazni sustav nema realnih rješenja, odnosno traženi broj uređenih parova jednak je 0.

592. *Pojednostavnite izraz*

$$\frac{4\sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) - \operatorname{tg}^2\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right)}$$

za svex za koje je taj izraz dobro definiran.

Rješenje: Pojednostavnit ćemo zasebno svaki član brojnika, a zasebno svaki član nazivnika. Koristimo adicione formule za funkcije sinus i kosinus, te formule za trigonometrijske funkcije polovičnih kutova. Imamo:

$$4\sin(4x - \frac{\pi}{2}) = 4\sin 4x \cos\frac{\pi}{2} - 4\cos 4x \sin\frac{\pi}{2} = 4\sin 4x \cdot 0 - 4\cos 4x \cdot 1 = -4\cos 4x$$

$$\operatorname{ctg}^2\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)=\left[\operatorname{ctg}\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)\right]^2=\left[\frac{\cos\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)}{\sin\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)}\right]^2=\left[\frac{\cos 2x\cos\frac{3\pi}{2}+\sin 2x\sin\frac{3\pi}{2}}{\sin 2x\cos\frac{3\pi}{2}-\cos 2x\sin\frac{3\pi}{2}}\right]^2=$$

$$\left[\frac{\cos 2x\cdot 0+\sin 2x\cdot(-1)}{\sin 2x\cdot 0-\cos 2x\cdot(-1)}\right]^2=\left(\frac{-\sin 2x}{\cos 2x}\right)^2=\frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x}=\frac{\frac{1-\cos 4x}{2}}{\frac{1+\cos 4x}{2}}=\frac{1-\cos 4x}{1+\cos 4x}$$

$$\operatorname{tg}^2\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)=\left[\operatorname{tg}\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)\right]^2=\left[\frac{\sin\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)}{\cos\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)}\right]^2=\left[\frac{\sin 2x\cos\frac{3\pi}{2}+\cos 2x\sin\frac{3\pi}{2}}{\cos 2x\cos\frac{3\pi}{2}-\sin 2x\sin\frac{3\pi}{2}}\right]^2=$$

$$\left[\frac{\sin 2x\cdot 0+\cos 2x\cdot(-1)}{\cos 2x\cdot 0-\sin 2x\cdot(-1)}\right]^2=\left(\frac{-\cos 2x}{\sin 2x}\right)^2=\frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x}=\frac{\frac{1+\cos 4x}{2}}{\frac{1-\cos 4x}{2}}=\frac{1+\cos 4x}{1-\cos 4x}$$

Tako je zadani izraz jednak

$$\frac{4\sin\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)-\operatorname{tg}^2\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)}=\frac{-4\cos 4x}{\frac{1-\cos 4x}{1+\cos 4x}-\frac{1+\cos 4x}{1-\cos 4x}}=\frac{-4\cos 4x}{\frac{(1-\cos 4x)^2-(1+\cos 4x)^2}{(1+\cos 4x)(1-4\cos 4x)}}=$$

$$\frac{-4\cos 4x\cdot(1+\cos 4x)\cdot(1-\cos 4x)}{(1-\cos 4x)^2-(1+\cos 4x)^2}=\frac{-4\cos 4x\cdot(1+\cos 4x)\cdot(1-\cos 4x)}{1-2\cos 4x+\cos^2 4x-1-2\cos 4x-\cos^2 4x}=$$

$$=\frac{-4\cos 4x\cdot(1+\cos 4x)\cdot(1-\cos 4x)}{-4\cos 4x}=(1+\cos 4x)(1-\cos 4x)=1-\cos^2 4x=\sin^2 4x$$

593. *Odredite najmanju vrijednost realnoga parametra a za koju jednadžba*

$$\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=a$$

ima barem jedno realno rješenje.

Rješenje: Lijevu stranu jednadžbe transformiramo koristeći formule za trigonometrijske funkcije polukutova. Imamo:

$$\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{\frac{1-\cos 2x}{2}}{\frac{1+\cos 2x}{2}}+\frac{\frac{1+\cos 2x}{2}}{\frac{1-\cos 2x}{2}}=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}+\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}=$$

$$=\frac{(1-\cos 2x)^2+(1+\cos 2x)^2}{(1+\cos 2x)(1-\cos 2x)}=\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{1-\cos^2 2x}=$$

$$=\frac{2+2\cos^2 2x}{\sin^2 2x}=\frac{2+2\cdot\frac{1+\cos 4x}{2}}{\frac{1-\cos 4x}{2}}=\frac{2+1+\cos 4x}{\frac{1-\cos 4x}{2}}=\frac{6+2\cos 4x}{1-\cos 4x}$$

Tako dobivamo jednadžbu:

$$\frac{6+2\cos 4x}{1-\cos 4x}=a$$

iz koje je

$$6 + 2\cdot\cos 4x = a - a\cdot\cos 4x$$
$$\cos 4x\cdot(a + 2) = a - 6$$
$$\cos 4x=\frac{a-6}{a+2}$$

Ova jednadžba ima barem jedno realno rješenje ako i samo ako vrijedi nejednakost

$$-1\le\frac{a-6}{a+2}\le 1$$

(jer za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi $-1 \le \cos 4x \le 1$), odnosno ako i samo ako istovremeno vrijede nejednakosti

$$\frac{a-6}{a+2}\ge -1$$
$$\frac{a-6}{a+2}\le 1$$

Riješimo taj sustav nejednadžbi. Iz prve nejednadžbe slijedi

$$\frac{a-6}{a+2}+1\ge 0$$
$$\frac{a-6+a+2}{a+2}\ge 0$$
$$\frac{2a-4}{a+2}\ge 0 \qquad /:2$$
$$\frac{a-2}{a+2}\ge 0$$

Razlikujemo dva slučaja:

1.) $a - 2 \ge 0$
$a + 2 > 0$

Iz prve nejednakosti je $a \ge 2$, a iz druge $a > -2$. Stoga je skup rješenja u ovom slučaju $[2, +\infty\rangle$.

2.) $a - 2 \leq 0$
$a + 2 < 0$

Iz prve nejednakosti je $a \leq 2$, a iz druge $a < -2$. Stoga je skup rješenja u ovom slučaju $\langle -\infty, -2\rangle$.

Dakle, skup svih rješenja nejednadžbe

$$\frac{a-6}{a+2} \geq -1$$

jest unija skupova $\langle -\infty, -2\rangle \cup [2, +\infty\rangle$.

Na analogan način rješavamo i nejednadžbu

$$\frac{a-6}{a+2} \leq 1 .$$

Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&\frac{a-6}{a+2} - 1 \leq 0 \\
&\frac{a-6-a-2}{a+2} \leq 0 \\
&\frac{-8}{a+2} \leq 0 \qquad / : (-8) \\
&\frac{1}{a+2} \geq 0
\end{aligned}$$

Budući da je brojnik strogo pozitivan realan broj, da bi vrijednost razlomka bila nenegativan realan broj, i nazivnik mora biti strogo pozitivan realan broj. Dakle,

$$a + 2 > 0,$$

a odavde je

$$a \in \langle -2, +\infty\rangle,$$

pa je skup svih rješenja nejednadžbe

$$\frac{a-6}{a+2} \leq 1$$

otvoreni interval $\langle -2, +\infty\rangle$.

Prema tome, skup svih rješenja sustava nejednadžbi

$$\begin{aligned}
&\frac{a-6}{a+2} \geq -1 \\
&\frac{a-6}{a+2} \leq 1
\end{aligned}$$

jest presjek skupova $\langle -\infty, -2\rangle \cup [2, +\infty\rangle$ i $\langle -2, +\infty\rangle$. To je skup $[2, +\infty\rangle$, što znači da polazna jednadžba ima barem jedno realno rješenje ako i samo ako je

$$a \in [2, +\infty\rangle.$$

Tražena je vrijednost realnoga parametra a najmanji element skupa $[2, +\infty\rangle$, a taj je jednak 2.

594. *Presjek kocke ravninom je pravilan šesterokut. Ako je duljina brida kocke jednaka a, izrazite površinu šesterokuta kao funkciju varijable a.*

<u>**Rješenje:**</u> Neka je $ABCDA_1B_1C_1D_1$ zadana kocka. Traženi šesterokut dobije se tako da se kocka presiječe polovištima bridova AB, BC, CC_1, C_1D_1, D_1A_1 i AA_1. Zato neka je je P polovište brida AB, a P_1 polovište brida AA_1. Tada je trokut PP_1A pravokutan s pravik kutom kod vrha A, te je

$$|AP| = |AP_1| = \frac{a}{2}$$

Stoga je duljina hipotenuze $|PP_1|$, a time i duljina stranice a_1 dobivenoga šesterokuta, jednaka

$$a_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

pa je njegova površina jednaka

$$P = \frac{3a_1^2\sqrt{3}}{2}$$
$$P = \frac{3\cdot\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\sqrt{3}}{2}$$
$$P = \frac{3\cdot\frac{a^2}{2}\sqrt{3}}{2}$$
$$P = \frac{3\cdot a^2\sqrt{3}}{4}$$

595. *Odredite površinu pravokutnoga trokuta ABC kojemu je vrh pravoga kuta u točki* $C(-2, 1)$, *a hipotenuza AB duljine* $\frac{25}{4}$ *leži na pravcu p…* $24x + 7y - 34 = 0$.

<u>**Rješenje:**</u> Udaljenost točke C od pravca p jednaka je

$$d = \frac{|24\cdot(-2) + 7\cdot 1 - 34|}{\sqrt{24^2 + 7^2}}$$
$$d = \frac{|-75|}{\sqrt{576 + 49}}$$
$$d = \frac{75}{25} = 3$$

To je ujedno i udaljenost vrha C od hipotenuze AB, što znači da je d zapravo duljina visine na hipotenuzu AB. Tako je površina trokuta jednaka

$$P = \frac{1}{2} cd$$
$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{4} \cdot 3$$
$$P = \frac{75}{8}$$

596. *Tetiva krivulje* $4x^2 - y^2 = 36$ *leži na tangenti krivulje* $4x^2 + 5y^2 = 20$ *čije je diralište točka* $D(-\frac{5}{3}, y > 0)$. *Izračunajte duljinu te tetive*.

Rješenje: Odredimo najprije koordinate točke D. Uvrstimo $x = -\frac{5}{3}$ u jednadžbu $4x^2 + 5y^2 = 20$ pa dobijemo:

$$4 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)^2 + 5y^2 = 20$$
$$4 \cdot \frac{25}{9} + 5y^2 = 20$$
$$100 + 45y^2 = 180$$
$$y^2 = \frac{16}{9}$$

pa zbog uvjeta $y > 0$ slijedi $y = \frac{4}{3}$, Dakle, $D(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$. Sada odredimo jednadžbu tangente na krivulju $4x^2 + 5y^2 = = 20$ u točki D. Uočimo da je ta krivulja elipsa čija je osna jednadžba upravo $4x^2 + 5y^2 = 20$, što znači da je $a^2 = 5$ i $b^2 = 4$. Stoga je jednadžba tangente u točki D

$$4 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot x + 5 \cdot \frac{4}{3} \cdot y - 20 = 0 \quad / \cdot (-3)$$
$$20x - 20y + 60 = 0 \quad /: 20$$
$$x - y + 3 = 0$$

Preostaje odrediti sjecišta tangente $t \ldots\ x - y + 3 = 0$ i krivulje $4x^2 - y^2 = 36$. U tu svrhu riješimo sustav jednadžbi:

$$x - y + 3 = 0$$
$$4x^2 - y^2 = 36$$

Iz prve jednadžbe je

$$y = x + 3$$

što uvršeno u drugu jednadžbu daje:

$$4x^2 - (x + 3)^2 - 36 = 0$$
$$3x^2 - 6x - 45 = 0$$
$$x^2 - 2x - 15 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1 = -3$ i $x_2 = 5$. Pripadne vrijednosti nepoznanice y su:

$$y_1 = -3 + 3 = 0$$
$$y_2 = 5 + 3 = 8$$

pa su koordinate sjecišta $S_1(-3, 0)$ i $S_2(5, 8)$. Udaljenost tih točaka jednaka je

$$d = \sqrt{[5-(-3)]^2 + (8-0)^2}$$
$$d = \sqrt{8^2 + 8^2}$$
$$d = \sqrt{2 \cdot 8^2}$$
$$d = 8\sqrt{2}$$

597. *Tetiva krivulje* $2x^2 + 9y^2 = 162$ *leži na pravcu p…* $2x + 3y - 18 = 0$ *i u svojemu polovištu dodiruje kružnicu čije se središte nalazi na pravcu q…* $x - 2y - 6 = 0$. *Odredite koordinate središta te kružnice.*

Rješenje: Izračunajmo najprije koordinate krajnjih točaka zadane tetive. U tu svrhu riješimo sustav:

$$2x + 3y - 18 = 0$$
$$2x^2 + 9y^2 = 162$$

Iz prve jednadžbe je

$$3y = -2x + 18,$$

pa kvadriranjem te jednakosti dobijemo:

$$9y^2 = 4x^2 - 72x + 324$$

Tu jednakost uvrstimo u drugu jednadžbu sustava pa dobijemo:

$$6x^2 - 72x + 162 = 0,$$

odnosno

$$x^2 - 12x + 27 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1 = 3$ i $x_2 = 9$. Pripadne vrijednosti nepoznanice y su:

$$y_1 = \frac{1}{3}(-2x_1 + 18) = \frac{1}{3}(-2 \cdot 3 + 18) = 4$$
$$y_2 = \frac{1}{3}(-2x_2 + 18) = \frac{1}{3}(-2 \cdot 9 + 18) = 0$$

pa su koordinatte krajnjih točaka tetive $S_1(3, 4)$ i $S_2(9, 0)$. Polovište te tetive je točka

$$P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$
$$P\left(\frac{3+9}{2}, \frac{4+0}{2}\right)$$
$$P(6,2)$$

Sada točkom P povucimo pravac n okomit na pravac p. Budući da je p tangenta tražene kružnice, n je njezina normala, pa prolazi središtem S te kružnice. Budući da je koeficijent smjera pravca p jednak

$$k_p = -\frac{2}{3}$$

(dobijemo ga tako da jednadžbu pravca p zapišemo u eksplicitnom obliku i očitamo koeficijent uz x), koeficijent smjera pravca n mora biti suprotan i recipročan koeficijentu k_p (jer su ti pravci međusobno okomiti):

$$k_n = -\frac{1}{k_p}$$
$$k_n = -\frac{1}{-\frac{2}{3}}$$
$$k_n = \frac{3}{2}$$

Prema tome, jednadžba pravca n kroz točku P i s koeficijentom smjera k_n glasi:

$$n \ldots\ y - 2 = \frac{3}{2}(x - 6),$$

odnosno

$$n \ldots\ y = \frac{3}{2}x - 7.$$

Traženo središte kružnice je sjecište pravaca n i q, a dobijemo ga rješavajući sustav:

$$y = \frac{3}{2}x - 7$$
$$x - 2y - 6 = 0$$

Uvrštavanjem prve jednadžbe u drugu dobijemo:

$$x - 3x + 14 - 6 = 0,$$

a odavde je $x = 4$. Zbog toga je $y = \frac{3}{2} \cdot 4 - 7 = -1$, pa je $S(4, -1)$.

598. *Omjer duljina osnovice i kraka jednakokračnoga trokuta je* $\sqrt{2-\sqrt{2}}$. *Izračunajte kut između krakova toga trokuta*.

Rješenje: Radi određenosti, neka je ABC zadani jednakokračan trokut takav da je $|AC| = |BC|$. Označimo traženi kut s α (to je kut kod vrha C). Povucimo iz vrha C visinu na osnovicu (ta visina je kod jednakokračnoga trokuta ujendo i simetrala kuta α) i neka je D njezino nožište na osnovici AB. U pravokutnom trokutu ADC kut kod vrha C jednak je $\frac{\alpha}{2}$, te je

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{|AD|}{|AC|}$$
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2}|AB|}{|AC|}$$
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{|AB|}{|AC|}$$

Prema pretpostavci, omjer osnovice i kraka jednak je $\sqrt{2-\sqrt{2}}$, što znači da je

$$\frac{|AB|}{|AC|}=\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Zbog toga je

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},$$

pa je kosinus traženoga kuta jednak

$$\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$
$$\cos\alpha=1-2\cdot\frac{\sqrt{2}-2}{4}$$
$$\cos\alpha=1-\frac{\sqrt{2}-2}{2}$$
$$\cos\alpha=\frac{2-(\sqrt{2}-2)}{2}$$

odnosno

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Jedino rješenje ove trigonometrijske jednadžbe u intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ (jer svi kutovi trokuta moraju pripadati tome intervalu) jest $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Dakle, traženi kut jednak je $\frac{\pi}{4}$ (ili ekvivalentno 45°).

599. *Središnji kutovi dvaju pravilnih poligona razlikuju se za* 10°, *a brojevi vrhova odnose se kao* 2 : 3. *Izračunajte razliku brojeva vrhova tih poligona.*

Rješenje: Broj vrhova nekoga pravilnoga poligona uvijek je jednak broju njegovih stranica. Stoga neka je n_1 broj stranica prvoga poligona, a n_2 broj stranica drugoga poligona. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $n_1 \leq n_2$. Iz podatka o omjeru brojeva vrhova tih poligona slijedi da vrijedi razmjer:

$$n_1 : n_2 = 2 : 3$$

iz kojega je

$$n_2=\frac{3}{2}n_1.$$

Središnji kut poligona s n_1 stranica jednak je

$$\alpha_1=\frac{360°}{n_1},$$

a poligona s n_2 stranica

$$\alpha_2 = \frac{360°}{n_2}.$$

Kako poligon s manje stranica ima veći središnji kut, to je $\alpha_1 \geq \alpha_2$, pa iz podatka da se središnji kutovi razlikuju za 10° slijedi:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 10°,$$

odnosno

$$\frac{360°}{n_1} - \frac{360°}{n_2} = 10°.$$

Tako smo dobili sustav jednadžbi:

$$n_2 = \frac{3}{2} n_1$$
$$\frac{360°}{n_1} - \frac{360°}{n_2} = 10°$$

Uvrštavanjem prve jednadžbe u drugu dobiva se:

$$\frac{360°}{n_1} - \frac{360°}{\frac{3}{2} n_1} = 10°$$
$$\frac{360°}{n_1} - \frac{240°}{n_1} = 10°$$
$$\frac{120°}{n_1} = 10°$$

a odavde je $n_1 = 12$. Sada je lako izračunati

$$n_2 = \frac{3}{2} n_1 = \frac{3}{2} \cdot 12 = 18$$

pa je tražena razlika jednaka

$$n_2 - n_1 = 18 - 12 = 6.$$

600. *Zadan je trapez ABCD čije su osnovice AB*, $|AB| = 12$, *i CD*, $|CD| = 8$, *duljina kraka AD* $|AD| = 5$ *i kut* $\angle BAD = 60°$. *Neka je E sjecište dijagonala AC i BD. Izračunajte površinu trokuta BCE.*

Rješenje: Povucimo iz vrha D visinu na osnovicu AB i neka je N njezino noižište. Trokut ADN je pravokutan, njegov kut kod vrha A jednak je 60°, a njegova hipotenuza AD duga je 5. Stoga je duljina visine trapeza

$$v = 5 \sin 60°$$
$$v = \frac{5}{2}\sqrt{3}$$

pa je njegova površina jednaka

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|) \cdot v$$
$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}(12+8) \cdot \frac{5}{2}\sqrt{3}$$
$$P_{ABCD} = 25\sqrt{3}$$

Odredimo površine trokutova *ACD* i *ABD*. U trokutu *ACD* znamo duljine dviju stranica: $|AD| = 5$, $|CD| = 8$, te kut između njih:

$\angle CDA = 180° - \angle BAD$ (u svakome je trapezu zbroj kutova uz isti krak jednak 180°)
$\angle CDA = 180° - 60°$
$\angle CDA = 120°$

Zbog toga je površina trokuta *ACD* jednaka

$$P_{ACD} = \frac{1}{2}|AD| \cdot |CD| \cdot \sin \angle CDA$$
$$P_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin 120°$$
$$P_{ACD} = 10\sqrt{3}$$

Nadalje, u trokutu *ABD* znamo duljine dviju stranica: $|AD| = 5$, $|AB| = 12$, te kut između njih: $\angle BAD = 60°$. Stoga je površina toga trokuta jednaka

$$P_{ABD} = \frac{1}{2}|AD| \cdot |AB| \cdot \sin \angle BAD$$
$$P_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 \cdot \sin 60°$$
$$P_{ABD} = 15\sqrt{3}$$

Točkom *E* zadani je trapez podijeljen na sljedeće trokutove: *ABE*, *BCE*, *CDE* i *AED*. Očito je:

$$P_{ACD} = P_{CDE} + P_{AED},$$

te

$$P_{ABD} = P_{ABE} + P_{AED}.$$

Oduzmimo prvu jednakost od druge, pa dobijemo:

$$P_{ABE} - P_{CDE} = P_{ABD} - P_{ACD}.$$

U dobivenu jednakost uvrstimo $P_{ABD} = 15\sqrt{3}$ i $P_{ACD} = 10\sqrt{3}$, pa dobijemo:

$$P_{ABE} - P_{CDE} = 5\sqrt{3}.$$

Označimo s x visinu trokuta *ABE* povučenu iz vrha *E* na stranicu *AB*. Tada je visina trokuta *CDE* povučena iz vrha *E* na stranicu *CD* jednaka $v - x$. Tako je površina trokuta *ABE* jednaka

$$P_{ABE}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot v_{AB}$$
$$P_{ABE}=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot x$$
$$P_{ABE}=6\cdot x$$

a površina trokuta *CDE*

$$P_{CDE}=\frac{1}{2}\cdot|CD|\cdot v_{CD}$$
$$P_{CDE}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot(v-x)$$
$$P_{CDE}=4\cdot(\frac{5}{2}\sqrt{3}-x)$$
$$P_{CDE}=10\sqrt{3}-4x$$

