DRUŠTVENI ODJEL

KVANTITATIVNE METODE U TRGOVINI

riješeni primjeri 1. seminarskoga zadatka uz korištenje programa *Maxima*

1. Promatramo trosektorsku ekonomiju Republike Niškoristije za koju je zadano:

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, \; Q = \begin{bmatrix} 600 \\ 700 \\ 800 \end{bmatrix}.$$

Sastavite pripadnu input-output tablicu. Napišite analitički izraz pomoću kojega ste izračunali svaki pojedini element.

2. Zadana je input–output tablica trosektorske ekonomije Kraljevine Niškoristije:

Q_i	Q_{ij}			q_i
800	80	180	300	x
y	160	270	100	370
1000	240	z	200	470

Tablica 1.

a) Dopunite tablicu podacima koji nedostaju. Interpretirajte **svaki** od nedostajućih podataka.

b) Novim gospodarskim planom u drugom sektoru predviđen je ukupni output od 1000 jedinica, u trećem sektoru ukupni output od 1100 jedinica, a u prvom sektoru finalna potražnja 280 jedinica. Sastavite novu input–output tablicu. (Napišite analitičke izraze pomoću kojih ste računali svaki pojedini element.)

3. Zadana je funkcija proizvodnje $Q = Q(K, L) = 150 \cdot K^{0.8} \cdot L^{0.5}$, pri čemu su K iznos kapitala, a L količina rada. Izračunajte sve koeficijente parcijalne elastičnosti i interpretirajte ih. (Napišite izraze pomoću kojih ste računali svaki pojedini koeficijent.)

4. Zadana je funkcija proizvodnje $Q = Q(K, L) = 200 \cdot K^{x} \cdot L^{x-0.2}$, pri čemu su K iznos kapitala, L količina rada i $x \in \mathbb{R}$ konstanta. Poznato je da ako se iznos kapitala i količina rada istodobno povećaju za 1%, onda će se ukupna količina proizvodnje povećati za 1.4%. Odredite smjer i veličinu relativne promjene ukupne količine proizvodnje ako se:

a) iznos kapitala poveća za 1%, a količina rada ostane nepromijenjena;

b) količina rada poveća za 1%, a iznos kapitala ostane nepromijenjen.

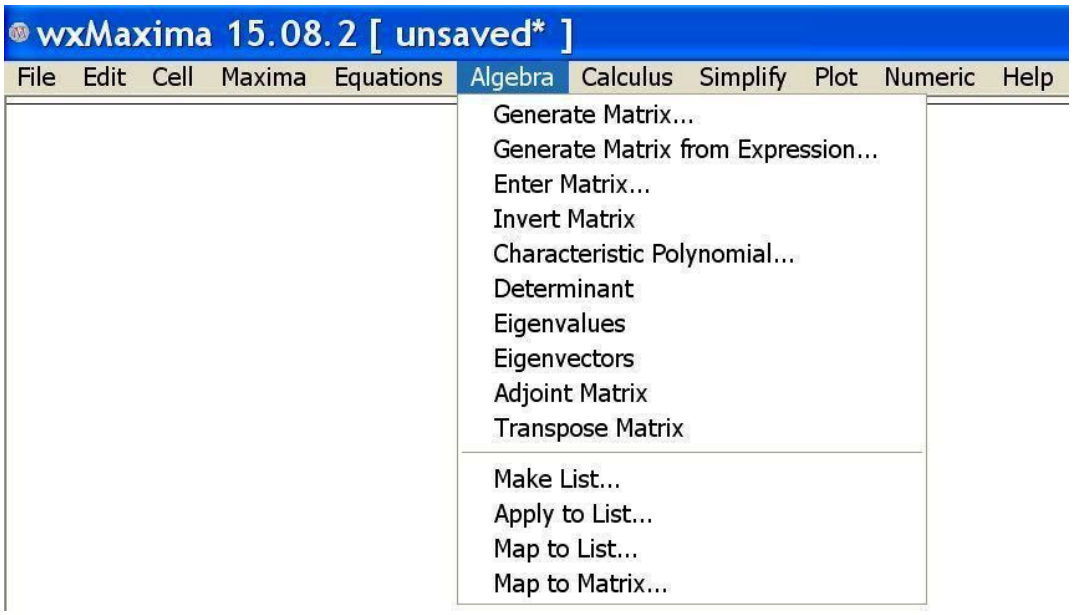
DRUŠTVENI ODJEL

KVANTITATIVNE METODE U TRGOVINI

riješeni primjeri 1. seminarskoga zadatka uz korištenje programa *Maxima*

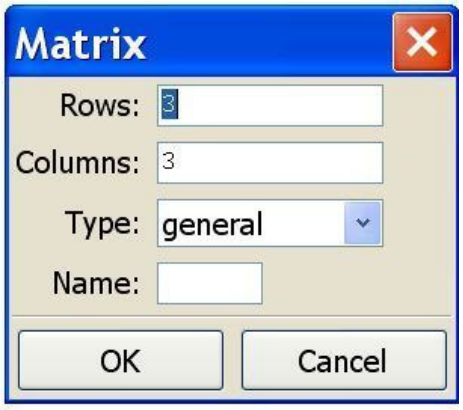
Rješenja zadataka

1. U računalnom programu *Maxima* najprije zadajemo matrice *A* i *Q*. Koristimo opciju *Enter Matrix*… u izborniku *Algebra* (vidjeti Sliku 1.).



Slika 1. Izbornik *Algebra.*

Kliknemo na *EnterMatrix*… Pojavljuje se okvir prikazan na Slici 2.



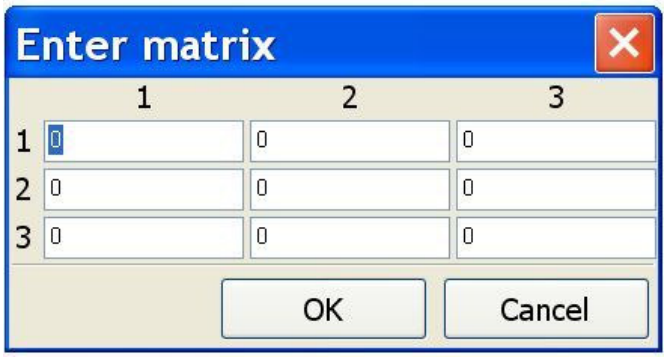
Slika 2. Okvir za definiranje tipa i naziva matrice *A*.

Najprije zadajemo matricu *A*. Pokraj natpisa *Rows* i *Columns* ostavimo početne vrijednosti (one trebaju biti jednake 3). U pravokutnik pored natpisa *Name* upišemo `A`. Potom kliknemo na *OK*. Pojavljuje se okvir prikazan na Slici 3.

DRUŠTVENI ODJEL

KVANTITATIVNE METODE U TRGOVINI

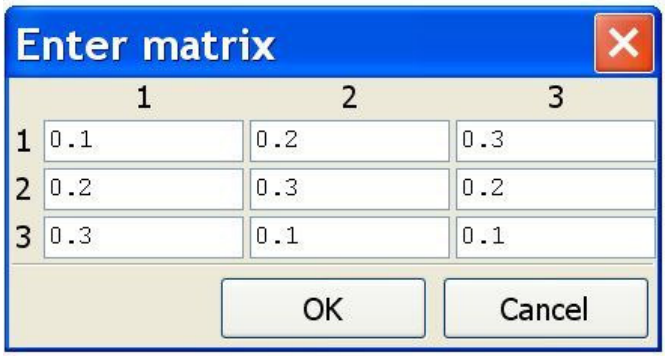
riješeni primjeri 1. seminarskoga zadatka uz korištenje programa *Maxima*



Slika 3. Okvir za upisivanje matrice *A*.

U prvi redak ovoga okvira upisujemo brojeve: 0.1, 0.2 i 0.3.
U drugi redak ovoga okvira upisujemo brojeve: 0.2, 0.3 i 0.2.
U treći redak ovoga okvira upisujemo brojeve: 0.3, 0.1 i 0.1.

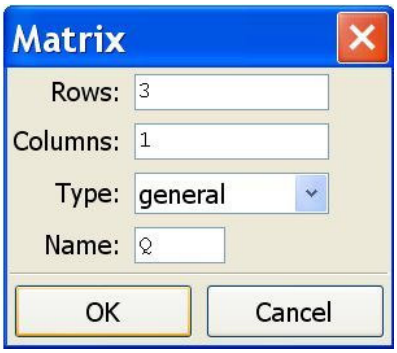
Tako dobivamo popunjenu matricu *A* (vidjeti Sliku 4.)



Slika 4. Unos matrice *A*.

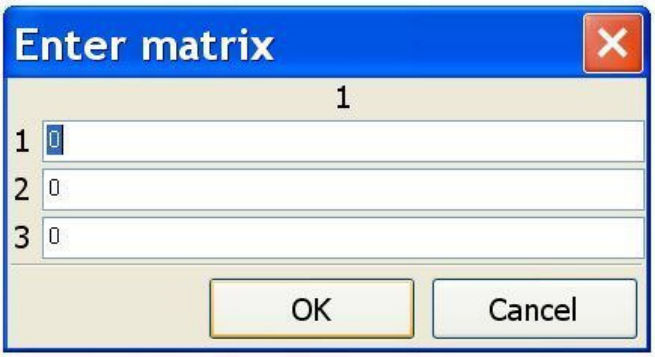
Kliknemo na *OK*. Matrica *A* je definirana u radnom prozoru *Maxime*, što se može provjeriti tako da se u novom retku utipka jednostavno `A` pa ili istodobno pritisnu tipke *Shift* i *Enter* ili pritisne tipka *Enter* na numeričkom dijelu tipkovnice.

Na potpuno analogan način zadajemo matricu *Q*. Ponovno kliknemo na izbornik *Algebra* i odaberemo opciju *Enter Matrix* … (vidjeti Sliku 1.). U dijaloškom okviru prikazanom na Slici 2. u pravokutnik pored natpisa *Columns* trebamo upisati 1 jer je matrica *Q* tipa (3, 1). U pravokutnik pored natpisa *Name* treba upisati `Q`. (vidjeti Sliku 5.)



Slika 5. Okvir za definiranje tipa i naziva matrice *Q*.

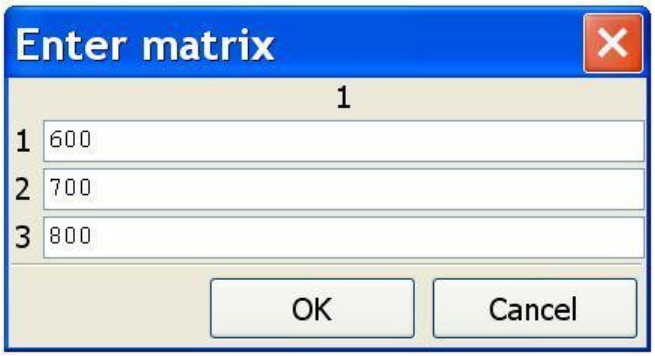
Kliknemo na *OK*. Pojavljuje se okvir analogan onome sa Slike 3. (vidjeti Sliku 6.)