Uvrstimo dobivene izraze u jednakost

$$P_{ABE}-P_{CDE}=5\sqrt{3}$$

pa dobijemo:

$$6x-10\sqrt{3}+4x=5\sqrt{3}\ ,$$

a odavde je

$$x=\frac{3\sqrt{3}}{2}\,.$$

Stoga je površina trokuta *ABE* jednaka

$$P_{ABE}=6\cdot x=9\sqrt{3}\,.$$

Preostaje nam još zapisati površinu trapeza *ABCD* kao zbroj površina trokutova *ACD*, *ABE* i *BCE*:

$$P_{ABCD}=P_{ACD}+P_{ABE}+P_{BCE},$$

otkuda je

$$P_{BCE}=P_{ABCD}-P_{ACD}-P_{ABE}.$$

U tu jednakost uvrstimo $P_{ABCD}=25\sqrt{3}$, $P_{ACD}=10\sqrt{3}$ i $P_{ABE}=9\sqrt{3}$ i konačno dobijemo:

$$P_{BCE}=6\sqrt{3}\,.$$

601. *Izračunajte vrijednost sljedećega brojevnoga izraza*:

$$\sqrt{\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^2+\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}-\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^2}\ .$$

Rješenje: Koristimo formule za kvadrat zbroja i kvadrat razlike binoma. Imamo redom:

$$\sqrt{\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^2+\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}-\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^2}=$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^2+2\cdot\sqrt{4+\sqrt{15}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}}+\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^2+\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^2-2\cdot\sqrt{4+\sqrt{15}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}}+\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{4+\sqrt{15}+4-\sqrt{15}+4+\sqrt{15}+4-\sqrt{15}}=\sqrt{16}=4.$$

602. *Odredite realni dio kompleksnoga broja*

$$z=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3.$$

Rješenje: Koristimo formulu za kub razlike binoma, te potencije broja i:

$$i^2=-1,\ i^3=-i.$$

Imamo redom:

$$z=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=$$

$$=\frac{1}{8}-3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}i+3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}i^2-\frac{3\sqrt{3}}{8}i^3=\frac{1}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{8}i-\frac{9}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{8}i^3=-1$$

Odatle izravno slijedi

$$\mathrm{Re}\ z=\mathrm{Re}\ (-1)=-1.$$

603. *Odredite prirodno područje definicije* (*domenu*) *funkcije*

$$f(x)=(x^3-2x^2-3x)^{-1}.$$

Rješenje: Najprije zapišimo zadanu funkciju bez negativnoga eksponenta -1:

$$f(x)=\frac{1}{x^3-2x^2-3x}.$$

Vidimo da je riječ o racionalnoj funkciji. Ona nije definirana jedino u točkama u kojima njezin nazivnik poprima vrijednost nula. Da dobijemo te točke, izjednačimo nazivnik s nulom:

$$x^3-2x^2-3x=0,$$

što možemo pisati u obliku

$$x\cdot(x^2-2x-3)=0.$$

Ovaj će umnožak biti jednak nuli ako i samo ako barem jedan od njegovih faktora bude jednak nuli. Izjednačavanjem prvoga faktora s nulom dobivamo $x=0$, a izjednačavanjem drugoga kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

čija su rješenja $x_1 = -1$ i $x_2 = 3$. Prema tome, nultočke nazivnika polazne funkcije su $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ i $x_3 = 3$, pa je traženo prirodno područje definicije te funkcije skup $\mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 3\}$.

604. *Ako je* $f^{-1}(x) = \frac{2(x-2)}{x+1}$, *izračunajte* $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Rješenje: Iz $f^{-1}(x) = \frac{2(x-2)}{x+1}$ slijedi:

$$f\left[f^{-1}(x)\right] = f\left[\frac{2(x-2)}{x+1}\right].$$

Prema definiciji inverzne funkcije je

$$f\,[f^{-1}(x)] = x,$$

pa gornja jednakost prelazi u

$$f\left[\frac{2(x-2)}{x+1}\right] = x$$

Da izračunamo $f\left(\frac{1}{2}\right)$, odredit ćemo x takav da vrijedi

$$\frac{2(x-2)}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

Rješavanjem te jednadžbe dobijemo:

$$4x - 8 = x + 1,$$

odnosno

$$x = 3.$$

Sad $x = 3$ uvrstimo u jednakost

$$f\left[\frac{2(x-2)}{x+1}\right] = x.$$

Vrijednost izraza u uglatoj zagradi jednaka je $\frac{1}{2}$ jer smo x i određivali upravo tako da vrijednost toga izraza bude $\frac{1}{2}$. Tako dobivamo željeni rezultat:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3.$$

605. *Za koje vrijednosti realnoga parametra a najmanja vrijednost polinoma*

$$p(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax + 14$$

iznosi 6?

Rješenje: Uočimo odmah da se radi o polinomu 2. stupnja, odnosno o kvadratnoj funkciji. Budući da je njezin vodeći koeficijent (uz x^2) strogo veći od nule, ta funkcija ima svoju najmanju vrijednost. Ona je jednaka ordinati tjemena pripadnoga grafa funkcije (parabole), a ta je dana formulom $\frac{4AC - B^2}{4A}$ (za polinom $p(x) = Ax^2 + Bx + \quad + C$). Prema tome, da bi najmanja vrijednost polinoma bila jednaka 6, mora vrijediti jednakost

$$\frac{4AC - B^2}{4A} = 6$$

U tu jednakost uvrstimo $A = \frac{1}{2}$, $B = -a$ i $C = 14$ pa dobijemo:

$$\frac{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 14 - (-a)^2}{4 \cdot \frac{1}{2}} = 6$$

$$\frac{28 - a^2}{2} = 6$$

Odavde dobivamoi kvadratnu jednadžbu

$$a^2 = 16$$

čija su rješenja $a_1 = -4$ i $a_2 = 4$, i to su tražene vrijednosti realnoga parametra a.

606. *Odredite zbroj svih realnih rješenja jednadžbe*

$$\log_{\log x}(4\log^2 x + 5\log x) = \frac{3}{4}\log 10000.$$

Rješenje: Najprije postavimo uvjete na vrijednost nepoznanice x:

$\log x > 0$ (baza logaritma mora biti strogo pozitivna)
$\log x \neq 1$ (baza logaritma ne smije biti jednaka 1)
$4 \log^2 x + 5 \log x > 0$ (da bi logaritam bio definiran)

Uočimo odmah da uvjet $\log x > 0$ povlači uvjet $4 \log^2 x + 5 \log x > 0$, pa treći uvjet možemo izostaviti. Dakle, uvjeti na vrijednost nepoznanice x su:

$$\log x > 0$$
$$\log x \neq 1$$

Prije nego što antilogaritmiramo polaznu jednadžbu uočimo da je na njezinoj desnoj strani konstanta (izraz koji ne ovisi o vrijednosti nepoznanice x). Izračunajmo tu konstantu:

$$\frac{3}{4}\log 10000 = \frac{3}{4}\log(10^4) = \frac{3}{4} \cdot 4 \cdot \log 10 = 3 \cdot 1 = 3$$

Tako polaznu jednadžbu možemo zapisati u ekvivalentnom obliku

$$\log_{\log x}(4\log^2 x + 5\log x) = 3$$

Antilogaritmiranjem dobijemo:

$$4 \log^2 x + 5 \log x = \log^3 x,$$

odnosno

$$\log^3 x - 4 \log^2 x - 5 \log x = 0.$$

Stavimo li $t = \log x$, dobivamo jednadžbu

$$t^3 - 4t^2 - 5t = 0$$

koju možemo zapisati u obliku

$$t \cdot (t^2 - 4t - 5) = 0.$$

Uvjet $\log x > 0$ ekvivalentan je uvjetu $t > 0$, pa gornju jednadžbu smijemo podijeliti s t. Tako dobivamo:

$$t^2 - 4t - 5 = 0$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $t_1 = -1$ i $t_2 = 5$. Zbog uvjeta $t > 0$ rješenje t_1 ne dolazi u obzir. Sada iz $t_2 = 5$ vraćanjem zamijenjenoga izraza dobijemo

$$\log x = 5$$

a odavde je

$$x = 10^5 = 100\,000.$$

Prema tome, jedino realno rješenje polazne jednadžbe jest $x = 100\,000$ pa je zbroj svih njezinih realnih rješenja jednak tome broju, odnosno 100 000.

607. *Riješite nejednadžbu*:

$$(x-1)^{x^2-6x+10} > x - 1$$

<u>**Rješenje:**</u> Budući da se izraz $x - 1$ na lijevoj strani javlja kao baza potencije, njegova vrijednost mora biti strogo pozitivna. To znači da cijelu nejednadžbu smijemo podijeliti s $x - 1$. Tako ćemo dobiti:

$$(x-1)^{x^2-6x+9} > (x-1)^0,$$

odnosno

$$(x-1)^{(x-3)^2} > (x-1)^0.$$

Sada razlikujemo dva slučaja:

1.) $0 < x - 1 < 1$

U ovome slučaju usporedbom eksponenata dobivamo

$$(x-3)^2 < 0,$$

a ta nejednakost ne vrijedi niti za jedan $x \in \mathbf{R}$. Stoga u ovom slučaju polazna nejednadžba nema rješenja.

2.) $x - 1 > 1$

U ovome slučaju usporedbom eksponenata dobivamo:

$$(x-3)^2 > 0,$$

a ta nejednakost vrijedi za sve $x \in \mathbf{R}$ različite od 3, tj. $x \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$, tj. $x \in \langle -\infty, 3\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle$. Tako smo dobili sustav:

$$\begin{gathered} x - 1 > 1 \\ x \in \langle -\infty, 3\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle \end{gathered}$$

Iz prve nejednadžbe je $x > 2$, odnosno $x \in \langle 2, +\infty\rangle$. Rješenje sustava je presjek skupova $\langle 2, +\infty\rangle$ i $\langle -\infty, 3\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle$, a to je skup $\langle 2, +\infty\rangle \setminus \{3\}$.

Prema tome, skup svih rješenja polazne nejednadžbe jest $\langle 2, +\infty\rangle \setminus \{3\}$.

608. *Cijena neke robe u* 2004. *se godini mijenjala točno tri puta*: 01.03. *uvećana je za* 15%, 01.06. *uvećana je za* 20 kn, *a* 01.10. *snižena je za* 10%. *Ako se u* 2004. *godini cijena te robe ukupno uvećala za* 5%, *izračunajte njezinu cijenu na dan* 01.02.2004.

Rješenje: Neka je c tražena cijena. Tada možemo sastaviti sljedeću tablicu:

Datum	*Stara cijena*	*Promjena cijene*	*Nova cijena*
01.03.	c	+15%	$c + \frac{15}{100} \cdot c = c \cdot \left(1 + \frac{15}{100}\right) = 1.15 \cdot c$
01.06.	$1.15 \cdot c$	+ 20 kn	$1.15 \cdot c + 20$
01.10.	$1.15 \cdot c + 20$	–10%	$(1.15 \cdot c + 20) - \frac{10}{100} \cdot (1.15 \cdot c + 20) =$ $= (1.15 \cdot c + 20) \cdot \left(1 - \frac{10}{100}\right) =$ $= (1.15 \cdot c + 20) \cdot 0.9 =$ $= 1.035 \cdot c + 18$

S druge strane, znamo da se cijena u 2004. godini ukupno uvećala za 5%. Kako je cijena na početku godine bila također c, to je cijena na kraju godine

$$c + \frac{5}{100} \cdot c = c \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 1.05 \cdot c$$

Tako smo dobili dva izraza za istu vrijednost: Iz tablice vidimo da je cijena na kraju godine jednaka $1.035 \cdot c + 18$ kuna, a iz gornjega računa da je ta ista cijena jednaka $1.05 \cdot c$. Izjednačavanjem tih dvaju izraza dobivamo jednadžbu

$$1.035 \cdot c + 18 = 1.05 \cdot c.$$

Njezino je rješenje $c = 1200$ kn. Dakle, cijena te robe na dan 01.02.2004. iznosila je 1200 kn.

609. *Između* 5 *muškaraca i* 3 *žene bira se jednak broj muškaraca i žena za sastav četveročlanoga izaslanstva. Na koliko se različitih načina može izvršiti taj izbor*?

Rješenje: Budući da četveročlano izaslanstvo broji točno četiri člana, a u njemu treba biti jednak broj muškaraca i žena, slijedi da u izaslanstvu moraju biti točno dva muškarca i dvije žene. Dva muškarca – od njih ukupno 5 – možemo izabrati na $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$ različitih načina, a dvije žene – od njih ukupno 3 – na $\binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$ različita načina. Prema načelu umnoška, traženi broj načina jednak je $10 \cdot 3 = 30$.

610. *Simetričnu igraću kocku nezavisno bacamo dva puta. Izračunajte vjerojatnost da u oba bacanja padnu prosti prirodni brojevi.*

Rješenje: Simetrična igraća kocka je kocka čiji su svi bridovi jednako dugi, a plohe numerirane brojevima 1, 2, 3, 4, 5 i 6 pri čemu je svaka ploha numerirana točno jednim od tih šest brojeva i nikoje dvije plohe nisu numerirane istim brojem. Stoga je prostor elementarnih događaja u ovom slučaju

$$\Omega = \{(i, j) : i = 1, 2, 3, 4, 5, 6; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(imamo ukupno dva nezavisna bacanja i u svakom od njih mora pasti točno jedan od brojeva 1, 2, 3, 4, 5, 6). Prema načelu umnoška, ukupan broj mogućih ishoda ovoga slučajnoga pokusa, odnosno ukupan broj elemenata skupa Ω, jednak je

$$card(\Omega) = 6 \cdot 6 = 36.$$

Odredimo koji su nam ishodi povoljni. Među brojevima 1, 2, 3, 4, 5 i 6 nalaze se tri prosta broja: 2, 3 i 5. Stoga je skup povoljnih ishoda ovoga pokusa

$$A = \{(i, j) : i = 2, 3, 5; j = 2, 3, 5\}.$$

Prema načelu umnoška ukupan broj povoljnih ishoda promatranoga pokusa, odnosno ukupan broj elemenata skupa A, jednak je

$$card(A) = 3 \cdot 3 = 9.$$

Stoga je tražena vjerojatnost jednaka

$$p = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\% .$$

611. *Kutovi trokuta odnose se kao* 3 : 4 : 5. *Ako je površina kruga opisanoga trokutu* 36π, *izračunajte površinu trokuta.*

Rješenje: Izračunajmo najprije veličinu kutova trokuta. Uz standardne oznake u trokutu, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi prošireni razmjer

$$\alpha : \beta : \gamma = 3 : 4 : 5.$$

Prema definiciji razmjera, to znači da postoji realan broj $k \in \mathbf{R}$ takav da vrijede jednakosti

$$\alpha = 3 \cdot k$$
$$\beta = 4 \cdot k$$
$$\gamma = 5 \cdot k$$

Budući da je zbroj kutova u svakom trokutu jednak 180°, mora vrijediti i jednakost:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Uvrštavanjem izraza za α, β i γ dobivamo:

$$3k + 4k + 5k = 180°,$$

a odavde je $k = 15°$. Prema tome, kutovi trokuta su

$$\alpha = 3k = 3 \cdot 15° = 45°,$$
$$\beta = 4k = 4 \cdot 15° = 60°,$$
$$\gamma = 5k = 5 \cdot 15° = 75°$$

Podatak da je površina kruga opisanoga trokutu jednaka 36π možemo zapisati u obliku jednadžbe:

$$R^2\pi = 36\pi$$

(R je polumjer trokutu opisane kružnice). Odavde je $R = 6$ (rješenje $R = -6$ ne dolazi u obzir jer duljina polumjera ne može biti strogo negativan realan broj), pa možemo izračunati duljine dviju stranica trokuta:

$$a = 2R \sin \alpha = 2 \cdot 6 \cdot \sin 30° = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$$
$$b = 2R \sin \beta = 2 \cdot 6 \cdot \sin 45° = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$

Za izračunavanje površine trokuta još nam treba vrijednost $\sin \gamma = \sin 75°$. Ona je jednaka:

$$\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Tako je tražena površina jednaka

$$P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$
$$P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \sin 75°$$
$$P = 18\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$
$$P = \frac{18\sqrt{12} + 36}{4}$$
$$P = \frac{18 \cdot 2\sqrt{3} + 36}{4}$$
$$P = 9\sqrt{3} + 9$$
$$P = 9 \cdot (\sqrt{3} + 1)$$

612. *Tupi kut romba iznosi* 150°, *a duljina njegove kraće dijagonale* 4 cm. *Izračunajte površinu toga romba*.

Rješenje: Radi određenosti neka je $ABCD$ zadani romb i neka je a duljina njegove stranice. Prema podacima navedenima u zadatku je $\angle ABC = 120°$ i $|BD| = 3$ cm. Promotrimo trokut ABD. Dvije njegove stranice – AB i AD – imaju duljine jednake a, pa je taj trokut jednakokračan. Kut kod vrha A jednak je

$$\angle BAD = 180° - \angle ABD$$

(jer je zbroj dvaju susjednih kutova u svakom usporedniku jednak 180°), pa uvrštavanjem $\angle ABD = 120°$ dobivamo:

$$\angle BAD = 180° - 150°$$
$$\angle BAD = 30°$$

Sada primijenimo kosinusov poučak na trokut ABD:

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \cos(\angle BAD)$$
$$4^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos 30°,$$
$$16 = 2a^2 - 2a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$16 = a^2 \cdot (2 - \sqrt{3})$$

i konačno

$$a^2 = \frac{16}{2-\sqrt{3}} = \frac{16 \cdot (2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3}) \cdot (2+\sqrt{3})} = \frac{16 \cdot (2+\sqrt{3})}{4-3} = 16 \cdot (2+\sqrt{3})$$

Prema tome, tražena površina romba jednaka je

$$P = a^2 \sin(\angle BAD)$$
$$P = 16 \cdot (2+\sqrt{3}) \cdot \sin 30°$$
$$P = 16 \cdot (2+\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2}$$
$$P = 16 + 8\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

613. *Ako je prikloni kut bočne strane prema osnovki pravilne uspravne četverostrane piramide jednak* 60°, *izračunajte kut koji zatvaraju dva susjedna bočna brida.*

Rješenje: Označimo duljinu osnovice te piramide s a, visinu s v, a bočni brid s b. Promotrimo jedan od karakterističnih pravokutnih trokutova te piramide čije su katete visina piramide i polovica dijagonale osnovke, a hipotenuza bočni brid piramide. Kut između bočnoga brida i polovice dijagonale osnovke u tom trokutu upravo je zadani prikloni kut $\alpha = 60°$. Tako imamo:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{b}$$
$$\cos 60° = \frac{a\sqrt{2}}{2b}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2b}$$

a odavde je

$$a = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Sada promotrimo jednu bočnu stranu. To je jednakokračan trokut kojemu su krakovi dva susjedna bočna brida zadane piramide, osnovica osnovni brid piramide, a kut nasuprot osnovici upravo kut kojega tražimo. Označimo li traženi kut s β, primjenom kosinusoba poučka dobivamo:

$$a^2 = b^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot b \cdot \cos \beta$$

U tu jednakost uvrstimo $a = \frac{b}{\sqrt{2}}$ pa dobijemo:

$$\frac{b^2}{2} = 2b^2 - 2b^2 \cos \beta ,$$

a odavde je

$$\cos \beta = \frac{2b^2 - \frac{b^2}{2}}{2b^2}$$
$$\cos \beta = 1 - \frac{1}{4}$$
$$\cos \beta = \frac{3}{4}$$

Jedino rješenje ove trigonometrijske jednadžbe koje pripada intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ (β je kut trokuta, pa ne može biti manji od 0 ili veći od π) jest

$$\beta = 41.409622109270859338480502186925 7°,$$

odnosno približno

$$\beta = 41°24'35''.$$

614. *Odredite vrijednost realnoga parametra $a \in \mathbf{R}$ tako da se pravci*

$$p_1 \ldots \ \frac{x}{1-a} + \frac{y}{\frac{2}{a} - 1} = 1 ,$$
$$p_2 \ldots \ 7x - 4y + 4 = 0$$
$$p_3 \ldots \ y = -\frac{2}{3}x + 1$$

sijeku u istoj točki.

Rješenje: Odredimo najprije sjecište pravaca p_2 i p_3. U tu svrhu riješimo sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$7x - 4y + 4 = 0$$
$$y = -\frac{2}{3}x + 1$$

Uvrštavanjem druge jednadžbe u prvu dobivamo:

$$7x - 4 \cdot (-\frac{2}{3}x + 1) + 4 = 0 \qquad / \cdot 3$$
$$21x + 8x - 12 + 12 = 0$$

i odavde $x = 0$. Stoga je pripadni y jednak

$$y = -\frac{2}{3} \cdot 0 + 1 = 1$$

pa je sjecište pravaca p_2 i p_3 točka $S(0, 1)$. Ta točka mora ležati i na pravcu p_1 pa uvrštavanjem njezinih koordinata u jednadžbu toga pravca dobivamo:

$$\frac{0}{1-a} + \frac{1}{\frac{2}{a} - 1} = 1,$$

otkuda je

$$\frac{2}{a} - 1 = 1,$$

odnosno $a = 1$.

615. *Napišite jednadžbe svih tangenata na krivulju* $9x^2 - 4y^2 = 36$ *koje su usporedne s osi ordinata.*

Rješenje: Opći oblik jednadžbe tih tangenata jest $x = a$, gdje je $a \in \mathbf{R}$ realan parametar. Stoga rješavamo sustav:

$$9x^2 - 4y^2 = 36$$
$$x = a$$

i želimo da taj sustav ima točno jedno realno rješenje (jer tangenta siječe zadanu krivulju u točno jednoj točki). Uvrštavanjem druge jednadžbe u prvu dobivamo:

$$9a^2 - 4y^2 - 36 = 0,$$

odnosno

$$4y^2 - (9a^2 - 36) = 0$$

To je nepotpuna kvadratna jednadžba (s nepoznanicom y) koja ima točno jedno realno rješenje ako i samo ako joj je slobodni član jednak 0. To znači da mora vrijediti jednakost

$$9a^2 - 36 = 0$$

iz koje se dobiva $a_1 = -2$ i $a_2 = 2$. Dakle, tražene tangente su $t_1 \ldots x = -2$ i $t_2 \ldots x = 2$.

616. *Zadane su funkcije* $f(x) = \frac{1+x}{x}$ *i* $g(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$. *Odredite funkciju* $f \circ g$.

Rješenje: Imamo redom:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1+\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{1-\sqrt{x}} = \frac{1\cdot(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \frac{1+\sqrt{x}}{1-x}.$$

617. *Pojednostavnite sljedeći brojevni izraz*:

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2\left(\frac{\sqrt{20}-1}{\sqrt{5}-2}+\sqrt{125}\right)\left(\sqrt{5}-1\right).$$

Rješenje: Imamo redom:

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2\left(\frac{\sqrt{20}-1}{\sqrt{5}-2}+\sqrt{125}\right)\left(\sqrt{5}-1\right) = \frac{2}{16}\cdot\left(\frac{2\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-2}+5\sqrt{5}\right)\cdot(\sqrt{5}-1) = \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{2\sqrt{5}-1+5\cdot5-10\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}\right)\cdot(\sqrt{5}-1) =$$
$$\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{24-8\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}\right)\cdot(\sqrt{5}-1) = \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{8(3-\sqrt{5})}{\sqrt{5}-2}\right)\cdot(\sqrt{5}-1) = \frac{(3-\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}-2} = \frac{3\sqrt{5}-5-3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} = \frac{-8+4\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} =$$
$$\frac{-4(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}-2} = -4$$

618. *Zadani su kompleksni brojevi* $z_1 = -1 + i$ *i* $z_2 = 2 - i$. *Odredite imaginarni dio kompleksnoga broja*

$$z = \frac{2z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2}{z_1^2 + z_2^2}.$$

Rješenje: Zapišimo najprije z u algebarskom obliku. Imamo redom:

$$z = \frac{2z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2}{z_1^2 + z_2^2} = \frac{2(-1+i)\overline{(2-i)} - \overline{(-1+i)}(2-i)}{(-1+i)^2+(2-i)^2} = \frac{2(-1+i)(2+i)-(-1-i)(2-i)}{(-1+i)^2+(2-i)^2} =$$
$$= \frac{2(-2+2i-i+i^2)-(-2-2i+i+i^2)}{(1-2i+i^2)+(4-4i+i^2)} = \frac{2(-3+i)-(-3-i)}{-2i+3-4i} = \frac{-6+2i+3+i}{3-6i} = \frac{-3+3i}{3-6i} =$$
$$\frac{-3(1-i)}{-3(-1+2i)} = \frac{1-i}{-1+2i} = \frac{(1-i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{-1+i-2i+2i^2}{(-1)^2-(2i)^2} = \frac{-3-i}{1+4} = -\frac{3}{5}-\frac{1}{5}i$$

Odavde sada izravno slijedi

$$\operatorname{Im} z = \operatorname{Im}\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{5}i\right) = -\frac{1}{5}$$

619. *Odredite prirodno područje definicije* (*domenu*) *funkcije*

$$f(x) = \frac{10^{1-x}}{x^3-5x^2+4x}.$$

Rješenje: Funkcija $f(x)$ definirana je kao količnik eksponencijalne funkcije i polinoma. Eksponencijalna funkcija definirana je za svaki realan broj $x \in \mathbf{R}$, što znači da je brojnik gornjega razlomka definiran za svaki realan broj $x \in$

R. Prema tome, jedini je uvjet na vrijednost nepoznanice x taj da vrijednost polinoma u nazivniku ne smije biti jednaka nuli. Zato ćemo ispitati ima li točaka u kojima je vrijednost polinoma u nazivniku jednaka nuli, pa će traženo prirodno područje definicije zadane funkcije biti skup koji se dobije izbacivanjem tih točaka iz skupa **R**.

Izjednačavanjem nazivnika s nulom dobivamo jednadžbu

$$x^3 - 5x^2 + 4x = 0$$

koju možemo zapisati u sljedećem obliku

$$x \cdot (x^2 - 5x + 4) = 0.$$

Umnožak na lijevoj strani te jednadžbe jednak je nuli ako i samo ako je barem jedan od faktora jednak nuli. Tako odmah imamo $x_1 = 0$, a izjednačavanjem drugoga faktora s nulom dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

čija su rješenja $x_2 = 1$ i $x_3 = 4$. Dakle, polinom u nazivniku razlomka zadane funkcije poprima vrijednost 0 za točno tri vrijednosti varijable x: $x = 0$, $x = 1$ i $x = 4$. Stoga je traženo prirodno područje definicije zadane funkcije skup **R** \ {0, 1, 4}.

620. *Zbroj svih koeficijenata polinoma* $p(x) = x^2 + ax + b$ *jednak je vrijednosti toga polinoma za* $x_1 = 0$, *a jedna nultočka toga polinoma je* $x_2 = 2$. *Odredite drugu nultočku toga polinoma.*

Rješenje: Zbroj svih koeficijenata zadanoga polinoma jest $S = 1 + a + b$, a vrijednost toga polinoma za $x = 0$ jednaka je b. Te dvije vrijednosti moraju biti jednake, pa dobivamo jednadžbu:

$$1 + a + b = b$$

koja je ekvivalentna jednadžbi

$$1 + a = 0$$

iz koje je $a = -1$. Dakle, koeficijent uz varijablu x jednak je -1. Prema Vièteovim formulama, nultočke x_1 i x_2 polinoma $p(x)$ moraju zadovoljavati jednakost

$$x_1 + x_2 = -a,$$

pa uvrštavanjem $a = -1$ i $x_2 = 2$ u tu jednakost dobivamo:

$$x_1 + 2 = 1,$$

a odavde je $x_1 = -1$. Dakle, tražena nultočka je $x_1 = -1$.

621. *Ako je* $f^{-1}(1-x) = \dfrac{5-2x}{x+2}$, *izračunajte* $f(1)$.

Rješenje: Iz $f^{-1}(1-x) = \dfrac{5-2x}{x+2}$ slijedi:

$$f\left[f^{-1}(1-x)\right] = f\left(\frac{5-2x}{x+2}\right).$$

Prema definiciji inverzne funkcije je

$$f\,[f^{-1}(1-x)] = 1 - x,$$

pa gornja jednakost prelazi u

$$f\left(\frac{5-2x}{x+2}\right)=1-x$$

Da izračunamo $f\,(1)$, odredit ćemo x takav da vrijedi

$$\frac{5-2x}{x+2}=1\,.$$

Rješavanjem te jednadžbe dobijemo:

$$5 - 2x = x + 2,$$

odnosno

$$x = 1.$$

Sad $x = 1$ uvrstimo u jednakost

$$f\left(\frac{5-2x}{x+2}\right)=1-x\,.$$

Vrijednost izraza u zagradi jednaka je 1 jer smo x i određivali upravo tako da vrijednost toga izraza bude 1. Tako dobivamo željeni rezultat:

$$f\,(1) = 1 - 1,$$

odnosno

$$f\,(1) = 0.$$

622. *Riješite jednadžbu*:

$$\frac{1}{4}\cdot 8^{\frac{2x}{3}+1}-4^{\frac{x}{2}+1}\cdot\sqrt{9^x}+2\cdot 27^{\frac{2x}{3}}=0\,.$$

Rješenje: Zapišimo sve članove zadane jednadžbe ili kao potenciju s bazom 2 ili kao potenciju s bazom 3. Imamo redom:

$$\frac{1}{4}\cdot 8^{\frac{2x}{3}+1}-4^{\frac{x}{2}+1}\cdot\sqrt{9^x}+2\cdot 27^{\frac{2x}{3}}=0$$

$$\frac{1}{2^2}\cdot(2^3)^{\frac{2x}{3}+1}-(2^2)^{\frac{x}{2}+1}\cdot\sqrt{(3^2)^x}+2\cdot(3^3)^{\frac{2x}{3}}=0$$

$$2^{-2}\cdot 2^{2x+3}-2^{x+2}\cdot 3^{\frac{2x}{2}}+2\cdot 3^{2x}=0$$

$$2^{2x+1}-2^{x+2}\cdot 3^x+2\cdot 3^{2x}=0$$

$$2^1\cdot 2^{2x}-2^2\cdot 2^x\cdot 3^x+2\cdot 3^{2x}=0$$

$$2\cdot 2^{2x}-4\cdot 2^x\cdot 3^x+2\cdot 3^{2x}=0 \qquad /:2$$

$$2^{2x}-2\cdot 2^x\cdot 3^x+3^{2x}=0$$

$$(2^x-3^x)^2=0$$

$$2^x-3^x=0$$

$$2^x=3^x \qquad /:3^x$$

$$\frac{2^x}{3^x}=1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^0$$

Iz posljednje jednadžbe izjednačavanjem eksponenata izravno dobivamo

$$x = 0.$$

623. *Riješite nejednadžbu*:

$$(2-x)^{x^2}<(2-x)^x .$$

__**Rješenje:**__ Razlikujemo dva slučaja:

1.) $0 < 2 - x < 1$

Iz ove nejednakosti je $1 < x < 2$, odnosno $x \in \langle 1,\ 2\rangle$. Nadalje, usporedbom eksponenata (pri čemu se znak nejednakosti mijenja jer je baza potencije broj između 0 i 1) dobivamo nejednadžbu:

$$x^2 > x,$$

odnosno kvadratnu nejednadžbu

$$x^2 - x > 0.$$

Rješenje te jednadžbe je skup $\langle -\infty,\ 0\rangle \cup \langle 1,\ +\infty\rangle$. Presjek skupova $\langle 1,\ 2\rangle$ i $\langle -\infty,\ 0\rangle \cup \langle 1,\ +\infty\rangle$ je skup $\langle 1,\ 2\rangle$, i to je skup rješenja polazne nejednadžbe.

2.) $2 - x > 1$

Iz ove nejednakosti je $x < 1$, odnosno $x \in \langle -\infty,\ 1\rangle$. Nadalje, usporedbom eksponenata (pri čemu se znak nejednakosti ne mijenja) dobivamo:

$$x^2 < x,$$

odnosno

$$x^2 - x < 0.$$

Rješenje ove kvadratne nejednadžbe je skup $\langle 0,\ 1\rangle$. Presjek skupova $\langle -\infty,\ 1\rangle$ i $\langle 0,\ 1\rangle$ jest skup $\langle 0,\ 1\rangle$, i to je skup rješenja polazne nejednadžbe.

Stoga je skup svih rješenja polazne nejednadžbe unija skupova $\langle 0,\ 1\rangle$ i $\langle 1,\ 2\rangle$, a to je skup $\langle 0,\ 2\rangle \setminus \{1\}$.

624. *Koliko se različitih parnih cijelih brojeva može napisati pomoću znamenaka broja* 404 505 *tako da se svaka od znamenaka toga broja uporabi točno jednom*?

Rješenje: Zbog zahtjeva da svaku od znamenaka navedenoga broja moramo uporabiti točno jednom, svaki od traženih cijelih brojeva mora biti šesteroznamenkast (jer je zadani broj šesteroznamenkast). Pritom jednake znamenke međusobno ne razlikujemo. Budući da niti jedan od tih brojeva ne može početi s nulom, razlikujemo dva slučaja:

1.) Traženi broj počinje s 4 i završava s 0.

Tada na preostala mjesta trebamo rasporediti jednu nulu, jednu četvorku i dvije petice, i to bez ikakvih dodatnih uvjeta. Broj različitih načina na koje to možemo učiniti jednak je $\binom{4}{1,1,2} = \frac{4!}{1!\cdot 1!\cdot 2!} = 12.$

2.) Traženi broj počinje s 4 i završava s 4.

Tada na preostala mjesta trebamo rasporediti dvije nule i dvije petice, i to bez ikakvih dodatnih uvjeta. Broj različitih načina na koje to možemo učiniti jednak je $\binom{4}{2,2} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6.$

3.) Traženi broj počinje s 5 i završava s 0.

Tada na preostala mjesta trebamo rasporediti jednu nulu, jednu peticu i dvije četvorke, i to bez ikakvih dodatnih uvjeta. Broj različitih načina na koje to možemo učiniti jednak je $\binom{4}{1,1,2} = \frac{4!}{1!\cdot 1!\cdot 2!} = 12.$

4.) Traženi broj počinje s 5 i završava s 4.

Tada na preostala mjesta trebamo rasporediti jednu četvorku, jednu peticu i dvije nule, i to bez ikakvih dodatnih uvjeta. Broj različitih načina na koje to možemo učiniti jednak je $\binom{4}{1,1,2} = \frac{4!}{1!\cdot 1!\cdot 2!} = 12.$

Prema načelu zbroja, ukupno imamo $12 + 6 + 12 + 12 = 42$ različita šesteroznamenkasta prirodna broja koja možemo napisati na željeni način. Budući da zadatak traži ukupan broj cijelih brojeva, u obzir valja uzeti i predznak broja kojega možemo odabrati na dva različita načina. Tako je konačno traženi broj jednak $2 \cdot 42 = 84$.

625. *Simetričnu igraću kocku nezavisno bacamo dva puta. Izračunajte vjerojatnost da će prvi dobiveni broj biti djeljiv drugim.*

Rješenje: Simetrična igraća kocka je kocka čiji su svi bridovi jednako dugi, a plohe numerirane brojevima 1, 2, 3, 4, 5 i 6, pri čemu je svaka ploha numerirana točno jednim od tih šest brojeva i nikoje dvije plohe nisu numerirane istim brojem. Stoga je prostor elementarnih događaja u ovom slučaju

$$\Omega = \{(i, j) : i = 1, 2, 3, 4, 5, 6; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(imamo ukupno dva nezavisna bacanja i u svakom od njih mora pasti točno jedan od brojeva 1, 2, 3, 4, 5, 6). Prema načelu umnoška, ukupan broj mogućih ishoda ovoga slučajnoga pokusa, odnosno ukupan broj elemenata skupa Ω, jednak je

$$card(\Omega) = 6 \cdot 6 = 36.$$

Odredimo koji su nam ishodi povoljni. Tražimo sve uređene parove (i, j), $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, takve da $j \mid i$. Skup svih takvih parova je:

$$A = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4), (5,1), (5,5), (6,1), (6,2), (6,3), (6,6)\},$$

pa je $card(A) = 14$. Stoga je tražena vjerojatnost jednaka

$$p = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18} = 0.38888888888888888888888888888889 \approx 38.89\%$$

626. *Tri prijatelja Antun, Branko i Cico dijele svotu od* 14 950 kn *tako da Branko dobije* 10% *više od Antuna, a* 10% *manje od Cice. Izračunajte svotu koju dobiva Cico.*

<u>Rješenje:</u> Označimo s A, B i C svotu koju su dobili redom Antun, Branko i Cico. Podatak da je Branko dobio 10% više od Antuna možemo zapisati u obliku jednakosti

$$B = A + \frac{10}{100} \cdot A,$$

odnosno

$$B = 1.1 \cdot A.$$

Podatak da je Branko dobio 10% manje od Cice možemo zapisati u obliku jednakosti

$$B = C - \frac{10}{100} \cdot C,$$

odnosno

$$B = 0.9 \cdot C.$$

Budući da su lijeve strane jednakosti

$$B = 1.1 \cdot A$$
$$B = 0.9 \cdot C$$

jednake, takve moraju biti i desne strane. Tako iz jednakosti

$$1.1 \cdot A = 0.9 \cdot C$$

slijedi

$$A = \frac{9}{11} \cdot C.$$

Zbroj $A + B + C$ mora biti jednak ukupnom iznosu svote:

$$A + B + C = 14\,950$$

pa kad u ovu jednakost uvrstimo

$$A = \frac{9}{11} \cdot C$$
$$B = 0.9 \cdot C$$

dobivamo:

$$\frac{9}{11} \cdot C + 0.9 \cdot C + C = 14950 \qquad / \cdot 110$$
$$90C + 99C + 110C = 1644500$$

a odavde je

$$C = 5500.$$

Dakle, Cico će dobiti 5 500 kn.

627. *Duljine kateta pravokutnoga trokuta odnose se kao* 3 : 4. *Ako je promjer tom trokutu upisane kružnice* 4 cm, *izračunajte promjer tom trokutu opisane kružnice*.

Rješenje: Označimo duljine kateta toga pravokutnoga trokuta standardno s a i b, a duljinu hipotenuze s c. Odmah primijetimo da je traženi promjer pravokutnom trokutu opisane kružnice jednak duljini hipotenuze toga trokuta, pa zapravo trebamo izračunati duljinu hipotenuze c.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a \leq b$. Podatak da su duljine kateta pravokutnoga trokuta u omjeru 3 : 4 znači da postoji realan broj $k > 0$ (jer su a i b – kao duljine stranica trokuta – strogo pozitivni realni brojevi) takav da vrijedi

$$a = 3 \cdot k$$
$$b = 4 \cdot k$$

Prema Pitagorinu poučku tada je

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$c = \sqrt{(3 \cdot k)^2 + (4 \cdot k)^2}$$
$$c = \sqrt{9k^2 + 16k^2}$$
$$c = \sqrt{25k^2}$$
$$c = 5k$$

Polumjer ρ pravokutnom trokutu upisane kružnice računamo prema formuli

$$\rho = \frac{P}{s}$$

gdje je P površina, a s poluopseg trokuta. Budući da za pravokutan trokut vrijede formule

$$P = \frac{1}{2}ab$$
$$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

uvrštavanjem tih izraza u formulu za ρ dobit ćemo:

$$\rho = \frac{ab}{a+b+c}$$

U dobivenu jednakost uvrstimo $\rho = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$, $a = 3k$, $b = 4k$ i $c = 5k$ pa dobivamo:

$$2 = \frac{3k \cdot 4k}{3k+4k+5k}$$
$$2 = \frac{12k^2}{12k}$$
$$k = 2$$

Prema tome, duljina promjera tome trokutu opisane kružnice, odnosno duljina hipotenuze c jednaka je

$$2R = c = 5 \cdot k$$
$$2R = c = 5 \cdot 2$$
$$2R = c = 10 \text{ cm}$$

628. *Dulja dijagonala romba sa stranicom romba zatvara kut od* 30°. *Ako je duljina kraće dijagonale romba jednaka* 6, *izračunajte površinu toga romba.*

Rješenje: Radi određenosti neka je $ABCD$ zadani romb kojemu se dijagonale sijeku u točki S. Promotrimo trokut ABS. Budući da je romb četverokut s okomitim dijagonalama, kut $\angle BSA$ jednak je 90°. Nadalje, kut $\angle BAS$ jednak je kutu između dulje dijagonale romba i stranice romba, dakle,

$$\angle BAS = 30°.$$

Iz pravokutnoga trokuta ABS slijedi

$$\text{tg}\,\angle BAS = \frac{|BS|}{|AS|}$$
$$\text{tg}\,30° = \frac{\frac{1}{2} \cdot |BD|}{|AS|}$$
$$|AS| = \frac{|BD|}{2 \cdot \text{tg}\,30°}$$
$$|AS| = \frac{|BD|}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}$$
$$|AS| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |BD|$$

U posljednju jednakost uvrstimo $|BD| = 6$ pa dobijemo:

$$|AS| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6$$
$$|AS| = 3\sqrt{3}$$

Prema tome, površina romba jednaka je

$$P = |AS| \cdot |BD|$$
$$P = 3\sqrt{3} \cdot 6$$
$$P = 18\sqrt{3}$$

629. *Prikloni kut pravilne uspravne četvrostrane piramide iznosi* $45°$. *Ako obujam piramide iznosi* $\frac{9}{2}\sqrt{2}$ cm^3, *izračunajte duljinu njezina osnovnoga brida.*