Slika 6. Okvir za zadavanje matrice *Q*

U prvi redak ovoga okvira upisujemo broj 600.
U drugi redak ovoga okvira upisujmo broj 700.
U treći redak ovoga okvira upisujemo broj 800.

Tako dobivamo popunjenu matricu *Q*. (vidjeti Sliku 7.)



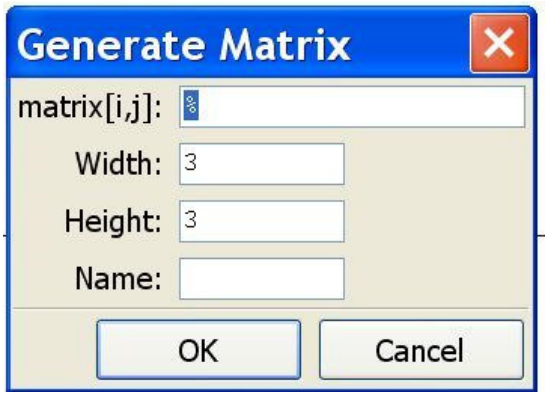
Slika 7. Popunjena matrica *Q*

Kliknemo na *OK*. Matrica *Q* je definirana u radnom prozoru *Maxime*, što se također može provjeriti tako da se u novi redak upiše `Q`, pa potom ili istodobno pritisnu tipke Shift i *Enter* ili pritisne tipka *Enter* na numeričkom dijelu tipkovnice.

U nastavku računamo elemente matrice međusektorske razmjene. Ta matrica je reda 3. Radi jednostavnosti, označimo je s *M* (naziv potječe od prvoga slova riječi *međusektorske*). Njezine elemente računamo prema formuli:

$$m_{ij} = a_{ij} \cdot Q_j, \text{ za svaki } i, j = 1,\ 2,\ 3.$$

Da bismo izračunali tu matricu, koristimo opciju *Generate Matrix from Expression…* (vidjeti Sliku 1.) Kliknemo na izbornik *Algebra* i odaberemo navedenu opciju. Pojavljuje se okvir prikazan na Slici 8.

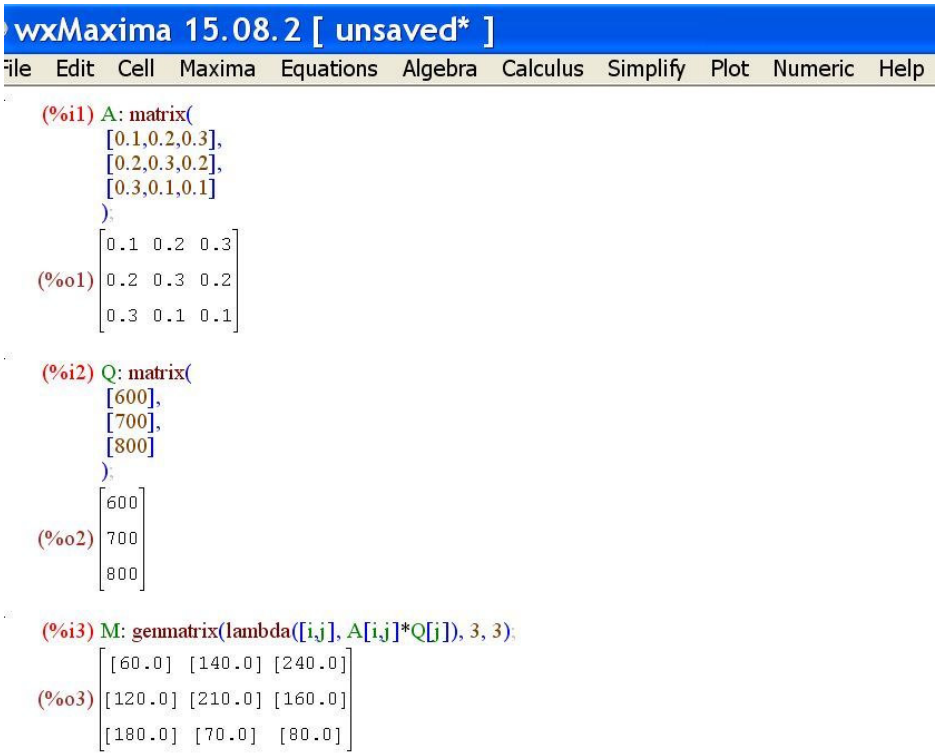


Slika 8. Okvir opcije *Generate Matrix from Expression…*

U pravokutnik pored natpisa *matrix*[*i*,*j*] upisujemo: `A[i,j]*Q[j]`. Pritom uglatu zagradu [utipkavamo istodobnim pritiskom tipaka *AltGr* i *F* na tipkovnici, a *Maxima* sama unosi znak]. Tipka sa znakom * nalazi se neposredno lijevo od znaka – na numeričkom dijelu tipkovnice. (Možete koristiti i istodobni pritisak tipki *Shift* i +.)

U pravokutnik pored natpisa *Name* upisujemo M.

Kliknemo na *OK*. *Maxima* će ispisati matricu *M* kao na Slici 9.



Slika 9. Ispis matrice *M* u programu *Maxima*

Sada možemo popuniti prva četiri stupca tražene input-output tablice:

Q_i	Q_{ij}			q_i
600	**60**	**140**	**240**	
700	**120**	**210**	**160**	
800	**180**	**70**	**80**	

Tablica 2. Prva četiri stupca tražene input-output tablice.

Preostaje popuniti stupac ukupnih finalnih potražnji. Podsjetimo se da je ukupna proizvodnja svakoga sektora jednaka zbroju svih međusektorskih razmjena toga sektora i ukupne finalne potražnje toga sektora. Stoga nepoznate elemente tablice računamo prema izrazima:

$$q_1 = 600 - (60 + 140 + 240),$$
$$q_2 = 700 - (120 + 210 + 160),$$
$$q_3 = 800 - (180 + 70 + 80).$$

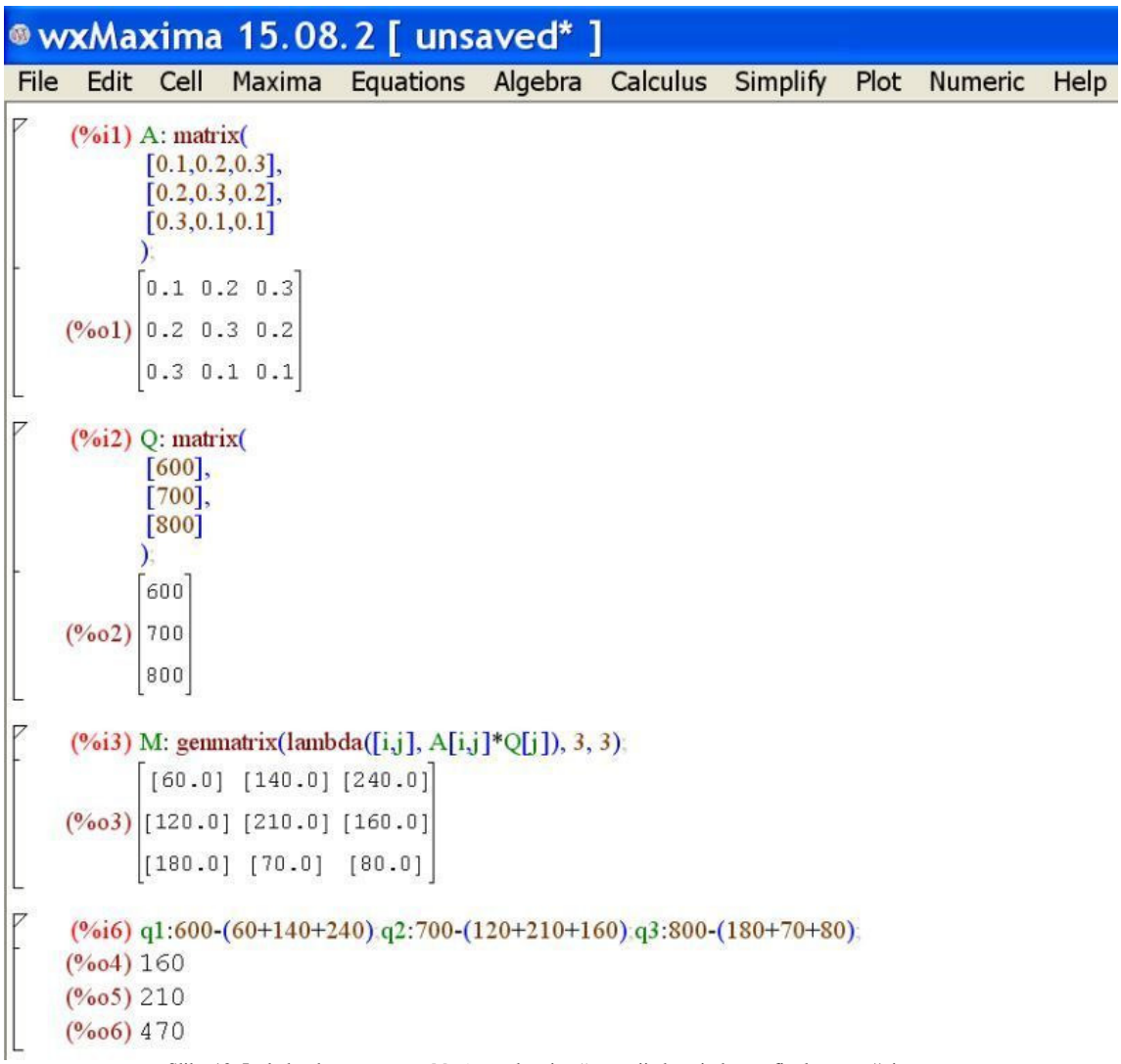
Izračunamo ih u sljedećem retku radnoga prozora *Maxime*. Utipkamo:

```
q1:600-(60+140+240);q2:700-(120+210+160);q3:800-(180+70+80);
```

Pritisnemo *Enter* na numeričkom dijelu tipkovnice, pa će *Maxima* ispisati:

```
160
210
470
```

(vidjeti Sliku 10.).