Rješenje: Označimo s a traženu duljinu osnovnoga brida piramide, s v visinu piramide, a s b duljinu njezina bočnoga brida. Promatrajmo jedan od karakterističnih poprečnih presjeka piramide, odnosno pravokutan trokut kojemu su duljine kateta jednake v i $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a$ (polovica duljine dijagonale osnovke), a duljina hipotenuze b. Kut α između hipotenuze i katete čija je duljina $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a$ u tom trokutu jednak je upravo priklonom kutu:

$$\alpha = 45°.$$

Tako iz navedenoga pravokutnoga trokuta slijedi:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a}$$
$$\operatorname{tg} 45° = \frac{2v}{\sqrt{2} \cdot a}$$
$$1 = \frac{2v}{\sqrt{2} \cdot a}$$

a odatle je

$$v = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a .$$

Obujam zadane piramide računamo prema formuli

$$V = \frac{1}{3} B \cdot v,$$
$$V = \frac{1}{3} a^2 \cdot v$$

U tu formulu uvrstimo $V = \frac{9}{2}\sqrt{2}$ i $v = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a$ pa dobijemo:

$$\frac{9}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a ,$$

a odatle je

$$a^3 = 27,$$

odnosno

$$a = 3 \text{ cm}.$$

630. *Dvije stranice kvadrata leže na pravcima* $p_1 \ldots \ \frac{x}{\frac{2}{3}} + \frac{y}{\frac{1}{2}} = 1$ *i* $p_2 \ldots \ y = -\frac{3}{4}x + 3$. *Izračunajte površinu toga kvadrata.*

Rješenje: Zapišimo najprije jednadžbe zadanih pravaca u implicitnom obliku:

$$p_1 \ldots \ \frac{x}{\frac{2}{3}} + \frac{y}{\frac{1}{2}} = 1$$
$$p_1 \ldots \ \frac{3x}{2} + 2y = 1$$
$$p_1 \ldots \ 3x + 4y - 2 = 0$$

i

$$p_2 \ldots \ 3x + 4y - 12 = 0$$

Udaljenost između pravaca p_1 i p_2 jednaka je duljini stranice kvadrata:

$$a = \frac{|-12 - (-2)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$
$$a = \frac{|-10|}{\sqrt{25}}$$
$$a = \frac{10}{5}$$
$$a = 2$$

Stoga je tražena površina kvadrata jednaka

$$P = a^2$$
$$P = 2^2$$
$$P = 4.$$

631. *Odredite jednadžbe svih tangenata na krivulju* $x^2 + 2y^2 = 8$ *koje su usporedne s osi apscisa.*

Rješenje: Opća jednadžba familije pravaca usporednih s osi apscisa jest

$$y = a,\ a \in \mathbf{R}.$$

Pravac te familije je tangenta na zadanu krivulju ako i samo ako sustav jednadžbi (s nepoznanicama x i y)

$$x^2 + 2y^2 = 8$$
$$y = a$$

ima jedinstveno rješenje. Uvrštavanjem druge jednadžbe u prvu dobivamo:

$$x^2 + 2a^2 = 8,$$

a odavde je

$$x^2 = 8 - 2a^2.$$

Ta jednadžba (s nepoznanicom x) će imati točno jedno realno rješenje ako i samo ako vrijednost izraza na njezinoj desnoj strani bude jednaka nuli:

$$8 - 2a^2 = 0,$$

a odatle je

$$a^2 = 4.$$

Prema tome, $a_1 = -2$ i $a_2 = 2$, pa su tražene jednadžbe tangenata

$$t_1 \ldots\ y = -2$$
$$t_2 \ldots\ y = 2$$

632. *Zadan je kvadrat ABCD čija je stranica duga* 6. *Neka je E točka koja dijeli stranicu AB u omjeru* 2 : 1 *računajući od vrha A*, *a F točka koja dijeli stranicu BC u omjeru* 1 : 2 *računajući od vrha B*. *Izračunajte površinu trokuta EFD*.

Rješenje: To što točka E dijeli dužinu AB u omjeru 2 : 1 računajući od vrha A znači da vrijedi razmjer:

$$|AE| : |EB| = 2 : 1,$$

iz kojega je

$$|AE| = 2 \cdot |EB|.$$

Kako je

$$|AE| + |EB| = 6,$$

uvrštavanjem $|AE| = 2 \cdot |EB|$ u tu jednakost dobivamo:

$$2 \cdot |EB| + |EB| = 6,$$

a odavde je $|EB| = 2$. Stoga je

$$|AE| = 2 \cdot |EB| = 4.$$

Na potpuno analogan način, iz podatka da je F točka koja dijeli stranicu BC u omjeru 1 : 2 računajući od vrha B slijedi razmjer

$$|BF| : |FC| = 1 : 2$$

iz kojega je

$$|FC| = 2 \cdot |BF|,$$

pa uvrštavanjem te jednakosti u

$$|BF| + |FC| = |BC| = 6$$

dobivamo

$$3 \cdot |BF| = 6,$$

odnosno $|BF| = 2$, te $|FC| = 2 \cdot |BF| = 4$. Tako je tražena površina jednaka:

$$P_{EFD} = P_{ABCD} - (P_{AED} + P_{EBF} + P_{FCD})$$
$$P_{EFD} = |AB|^2 - \left(\frac{|AE| \cdot |AD|}{2} + \frac{|BE| \cdot |BF|}{2} + \frac{|CF| \cdot |CD|}{2}\right)$$
$$P_{EFD} = 6^2 - \left(\frac{4 \cdot 6}{2} + \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{4 \cdot 6}{2}\right)$$
$$P_{EFD} = 36 - (12 + 1 + 12)$$
$$P_{EFD} = 11$$

633. *Ako kvadrat ABCD rotira oko svoje stranice BC, dobiva se rotacijsko tijelo čiji je obujam* V_1. *Ukoliko, pak , taj kvadrat rotira oko svoje dijagonale AC, dobiva se rotacijsko tijelo čiji je obujam* V_2. *Izračunajte omjer* $V_2 : V_1$.

Rješenje: Neka je a duljina stranice zadanoga kvadrata. Rotacijom kvadrata oko njegove stranice BC nastaje uspravni kružni valjak čiji su i polumjer osnovke i visina jednaki a. Njegov je obujam

$$V_1 = B_1 \cdot v_1$$
$$V_1 = a^2 \cdot \pi \cdot a,$$
$$V_1 = a^3 \cdot \pi$$

Rotacijom kvadrata oko njegove dijagonale AC nastaju dva uspravna kružna stošca sa "slijepljenim" osnovkama. Polumjer osnovke i visina svakoga od njih jednaki su polovici dijagonale kvadrata $ABCD$. Stoga je ukupni obujam tih stožaca

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot B_2 \cdot (v_2 + v_3)$$
$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot \left(2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \pi \cdot a\sqrt{2}$$
$$V_2 = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot a^3 \cdot \pi$$

Dijeljenjem posljednje jednakosti s jednakošću

$$V_1 = a^3 \cdot \pi$$

dobivamo traženi omjer:

$$V_2 : V_1 = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

634. *Duljine kateta pravokutnoga trokuta ABC su* 5 cm *i* 12 cm. *Opseg trokutu ABC sličnoga trokuta A'B'C' iznosi* $30\sqrt{2}$ cm. *Izračunajte površinu trokuta A'B'C'.*

Rješenje: Neka su a = 5 cm i b = 12 cm duljine kateta zadanoga pravokutnoga trokuta ABC. Duljina hipotenuze c toga trokuta, prema Pitagorinu poučku, jednaka je

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$c = \sqrt{5^2 + 12^2}$$
$$c = \sqrt{25 + 144}$$
$$c = 13\,\text{cm}$$

Tako je opseg trokuta ABC jednak

$$O_{ABC} = a + b + c$$
$$O_{ABC} = 5\text{ cm} + 12\text{ cm} + 13\text{ cm}$$
$$O_{ABC} = 30\text{ cm},$$

dok je njegova površina jednaka

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}ab$$
$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12$$
$$P_{ABC} = 30\text{ cm}^2.$$

Nadalje, neka su a', b' i c' duljine stranica trokuta $A'B'C'$. To što su trokuti ABC i $A'B'C'$ slični znači da postoji realan broj $k > 0$ takav da je:

$$a' = k \cdot a$$
$$b' = k \cdot b$$
$$c' = k \cdot c$$

Zbrajanjem tih jednakosti dobivamo:

$$a' + b' + c' = k \cdot (a + b + c).$$

Prema podacima iskazanima u zadatku, vrijedi:

$$a' + b' + c' = O_{A'B'C'} = 30\sqrt{2}\text{ cm},$$

a netom smo izračunali da je

$$a + b + c = O_{ABC} = 30\text{ cm}.$$

Uvrštavanjem tih dviju jednakosti u jednakost

$$a' + b' + c' = k \cdot (a + b + c)$$

dobivamo jednadžbu:

$$30\sqrt{2} = k \cdot 30,$$

a odavde je $k = \sqrt{2}$. Dakle je

$$a' = \sqrt{2} \cdot a$$
$$b' = \sqrt{2} \cdot b$$

pa je tražena površina trokuta $A'B'C'$ jednaka

$$P_{A'B'C'} = \frac{1}{2} a' b'$$
$$P_{A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2} \cdot a) \cdot (\sqrt{2} \cdot b)$$
$$P_{A'B'C'} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \right)$$
$$P_{A'B'C'} = 2 \cdot P_{ABC}$$

odnosno

$$P_{A'B'C'} = 2 \cdot 30$$
$$P_{A'B'C'} = 60 \text{ cm}^2.$$

635. *Izračunajte vrijednost izraza*

$$\frac{6\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

za $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

<u>Rješenje:</u> Racionalizacijom nazivnika zadanoga izraza dobivamo:

$$\frac{6\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{6\sqrt{1+x^2} \cdot (x-\sqrt{1+x^2})}{(x+\sqrt{1+x^2}) \cdot (x-\sqrt{1+x^2})} = \frac{6x\sqrt{1+x^2} - 6(1+x^2)}{x^2-(1+x^2)} = 6x^2 - 6x\sqrt{1+x^2} + 6$$

Nadalje, zadani x možemo napisati u obliku:

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3-2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

Tako je vrijednost zadanoga izraza za zadani x jednaka:

$$6\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)^2-6\cdot\frac{1}{2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)^2}+6=6\cdot\frac{1}{4\cdot 6}-6\cdot\frac{1}{2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4\cdot 6}}+6=\frac{1}{4}-6\cdot\frac{1}{2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\frac{25}{24}}+6=$$
$$=\frac{1}{4}-6\cdot\frac{1}{2\sqrt{6}}\cdot\frac{5}{2\sqrt{6}}+6=\frac{1}{4}-\frac{5}{4}+6=5$$

636. *Najveći dijagonalni presjek pravilne uspravne šesterostrane piramide je jednakostraničan trokut stranice* 12. *Izračunajte obujam te piramide*.

Rješenje: Neka je a duljina osnovnoga brida te piramide, v njezina visina, a b duljina njezina bočnoga brida. Osnovka te piramide je pravilan šesterokut. Broj njegovih stranica je $n = 6$, duljina jedne od njih a, a središnji kut

$$\alpha=\frac{360°}{n}$$
$$\alpha=\frac{360°}{6}$$
$$\alpha=60°$$

Najveći dijagonalni presjek te piramide općenito je jednakokračan trokut čiji su krakovi bočni bridovi piramide, a osnovica promjer osnovki piramide opisane kružnice. U ovom slučaju taj je trokut jednakostraničan, što znači da vrijedi jednakost:

$$b = 2R = 12$$

gdje je R polumjer pravilnom šesterokutu opisane kružnice. Taj polumjer računamo prema formuli

$$R=\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

iz koje je

$$a=2R\cdot\sin\frac{\alpha}{2}.$$

U tu formulu uvrstimo $2R = 12$ i $\alpha = 60°$, pa dobivamo:

$$a=12\cdot\sin\frac{60°}{2}$$
$$a=6$$

Visina piramide jednaka je visini jednakostraničnoga trokuta čija je stranica $2R$:

$$v=\frac{(2R)}{2}\sqrt{3}$$
$$v=6\sqrt{3}$$

Tako je traženi obujam piramide jednak

$$V = \frac{1}{3} Bv$$
$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} \right) \cdot v$$
$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot 6^2 \cdot \sqrt{3} \right) \cdot 6\sqrt{3}$$

i konačno

$$V = 324.$$

637. *U kuglu je upisan pravilan tetraedar. Izračunajte*:

a) *omjer obujmova tetraedra i kugle*;
b) *koliki se dio* (*u postocima*) *te kugle nalazi izvan tetraedra*.

Rješenje: Zadanu kuglu shvatimo kao pravilnom tetraedru opisanu kuglu. Ako je a duljina brida tetraedra, onda je polumjer R te kugle

$$R = \frac{1}{4} a\sqrt{6},$$

pa je obujam te kugle V_k jednak

$$V_k = \frac{4}{3} R^3 \pi$$
$$V_k = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} a\sqrt{6} \right)^3 \pi$$
$$V_k = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4^3} a^3 \cdot 6\sqrt{6} \cdot \pi$$
$$V_k = \frac{1}{8} a^3 \cdot \sqrt{6} \cdot \pi$$

Odavde je

$$a^3 = \frac{8}{\sqrt{6} \cdot \pi} \cdot V_k$$

pa je obujam tetraedra V_t jednak

$$V_t = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$$
$$V_t = \frac{1}{12} \cdot \frac{8}{\sqrt{6} \cdot \pi} \cdot \sqrt{2} \cdot V_k$$
$$V_t = \frac{2}{3\sqrt{3} \cdot \pi} \cdot V_k$$

a) Omjer obujmova tetraedra i kugle jednak je

$$\frac{V_t}{V_k} = \frac{2}{3\sqrt{3} \cdot \pi}$$
$$\frac{V_t}{V_k} = \frac{2\sqrt{3}}{9 \cdot \pi}$$
$$V_t : V_k = 2\sqrt{3} : 9\pi$$

b) Iz

$$V_t = \frac{2}{3\sqrt{3} \cdot \pi} \cdot V_k$$

slijedi da je obujam V_{k-t} dijela kugle izvan tetraedra jednak

$$V_{k-t} = V_k - V_t$$
$$V_{k-t} = V_k - \frac{2}{3\sqrt{3} \cdot \pi} \cdot V_k$$
$$V_{k-t} = \left(1 - \frac{2}{3\sqrt{3} \cdot \pi}\right) \cdot V_k$$

pa je traženi postotni udio jednak

$$p = \frac{100 V_{k-t}}{V_k}$$
$$p = \frac{100 \cdot \left(1 - \frac{2}{3\sqrt{3} \cdot \pi}\right) \cdot V_k}{V_k}$$
$$p = 100 \cdot \left(1 - \frac{2}{3\sqrt{3} \cdot \pi}\right)$$
$$p = 100 - \frac{200}{3\sqrt{3} \cdot \pi} \approx 87.7482467684046211219705222597118$$

638. *Osnovka uspravne četverostrane prizme je romb. Ako su površine dijagonalnih presjeka te prizme jednake* 1 cm^2 *i* $\sqrt{3} \text{ cm}^2$, *izračunajte veličinu šiljastoga kuta osnovke prizme.*

Rješenje: Neka su e i f redom duljine dulje, odnosno kraće dijagonale osnovke, a v visina te prizme. Dijagonalni presjeci zadane prizme su pravokutnici sa stranicama e i v, odnosno f i v. Zbog pretpostavke $f < e$, površina pravokutnika sa stranicama e i v jednaka je $\sqrt{3}$ cm^2, a površina pravokutnika sa stranicama f i v jednaka je 1 cm^2. To znači da moraju vrijediti jednakosti:

$$e \cdot v = \sqrt{3}$$
$$f \cdot v = 1$$

Dijeljenjem tih jednakosti dobivamo:

$$\frac{e}{f} = \sqrt{3},$$

što možemo zapisati u obliku

$$\frac{\frac{e}{2}}{\frac{f}{2}} = \sqrt{3}$$

Ako s α, označimo traženi kut, onda iz karakterističnoga pravokutnoga trokuta osnovke (čije su katete polovice dijagonala, a hipotenuza stranica romba) slijedi

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\frac{e}{2}}{\frac{f}{2}},$$

pa je

$$\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3},$$

odnosno

$$\alpha = 30°.$$

639. *Izračunajte vrijednost izraza*

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2$$

Rješenje: Koristeći formule za kvadrat zbroja, odnosno razlike binoma, te razliku kvadrata

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

i formulu

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

imamo redom:

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 =$$
$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 + 2\cdot\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 - 2\cdot\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 =$$
$$(\text{korijeni i kvadrati se ''krate'', a drugi i peti pribrojnik zajedno daju } 0) =$$
$$(2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) + (2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) = 2+2+2+2 = 8$$

640. *Odredite imaginarni dio kompleksnoga broja* $z = (3 - 5i)^3$.

Rješenje: Koristeći formulu za kub razlike binoma

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

i potencije broja i

$$i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i$$

dobivamo:

$(3-5i)^3 = 3^3 - 3\cdot 3^2\cdot(5i)+3\cdot 3\cdot(5i)^2 - (5i)^3 = 27 - 135i + 45i^2 - 125i^3 = 27 - 135i + 45\cdot(-1) - 125\cdot(-i) =$
$= 27 - 135i - 45 + 125i = -18 - 10i.$

Odatle izravno slijedi:

$$\text{Im } z = \text{Im } (-18 - 10i) = -10.$$

641. *Odredite područje definicije realne funkcije*

$$f(x) = \frac{1}{x^3 + 3x^2 - x - 3}$$

__**Rješenje:**__
Zadana realna funkcija je racionalna funkcija. Ona nije definirana u točkama u kojima je vrijednost njezina nazivnika jednaka 0. Stoga najprije moramo ispitati postoje li realni brojevi x za koje je vrijednost izraza $x^3 + 3x^2 - x - 3$ jednaka nuli. To znači da moramo riješiti jednadžbu:

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$$

To je kubna jednadžba koju, općenito, ne znamo riješiti. No, lijevu stranu te jednadžbe možemo rastaviti na umnožak dvaju jednostavnijih izraza, i to na sljedeći način:

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = x^2 \cdot (x+3) - (x+3) = (x+3)(x^2-1)$$

Stoga je jednadžba

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$$

ekvivalentna jednadžbi

$$(x+3)(x^2-1) = 0$$

Umnožak dvaju realnih brojeva jednak je 0 ako i samo ako je barem jedan od tih brojeva jednak 0. U našem slučaju to znači da barem jedan od brojeva $x + 3$ i $x^2 - 1$ treba biti jednak 0. Iz

$$x + 3 = 0$$

dobivamo

$$x = -3,$$

dok iz

$$x^2 - 1 = 0$$

slijedi

$$x_1 = -1,\ x_2 = 1.$$

Dakle, vrijednost izraza $x^3 + 3x^2 - x - 3$ jednaka je nuli za ukupno tri realna broja x: $x = -3$, $x = -1$ i $x = 1$. Za sve ostale realne brojeve x vrijednost toga izraza je različita od nule, pa je traženo područje definicije

$$D_f = \mathbf{R} \setminus \{-3, -1, 1\}.$$

642. *Ako je*

$$f^{-1}(x+1) = \frac{3x+6}{1-x},$$

izračunajte $f(1)$.

__**Rješenje**__**:**

1. način (standardni): Da bismo izračunali $f(1)$, najprije moramo odrediti formulu po kojoj se računa $f(x)$ za sve x iz područja definicije funkcije $f(x)$. Tu formulu možemo odrediti i pomoću formule za funkciji $f(x)$ inverznu funkciju $f^{-1}(x)$, a ovu, pak, iz zadane jednakosti. Zato najprije odredimo formulu za $f^{-1}(x)$. Stavimo

$$t = x + 1,$$

otkuda je

$$x = t - 1.$$

Sada u jednakosti

$$f^{-1}(x+1) = \frac{3x+6}{1-x}$$

svuda umjesto x pišimo $t - 1$. Dobivamo:

$$f^{-1}(t-1+1) = \frac{3(t-1)+6}{1-(t-1)}$$
$$f^{-1}(t) = \frac{3t-3+6}{1-t+1}$$
$$f^{-1}(t) = \frac{3t+3}{2-t}$$

"Preimenovanjem" nezavisne varijable t u x (to smijemo napraviti jer je posve nebitno kojim slovom označavamo nezavisnu varijablu: t, x, a, b, …) dobivamo:

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+3}{2-x}$$

Time smo dobili formulu za funkciji $f(x)$ inverznu funkciju $f^{-1}(x)$. Iz te formule odredimo formulu za funkciju $f(x)$ sljedećim postupkom:

1.) Zamijenimo $f^{-1}(x)$ sa y.
2.) Zamijenimo x i y (gdje god piše x, pišemo y i obrnuto)
3.) Izrazimo x pomoću y.

4.) Zamijenimo y s $f(x)$.

Imamo redom:

$$1.)\ y = \frac{3x+3}{2-x}$$
$$2.)\ x = \frac{3y+3}{2-y}$$
$$3.)\ x = \frac{3y+3}{2-y}$$
$$x \cdot (2-y) = 3y+3$$
$$2x - xy = 3y+3$$
$$-xy - 3y = 3 - 2x$$
$$y \cdot (-x-3) = 3-2x$$
$$y = \frac{3-2x}{-x-3}$$
$$y = \frac{2x-3}{x+3}$$
$$4.)\ f(x) = \frac{2x-3}{x+3}$$

Dakle, vrijednost funkcije $f(x)$ računamo prema formuli:

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+3}.$$

Da bismo izračunali $f(1)$, u tu formulu umjesto x uvrstimo 1. Konačno dobivamo:

$$f(1) = \frac{2 \cdot 1 - 3}{1+3}$$
$$f(1) = -\frac{1}{4}$$
$$f(1) = -0.25$$

<u>*2. način* ("trik"):</u> Prema definiciji inverzne funkcije, vrijedi sljedeća relacija:

$$f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b.$$

Prema toj relaciji, da bismo izračunali $f(1)$, moramo odrediti za koji je realan broj x vrijednost izraza $\frac{3x+6}{1-x}$ jednaka 1. U tu svrhu riješimo jednadžbu

$$\frac{3x+6}{1-x} = 1$$

Imamo redom:

$$3x + 6 = 1 \cdot (1 - x)$$
$$3x + 6 = 1 - x$$
$$3x + x = 1 - 6$$
$$4x = -5$$

$$x = -\frac{5}{4}$$
$$x = -1.25$$

Sada u polaznu jednakost

$$f^{-1}(x+1) = \frac{3x+6}{1-x}$$

umjesto x uvrstimo – 1.25 pa dobijemo:

$$f^{-1}(-1.25 + 1) = 1,$$
$$f^{-1}(-0.25) = 1.$$

Napokon, u relaciju

$$f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$$

umjesto b uvrstimo –0.25, a umjesto a uvrstimo 1 Dobivamo:

$$f^{-1}(-0.25) = 1 \Leftrightarrow f(1) = -0.25$$

Stoga je $f(1) = -0.25$.