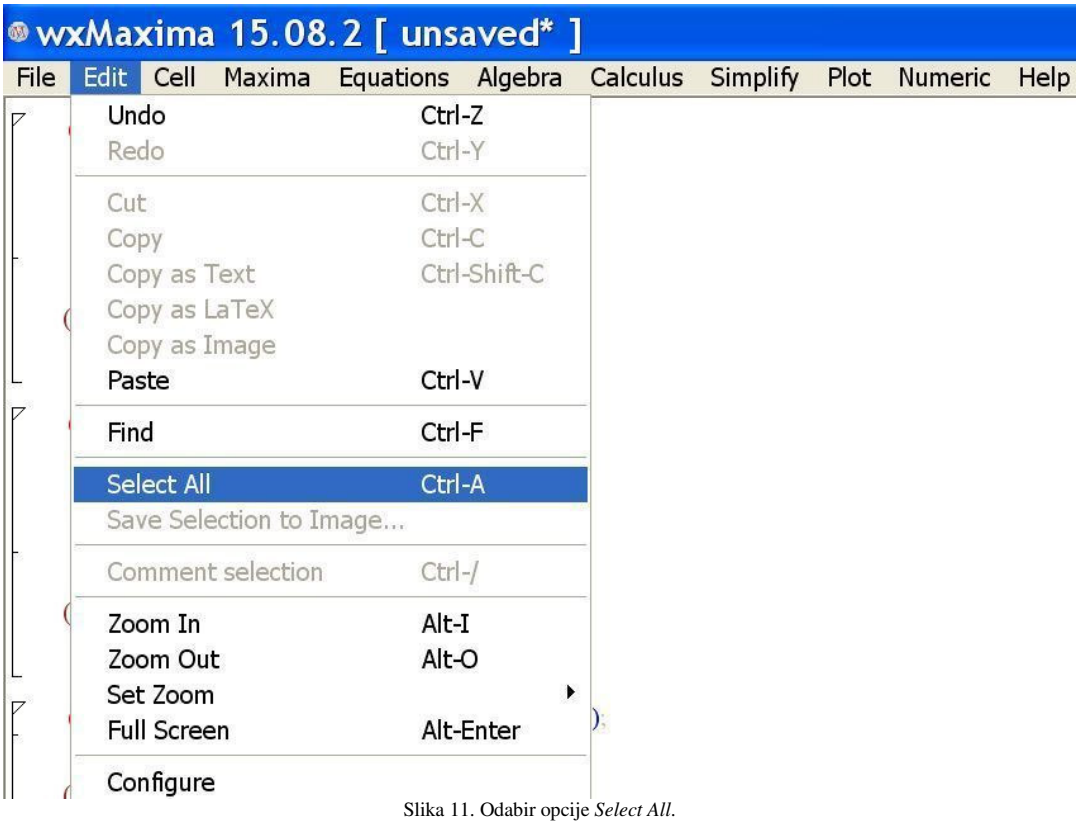
Slika 10. Izgled radnoga prozora *Maxime* nakon izračuna vrijednosti ukupne finalne potražnje.

Dakle, tražena input-output tablica je:

Q_i	Q_{ij}			q_i
600	**60**	**140**	**240**	**160**
700	**120**	**210**	**160**	**210**
800	**180**	**70**	**80**	**470**

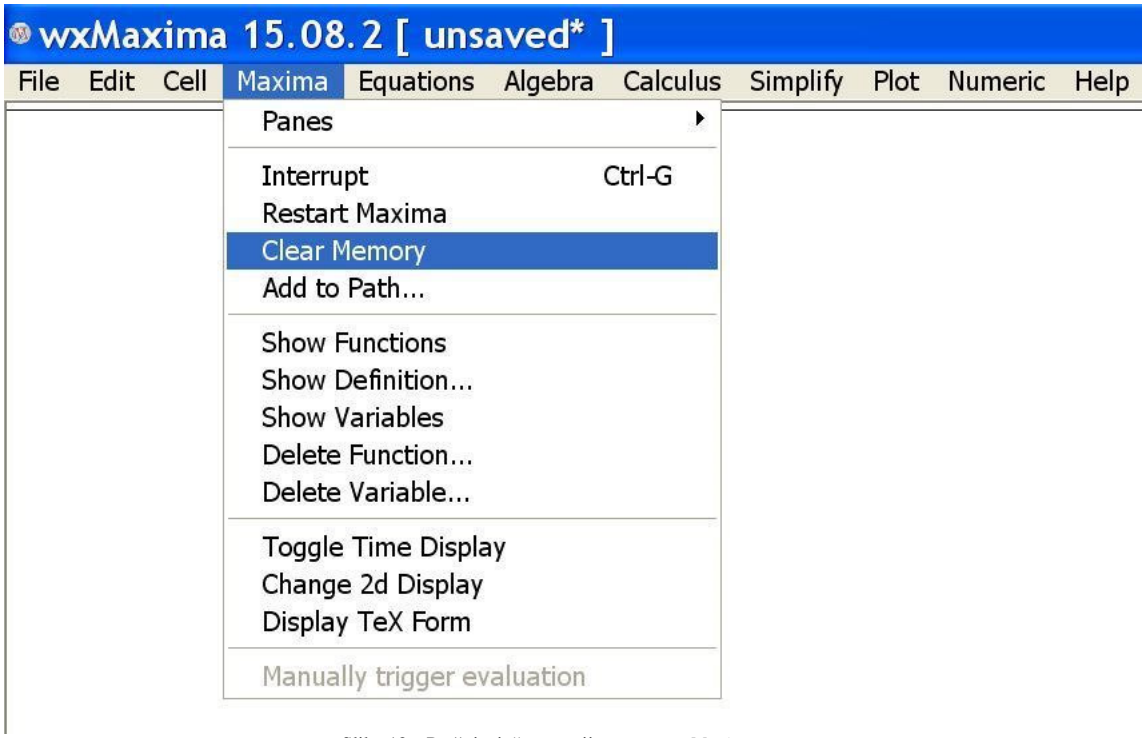
Tablica 3. Tražena input-output tablica

2. Najprije „počistimo“ sve podatke iz prethodnoga zadatka. Kliknemo na izbornik *Edit*, pa odaberemo opciju *Select All*. (vidjeti Sliku 11.) Istu opciju možemo izravno odabrati istodobnim pritiskom na tipke *Ctrl* i *A*.



Slika 11. Odabir opcije *Select All*.

Potom ponovno kliknemo na izbornik *Edit*, pa odaberemo opciju *Cut*. Istu opciju možemo izravno odabrati istovremenim pritiskom na tipke *Ctrl* i *X*. Radni prozor se „ispraznio“, ali programska memorija nije. Nju „praznimo“ tako da kliknemo na izbornik *Maxima* i odaberemo opciju *Clear Memory*. (vidjeti Sliku 12.)

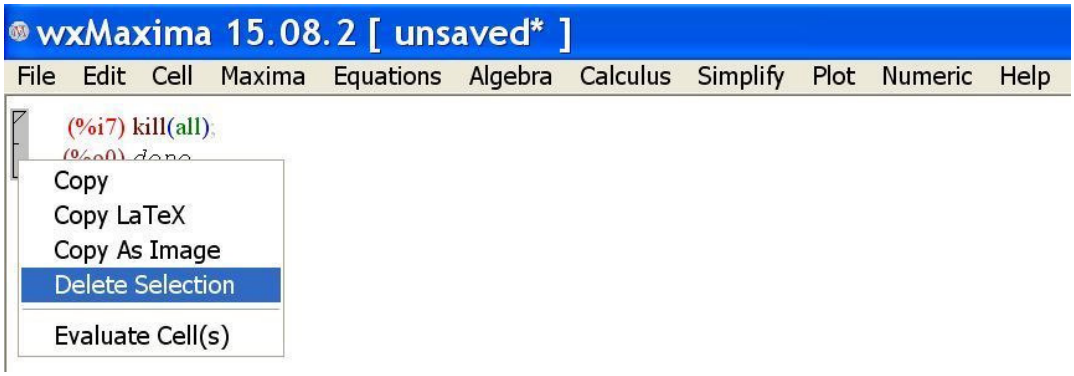


Slika 12. „Pražnjenje“ memorije programa *Maxima*.

Nakon odabira ove opcije u radnom prozoru programa *Maxima* ispisuje se

```
kill(all)
done
```

Taj natpis možemo ukloniti tako da desnim klikom miša kliknemo na „vješala“ pokraj natpisa i odaberemo opciju *Delete Selection*. (vidjet Sliku 13.)



Slika 13. Odabir opcije *Delete Selection*.

Sad možemo prijeći na rješavanje zadatka.

a) Analogno kao i u prethodnom zadatku primijenimo načelo prema kojemu je ukupni output svakoga sektora jednak zbroju svih međusektorskih razmjena toga sektora i ukupne finalne potražnje toga sektora. Stoga nepoznate elemente x, y i z računamo iz izraza:

$$x = 800 - (80 + 180 + 300),$$
$$y = 160 + 270 + 100 + 370,$$
$$z = 1000 - (240 + 200 + 470).$$

U novi redak programa *Maxima* upišemo:

```
x:800-(80+180+300);y:160+270+100+370;z:1000-(240+200+470);
```

Pritisnemo *Enter* na numeričkom dijelu tipkovnice. *Maxima* će ispisati:

```
240
900
90
```

Zaključujemo:

$x = 240$ je *ukupna finalna potražnja sektora* 1.
$y = 900$ je *ukupna proizvodnja* (*ukupni output*) *sektora* 2.
$z = 90$ je *količina proizvoda koja prelazi iz sektora* 3 *u sektor* 2 *radi normalnoga odvijanja procesa proizvodnje u sektoru* 2.

b) Zadatak ćemo djelomično svesti na rješenje prethodnoga zadatka. Da bismo to učinili, iz podataka u zadanoj input-output tablici najprije moramo izračunati matricu normativa A. Analogno kao u rješenju Zadatka 1. označimo matricu međusektorske razmjene s M. Elementi matrice normativa definirani su formulom:

$$a_{ij} = \frac{M_{ij}}{Q_j}, \text{ za sve } i, j = 1,\ 2,\ 3.$$

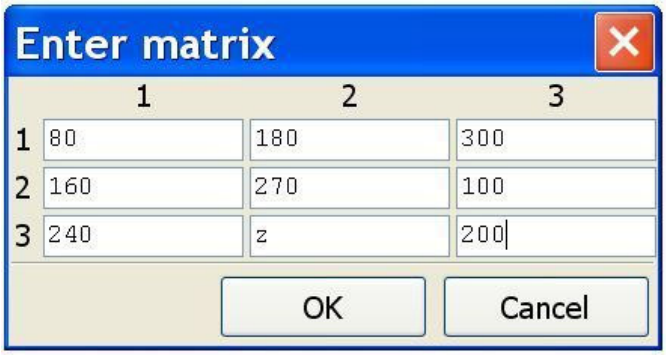
Stoga u *Maximi* najprije moramo zadati matrice M i Q. Prva, matrica M, je reda 3, a druga, matrica Q je tipa (3, 1). Ponovno koristimo opciju *Enter Matrix…* u izborniku *Algebra*. Postupkom popraćenim na Slikama 1. – 3. unosimo elemente matrice M potpuno analogno kao i elemente matrice A u Zadatku 1.

Odaberemo opciju *Enter Matrix…* u izborniku *Algebra*. Broj redaka u pravokutniku pored natpisa *Rows* i broj stupaca u pravokutniku pored natpisa *Columns* ostavimo nepromijenjen (početna vrijednost svakoga od tih brojeva jednaka je 3). U pravokutnik pored natpisa *Name* upišemo M. Potom kliknemo na *OK*.