643. *Koliko realnih rješenja ima jednadžba*

$$27^{\frac{4}{3x}+1} + 10 \cdot 9^{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{2}{3x}} + 2^{\frac{4}{x}+3} = \frac{455}{4} \cdot 16^{\frac{1}{x}} \text{ ?}$$

Rješenje: Koristimo jednakosti $27 = 3^3$, $9 = 3^2$, $8 = 2^3$ i $16 = 2^4$, te formulu za potenciranje potencije

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

U skladu s njima, zadanu jednadžbu transformiramo ovako:

$$(3^3)^{\frac{4}{3x}+1} + 10 \cdot (3^2)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}} \cdot (2^3)^{\frac{2}{3x}} + 2^{\frac{4}{x}+3} = \frac{455}{4} \cdot (2^4)^{\frac{1}{x}}$$
$$3^{3 \cdot \left(\frac{4}{3x}+1\right)} + 10 \cdot 3^{2 \cdot \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)} \cdot 2^{3 \cdot \frac{2}{3x}} + 2^{\frac{4}{x}+3} = \frac{455}{4} \cdot 2^{4 \cdot \frac{1}{x}}$$
$$3^{\frac{4}{x}+3} + 10 \cdot 3^{\frac{2}{x}+1} \cdot 2^{\frac{2}{x}} + 2^{\frac{4}{x}+3} = \frac{455}{4} \cdot 2^{\frac{4}{x}}$$

Sada koristimo formulu za množenje potencija istih baza zapisanu u sljedećemu obliku:

$$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$$

U skladu s tom formulom polaznu jednadžbu dalje transformiramo ovako:

$$3^{\frac{4}{x}}\cdot 3^3+10\cdot 3^{\frac{2}{x}}\cdot 3^1\cdot 2^{\frac{2}{x}}+2^{\frac{4}{x}}\cdot 2^3=\frac{455}{4}\cdot 2^{\frac{4}{x}}$$

$$27\cdot 3^{\frac{4}{x}}+30\cdot 3^{\frac{2}{x}}\cdot 2^{\frac{2}{x}}+8\cdot 2^{\frac{4}{x}}=\frac{455}{4}\cdot 2^{\frac{4}{x}}\qquad /\cdot 4$$

$$108\cdot 3^{\frac{4}{x}}+120\cdot 3^{\frac{2}{x}}\cdot 2^{\frac{2}{x}}+32\cdot 2^{\frac{4}{x}}=455\cdot 2^{\frac{4}{x}}$$

$$108\cdot 3^{\frac{4}{x}}+120\cdot 3^{\frac{2}{x}}\cdot 2^{\frac{2}{x}}+32\cdot 2^{\frac{4}{x}}-455\cdot 2^{\frac{4}{x}}=0$$

$$108\cdot 3^{\frac{4}{x}}+120\cdot 3^{\frac{2}{x}}\cdot 2^{\frac{2}{x}}-423\cdot 2^{\frac{4}{x}}=0$$

Dobivenu jednadžbu podijelimo s $2^{\frac{4}{x}}$ (to smijemo jer je taj broj – kao potencija prirodnoga broja - uvijek različit od nule) i iskoristimo formulu za dijeljenje potencija istih eksponenata zapisanu u sljedećemu obliku:

$$\frac{a^c}{b^c}=\left(\frac{a}{b}\right)^c$$

Tako dobivamo:

$$108\cdot\frac{3^{\frac{4}{x}}}{2^{\frac{4}{x}}}+120\cdot\frac{3^{\frac{2}{x}}\cdot 2^{\frac{2}{x}}}{2^{\frac{4}{x}}}-423=0$$

$$108\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{4}{x}}+120\cdot 3^{\frac{2}{x}}\cdot 2^{\frac{2}{x}-\frac{4}{x}}-423=0$$

$$108\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{4}{x}}+120\cdot 3^{\frac{2}{x}}\cdot 2^{-\frac{2}{x}}-423=0$$

$$108\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{4}{x}}+120\cdot\frac{3^{\frac{2}{x}}}{2^{\frac{2}{x}}}-423=0$$

$$108\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{4}{x}}+120\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}}-423=0$$

Stavimo li

$$t=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}},$$

onda je

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{4}{x}}=\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\right]^2=t^2,$$

pa dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$108 \cdot t^2 + 120 \cdot t - 423 = 0.$$

Njezina su rješenja

$$t_1 = -\frac{47}{18},\ t_2 = \frac{3}{2}$$

Budući da vrijedi nejednakost

$$t = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}} > 0,$$

rješenje t_1 ne dolazi u obzir. Sada iz

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}} = \frac{3}{2}$$

slijedi

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1}$$
$$\frac{2}{x} = 1 \qquad / \cdot x$$
$$x = 2$$

Zaključujemo da polazna jednadžba ima samo jedno realno rješenje $x = 2$.

644. *Riješite nejednadžbu*:

$$(x+1)^{-x^2-2x} > x + 1.$$

Rješenje: Budući da se izraz $x + 1$ nalazi kao baza potencije, njegova vrijednost mora biti strogo pozitivna (jer je opća potencija a^b definirana samo za $a > 0$ i $a \neq 1$). Tako dobivamo sljedeće uvjete:

$$x + 1 > 0$$
$$x + 1 \neq 1.$$

Uvažavajući te uvjete, zaključit ćemo da su i lijeva i desna strana polazne nejednadžbe strogo pozitivni realni brojevi pa nejednadžbu smijemo podijeliti s $x + 1$ (pri čemu se znak nejednakosti ne mijenja). Dobit ćemo:

$$\frac{(x+1)^{-x^2-2x}}{x+1} > (x+1)^0$$
$$\frac{(x+1)^{-x^2-2x}}{(x+1)^1} > (x+1)^0$$
$$(x+1)^{-x^2-2x-1} > (x+1)^0$$
$$(x+1)^{-(x^2+2x+1)} > (x+1)^0$$

$$(x+1)^{-(x+1)^2} > (x+1)^0$$

Primijetimo da za sve realne brojeve x vrijedi nejednakost

$$-(x+1)^2 \leq 0.$$

pa razlikujemo dva moguća slučaja:

1.) $x + 1 > 1 \Rightarrow$ usporedbom eksponenata dobivamo nejednadžbu

$$-(x+1)^2 > 0,$$

odnosno, zajedno s početnim uvjetima

$$\begin{gathered} x + 1 > 0 \\ x + 1 \neq 1. \end{gathered}$$

i uvjetom

$$x + 1 > 1$$

sustav

$$\begin{gathered} x + 1 > 0 \\ x + 1 \neq 1. \\ x + 1 > 1 \\ -(x+1)^2 > 0 \end{gathered}$$

Posljednja nejednadžba toga sustava, prema primijećenoj nejednakosti, nema niti jedno realno rješenje, što znači da niti cijeli sustav nema rješenja.

2.) $0 < x + 1 < 1 \Rightarrow$ usporedbom eksponenata dobivamo nejednadžbu

$$-(x+1)^2 < 0,$$

odnosno sustav

$$\begin{gathered} x + 1 > 0 \\ x + 1 \neq 1 \\ 0 < x + 1 < 1 \\ -(x+1)^2 < 0 \end{gathered}$$

Rješavanjem pojedinih nejednadžbi toga sustava dobivamo sljedeća rješenja:

$$\begin{gathered} x > -1 \\ x \neq 0 \\ -1 < x < 0 \\ x \neq -1. \end{gathered}$$

Presjek tih rješenja je skup $\langle -1, 0\rangle$, i taj je skup jedino rješenje zadane nejednadžbe.

645. *Ispit se sastoji od* 5 *pitanja na koja se odgovara zaokruživanjem točno jednoga od odgovora* A, B *ili* C. *Na koliko načina možete riješiti ispit ako odgovorite na sva pitanja*?

Rješenje: Na svako od pitanja imamo točno 3 različita moguća odgovora, pa, prema načelu umnoška, na svih 5 pitanja možemo odgovoriti na ukupno $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$ različita načina. Stoga je traženi broj načina jednak 243.

646. *Kolika je vjerojatnost da u dva bacanja kocke padnu brojevi čiji je zbroj* 5 *ili umnožak* 4?

Rješenje: U jednom bacanju kocke može pasti točno 6 različitih brojeva: 1, 2, 3, 4, 5 ili 6. Stoga je pripadni vjerojatnosni prostor

$$\Omega = \{(x, y) : 1 \le x \le 6,\ 1 \le y \le 6\}.$$

Prema načelu umnoška, on ima ukupno $6 \cdot 6 = 36$ različitih elemenata, što znači da imamo ukupno 36 različitih mogućih ishoda promatranoga slučajnoga pokusa. Pogledajmo koji od njih su povoljni za ishod toga pokusa:

- zbroj 5: (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1);
- umnožak 4: (1, 4), (2, 2), (4, 1).

Stoga ukupno imamo 5 različitih povoljnih ishoda. Prema Laplaceovoj definiciji vjerojatnosti, tražena je vjerojatnost jednaka

$$p = \frac{\text{ukupan broj povoljnih ishoda}}{\text{ukupan broj mogucih ishoda}} = \frac{5}{36}.$$

647. *Duljine stranica strokuta odnose se kao* $9 : 10 : 17$. *Ako je razlika najdulje i najkraće stranice* 16 cm, *izračunajte polumjer tom trokutu upisane kružnice*.

Rješenje: Označimo duljine stranica trokuta s a, b i c. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi nejednakost $a < b < c$ jer iz zadanoga razmjera duljina stranica trokuta vidimo da među njima nema jednakih. Stoga možemo zapisati:

$$a : b : c = 9 : 10 : 17.$$

Ako s k označimo koeficijent razmjera, onda iz gornjega razmjera proizlazi:

$$a = 9 \cdot k,$$
$$b = 10 \cdot k,$$
$$c = 17 \cdot k.$$

Podatak da je razlika najdulje stranice (c) i najkraće stranice (a) jednaka 16 cm možemo zapisati kao jednakost

$$c - a = 16.$$

U tu jednakost uvrstimo:

$$a = 9 \cdot k,$$
$$c = 17 \cdot k,$$

pa dobivamo:

$$17 \cdot k - 9 \cdot k = 16,$$
$$8 \cdot k = 16,$$
$$k = 2.$$

Stoga su duljine stranica trokuta

$$a = 9 \cdot 2 = 18 \text{ cm},$$
$$b = 10 \cdot 2 = 20 \text{ cm},$$
$$c = 17 \cdot 2 = 34 \text{ cm}.$$

Polumjer trokutu upisane kružnice (ρ) računamo prema formuli:

$$\rho = \frac{P}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

gdje je

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

poluopseg trokuta. Uvrštavanjem

$$a = 18,$$
$$b = 20,$$
$$c = 34$$

dobivamo:

$$s = \frac{18+20+34}{2} = 36,$$
$$s-a = 36-18 = 18,$$
$$s-b = 36-20 = 16,$$
$$s-c = 36-34 = 2,$$

pa konačno imamo:

$$\rho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = \sqrt{\frac{18 \cdot 16 \cdot 2}{36}} = 4 \text{ cm}$$

648. *Zadan je romb čija je duljina stranice jednaka a. Ako je zbroj duljina dijagonala romba četiri puta veći od duljine njegove stranice, izrazite površinu romba kao funkciju varijable a.*

Rješenje: Označimo duljine dijagonala romba s e i f. Tada podatak da je zbroj duljina dijagonala romba četiri puta veći od duljine njegove stranice možemo zapisati kao jednakost

$$e + f = 4a.$$

Kvadriranjem te jednakosti dobivamo:

$$e^2 + 2ef + f^2 = 16a^2.$$

Kako se radi o dijagonalama romba, vrijede i sljedeće jednakosti:

$$\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 = a^2$$

$$P = \frac{1}{2} e \cdot f$$

gdje je P površina romba. Iz prve od tih jednakosti kvadriranjem i množenjem s 4 dobijemo:

$$e^2 + f^2 = 4a^2.$$

Iz druge jednakosti slijedi

$$2P = ef.$$

Tako u jednakost

$$e^2 + 2ef + f^2 = 16a^2$$

umjesto $e^2 + f^2$ uvrstimo $4a^2$. a umjesto umnoška ef uvrstimo $2P$. Dobivamo:

$$4a^2 + 2 \cdot 2P = 16a^2,$$

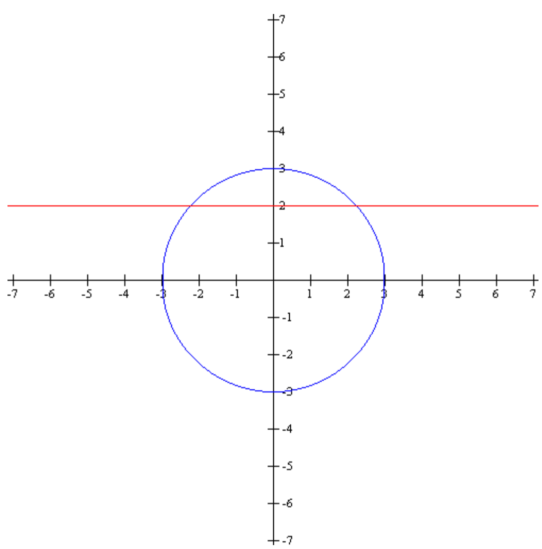
otkuda je

$$P = 3a^2$$

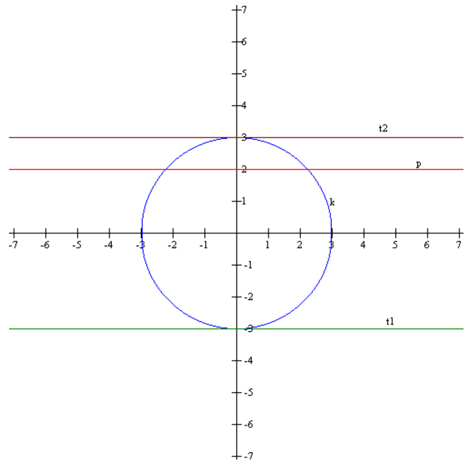
i to je traženi izraz za površinu romba.

649. *Napišite jednadžbe tangenata na krivulju K…* $x^2 + y^2 = 9$ *usporednih s pravcem* $p\ldots\ y = 2$.

<u>Rješenje:</u> Zadana krivulja je kružnica čije je središte u ishodištu, a polumjer jednak 3. Skicirajmo zadanu kružnicu i zadani pravac.



Vidimo da tražene tangente moraju biti usporedne s osi Ox, pa budući da moraju sjeći zadanu kružnicu u točno jednoj točki, to mora biti ili u točki (0, –3) ili u točki (0, 3). Stoga su tražene jednadžbe tangenata $t_1\ldots\ y = -3$ i $t_2\ldots\ y = 3$.



650. *Visina pravilne šesterostrane piramide trostruko je veća od njezina osnovnoga brida a. Izrazite oplošje te piramide kao funkciju varijable a.*

Rješenje: Zadana se piramida sastoji od:

- osnovke (baze) – to je pravilan šesterokut čija je duljina stranice jednaka a;
- plašta – plašt tvori ukupno 6 jednakokračnih trokutova čija je osnovica također jednaka a, a visina v_b.

Oplošje zadane piramide jednako je zbroju površina baze i plašta. Stoga ćemo zasebno odrediti površinu šesterokuta i površinu jednoga od trokutova koji tvore plašt.

Pravilan šesterokut kojemu je duljina stranice jednaka a sastoji se od ukupno 6 jednakostraničnih trokutova čija je duljina stranice također jednaka a. Stoga je njegova površina 6 puta veća od površine jednoga od tih jednakostraničnih trokutova. Kako površinu jednakostraničnoga trokuta čija je duljina stranice jednaka a računamo prema formuli

$$P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

to je površina šesterokuta (označimo je s B da sugestivno damo do znanja da se radi o površini osnovke (baze) piramide)

$$B = 6 \cdot P_{\Delta}$$
$$B = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$
$$B = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

Odredimo površinu jednoga od trokutova koji tvore plašt. U tu svrhu uočimo pravokutan trokut čije su katete visina piramide h i visina jednoga od jednakostraničnih trokutova koji tvore osnovku (označimo je s v_a), a hipotenuza bočna visina v_b. Prema Pitagorinu poučku vrijedi jednakost:

$$h^2 + v_a^2 = v_b^2$$

Pretpostavka zadatka jest da je visina piramide h trostruko veća od njezina osnovnoga brida a. To možemo zapisati u obliku jednakosti

$$h = 3a,$$

kvadriranjem koje dobijemo

$$h^2 = 9a^2.$$

Nadalje, visinu v_a jednakostraničnoga trokuta čija je duljina stranice jednaka a računamo prema formuli

$$v_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

kvadriranjem koje dobijemo

$$v_a^2 = \frac{3a^2}{4}.$$

Sada jednakosti

$$h^2 = 9a^2$$

i

$$v_a^2 = \frac{3a^2}{4}$$

uvrstimo u jednakost

$$h^2 + v_a^2 = v_b^2$$

pa dobijemo:

$$v_b^2 = 9a^2 + \frac{3a^2}{4}$$
$$v_b^2 = \frac{39a^2}{4}$$
$$v_b = \frac{a\sqrt{39}}{2}$$

Kako je površina P_1 jednoga od jednakokračnih trokutova koji tvore plašt jednaka poluumnošku osnovke trokuta (njezina duljina je a) i bočne visine v_b, slijedi:

$$P_1 = \frac{1}{2} a \cdot v_b$$
$$P_1 = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{39}}{2}$$
$$P_1 = \frac{a^2\sqrt{39}}{4}$$

pa je površina cijeloga plašta

$$P = 6 \cdot P_1$$
$$P = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{39}}{4}$$
$$P = \frac{3a^2 \sqrt{39}}{2}$$

Konačno, traženo je oplošje jednako:

$$O = B + P$$
$$O = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2} + \frac{3a^2 \sqrt{39}}{2}$$
$$O = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2} (1 + \sqrt{13})$$

651. *Romb čija je dulja dijagonala f, a kraća e, rotira oko svoje dulje dijagonale. Ako je* $\left(\frac{e}{6}\right)^2 = \frac{1}{f}$, *izračunajte obujam nastaloga rotacijskoga tijela.*

Rješenje: Vrtnjom romba oko njegove dulje dijagonale f nastaje tijelo koje se sastoji od dva, zajedničkim osnovkama spojena stošca. Polumjer te osnovke jednak je polovici kraće dijagonale:

$$r = \frac{e}{2}$$

Označimo visine tih stožaca s h_1 i h_2 pa uočimo da je zbroj njihovih duljina jednak duljini dulje dijagonale stošca (f). Obujam nastaloga tijela jednak je zbroju obujmova spomenutih stožaca:

$$V = V_1 + V_2$$

$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot h_1 + \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot h_2$$
$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot (h_1 + h_2)$$

Kako je

$$h_1 + h_2 = f$$

i

$$r = \frac{e}{2}$$

to će biti:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot f \ .$$

No, iz pretpostavke

$$\left(\frac{e}{6}\right)^2=\frac{1}{f}$$

slijedi

$$f=\left(\frac{6}{e}\right)^2$$

pa je

$$V=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^2\cdot\pi\cdot\left(\frac{6}{e}\right)^2$$
$$V=\frac{e^2\cdot 36\cdot\pi}{12\cdot e^2}$$
$$V=3\pi$$

652. *Cijena neke robe u jednoj se godini mijenjala ukupno četiri puta: najprije je povećana za 5%, zatim smanjena za 5%, pa ponovno povećana za 5% i naposljetku smanjena za 5%. Iskažite u postotcima ukupnu promjenu cijene u toj godini.*

Rješenje: Ukupnu promjenu R nastalu kao posljedica n sukcesivnih promjena p_1, p_2, …, p_n osnovne veličine određujemo pomoću formule:

$$R=100\cdot\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p_2}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p_3}{100}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{p_n}{100}\right)-100$$

Pritom su sve veličine p_1, p_2, …, p_n i R iskazane u postotcima, a njihov predznak upućuje na to je li riječ o povećanju (tada je predznak +) ili smanjenju (tada je predznak –). U ovom zadatku imamo ukupno $n = 4$ sukcesivne promjene:

$$p_1=p_3=+5$$
$$p_2=p_4=-5$$

Uvrštavanjem u navedenu formulu dobivamo:

$$R=100\cdot\left(1+\frac{5}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{5}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{5}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{5}{100}\right)-100$$
$$R=100\cdot 1.05^2\cdot 0.95^2-100$$
$$R=-0.499375$$

Zaključujemo da je krajnja cijena robe (u promatranoj godini) za 0.499375% niža od početne cijene u toj godini.