Pojavljuje se okvir jednak onome na Slici 3. Popunjavamo prazne pravokutnike elementima matrice *M*.

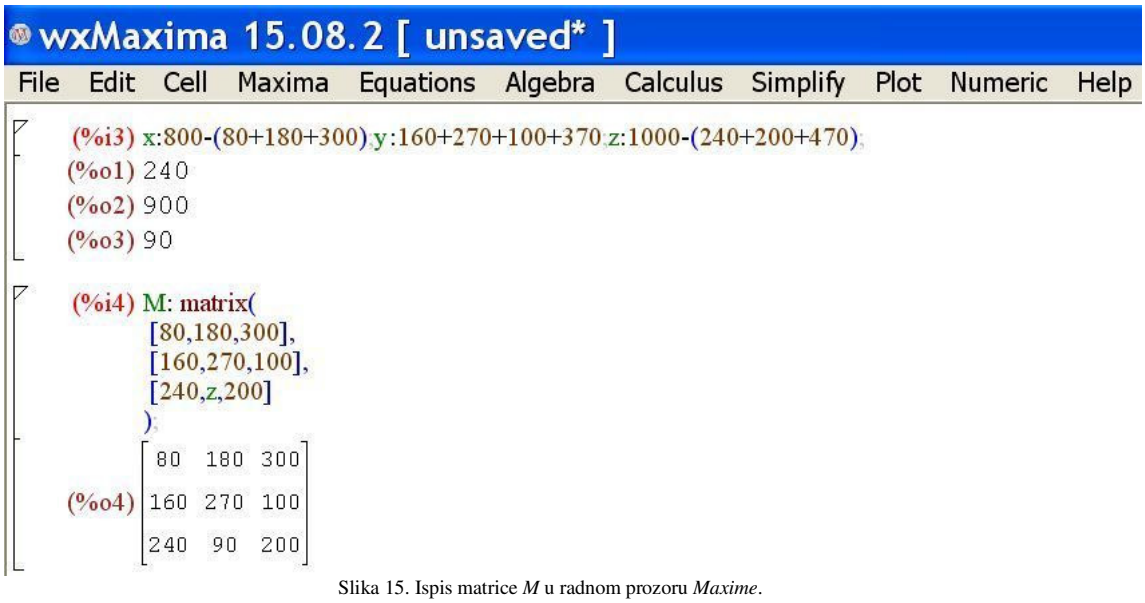
U prvi redak upisujemo: 80, 180, 300.
U drugi redak upisujemo: 160, 270, 100.
U treći redak upisujemo: 240, z, 200.

(vidjeti Sliku 14.) Napomenimo da umjesto slova *z* možemo upisati vrijednost te varijable, tj. 90.



Slika 14. Unos elemenata matrice *M*.

Kliknemo na *OK*. *Maxima* će, naravno, ispisati matricu *M* s vrijednosti 90 umjesto slova *z* (vidjeti Sliku 15.)

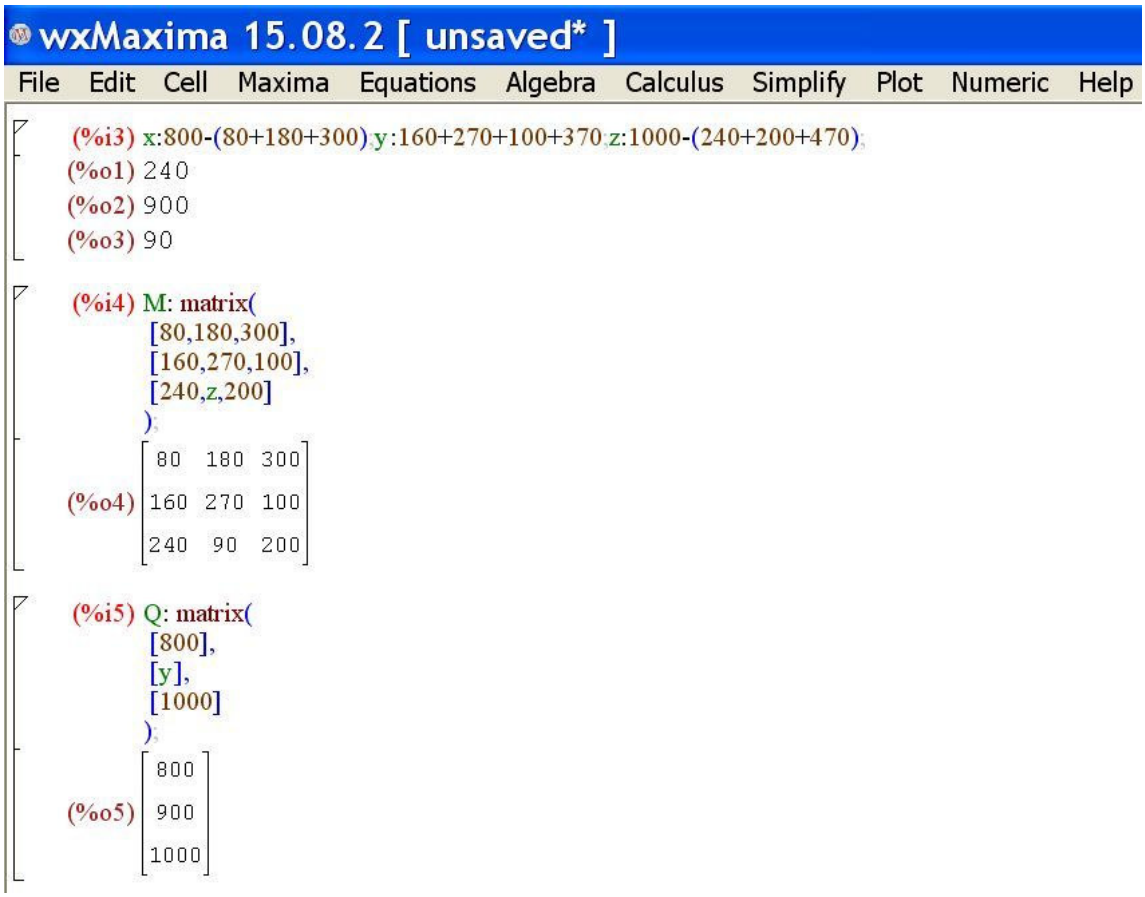


Slika 15. Ispis matrice *M* u radnom prozoru *Maxime*.

Zadajmo matricu ukupne proizvodnje (ukupnih outputa) *Q*. Ponovno odaberimo izbornik *Algebra* i opciju *Enter Matrix…* U pravokutnik pored natpisa *Columns* upišimo 1 jer matrica *Q* ima točno jedan stupac. U pravokutnik pored natpisa *Name* upišimo *Q*. (vidjeti Sliku 5.) Potom kliknimo na *OK*.

U prvi redak dobivenoga okvira upisujemo 800.
U drugi redak dobivenoga okvira upisujemo y. (Možemo upisati i vrijednost varijable *y*, tj. 900.)
U treći redak dobivenoga okvira upisujemo 1000.

Kliknemo na *OK*. Kako smo i očekivali, *Maxima* će ispisati matricu *Q* (vidjeti Sliku 16.).

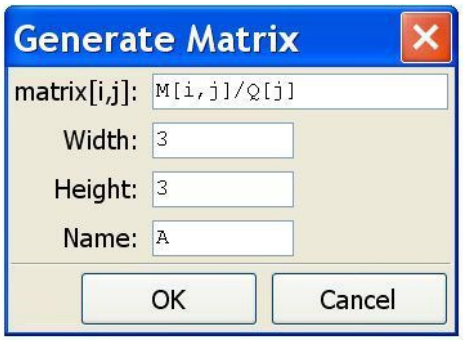


Slika 16. Ispis matrice *Q* iz Zadatka 2. u radnom prozoru programa *Maxima*

Sad možemo izračunati elemente matrice normativa *A*. Primijenimo ranije navedenu formulu za njihovo računanje. Tu ćemo formulu u *Maximi* implementirati koristeći opciju *Generate Matrix from Expression…*

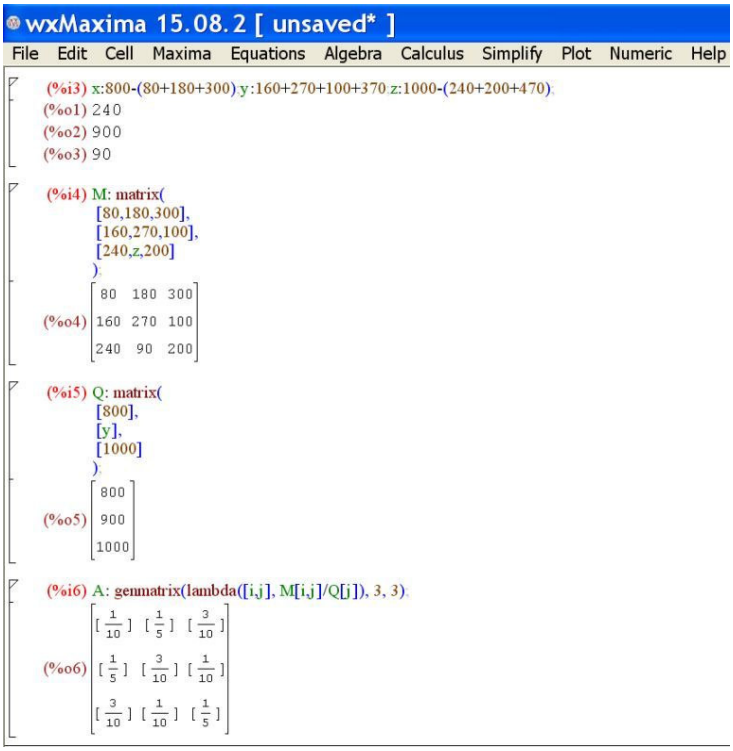
Odaberemo izbornik *Algebra* i kliknemo na opciju *Generate Matrix from Expression*… Dobivamo okvir prikazan na Slici 8.

U pravokutnik pored natpisa *matrix*[*i*, *j*] upisujemo: `M[i,j]/Q[j]`.
U pravokutnik pored natpisa *Name* upisujemo: `A`. (vidjeti Sliku 17.)



Slika 17. Izračun elemenata matrice normativa *A*.

Kliknemo na *OK*. U svojemu radnom prozoru *Maxima* će ispisati matricu normativa *A* (vidjeti Sliku 18.)



Slika 18. Matrica normativa *A* ispisana u programu *Maxima*.

Dakle, matrica normativa je

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

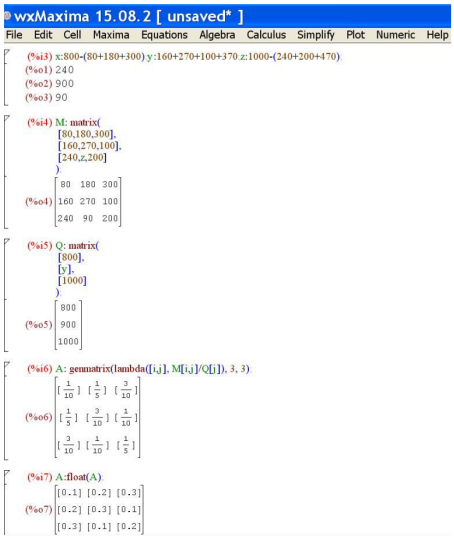
Budući da su nazivnici svih razlomaka u ovoj matrici 5 i 10, navedene razlomke možemo zapisati kao decimalne brojeve jer će njihov decimalan zapis imati konačno mnogo decimala. Razlomke „pretvaramo“ u decimalne brojeve koristeći funkciju `float`. Stoga u novi redak radnoga prozora *Maxime* upisujemo:

```
A:float(A);
```

Pritisnemo *Enter* na numeričkom dijelu tipkovnice. Svi elementi matrice *A* su zapisani u decimalnom zapisu. Dobili smo:

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$$

(vidjeti Sliku 19.)



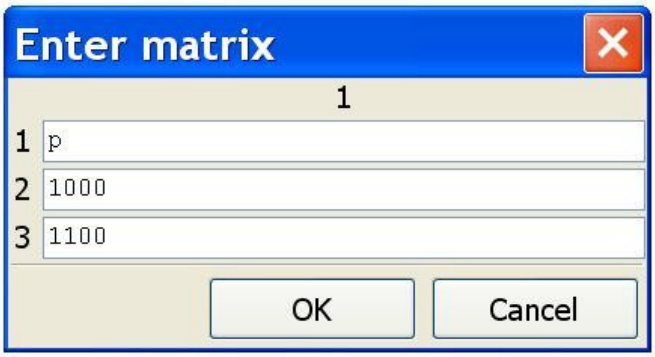
Slika 19. Elementi matrice normativa *A* zapisani u decimalnom zapisu

Pogledajmo koji su nam podaci još poznati. Novi ukupni output drugoga sektora iznosi 1000 jedinica, a novi ukupni output trećega sektora iznosi 1100 jedinica. Označimo matricu novih ukupnih outputa s N. Ta matrica je tipa (3, 1). Znamo dva njezina elementa: $n_{3,2} = 1000$ i $n_{3,3} = 1100$. Ne znamo vrijednost elementa $n_{3,1}$, pa tu nepoznatu vrijednost označimo s p. (Sjetimo se: oznake x, y i z smo već iskoristili u rješenju **a)** podzadatka!). Dakle, pretpostavimo da je

$$N = \begin{bmatrix} p \\ 1000 \\ 1100 \end{bmatrix}.$$

Ovu matricu u *Maximi* zadajemo potpuno analogno kao i matricu Q. Odaberemo izbornik *Algebra* i opciju *Enter Matrix…* U pravokutnik pored natpisa *Columns* upišimo 1, a u pravokutnik pored natpisa *Name* upišimo `N`. Dobivamo okvir prikazan na Slici 6.

U prvi redak toga okvira upišimo `p`.
U drugi redak toga okvira upišimo 1000.
U treći redak toga okvira upišimo 1100. (vidjeti Sliku 20.)



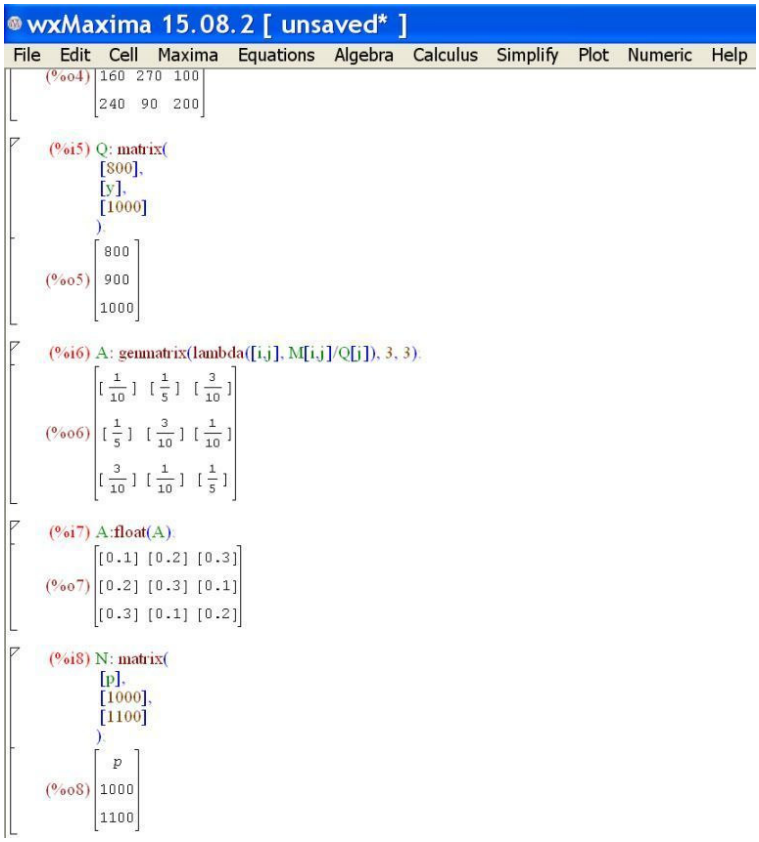
Slika 20. Ispunjena matrica novih ukupnih outputa N.

Kliknemo na *OK*. Kako smo i očekivali, u svojem radnom prozoru *Maxima* je ispisala matricu N. (vidjeti Sliku 21.)

Koristeći pohranjene matrice izračunat ćemo matricu novih ukupnih finalnih potražnji. Označimo tu matricu s q. Računamo je pomoću izraza:

$$q = (E - A) \cdot N \ ,$$

gdje je E jedinična matrica reda 3. Matrice A i N već imamo pohranjene u memoriji programa *Maxima*. No, nigdje u dosadašnjem rješenju zadatka nismo definirali matricu E, pa to moramo sada učiniti.



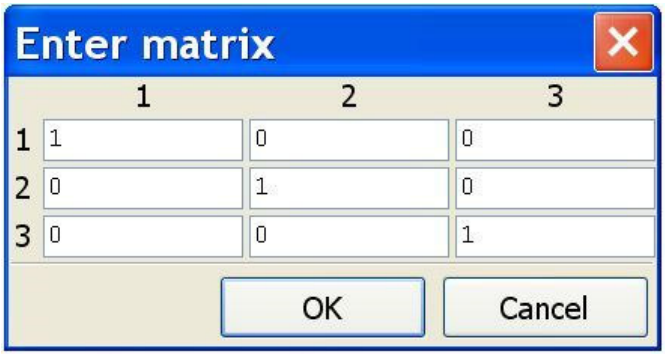
Slika 21. Ispis matrice *N* u radnom prozoru programa *Maxime*.

Matrica *E* je reda 3, pa je zadajemo analogno kao i matricu *M*. Kliknemo na izbornik *Algebra*, pa odaberemo opciju *Enter Matrix…* U pravokutnicima pored natpisa *Rows* i *Columns* ostavimo upisane početne vrijednosti (one su jednake 3), a u pravokutnik pored natpisa *Name* upišimo E. Potom kliknimo na *OK*.

Matrica *E* je jednaka

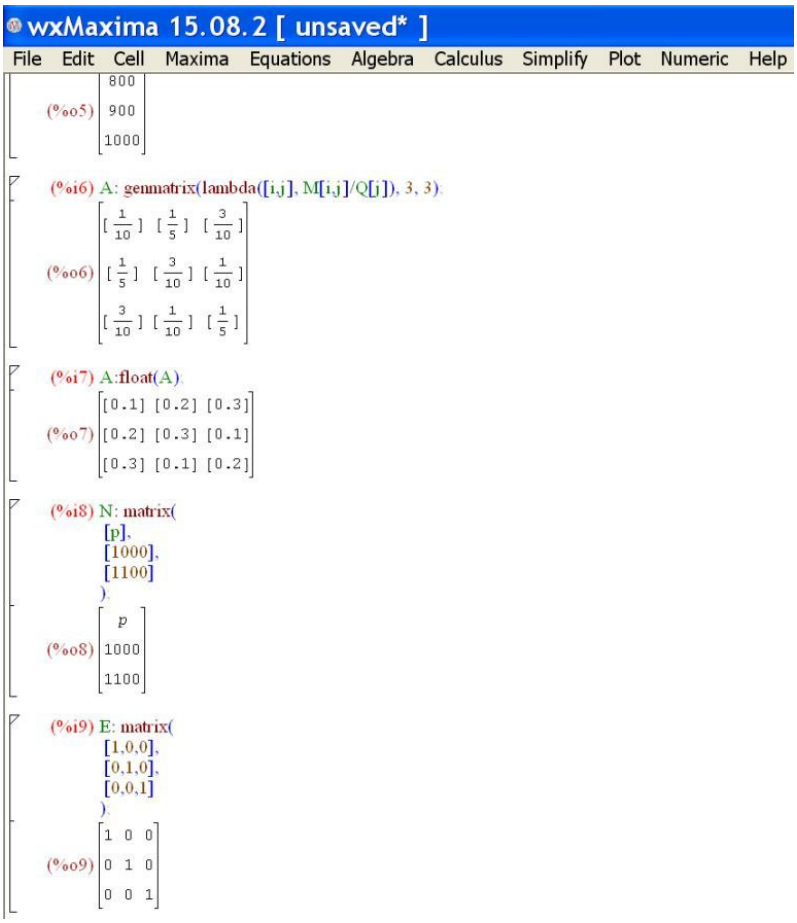
$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Stoga u okviru dobivenome nakon što smo kliknuli na *OK* upišimo 1 na mjesta (1, 1), (2, 2,) i (3, 3). Nule već upisane na ostalim mjestima ostavimo tako upisane. (vidjeti Sliku 22.)



Slika 22. Unos jedinična matrica reda 3.

Kliknemo na *OK*. U radnom prozoru programa *Maxima* pojavila se ispisana matrica *E* (vidjeti Sliku 23.)