653. *Odredite* 75% *od* $\left[-\frac{\left(\frac{2\sqrt{5}}{1+\frac{1}{2}}\right)^2-\left(\frac{2\sqrt{5}}{1-\frac{1}{2}}\right)^2}{\left(\frac{2}{1-\frac{1}{2}}\right)^2+\left(\frac{2}{1+\frac{1}{2}}\right)^2}\right]$.

Rješenje: Izračunajmo najprije vrijednost osnovne (temeljne) veličine. Imamo redom:

$$\left[-\frac{\left(\frac{2\sqrt{5}}{1+\frac{1}{2}}\right)^2-\left(\frac{2\sqrt{5}}{1-\frac{1}{2}}\right)^2}{\left(\frac{2}{1-\frac{1}{2}}\right)^2+\left(\frac{2}{1+\frac{1}{2}}\right)^2}\right]=\left[-\frac{\left(\frac{2\sqrt{5}}{\frac{3}{2}}\right)^2-\left(\frac{2\sqrt{5}}{\frac{1}{2}}\right)^2}{\left(\frac{2}{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(\frac{2}{\frac{3}{2}}\right)^2}\right]=\left[-\frac{\left(\frac{4\sqrt{5}}{3}\right)^2-\left(4\sqrt{5}\right)^2}{(4)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}\right]=\left[-\frac{\frac{16\cdot 5}{9}-16\cdot 5}{16+\frac{16}{9}}\right]=$$

$$=\left[-\frac{\frac{80-720}{9}}{\frac{144+16}{9}}\right]=-\frac{-640}{160}=4$$

Stoga treba izračunati 75% od 4, a taj je broj jednak $\frac{75}{100}\cdot 4=\frac{300}{100}=3$.

654. *Odredite vrijednost realnoga parametra a tako da odsječak na osi Oy pravca p… ax –   – 4y – 20 + a =* 0 *bude jednak* 4.

Rješenje: To što odsječak na osi y zadanoga pravca treba biti jednak 4 znači da pravac mora prolaziti točkom $T(0, 4)$. Koordinate te točke uvrstimo u jednadžbu pravca tako da umjesto x uvrstimo 0, a umjesto y uvrstimo 4. Dobivamo:

$$a\ \cdot 0 - 4\cdot 4 - 20 + a = 0,$$

a iz te je jednadžbe izravno

$$a = 36.$$

Zadatak smo mogli riješiti i prevodeći zadanu jednadžbu pravca iz implicitnoga u segmentni oblik. Najprije je zapišemo u obliku

$$ax - 4y = 20 - a$$

pa dijeljenjem s $20 - a$ dobivamo:

$$\frac{ax}{20-a}-\frac{4y}{20-a}=1$$

$$\frac{x}{\frac{20-a}{a}}+\frac{y}{\frac{a-20}{4}}=1$$

Iz posljednje jednadžbe "očitamo" odsječak n zadanoga pravca na osi y (to je nazivnik razlomka kojemu je brojnik y):

$$n=\frac{a-20}{4}$$

Izjednačavanjem izraza za n s 4 dobivamo jednadžbu:

$$\frac{a-20}{4}=4$$

rješavanjem koje ponovno dobivamo $a = 36$.

655. *Potpuno skratite algebarski razlomak* $\frac{2x^2+5x+2}{2x^2-5x-3}$.

Rješenje: Da bismo mogli potpuno skratiti zadani algebarski razlomak, njegov brojnik i njegov nazivnik moramo rastaviti u faktore, odnosno napisati kao umnožak što jednostavnijih algebarskih izraza (monoma, binoma i sl.). U tu svrhu iskoristit ćemo sljedeću tvrdnju:

Neka su x_1 i x_2 nultočke polinoma p drugoga stupnja. Tada je $p(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$.

I brojnik i nazivnik zadanoga razlomka upravo su polinomi drugoga stupnja, pa možemo primijeniti navedenu tvrdnju. Dakle, za rastav u faktore nužno je naći nultočke brojnika, odnosno nazivnika zadanoga razlomka.

Za određivanje nultočaka brojnika rješavamo kvadratnu jednadžbu

$$2x^2 + 5x + 2 = 0$$

Njezina su rješenja

$$x_1=-2,\quad x_2=-\frac{1}{2}$$

pa primjenom gornje tvrdnje dobivamo rastav:

$$2x^2+5x+2=(x-(-2))(x-(-\frac{1}{2}))$$
$$2x^2+5x+2=(x+2)(x+\frac{1}{2})$$

Analogno, za određivanje nultočaka nazivnika rješavamo kvadratnu jednadžbu

$$2x^2 - 5x - 3 = 0.$$

Njezina su rješenja

$$x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=3$$

pa je traženi rastav

$$2x^2-5x-3=(x+\frac{1}{2})(x-3)$$

Tako konačno imamo:

$$\frac{2x^2+5x+2}{2x^2-5x-3}=\frac{(x+2)(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})(x-3)}=\frac{x+2}{x-3}.$$

656. *Izračunajte vrijednost izraza* $\left(\frac{\sqrt{8}-\sqrt{27}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\sqrt{6}\right)\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$.

<u>Rješenje:</u> Kako je $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ i $\sqrt{27}=3\sqrt{3}$, imamo:

$$\left(\frac{\sqrt{8}-\sqrt{27}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\sqrt{6}\right)\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=\left(\frac{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\sqrt{6}\right)\cdot(3-2\sqrt{6}+2)=\left[\frac{(2\sqrt{2}-3\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}+\sqrt{6}\right]\cdot(5-2\sqrt{6})=$$

$$=\left(\frac{4-3\sqrt{6}+2\sqrt{6}-9)}{2-3}+\sqrt{6}\right)\cdot(5-2\sqrt{6})=(5+\sqrt{6}+\sqrt{6})\cdot(5-2\sqrt{6})=(5+2\sqrt{6})\cdot(5-2\sqrt{6})=25-4\cdot6=1.$$

657. *Odredite realni dio kompleksnoga broja* $z=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$.

<u>Rješenje:</u> Koristeći formulu za kub zbroja binoma

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

i potencije broja i

$$i^2=-1,\ i^3=-i,$$

dobivamo redom:

$$z=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=-\frac{1}{8}+3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}i+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{4}i^2+\frac{3\sqrt{3}}{8}i^3=-\frac{1}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{8}i+\frac{9}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{8}i=1$$

Odatle izravno slijedi Re z = Re (1) = 1.

658. *Graf kvadratne funkcije* $f(x)=ax^2+bx+c$ *ima tjeme u točki* $T\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$. *Za* $x_1=1$ *ta kvadratna funkcija poprima vrijednost nula. Izračunajte zbroj njezinih koeficijenata.*

<u>Rješenje:</u> Naravno da traženi zbroj možemo odrediti tako da pomoću zadanoga tjemena i nultočke odredimo koeficijente a, b i c, a potom i njihov zbroj. No, ovdje postoji daleko brži i jednostavniji način dolaska do rješenja. Mi tražimo vrijednost zbroja $a+b+c$. Ukoliko u izraz $f(x)=ax^2+bx+c$ umjesto x uvrstimo 1, dobit ćemo:

$$f(1)=a+b+c.$$

To znači da je traženi zbroj jednak vrijednosti funkcije u točki $x=1$. Ta vrijednost nam je zadana u zadatku i ona iznosi 0. Prema tome, i traženi je zbroj jednak nuli.

659. *Za koje realne brojeve* $x\in\mathbf{R}$ *su vrijednosti funkcije* $f(x)=x^3+3x^2-x-3$ *nenegativne*?

Rješenje: Zadatak zapravo traži da riješimo nejednadžbu $f(x) \geq 0$. Kako je funkcija $f(x)$ polinom 3. stupnja, na prvi nam se pogled čini da tu nejednadžbu nećemo moći riješiti. Ali, izraz za funkciju $f(x)$ možemo rastaviti u faktore isto kao i u Zadatku 3. i dobiti

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = x^2 \cdot (x + 3) - (x + 3) = (x + 3)(x^2 - 1).$$

Tako zapravo rješavamo nejednadžbu

$$(x + 3)(x^2 - 1) \geq 0.$$

Razlikujemo dva moguća slučaja:

1.) $x + 3 \geq 0$
$x^2 - 1 \geq 0$

Rješenje prve nejednadžbe je interval $[-3, +\infty\rangle$, a rješenje druge unija intervala $\langle -\infty, -1] \cap [1, +\infty\rangle$. Presjek dobivenih rješenja je unija intervala $[-3, -1] \cap [1, +\infty\rangle$.

2.) $x + 3 \leq 0$
$x^2 - 1 \leq 0$

Rješenje prve nejednadžbe je interval $\langle -\infty, -3]$, a rješenje druge segment $[-1, 1]$. Presjek dobivenih rješenja je prazan skup.

Dakle, traženi realni brojevi x su svi elementi skupa $[-3, -1] \cap [1, +\infty\rangle$.

660. *Odredite područje definicije realne funkcije* $f(x) = (x^2 + x - 2)^{-1}$.

Rješenje: Zadanu funkciju najprije zapišimo bez negativnoga eksponenta:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$$

Vidimo da je riječ o racionalnoj funkciji koja nije definirana jedino u nultočkama svojega nazivnika. Da bismo odredili te nultočke, moramo riješiti jednadžbu

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

Njezina rješenja su

$$x_1 = -2,\ x_2 = 1.$$

To znači da je zadana funkcija definirana za sve realne brojeve x različite od -2 i 1. Odatle slijedi:

$$D_f = \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}.$$

661. *Ako je* $f(x) = \dfrac{2x-3}{3+x}$, *izračunajte* $f^{-1}(3)$.

Rješenje: Možemo postupiti kao i u Zadatku 4.: odredimo formulu za $f^{-1}(x)$ (u opisana 4 koraka) i potom izračunamo $f^{-1}(3)$. No, i ovdje postoji brži i jednostavniji put. Naime, prema relaciji (navedenoj u rješenju Zadatka 4.)

$$f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$$

tražena je vrijednost rješenje jednadžbe

$$\frac{2x-3}{3+x}=3.$$

Rješavanjem te jednadžbe dobijemo $x = -12$. Prema tome, $f^{-1}(3) = -12$.

662. *Izračunajte zbroj rješenja jednadžbe* $\log_{\log x}(3\log^2 x-2\log x)=\frac{3}{2}\log 100$.

Rješenje: Budući da je log 100 = 2, to je $\frac{3}{2}\log 100=\frac{3}{2}\cdot 2=3$. Koristeći relaciju

$$\log_b c = a \Leftrightarrow a^b = c$$

zadanu jednadžbu možemo transformirati na sljedeći način:

$$3\log^2 x-2\log x=(\log x)^3$$
$$\log^3 x-3\log^2 x+2\log x=0$$

Stavimo li $t = \log x$, dobivamo kubnu jednadžbu

$$t^3 - 3t^2 + 2t = 0$$

koju možemo faktorizirati ovako:

$$t \cdot (t^2 - 3t + 2) = 0$$

Kako je umnožak dva realna broja jednak nuli ako i samo ako je barem jedan od njih jednak nuli, to mora biti ili $t = 0$ ili $t^2 - 3t + 2 = 0$. Rješavanjem tih jednadžbi dobivamo:

$$t_1 = 0,\ t_2 = 1 \text{ i } t_3 = 2.$$

Budući da se u polaznoj jednadžbi t nalazi kao baza drugoga logaritma, ne može biti $t = 0$ i $t = 1$ (za te vrijednosti baze b ne postoji logaritam $\log_b x$). Stoga jedino dolazi u obzir $t = 2$. Tako iz

$$\log x = 2$$

dobivamo

$$x = 10^2 = 100.$$

Dakle, zbroj svih rješenja zadane jednadžbe jednak je 100.

663. *Riješite nejednadžbu*: $(x-2)^{x^3}<(x-2)^x$.

Rješenje: Razmotrit ćemo dva slučaja: $0 < x - 2 < 1$ i $x - 2 > 1$. Imamo redom:

1.) $0<x-2<1 \Leftrightarrow 2<x<3$
    U ovom slučaju usporedbom eksponenata dobivamo nejednadžbu

$$x^3 > x,$$

odnosno

$$x^3 - x > 0,$$

a odavde rastavljanjem u faktore dobivamo

$$x \cdot (x^2 - 1) > 0,$$
$$x \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) > 0.$$

Za $2 < x < 3$ ta nejednakost je očito valjana pa je u ovom slučaju skup rješenja interval $\langle 2, 3\rangle$.

2.) $x - 2 > 1 \Leftrightarrow x > 3$
U ovom slučaju uspredbom eksponenata dobivamo nejednadžbu

$$x^3 < x,$$

odnosno na isti način kao i u slučaju 1.)

$$x \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) < 0.$$

No, za $x > 3$ ova nejednakost očito nije valjana pa u ovom slučaju polazna nejednadžba nema rješenja.

Dakle, skup svih rješenja polazne nejednadžbe jest interval $\langle 2, 3\rangle$.

664. *Koliko se različitih sedmeroznamenkastih prirodnih brojeva može napisati pomoću znamenaka* 0007789 *tako da se u svakomu od tih brojeva svaka od zadanih znamenaka pojavi točno jednom*?

Rješenje: Odmah primijetimo da se na prvom mjestu (mjestu milijuntice) ne može naći znamenka 0. Stoga na prvo mjesto mora doći jedna od znamenaka 7, 7, 8 ili 9. Sada ćemo razlikovati tri slučaja:

1.) izabrana je znamenka 7
Preostale su nam znamenke 0, 0, 0, 7, 8 i 9. Na njih ne postavljamo nikakve dodatne uvjete, što znači da ih možemo razmjestiti bilo kako. Ukupan broj njihovih razmještaja jednak je broju permutacija skupa od 6 elemenata među kojima ima 3 međudobno jednaka. Taj je broj jednak $\frac{6!}{3!} = 120$.

2.) izabrana je znamenka 8
Preostale su nam znamenke 0, 0, 0, 7, 7 i 9. I njih možemo razmjestiti na bilo koji način. Ukupan broj razmještaja jednak je broju permutacija skupa od 6 elemenata među kojima ima 3 međusobno jednaka elementa jedne vrste (0) i 2 međusobno jednaka elementa druge vrste (7). Taj je broj jednak $\frac{6!}{3!2!} = 60$.

3.) izabrana je znamenka 9
Ovaj slučaj u potpunosti je istovjetan slučaju izbora znamenke 8, pa i ovdje dobivamo još 60 novih brojeva.

Preostaje nam primijeniti načelo zbroja i dobiti da je traženi ukupan broj različitih sedmeroznamenkastih prirodnih brojeva jednak $120 + 60 + 60 = 240$.

665. *Odredite jednadžbe tangenata na krivulju* $4x^2 - y^2 = 4$ *u njezinim točkama s apscisom* 1.

Rješenje: Kako bismo utvrdili o kojim je točkama riječ, u jednadžbu krivulje umjesto x uvrstit ćemo 1 i računati pripadne y. Dobivamo:

$$4 - y = 4$$

a otuda je

$$y = 0$$

Dakle, postoji jedna jedina točka zadane krivulje čija je apscisa jednaka 1, i to je točka $T(1, 0)$. Napišimo jednadžbu tangente na zadanu krivulju u toj točki. Uočimo da je zadana krivulja hiperbola oblika

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

pri čemu su $b^2 = 4$ i $a^2 = 1$, tj. $a = 1$, $b = 2$. Stoga je tražena jednadžba tangente

$$4 \cdot 1 \cdot x - 0 \cdot 1 \cdot y = 4,$$

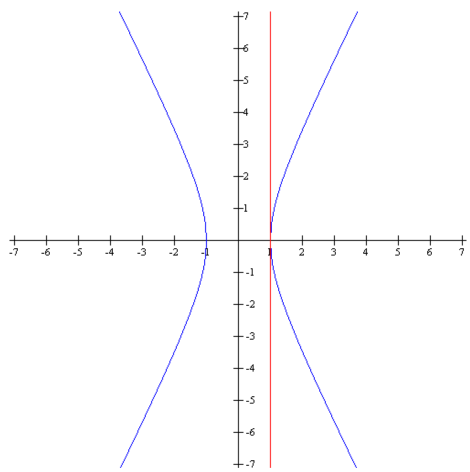
odnosno

$$4x = 4$$

i konačno

$$x = 1.$$

To smo mogli i predvidjeti jer je točka $T(1, 0)$ vrh zadane hiperbole na osi Ox, a u takvoj je točki tangenta na hiperbolu pravac usporedan s osi Oy koji prolazi tom točkom. U promatranom slučaju taj je pravac upravo $x = 1$.



666. *Duljina stranice AB trokuta ABC iznosi* 9 cm. *Na pravcu p usporednim s tom stranicom preostale dvije stranice trokuta odsijecaju odsječak duljine* 3 cm. *Ako je udaljenost vrha C od pravca p jednaka* 3 cm, *izračunajte udaljenost pravca p od stranice AB.*

<u>**Rješenje**</u>: Označimo sa D i E redom sjecišta pravca p sa stranicama AC i BC. Povucimo iz vrha C visinu na stranicu AB. Neka je M sjecište te visine s pravcem p, a N njezino nožište na stranici AB. U zadatku su nam zadane sljedeće veličine:

$$|AB| = 9 \text{ cm}, |DE| = |CM| = 3 \text{ cm}.$$

Uočimo da je duljina dužine MN upravo tražena udaljenost, pa označimo $x = |MN|$. (Rješavanje zadatka obvezatno popratite odgovarajućim crtežom!) Pogledajmo kako možemo izračunati površinu trokuta ABC. S jedne je strane ona jednaka poluumnošku duljine stranice AB i duljine visine CN. Kako je

$$|CN| = |CM| + |MN|,$$

to je

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CN| = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot (|CM| + |MN|) = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot (3 + x) = \frac{9x + 27}{2}.$$

S druge strane, površina trokuta *ABC* jednaka je zbroju površina trokuta *CDE* i trapeza *ABED*. U trokutu *CDE* poznata nam je duljina stranice *CD* i duljina visine na tu stranicu (to je dužina *CM*), pa je njegova površina jednaka

$$P_{CDE} = \frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |CM| = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2}$$

(mjerne jedinice namjerno izostavljamo jer su svi podaci iskazani u istim mjernim jedinicama (cm) pa će i rezultat biti iskazan u cm). U trapezu *ABED* poznate su nam duljine njegovih osnovica $|AB|$ i $|ED|$, a visina toga trapeza upravo je tražena udaljenost $|MN|$. Stoga je površina toga trapeza

$$P_{ABED} = \frac{1}{2} \cdot (|AB| + |DE|) \cdot |MN| = \frac{1}{2} \cdot (9 + 3) \cdot x = 6x$$

Tako je, s druge strane, površina trokuta *ABC* dana i izrazom

$$P_{ABC} = P_{CDE} + P_{ABED}$$
$$P_{ABC} = \frac{9}{2} + 6x$$

Time smo dobili dva različita izraza za istu veličinu: jedan je $\frac{9x+27}{2}$, a drugi $\frac{9}{2} + 6x$. Upravo jer se radi o istoj veličini, ti izrazi moraju biti jednaki, pa dobivamo jednadžbu

$$\frac{9x + 27}{2} = \frac{9}{2} + 6x$$

Njezinim rješavanjem dobijemo $x = 6$. Dakle, tražena je udaljenost jednaka 6 cm.

667. *U kružnicu polumjera r upisan je pravokutni trokut čija je najdulja stranica duga* 25 cm. *Izračunajte r.*

Rješenje: Zadatak je zapravo ekvivalentan zadatku da se izračuna polumjer kružnice opisane pravokutnomu trokutu čija je hipotenuza duga 25 cm. Taj je polumjer jednak polovici duljine hipotenuze, odnosno $r = 12.5$ cm.

668. *Odredite jednadžbe tangenata na krivulju* $x^2 - 4y^2 = 20$ *usporednih s osi Ox.*

Rješenje: Pravci usporedni s osi x imaju opću jednadžbu $y = a$, $a \in \mathbf{R}$. Presijecimo ih sa zadanom krivuljom, tj. riješimo sustav jednadžbi

$$y = a$$
$$x^2 - 4y^2 = 20$$

Uvrštavanjem prve jednadžbe u drugu dobivamo

$$x^2 = 4a^2 + 20.$$

Budući da je za svaki realan broj a vrijednost izraza $4a^2 + 20$ strogo pozitivna (štoviše, barem jednaka 20), gornja jednadžba uvijek ima dva različita realna rješenja: $x_1 = -\sqrt{4a^2 + 20}$ i $x_2 = \sqrt{4a^2 + 20}$. To znači da svi pravci usporedni s osi Ox sijeku zadanu krivulju u točno dvije različite točke. No, kako je tangenta, prema definiciji, pravac koji siječe neku krivulju u točno jednoj točki, zaključujemo da ne postoje tangente na zadanu krivulju koje su usporedne s osi Ox.