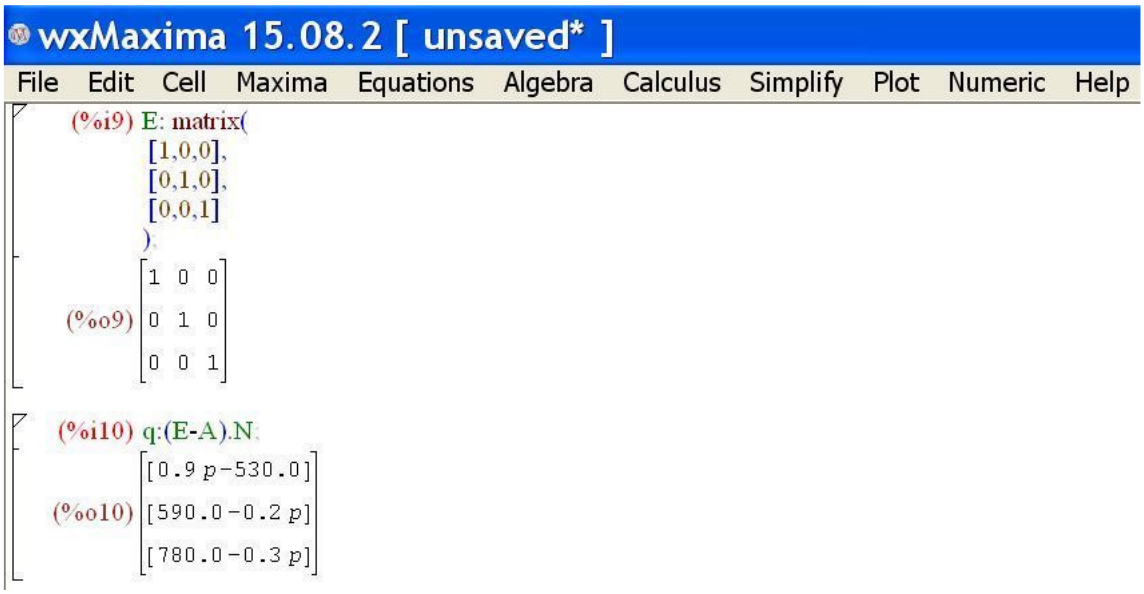


Slika 23. Jedinična matrica *E* ispisana u programu *Maxima*.

Tako smo zadali sve potrebne matrice potrebne za računanje matrice novih finalnih potražnji. Stoga u sljedećem retku radnoga prozora *Maxime* računamo tu matricu. Pritom naglasimo da operaciju množenja matrica naznačavamo koristeći „običnu“ točku **.** Upisujemo:

```
q:(E-A).N;
```

Pritisnemo tipku *Enter* na numeričkom dijelu tipkovnice. *Maxima* će ispisati traženu matricu *q*. (vidjeti Sliku 24.)



Slika 24. Ispis matrice novih finalnih potražnji u *Maximi*.

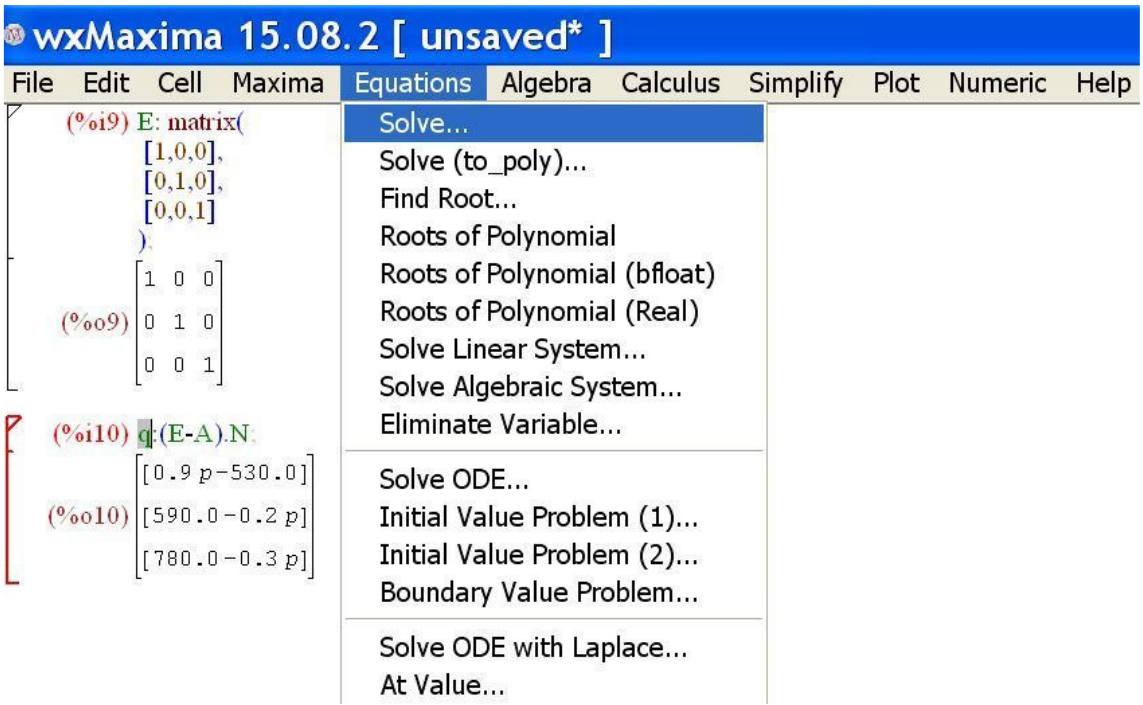
Dakle, matrica novih finalnih potražnji je

$$q = \begin{bmatrix} 0.9 \cdot p - 530 \\ 590 - 0.2 \cdot p \\ 780 - 0.3 \cdot p \end{bmatrix}.$$

Jedan podatak naveden u zadatku još nismo iskoristili. To je podatak da nova finalna potražnja prvoga sektora iznosi 280 jedinica. Odatle zaključujemo da element na presjeku prvoga retka i prvoga stupca matrice *q* treba biti jednak 280. Taj element je $0.9 \cdot p - 530$, pa dobivamo linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom:

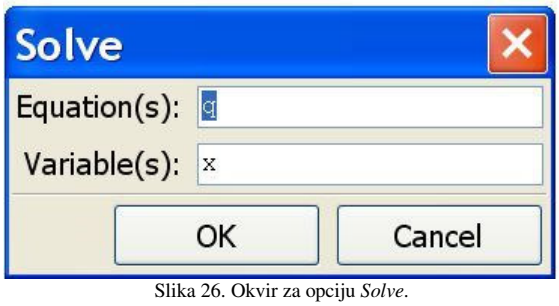
$$0.9 \cdot p - 530 = 280.$$

Riješimo tu jednadžbu koristeći program *Maxima*. Koristimo opciju *Solve*… koja se nalazi na izborniku *Equations*. (vidjeti Sliku 25.)



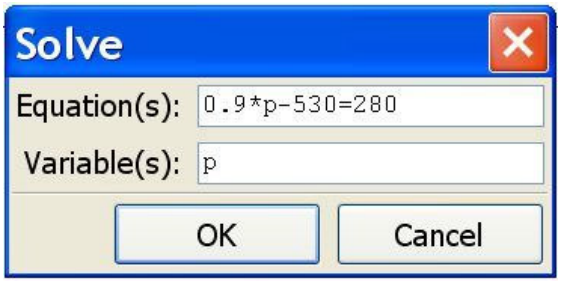
Slika 25. Opcija *Solve* na izborniku *Equations*.

Kliknemo na izbornik *Equations*, pa odaberemo opciju *Solve*. Pojavljuje se okvir prikazan na Slici 26.



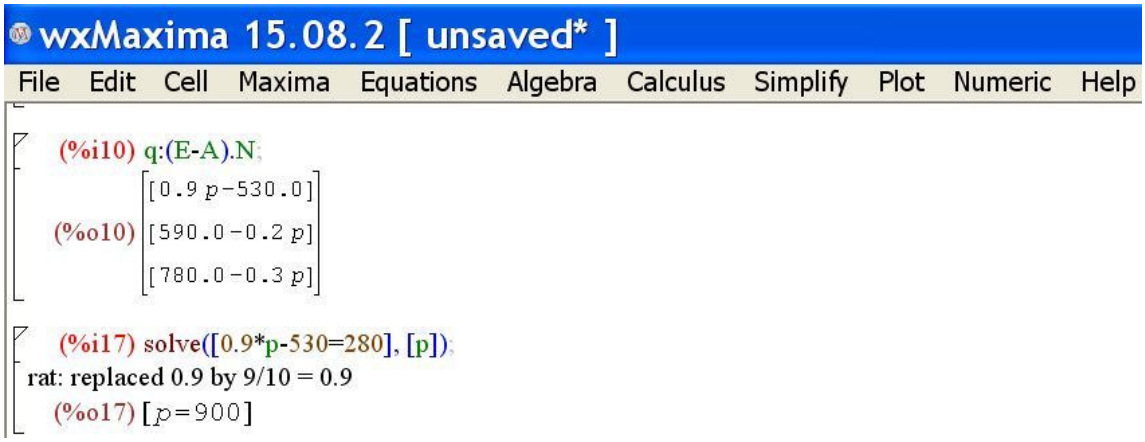
Slika 26. Okvir za opciju *Solve*.

U pravokutnik pored natpisa *Equation*(*s*) upišemo jednadžbu koju želimo riješiti: `0.9*p-530=280`.
U pravokutnik pored natpisa *Variable*(*s*) upišemo oznaku nepoznanice u našoj jednadžbi: `p`. (vidjeti Sliku 27.)



Slika 27. Ispunjen okvir za rješavanje jednadžbe u *Maximi*.

Potom kliknemo na *OK*. *Maxima* će riješiti postavljenu jednadžbu i ispisati: p = 900. (vidjeti Sliku 28.)



Slika 28. Ispis rješenja jednadžbe u *Maximi*.

Dakle, matrica novih ukupnih outputa je:

$$N = \begin{bmatrix} 900 \\ 1000 \\ 1100 \end{bmatrix}.$$

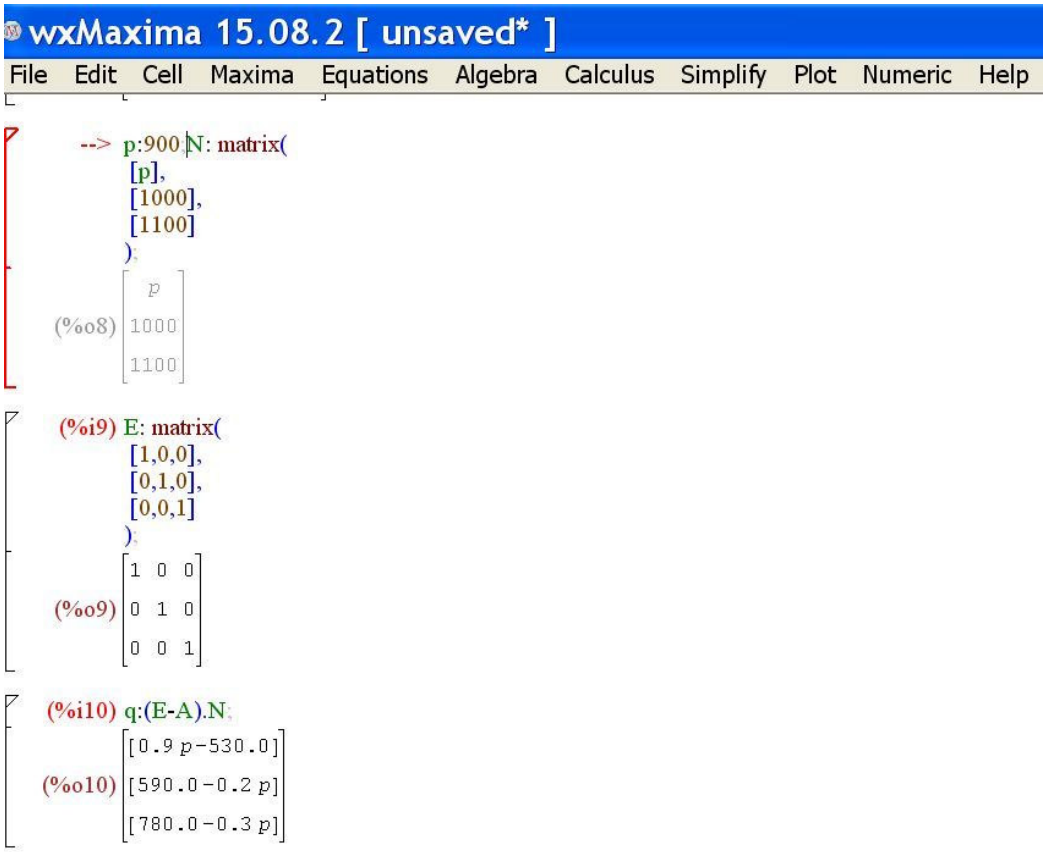
Sad možemo postupiti kao u 1. zadatku: ponovno upisati matricu N, pa izračunati novu matricu međusektorskih razmjena M i potom novu matricu ukupnih finalnih potražnji q. Učinite to za vježbu.

Mi ćemo postupiti malo drugačije, ali brže. Kliknemo desnom tipkom miša na „vješala“ pored natpisa `solve([0.9*p-530=280], [p]);` (Na Slici 28. taj redak je označen s %i17.) Dobivamo izbornik prikazan na Slici 13. Odaberemo opciju *Delete Selection* i obrišemo navedeni redak.

Potom se okrećući kotačić miša prema gore vratimo u redak u kojemu smo zadali matricu *N*. (Na Slici 21. taj je redak označen s %i8.) Kliknemo lijevom tipkom miša ispred slova `N` u tome retku i upišemo:

```
p:900;
```

(vidjeti Sliku 29.)

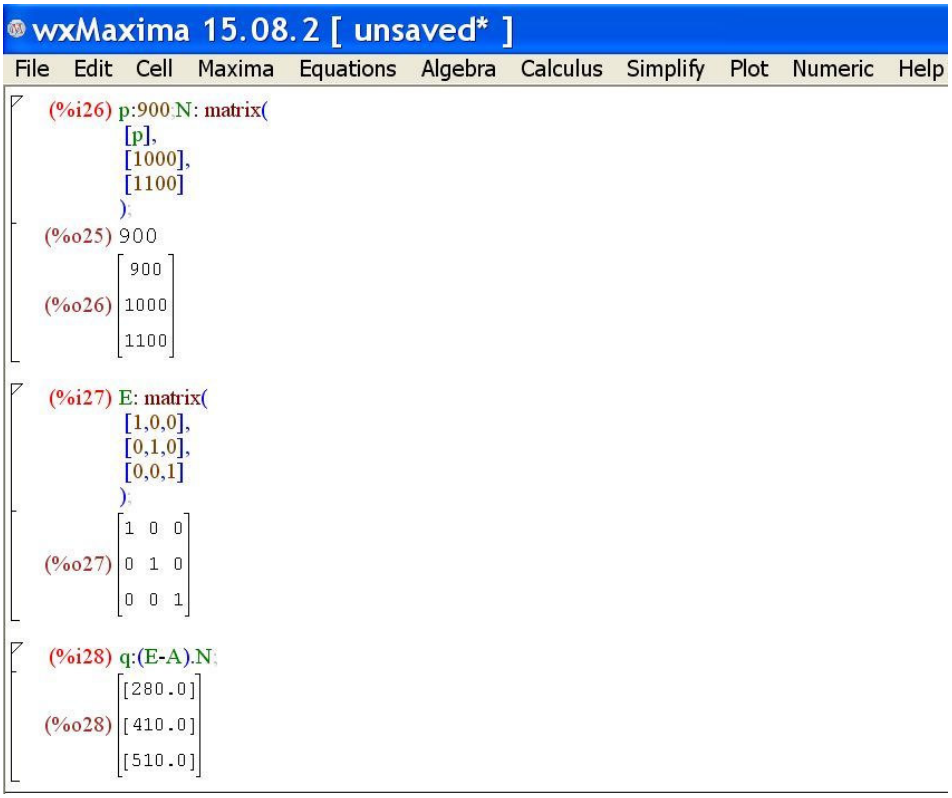


Slika 29. Umetanje izraza $p = 900$ u redak u kojemu je zadana matrica *N*.

Potom istodobno pritisnemo tipke *Ctrl* i *R*. Time ćemo osigurati da se izvrše redak 8. i svi retci naznačeni poslije toga retka. Dobivamo matrice prikazane na Slici 30.

Uočimo da nam je *Maxima* ispisala matrice *N* i *q*:

$$N = \begin{bmatrix} 900 \\ 1000 \\ 1100 \end{bmatrix}, \; q = \begin{bmatrix} 280 \\ 410 \\ 510 \end{bmatrix}.$$



Slika 30. Matrice dobivene ponovnim izvršavanjem retka 8.

Stoga možemo popuniti prvi i posljednji stupac tražene input-output tablice:

Q_i	Q_{ij}			q_i
900				**280**
1000				**410**
1100				**510**

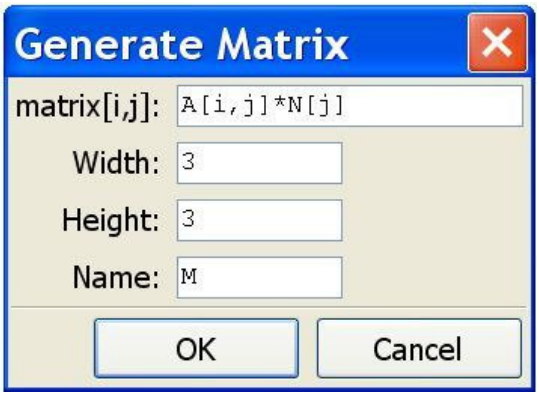
Tablica 4. Nedovršena input-output tablica u Zadatku 2.

Preostaje izračunati matricu nove međusektorske razmjene. Označimo tu matricu ponovno s M. (Zanemarujemo što smo ovu oznaku već ranije koristili jer nam ranija matrica označena s M neće trebati u ostatku rješenja zadatka.) Ta matrica je reda 3. Njezine elemente računamo prema formuli:

$$m_{ij} = a_{ij} \cdot N_j, \text{ za sve } i, j = 1,\ 2,\ 3.$$

Ponovno koristimo opciju *Generate Matrix from Expression…* Odaberemo izbornik *Algebra* i opciju *Generate Matrix from Expression…* Dobivamo okvir prikazan na Slici 8.

U pravokutnik pored natpisa *matrix*[*i*, *j*] upisujemo: `A[i,j]*N[j]`.
U pravokutnik pored natpisa *Name* upisujemo: `M`. (vidjeti Sliku 31.)

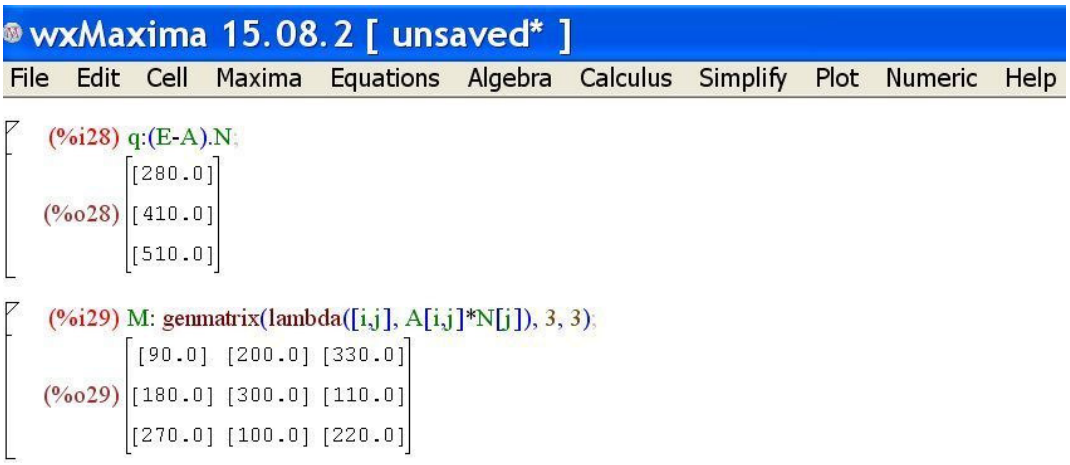


Slika 31. Popunjavanje okvira za izračun elemenata matrice *M*.

Kliknemo na *OK*. *Maxima* će ispisati elemente matrice nove međusektorske razmjene *M*. Ta matrica glasi:

$$M = \begin{bmatrix} 90 & 200 & 330 \\ 180 & 300 & 110 \\ 270 & 100 & 220 \end{bmatrix}.$$

(vidjeti Sliku 32.)



Slika 32. Ispis matrice *M* u *Maximi*.

Preostaje popuniti Tablicu 4. nedostajućim podacima. Dobivamo Tablicu 5.

Q_i	Q_{ij}			q_i
900	**90**	**200**	**330**	**280**
1000	**180**	**300**	**110**	**410**
1100	**270**	**100**	**220**	**510**

Tablica 5. Tražena input-output tablica u Zadatku 2. b)

3. Funkcija Q je funkcija dviju varijabli: K i L. Stoga postoje točno dva koeficijenta parcijalne elastičnosti. Oni su definirani izrazima:

$$E_1 = \frac{K}{Q(K,L)} \cdot Q_K,$$

$$E_2 = \frac{L}{Q(K,L)} \cdot Q_L,$$

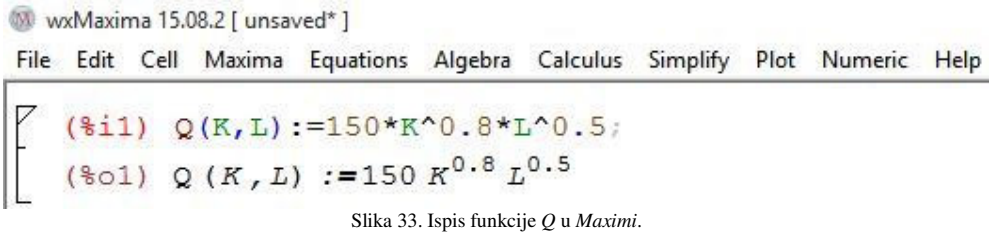
pri čemu su Q_K i Q_L parcijalna derivacija funkcije Q po varijabli K, odnosno po varijabli L. Stoga najprije moramo odrediti te parcijalne derivacije.

U programu *Maxima* najprije zadajmo funkciju Q. Kao u rješenju Zadatka 2., najprije „obrišimo“ radni prozor koristeći opcije *Select All* i *Cut* iz izbornika *Edit*, a potom „očistimo“ radnu memoriju *Maxime* koristeći opciju *Clear Memory* iz izbornika *Maxima*.