669. *Zaradu od* 7 700 kn *treba podijeliti između četiri djelatnika –* A, B, C i D *– obrnuto razmjerno satima izostanka s posla. Ako je djelatnik A izostao* 20 sati, *djelatnik B* 30 sati, *djelatnik C* 40 sati, *a djelatnik D* 50 sati, *izračunajte zaradu djelatnika C.*

Rješenje: Razdioba zarade obrnuto razmjerno satima izostanka s posla znači da djelatnik koji je izostao najviše sati treba primiti najmanju zaradu i obrnuto, djelatnik koji je izostao najmanje sati treba primiti najveću zaradu. Zato zaradu dijelimo u omjeru $\frac{1}{20}:\frac{1}{30}:\frac{1}{40}:\frac{1}{50}$, odnosno (kad svaki član omjera pomnožimo s NZV(20, 30, 40, 50) = 600) u omjeru 30 : 20 : 15 : 12. Pripadni omjerni koeficijent je

$$k = \frac{7700}{30+20+15+12} = 100$$

pa zarada djelatnika C iznosi $100 \cdot 15 = 1\,500$ kn.

670. *Točka* $A(x_1, 4)$ *pripada pravcu* $p \ldots\ 3x - 2y + 5 = 0$ *i pravcu q koji prolazi točkom* $B(-3, 8)$. *Odredite eksplicitni oblik jednadžbe pravca q.*

Rješenje: Odredimo najprije koordinate točke A. Iz činjenice da ta točka pripada pravcu p slijedi da njezine koordinate moraju zadovoljavati jednadžbu toga pravca. Uvrštavanjem x_1 umjesto x i 4 umjesto y dobivamo:

$$3x_1 - 2 \cdot 4 + 5 = 0,$$

a odavde je $x_1 = 1$. Dakle, $A(1, 4)$. Budući da pravac q prolazi točkama A i B, a sada znamo i koordinate točke A i koordinate točke B, možemo odrediti njegovu jednadžbu:

$$\begin{aligned} y - 4 &= \frac{8-4}{-3-1} \cdot (x-1) \\ y - 4 &= -x + 1 \\ y &= -x + 5 \end{aligned}$$

Dakle, traženi eksplicitni oblik jednadžbe pravca q jest $y = -x + 5$.

671. *Zadane su funkcije* $f(x) = \frac{x}{x-1}$ *i* $g(x) = 1 - \sqrt{x}$. *Odredite funkciju* $f \circ g$.

Rješenje: Imamo redom:

$$(f \circ g)(x) = f(1-\sqrt{x}) = \frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}-1} = \frac{1-\sqrt{x}}{-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 - x^{-0.5}$$

672. *Zadan je jednakokračan trokut čiji kraci imaju duljinu b i pojedinačno su dvostruko kraći od zbroja polovice osnovice trokuta i visine na tu osnovicu. Izrazite površinu trokuta kao funkciju varijable b.*

Rješenje: Označimo sa a i v redom osnovicu trokuta i visinu na tu osnovicu. Podatak da je bilo koji krak trokuta dvostruko kraći od zbroja polovice osnovice trokuta i visine na tu osnovicu možemo zapisati u obliku jednakosti

$$b = \frac{1}{2}(v + \frac{a}{2})$$

otkuda je

$$v + \frac{a}{2} = 2b$$

Kvadriranjem te jednakosti dobivamo:

$$v^2 + 2 \cdot v \cdot \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} = 4b^2$$

Budući da je trokut jednakokračan, vrijedi jednakost:

$$v^2 + \frac{a^2}{4} = b^2 ,$$

a k tome je i

$$P = \frac{a}{2} \cdot v ,$$

gdje je P površina trokuta. Kad te dvije jednakosti uvrstimo u jednakost

$$v^2 + 2 \cdot v \cdot \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} = 4b^2 ,$$

dobit ćemo:

$$b^2 + 2P = 4b^2,$$

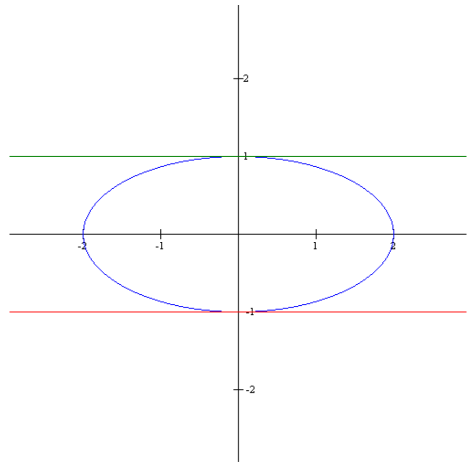
a odatle je

$$P = \frac{3}{2} b^2$$

i to je tražena funkcija.

673. *Odredite jednadžbe tangenata na krivulju* $x^2 + 4y^2 = 4$ *usporednih s pravcem* $y = -1$.

Rješenje: Naravno da zadatak možemo riješiti standardno tako da koristimo uvjet tangencijalnosti za elipse (jer zadana krivulja je elipsa), ali postoji način koji je brži i jednostavniji. Zadana krivulja je elipsa čiji su vrhovi u točkama $A(2,0)$, $B(0, 1)$, $C(-2, 0)$ i $D(0, -1)$. Tangente usporedne sa zadanim pravcem usporedne su i sa osi Ox, pa je jedini način da diraju zadanu elipsu taj da je sijeku u vrhovima koji leže na osi Oy, tj. u točkama B i D. Pravac koji prolazi točkom $B(0, 1)$ usporedno s osi Ox jest $y = 1$, a pravac koji prolazi točkom D usporedno s osi Ox jest upravo zadani pravac $y = -1$. Budući da je, prema definiciji usporednosti pravaca, svaki pravac usporedan sam sa sobom, zadatak ima dva rješenja: $t_1 \ldots\ y = -1$ i $t_2 \ldots\ y = 1$.



674. *Iznos od* 13 890 kn *treba podijeliti na tri osobe A, B i C tako da osoba B dobije za* 15% *više od osobe A, a osoba C za* 15% *više od osobe B. Izračunajte iznos koji će dobiti osoba C.*

Rješenje: Označimo sa x iznos koji će dobiti osoba A. Tada je iznos koji će dobiti osoba B jednak

$$x+\frac{15}{100}\cdot x=x\cdot\left(1+\frac{15}{100}\right)=1.15\cdot x\,,$$

a iznos koji će dobiti osoba C jednak

$$1.15\cdot x+\frac{15}{100}\cdot 1.15\cdot x=x\cdot\left(1.15+\frac{15}{100}\cdot 1.15\right)=1.3225\cdot x\,.$$

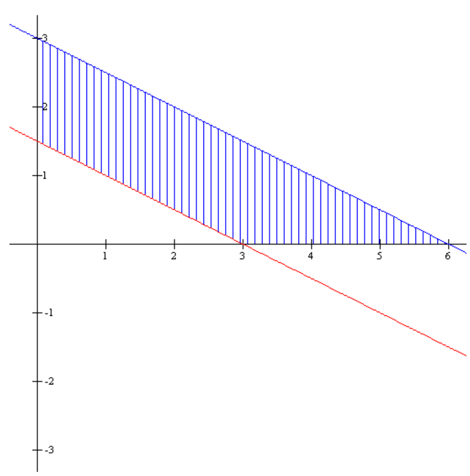
Kako sve tri osobe zajedno moraju podijeliti cijeli zadani iznos, dobiva se jednadžba:

$$x + 1.15 \cdot x + 1.3225 \cdot x = 13\ 890$$

čije je rješenje $x = 4\ 000$. Sada lako slijedi da je traženi iznos jednak $1.3225 \cdot x = 1.3225 \cdot 4\ 000 = 5\ 290$ kn.

675. *Izračunajte opseg lika kojega pravci* $p_1 \ldots\ x + 2y - 6 = 0$ *i* $p_2 \ldots\ x + 2y - 3 = 0$ *tvore s koordinatnim osima.*

Rješenje: Skicirajmo najprije zadane pravce.



(Lik čiji opseg tražimo je išrafiran.) Pravac p_2 siječe koordinatne osi u točkama $A(0, \frac{3}{2})$ i $B(3, 0)$, dok ih pravac p_1 siječe u točkama $C(6, 0)$ i $D(0, 3)$. (Računski, te točke dobijemo rješavajući sljedeće sustave jednadžbi:

1.) $x + 2y - 3 = 0, x = 0$;
2.) $x + 2y - 3 = 0, y = 0$;
3.) 3.) $x + 2y - 6 = 0, y = 0$;
4.) 4.) $x + 2y - 6 = 0, x = 0$.)

Prema formuli za udaljenost dviju točaka u pravokutnomu koordinatnomu sustavu u ravnini računamo udaljenosti:

$$|AB| = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$
$$|BC| = 3$$
$$|CD| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$
$$|DA| = \frac{3}{2}$$

Stoga je traženi opseg jednak

$$O = |AB| + |BC| + |CD| + |DA| = \frac{3}{2}\sqrt{5} + 3 + 3\sqrt{5} + \frac{3}{2} = \frac{9}{2} + \frac{9}{2}\sqrt{5} = \frac{9}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

676. *Zadani su kompleksni brojevi* $z_1 = 2 - i$ *i* $z_2 = 1 - i$. *Odredite imaginarni dio kompleksnoga broja* $z = \frac{z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2}{z_1^2 - z_2^2}$.

Rješenje: Izračunajmo zasebno vrijednost brojnika, a zasebno vrijednost nazivnika. Imamo redom:

$$z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = (2-i)\overline{(1-i)} + \overline{(2-i)}(1-i) = (2-i)(1+i) + (2+i)(1-i) = 2 - i + 2i - i^2 + 2 + i - 2i - i^2 = 4 - 2i^2 = 4 + 2 = 6$$
$$z_1^2 - z_2^2 = (2-i)^2 - (1-i)^2 = 4 - 4i + i^2 - 1 + 2i - i^2 = 3 - 2i$$

Tako je

$$z = \frac{6}{3-2i} = \frac{6\cdot(3+2i)}{(3-2i)\cdot(3+2i)} = \frac{18+12i}{9-4i^2} = \frac{18+12i}{9+4} = \frac{18}{13} + \frac{12}{13}i$$

Odatle sada izravno slijedi

$$\operatorname{Im} z = \operatorname{Im}\left(\frac{18}{13} + \frac{12}{13}i\right) = \frac{12}{13}.$$

677. *Odredite vrijednost realnoga parametra* $b \in \mathbf{R}$ *tako da najveća vrijednost polinoma* $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + bx + 5$ *bude jednaka* 13.

Rješenje: Primijetimo da je zadani polinom zapravo kvadratna funkcija. Znamo da ekstremnu vrijednost M kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ računamo prema formuli:

$$M=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

(ako je početni koeficijent a strogo veći od nule, M je najmanja vrijednost, a ako je početni koeficijent a strogo manji od nule, M je najveća vrijednost). U našem zadatku je zadano:

$$a=-\frac{1}{2}$$
$$c=5$$
$$M=13$$

Uvrštavanjem u gornju formulu dobivamo:

$$13=\frac{4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 5-b^2}{4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}$$
$$13=\frac{-10-b^2}{-2}$$
$$b^2=16$$
$$b=\pm 4$$

Dakle, za $b=\pm 4$ najveća vrijednost zadanoga polinoma iznosi 13.

678. Zadane su funkcije $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}$ i $g(x)=\frac{x}{x-1}$. Odredite funkciju $f\circ g$.

Rješenje: Imamo redom:

$$(f\circ g)(x)=f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{x-1}}}-\sqrt{\frac{x}{x-1}}=\sqrt{\frac{x-1}{x}}-\sqrt{\frac{x}{x-1}}=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}=\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}}=\frac{(x-1)-x}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}}=$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}}=-\frac{1}{\sqrt{x\cdot(x-1)}}=-\frac{1}{\sqrt{x^2-x}}$$

679. *Zadan je trapez ABCD čije osnovice AB i CD redom imaju duljinu* 20 cm *i* 12 cm*. Ako se središte tom trapezu opisane kružnice nalazi na duljoj osnovici, izračunajte površinu toga trapeza.*

Rješenje: Budući da trapezu $ABCD$ opisana kružnica mora prolaziti točkama A i B, a središte joj – prema pretpostavci – nalazi na spojnici tih točaka (tj. osnovici AB), slijedi da je dužina AB promjer te kružnice. Stoga je njezino središte u polovištu P dužine AB, a njezin polumjer jednak polovici duljine dužine AB:

$$R=\frac{1}{2}\cdot 12=10 \text{ cm.}$$

Nadalje, budući da je trokut CDP jednakokračan (jer je $|PC|=|PD|=R$), visina na osnovicu CD toga trokuta jednaka je visini trapeza. Budući da je duljina osnovice CD jednaka 12 cm, a duljina kraka $|PC|$ 10 cm, to je duljina visine na osnovicu CD jednaka

$$v=\sqrt{|PC|^2-\left(\frac{1}{2}\cdot|CD|\right)^2}$$
$$v=\sqrt{10^2-\left(\frac{1}{2}\cdot 12\right)^2}$$
$$v=\sqrt{10^2-6^2}$$
$$v=8\,\text{cm}$$

Stoga je tražena površina trapeza jednaka

$$P=\frac{1}{2}(|AB|+|CD|)\cdot v$$
$$P=\frac{1}{2}(20+12)\cdot 8$$
$$P=128\,\text{cm}^2$$

680. *Duljine stranica usporednika ABCD su* 12 cm *i* 10 cm, *a njegova površina je* 60 cm^2. *Izračunajte zbroj duljina visina toga usporednika.*

Rješenje: Površinu usporednika računamo prema formuli

$$P = a \cdot v_a$$

pri čemu je a osnovica usporednika, a v_a visina na tu osnovicu. Uvrštavanjem $a = 12$ i $P = 60$ u tu jednakost dobivamo jednadžbu:

$$60 = 12 \cdot v_a,$$

a odavde je $v_a = 5$ cm. No, i manju stranicu usporednika (označimo je s b) također možemo shvatiti kao njegovu osnovicu pa uvrštavanjem $b = 10$ i $P = 60$ u navedenu formulu dobivamo jednadžbu:

$$60 = 10 \cdot v_b,$$

a odavde je $v_b = 6$ cm. Prema tome, traženi je zbroj jednak 11 cm.

681. *Pravokutni trapez ABCD ima osnovice AB i CD, te pravi kut kod vrha A. Ako je* $|AB| = 20$, $|CD| = 15$ *i* $|DA| = 12$, *izračunajte oplošje rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom zadanoga trapeza oko manje osnovice*.

Rješenje: Izračunajmo najprije duljinu kraka BC zadanoga trapeza. Iz vrha C povucimo okomicu na osnovicu AB i označimo s E njezino nožište. Trokut BCE je pravokutan (s pravim kutom kod vrha E) i duljine njegovih kateta su:

$$|CE| = |DA| = 12$$
$$|BE| = |AB| - |AE| = |AB| - |CD| = 20 - 15 = 5$$

Stoga je duljina hipotenuze BC jednaka

$$|BC|=\sqrt{|CE|^2+|BE|^2}$$
$$|BC|=\sqrt{12^2+5^2}$$
$$|BC|=13$$

Rotacijom zadanoga trapeza oko osnovice *CD* nastaje uspravni kružni valjak iz kojega je isječen uspravni kružni stožac. Polumjer osnovke valjka jednak je polumjeru osnovke stošca, a taj je $|DA| = 12$. Visina valjka jednaka je duljini osnovice *AB*, a ta je $|AB| = 20$. Visina stošca jednaka je duljini dužine *EB*, a ta je $|EB| = |BE| = 5$. Izvodnica stošca jednaka je duljini kraka *BC*, a ta je $|BC| = 13$. Traženo oplošje dobit ćemo tako da površini osnovke valjka pribrojimo površinu plašta valjka i površinu plašta stošca (gornja osnovka valjka "nedostaje", pa njezina površina ne ulazi u račun):

$$O = O_v - O_s$$
$$O = r_v \cdot \pi \cdot (r_v + 2v_v) + r_s \cdot \pi \cdot s$$
$$O = 12 \cdot \pi \cdot (12 + 2 \cdot 20) + 12 \cdot \pi \cdot 13$$
$$O = 780\pi.$$

682. *Pojednostavnite izraz*:

$$\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$$

Rješenje: Označimo zadani izraz s *I* i uočimo da su oba njegova člana strogo pozitivni realni brojevi. Kvadriranjem dobivamo:

$$I^2 = \left(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$$
$$I^2 = 3+\sqrt{5} - 2 \cdot \sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} + 3 - \sqrt{5}$$
$$I^2 = 6 - 2 \cdot \sqrt{9-5}$$
$$I^2 = 6 - 2 \cdot 2$$
$$I^2 = 2$$

Odatle korjenovanjem slijedi:

$$I = \sqrt{2}\ .$$

683. *Riješite jednadžbu*:

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3x-26} = \sqrt{x-6}$$

Rješenje: Uvjeti na vrijednost nepoznanice *x* su:

$$x + 6 \geq 0$$
$$3x - 26 \geq 0$$
$$x - 6 \geq 0$$

Iz toga sustava nejednadžbi dobiva se $x \geq \frac{26}{3}$ pa zadanu nejednadžbu dalje rješavamo na intervalu $[\frac{26}{3}, +\infty\rangle$. Zapišimo je u obliku

$$\sqrt{3x-26} = \sqrt{x+6} - \sqrt{x-6}$$

pa kvadrirajmo:

$$3x-26=x+6-2\sqrt{(x+6)(x-6)}+x-6$$
$$\sqrt{(x+6)(x-6)}=13-\frac{1}{2}x$$

Lijeva strana ove jednadžbe je nenegativan realan broj, pa takva mora biti i desna strana:

$$13-\frac{1}{2}x\geq 0,$$

a odavde je

$$x \leq 26.$$

Prema tome, u nastavku polaznu jednadžbu rješavamo na segmentu $[\frac{26}{3}, 26]$. Kvadriranjem jednadžbe

$$\sqrt{(x+6)(x-6)}=13-\frac{1}{2}x$$

dobivamo:

$$x^2 - 36 = 169 - 13x + \frac{1}{4}x^2,$$

odnosno množenjem s 4 i sređivanjem

$$3x^2 + 52x - 820 = 0.$$

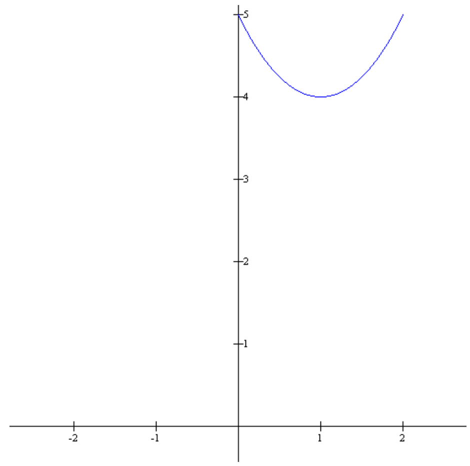
Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1 = -\frac{82}{3}$ i $x_2 = 10$. Segmentu $[\frac{26}{3}, 26]$ pripada jedino $x_2 = 10$ pa je to ujedno i jedino rješenje polazne jednadžbe.

684. *Odredite najmanju vrijednost funkcije*

$$f(x) = 2^x + 2^{2-x}$$

na segmentu [0, 2].

Rješenje: Promatrajmo zadanu funkciju na dvama segmentima: [0, 1] i [1, 2]. Na segmentu [0, 1] vrijednost izraza 2^x strogo raste od $2^0 = 1$ do $2^1 = 2$, a vrijednost izraza 2^{2-x} strogo pada od $2^{2-0} = 2^2 = 4$ do $2^{2-1} = 2^1 = 2$. Stoga zadana funkcija na tom segmentu strogo pada od $2^0 + 2^{2-0} = 1 + 4 = 5$ do $2^1 + 2^{2-1} = 2 + 2 = 4$. Na segmentu [1, 2] vrijednost izraza 2^x strogo raste od $2^1 = 2$ do $2^2 = 4$, a vrijednost izraza 2^{2-x} strogo pada od $2^{2-1} = 2^1 = 2$ do $2^{2-2} = 2^0 = 1$, pa zadana funkcija na tom segmentu strogo raste od $2^1 + 2^{2-1} = 2 + 2 = 4$ do $2^2 + 2^{2-2} = 4 + 1 = 5$. Stoga zaključujemo: Na segmentu [0, 1] zadana funkcija je strogo padajuća, a na segmentu [1, 2] strogo rastuća. Najmanju vrijednost ta funkcija poprima za $x = 1$ i ona iznosi $f(1) = 2^1 + 2^{2-1} = 2 + 2 = 4$. Dakle, tražena vrijednost jednaka je 4. (Graf zadane funkcije na zadanom intervalu prikazaj je na donjoj slici.)



686. *Površina jednakostraničnoga trokuta ABC dvostruko je veća od površine pravokutnoga trokuta DEF. Ako je jedna stranica trokuta ABC jednaka hipotenuzi trokuta DEF, izračunajte manji šiljasti kut trokuta DEF.*

Rješenje: Neka su a i b duljine kateta, α i β kutovi nasuprot tim katetama, a c duljina hipotenuze trokuta *DEF*. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a \leq b$. Tada je i duljina stranice jednakostraničnoga trokuta *ABC* jednaka c, pa je površina toga trokuta jednaka

$$P_{ABC} = \frac{c^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

Površina trokuta *DEF* je dvostruko manja od površine trokuta *ABC*, pa iz gornje jednakosti slijedi:

$$P_{DEF} = \frac{1}{2} \cdot P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{c^2 \cdot \sqrt{3}}{8}$$

S druge strane, površina trokuta *DEF* jednaka je poluumnošku duljine hipotenuze c i visine v_c na tu hipotenuzu:

$$P_{DEF} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c$$

Izjednačavanjem gornjih dvaju izraza za površinu trokuta *DEF* dobivamo:

$$v_c = \frac{c \cdot \sqrt{3}}{4}$$

Označimo s p i q ortogonalne projekcije kateta a i b na hipotenuzu c, pri čemu zbog pretpostavke $a \leq b$ vrijedi nejednakost $p \leq q$. Prema Euklidovu je poučku

$$v_c = \sqrt{pq}\ ,$$

a također vrijedi i jednakost

$$p + q = c.$$

Tako smo dobili sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\sqrt{pq} = \frac{c\sqrt{3}}{4}$$
$$p + q = c$$

Kvadriranjem prve jednadžbe dobivamo:

$$pq = \frac{3c^2}{16}$$

pa prema Vièteovim formulama slijedi da su brojevi p i q rješenja kvadratne jednadžbe (s nepoznanicom t)

$$t^2 - ct + \frac{3c}{16} = 0 .$$

Rješenja te jednadžbe su $t_1 = \frac{1}{4}c$ i $t_2 = \frac{3}{4}c$, pa je $p = t_1 = \frac{1}{4}c$ i $q = t_2 = \frac{3}{4}c$. Iz pretpostavke $a \leq b$ slijedi i nejednakost $\alpha \leq \beta$. Prema tome, trebamo izračunati veličinu kuta α. Odredit ćemo ga iz jednakosti:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_c}{q}$$

pa uvrštavanjem $v_c = \frac{c \cdot \sqrt{3}}{4}$ i $q = \frac{3}{4}c$ dobivamo

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

i konačno

$$\alpha = 30°.$$

687. *Odredite ukupan broj pravaca koji prolaze točkom* $A(8, 3)$ *i s objema koordinatnim osima zatvaraju trokut površine* 50.

Rješenje: Koristit ćemo segmentni oblik jednadžbe pravca

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

gdje su m i n odsječci pravca redom na osi Ox i Oy. Budući da točka A leži na traženom pravcu, njezine koordinate moraju zadovoljavati gornju jednadžbu. Uvrštavanjem $x = 8$ i $y = 3$ dobivamo:

$$\frac{8}{m} + \frac{3}{n} = 1,$$

odnosno množenjem s mn

$$8n + 3m = mn$$

Ukoliko pravac nije usporedan s nekom od koordinatnih osi, on zajedno s njima tvori pravokutan trokut kojemu su duljine kateta $|m|$ i $|n|$. Površina toga trokuta jednaka je

$$P = \frac{1}{2} | mn | .$$

U zadatku je naveden podatak da ta površina iznosi 50, pa uvrštavanjem $P = 50$ u gornju jednakost i množenjem s 2 dobivamo:

$$|mn| = 100.$$

Tako smo dobili sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} 8n + 3m &= mn \\ |mn| &= 100 \end{aligned}$$

Dva su moguća slučaja:

1.) $mn = 100$

Tada gornji sustav prelazi u

$$\begin{aligned} 8n + 3m &= 100 \\ mn &= 100 \end{aligned}$$

Najbrže ćemo ga riješiti tako da prvu jednadžbu pomnožimo s n. Tako dobivamo:

$$8n^2 - 100n + 3mn = 0,$$

odnosno zbog $mn = 100$

$$8n^2 - 100n + 300 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $n_1 = 5$ i $n_2 = \frac{15}{2}$. Pripadne vrijednosti nepoznanice m najbrže dobijemo iz jednakosti

$$mn = 100.$$

Uvrštavanjem $n_1 = 5$ odmah dobivamo $m_1 = 20$, a uvrštavanjem $n_2 = \frac{15}{2}$ dobivamo $m_2 = \frac{40}{3}$. Tako smo u ovom slučaju za rješenje dobili ukupno dva pravca:

$p_1 \ldots \frac{x}{20} + \frac{y}{5} = 1$, odnosno $p_1 \ldots x + 4y - 20 = 0$,

$p_2 \ldots \frac{x}{\frac{40}{3}} + \frac{y}{\frac{15}{2}} = 1$, odnosno $p_1 \ldots 9x + 16y - 120 = 0$.

2.) $mn = -100$

Tada gornji sustav prelazi u

$$\begin{aligned} 8n + 3m &= -100 \\ mn &= -100 \end{aligned}$$

Najbrže ćemo ga riješiti tako da prvu jednadžbu pomnožimo s n. Tako dobivamo:

$$8n^2 + 100n + 3mn = 0,$$

odnosno zbog $mn = 100$

$$8n^2 + 100n - 300 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $n_3 = -15$ i $n_4 = \frac{5}{2}$. Pripadne vrijednosti nepoznanice m najbrže dobijemo iz jednakosti

$$mn = -100.$$

Uvrštavanjem $n_3 = -15$ odmah dobivamo $m_1 = \frac{20}{3}$, a uvrštavanjem $n_2 = \frac{5}{2}$ dobivamo $m_2 = -40$. Tako smo u ovom slučaju za rješenje dobili ukupno dva pravca:

$p_3 \ldots \ \frac{x}{\frac{20}{3}} + \frac{y}{-15} = 1$, odnosno $p_3 \ldots \ 9x - 4y - 60 = 0$,

$p_4 \ldots \ \frac{x}{-40} + \frac{y}{\frac{5}{2}} = 1$, odnosno $p_4 \ldots \ x - 16y + 40 = 0$.

Prema tome, postoje točno 4 pravca koji prolaze zadanom točkom A i s objema koordinatnim osima zatvaraju trokut površine 50.

688. *Oko kružnice polumjera* $r = \sqrt{3}$ *opisan je jednakokračan trapez čiji je šiljasti kut* 60°. *Izračunajte duljinu srednjice toga trapeza.*

Rješenje: Neka su a i c duljine osnovica toga trapeza (pri čemu je standardno $a > c$), a b duljina kraka trapeza. Trapez opisan zadanoj kružnici jest tangencijalni četverokut. U svakom takvom četverokutu vrijedi jednakost:

$$a + c = b + d$$

(zbrojevi duljina nasuprotnih stranica četverokuta su jednaki). U ovom je slučaju $b = d$, pa je

$$a + c = 2b,$$

odnosno

$$b = \frac{a+c}{2} = s,$$

gdje je s tražena duljina srednjice trapeza. Nadalje, visina trapeza jednaka je promjeru zadane kružnice:

$$v = 2r = 2\sqrt{3}.$$

Iz pravokutnoga trokuta kojemu je duljina hipotenuze jednaka b (odnosno, s), duljina jedne katete jednaka v, a kut nasuprot toj kateti jednak $\alpha = 60°$ slijedi

$$\sin\alpha = \frac{v}{s}.$$

Odavde je

$$s = \frac{v}{\sin\alpha},$$

pa uvrštavanjem $v = 2\sqrt{3}$ i $\alpha = 60°$ konačno dobivamo

$$s = 4.$$

689. *Odredite zbroj najmanje i najveće vrijednosti funkcije*

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

na segmentu [0, 3].

<u>Rješenje:</u> Zadana funkcija je kvadratna funkcija. Ona postiže svoj ekstrem $\frac{4 \cdot 1 \cdot (-3) - (-2)^2}{4 \cdot 1} = -4$ u točki $x = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$. Budući da je koeficijent uz x^2 jednak 1 i taj broj je strogo veći od nule, slijedi da je dobiveni ekstrem najmanja vrijednost (minimum) zadane kvadratne funkcije. To znači da na segmentu $[0, 1\rangle$ funkcija strogo pada, a na segmentu $\langle 1, 3]$ funkcija strogo raste, pa svoju najveću vrijednost (maksimum) postiže u točki $x = 0$ ili u točki $x = 3$. Vrijednosti funkcije u točkama $x = 0$ i $x = 3$ su

$$f(0) = -3$$
$$f(3) = 0$$

Stoga je najveća vrijednost funkcije na segmentu [0, 3] jednaka $f(3) = 0$, a najmanja $f(1) = -4$. Zbroj tih dvaju brojeva jednak je –4.

690. *Odredite zbroj svih rješenja jednadžbe*

$$\sin 2x = \cos 3x$$

koja pripadaju intervalu $\langle 0, \pi\rangle$.

<u>Rješenje:</u> Primijenimo identitet

$$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

pa polaznu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right),$$

odnosno u obliku

$$\sin 2x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = 0.$$

Primjenom formule za pretvorbu razlike sinusa dvaju kutova u umnožak dobivamo:

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

Budući da je umnožak dvaju brojeva jednak nuli ako i samo ako je barem jedan od njih jednak nuli, dva su moguća slučaja:

1.) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=0$

Iz te je jednadžbe

$$\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\ ,\ k\in\mathbf{Z},$$

a otuda slijedi

$$x_k=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi\ ,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Od svih dobivenih rješenja, u intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ nalazi se jedino $x_0=\frac{\pi}{2}$.

2.) $\sin\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$

Iz te je jednadžbe

$$\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}=l\cdot\pi\ ,\ l\in\mathbf{Z},$$

a otuda slijedi

$$x_l=\frac{\pi}{10}+l\cdot\frac{2\pi}{5}\ ,\ l\in\mathbf{Z}.$$

Od svih dobivenih rješenja, u intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ nalaze se: $x_0=\frac{\pi}{10}$, $x_1=\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}=\frac{\pi}{2}$ i $x_2=\frac{\pi}{10}+\frac{4\pi}{5}=\frac{9\pi}{10}$.

U oba slučaja smo kao rješenje dobili $x=\frac{\pi}{2}$, pa ga pri računanju traženoga zbroja uzimamo samo jednom. Stoga je traženi zbroj jednak $x_0+x_1+x_2=\frac{3\pi}{2}$.

691. *Zraka svjetlosti prolazi točkom* $A(-2, 3)$, *odbije se na osi* Ox *i nakon toga prolazi točkom* $B(7, 6)$. *Odredite koordinate točke odbijanja te zrake.*

Rješenje: Prema zakonu loma, odbijena zraka mora prolaziti i točkom A' simetričnom točki A s obzirom na os Ox. Koordinate te točke su $A'(-2, -3)$. Stoga je jednadžba odbijene zrake (jednadžba pravca kroz točke A' i B)

$$y+3=\frac{6-(-3)}{7-(-2)}(x+2)\ ,$$

tj.

$$y = x - 1.$$

Sjecište te zrake s osi Ox dobijemo tako da u gornju jednadžbu stavimo $y = 0$:

$$0 = x - 1$$

pa je $x = 1$, odnosno tražena točka je $T(1, 0)$.

692. *Odredite skup svih realnih rješenja nejednadžbe*

$$\log_{\sqrt{3}}(9^x - 6) < 2x .$$

Rješenje: Da bi vrijednost logaritma uopće bila definirana mora vrijediti nejednakost

$$9^x - 6 > 0,$$

a odavde je

$$x > \log_9 6 = \frac{\log 9}{\log 6}.$$

Uvažavajući tu nejednakost antilogaritmiranjem zadane nejednadžbe dobivamo:

$$9^x - 6 < (\sqrt{3})^{2x},$$

odnosno

$$3^{2x} - 6 < 3^x,$$

odnosno

$$3^{2x} - 3^x - 6 < 0.$$

Stavimo $t = 3^x$ pa dobivamo kvadratnu nejednadžbu

$$t^2 - t - 6 < 0$$

čiji je skup svih rješenja otvoreni interval $\langle -2, 3\rangle$. Odatle vraćanjem zamijenjenoga izraza slijedi:

$$-2 < 3^x < 3.$$

No, za sve $x \in \mathbf{R}$ je

$$3^x > 0 > -2$$

pa preostaje

$$3^x < 3,$$

otkuda usporedbom eksponenata (pri čemu se znak nejednakosti ne mijenja) slijedi

$$x < 1.$$

Tako iz sustava nejednadžbi

$$x > \frac{\log 9}{\log 6}$$
$$x < 1$$

dobivamo da je traženi skup svih rješenja polazne nejednadžbe otvoreni interval $\langle \frac{\log 9}{\log 6}, 1\rangle$.

693. *Oko kružnice polumjera* 2 cm *opisan je jednakokračan trapez čija je površina* 20 cm^2. *Izračunajte opseg toga trapeza.*

Rješenje: Neka su a i c duljine osnovica toga trapeza (pri čemu je standardno $a > c$), a b duljina kraka trapeza. Trapez opisan zadanoj kružnici jest tangencijalni četverokut. U svakom takvom četverokutu vrijedi jednakost:

$$a + c = b + d$$

(zbrojevi duljina nasuprotnih stranica četverokuta su jednaki). U ovom je slučaju $b = d$, pa je

$$a + c = 2b,$$

odnosno

$$b = \frac{a+c}{2} = s,$$

gdje je s tražena duljina srednjice trapeza. Nadalje, visina trapeza jednaka je promjeru zadane kružnice:

$$v = 2r = 4 \text{ cm}.$$

Površina trapeza dana je izrazom

$$P = s \cdot v$$

pa uvrštavanjem $P = 20$ i $v = 4$ slijedi

$$s = 5 \text{ cm}.$$

Traženi opseg trapeza računamo prema formuli

$$O = a + c + 2b$$

Zbog jednakosti

$$a + c = 2s$$
$$b = s$$

ta formula prelazi u

$$O = 2s + 2 \cdot 2s$$
$$O = 4s$$

Preostaje uvrstiti $s = 5$ cm, pa je konačno

$$O = 20 \text{ cm}.$$

694. *Površina romba iznosi* 48, *a omjer njegovih dijagonala* 3 : 2. *Izračunajte opseg toga romba.*

Rješenje: Neka je a duljina stranice romba, a e i f redom duljina veće, odnosno manje dijagonale. Iz podatka

$$e : f = 3 : 2$$

slijedi da postoji strogo pozitivan realan broj $k \in \mathbf{R}$ takav da vrijede jednakosti

$$e = 3k$$
$$f = 2k$$

Te jednakosti, zajedno s vrijednošću $P = 48$, uvrstimo u izraz za površinu romba

$$P = \frac{e \cdot f}{2}$$

pa dobijemo:

$$48 = \frac{3k \cdot 2k}{2},$$

odnosno

$$k^2 = 16$$

pa je $k = 4$. Stoga su duljine dijagonala romba

$$e = 3k = 3 \cdot 4 = 12$$
$$f = 2k = 2 \cdot 4 = 8$$

pa je duljina a stranice romba jednaka

$$a = \sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2}$$
$$a = \sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2}$$
$$a = \sqrt{6^2 + 4^2}$$
$$a = 2\sqrt{13}$$

Stoga je traženi opseg romba jednak

$$O = 4a = 8\sqrt{13}.$$

695. *Izračunajte vrijednost izraza*

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i\right)^4 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} i\right)^4.$$

Rješenje: Označimo

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i$$
$$z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} i$$

Tada je

$$z_1 + z_2 = 1$$
$$z_1 \cdot z_2 = 2$$

Stoga je vrijednost zadanoga izraza jednaka

$$z_1^4 + z_2^4 = (z_1^2 + z_2^2)^2 - 2(z_1^2 z_1^2) = \left[(z_1 + z_2)^2 - 2 \cdot (z_1 \cdot z_2)\right]^2 - 2 \cdot (z_1 \cdot z_2)^2 = (1^2 - 2 \cdot 2)^2 - 2 \cdot 2^2 = (-3)^2 - 2 \cdot 4 =$$
$$= 9 - 8 = 1$$

696. *Zadani su točka A*(–5, 13) *i pravac p*… 2*x* – 3*y* – 3 = 0. *Odredite točku A*' *simetričnu točki A u odnosu na pravac p*.

Rješenje: Jednadžbu pravca p najprije zapišimo u eksplicitnom obliku:

$$p...3y = 2x - 3$$
$$p...y = \frac{2}{3} x - 1$$

Koeficijent smjera toga pravca jednak je

$$k_p = \frac{2}{3}$$

Točkom A povucimo pravac q okomit na pravac p. Njegov je koeficijent smjera

$$k_q = -\frac{1}{k_p}$$
$$k_q = -\frac{3}{2}$$

pa je njegova jednadžba (jednadžba pravca kroz jednu točku sa zadanim koeficijentom smjera)

$$q\ldots\ y - 13 = -\frac{3}{2}(x + 5),$$

odnosno

$$q\ \ldots\ y = -\frac{3}{2} x + \frac{11}{2}$$

Sjecište pravaca p i qn određujemo iz sustava

$$y = \frac{2}{3} x - 1$$

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$$

Riješimo ga metodom usporedbe (komparacije):

$$\frac{2}{3}x - 1 = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2} \qquad / \cdot 6$$
$$4x - 6 = -9x + 33$$
$$13x = 39$$
$$x = 3$$

pa je

$$y = \frac{2}{3}x - 1$$
$$y = \frac{2}{3} \cdot 3 - 1$$
$$y = 1$$

Prema tome, sjecište pravaca p i q je točka $S(3, 1)$. Ta je točka polovište dužine AA'. Stoga moraju vrijediti jednakosti

$$3 = \frac{-5 + x_{A'}}{2}$$
$$1 = \frac{13 + y_{A'}}{2}$$

iz kojih se dobiva

$$x_{A'} = 11,\ y_{A'} = -11.$$

Stoga je tražena točka $A'(11, -11)$.

697. *U trokutu ABC zadane su veličine kutova* $\beta = 72°$ *i* $\gamma = 44°$. *Izračunajte veličinu kuta kojega zatvaraju visina iz vrha A i simetrala kuta* α *toga trokuta.* (*Sve oznake u trokutu su standardne.*)

Rješenje: Označimo s D nožište visine iz vrha A na stranicu a, a s E sjecište simetrale kuta α sa stranicom a. Promotrimo trokutove ABE i AED. U trokutu ABE znamo veličine dvaju kutova: kut kod vrha B jednak je β, a kut kod vrha A jednak je $\frac{\alpha}{2}$. Kut kod vrha E u trokutu AED je vanjski kut trokuta ABE, pa je on jednak zbroju dvaju unutrašnjih kutova trokuta ABE koji mu nisu susjedni:

$$\angle DEA = \angle EBA + \angle BAE$$
$$\angle DEA = \beta + \frac{\alpha}{2}$$

U tu jednakost uvrstimo

$$\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$$

pa dobijemo:

$$\angle DEA = \beta + \frac{180 - (\beta + \gamma)}{2}$$
$$\angle DEA = 90° + \frac{\beta - \gamma}{2}$$

Budući da je trokut AED pravokutan (s pravim kutom kod vrha D), vrijedi jednakost

$$\angle DEA + \angle DAE = 90°,$$

a odavde je

$$\angle DAE = 90° - \angle DEA$$

pa uvrštavanjem

$$\angle DEA = 90° + \frac{\beta - \gamma}{2}$$

dobijemo

$$\angle DAE = \frac{\beta - \gamma}{2}$$

Preostaje nam uvrstiti $\beta = 72°$ *i* $\gamma = 44°$ u tu jednakost i dobiti traženu veličinu kuta:

$$\angle DAE = 14°.$$

698. *Zbog trošenja gume automobilskoga kotača njegov se polumjer smanji za* 1%. *Za koliko će se pritom povećati broj njegovih okretaja na putu od* 10 km?

Rješenje: Označimo s R polumjer kotača prije smanjivanja od 1%. Na putu duljine s taj se kotač okrene ukupno

$n_1 = \frac{s}{2R\pi}$ puta jer pri jednom okretaju kotač prevali put jednak njegovu opsegu. Nakon smanjenja od 1% polumjer kotača jednak je

$$R_1 = R - \frac{1}{100} \cdot R$$
$$R_1 = R \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right)$$
$$R_1 = 0.99 \cdot R$$

a broj njegovih okretaja na putu duljine s

$$n_1 = \frac{s}{2R_1\pi}$$
$$n_1 = \frac{s}{2 \cdot 0.99 \cdot R \cdot \pi}$$
$$n_1 = \frac{1}{0.99} \cdot \frac{s}{2 \cdot R \cdot \pi}$$

odnosno

$$n_1 = \frac{100}{99} \cdot n$$

Stoga je traženi postotak povećanja jednak

$$p = \frac{100 \cdot \frac{100}{99} \cdot n}{n}$$
$$p = \frac{100 \cdot \left(\frac{100}{99} \cdot n - n\right)}{n}$$
$$p = \frac{100 \cdot \frac{1}{99} \cdot n}{n}$$
$$p = \frac{100}{99}$$
$$p = 1.0101010101010101010101010101010101$$
$$p \approx 1.01$$

699. *Razlika, zbroj i umnožak dvaju pozitivnih realnih brojeva odnose se kao* 1 : 7 : 24. *Odredite te brojeve.*

Rješenje: Neka su x i y traženi brojevi. Iz podatka da se razlika, zbroj i umnožak tih brojeva odnose kao 1 : 7 : 24 i podatka da su traženi brojevi pozitivni slijedi da postoji strogo pozitivan realan broj $k \in \mathbf{R}$ takav da vrijedi:

$$x - y = 1 \cdot k,$$
$$x + y = 7 \cdot k$$
$$x \cdot y = 24 \cdot k.$$

Zbrajanjem prve i druge jednakosti dobivamo

$$x = 4 \cdot k$$

pa je

$$y = 7 \cdot k$$
$$y = 3 \cdot k$$

Dobivene izraze uvrstimo u treću jednakost pa dobijemo:

$$(4 \cdot k) \cdot (3 \cdot k) = 24 \cdot k,$$

odnosno

$$12k^2 = 24k.$$

Zbog pretpostavke $k > 0$ ovu jednadžbu smijemo podijeliti s $12k$ pa se izravno dobije

$$k = 2.$$

Dakle, traženi brojevi su

$$x = 4 \cdot k = 4 \cdot 2 = 8$$
$$y = 3 \cdot k = 3 \cdot 2 = 6.$$