U novi redak radnoga prozora upišimo funkciju Q. Operaciju potenciranja označavamo znakom ^ kojega dobijemo istodobnim pritiskom tipki *AltGr* i 3, te potom pritiskanjem razmaknice (*Space*) na tipkovnici. (Kad pritisnemo *AltGr* i 3, *Maxima* neće ispisati ništa sve dok ne pritisnemo razmaknicu.) Operaciju množenja označavamo znakom *. Upišimo:

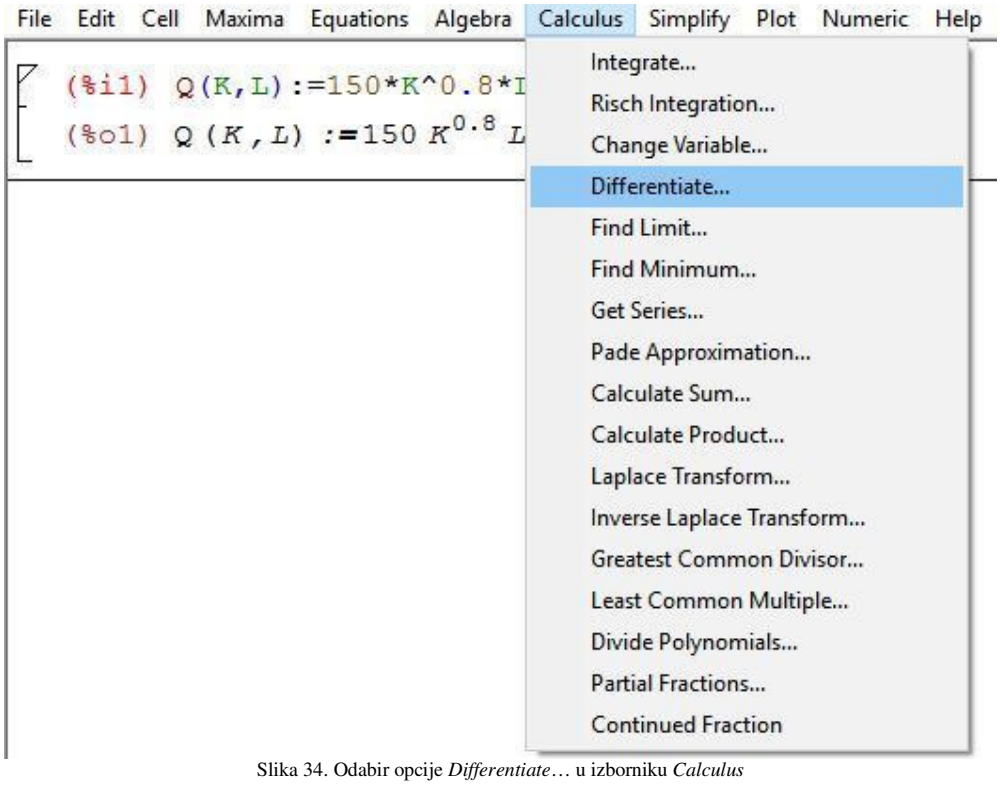
```
Q(K,L):=150*K^0.8*L^0.5;
```

Pritisnimo tipku *Enter* na numeričkom dijelu tipkovnice. *Maxima* će ispisati funkciju Q (vidjeti Sliku 33.).



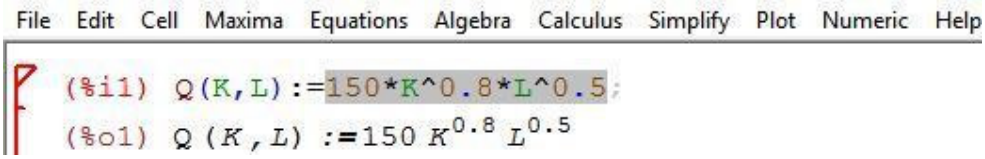
Slika 33. Ispis funkcije Q u *Maximi*.

Odredimo sada obje parcijalne derivacije koristeći opciju *Differentiate…* koja se nalazi na izborniku *Calculus*. (vidjeti Sliku 34.) Najprije ćemo odrediti parcijalnu derivaciju Q_K funkcije Q po varijabli K, a potom parcijalnu derivaciju Q_L funkcije Q po varijabli L.



Slika 34. Odabir opcije *Differentiate…* u izborniku *Calculus*

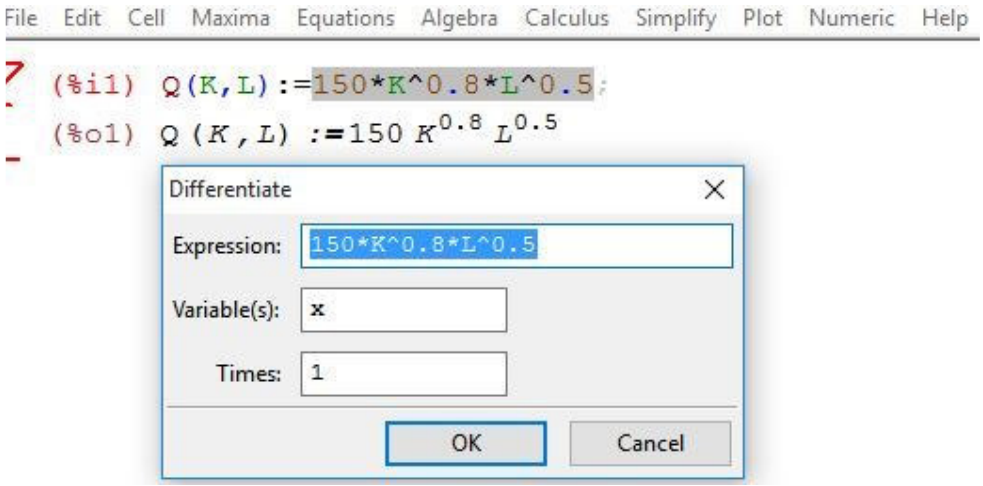
Da ne bismo morali ponovno utipkavati izraz za funkciju *Q*, označimo („selektirajmo“) pravilo te funkcije. Kliknemo lijevom tipkom miša u 1. reda neposredno iza broja 0.5. Pritisnimo i držimo lijevu tipku miša povlačeći istodobno miš ulijevo sve dok ne označimo broj 150. Potom otpustimo lijevu tipku miša. (vidjeti Sliku 35.)



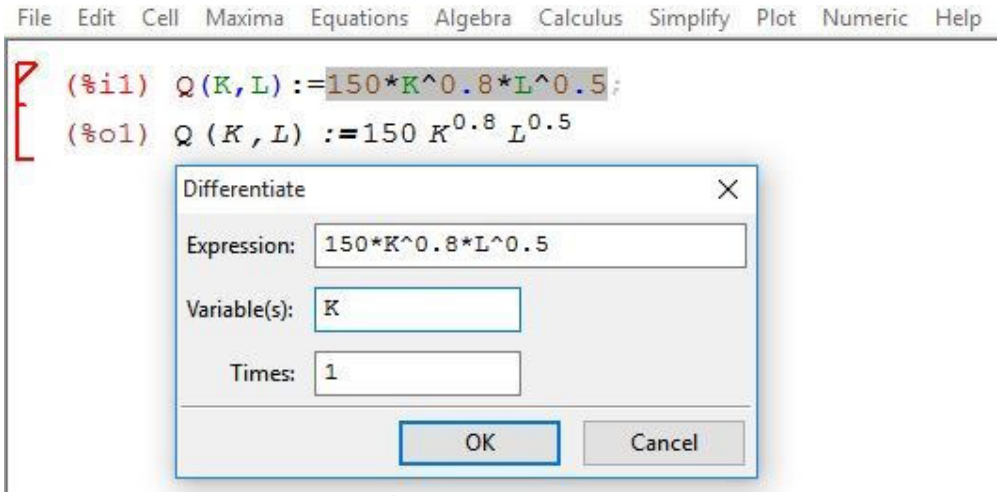
Slika 35. Označavanje pravila funkcije *Q* u *Maximi*.

Sad odaberimo izbornik *Calculus* i njegovu opciju *Differentiate…* na način kako je prikazano na Slici 34. Pojavljuje se okvir prikazan na Slici 36. Primjećujemo da je pravilo funkcije *Q* već upisano, pa samo trebamo upisati po kojoj varijabli želimo derivirati tu funkciju. Kako smo rekli, najprije ćemo derivirati funkciju *Q* po varijabli *K*. Stoga u pravokutnik pored natpisa *Variable*(*s*) upisujemo `K`. (vidjeti Sliku 37.) U pravokutniku

pored natpisa *Times* ostavimo upisanu jedinicu jer određujemo prvu parcijalnu derivaciju. Potom kliknemo na *OK*.



Slika 36. Okvir za unos podataka za određivanje (parcijalne) derivacije.

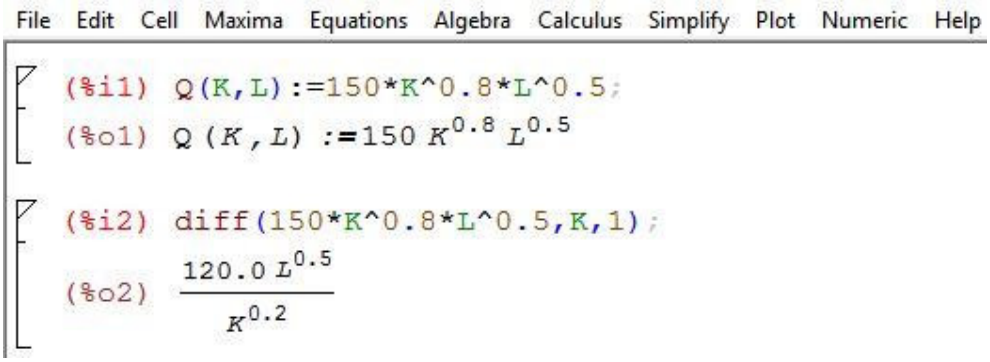


Slika 37. Određivanje parcijalne derivacije Q_K u *Maximi*.

U svojemu radnom prozoru *Maxima* će ispisati pravilo parcijalne derivacije Q_K. Ono glasi:

$$Q_K = \frac{120 \cdot L^{0.5}}{K^{0.2}} \ .$$

(vidjeti Sliku 38.)



Slika 38. Ispis parcijalne derivacije *QK* u *Maximi*.

Pravilo parcijalne derivacije Q_K bismo željeli uvrstiti u izraz za koeficijent E_1, a da pritom izbjegnemo pretipkavanje toga pravila. U memoriji *Maxime* to je pravilo pohranjeno na „adresi“ `%o2`. Stoga ćemo tom izrazu dodijeliti oznaku Q_K (K, L). (Moramo navesti i (K, L) zato jer je riječ o funkciji dviju varijabli.)

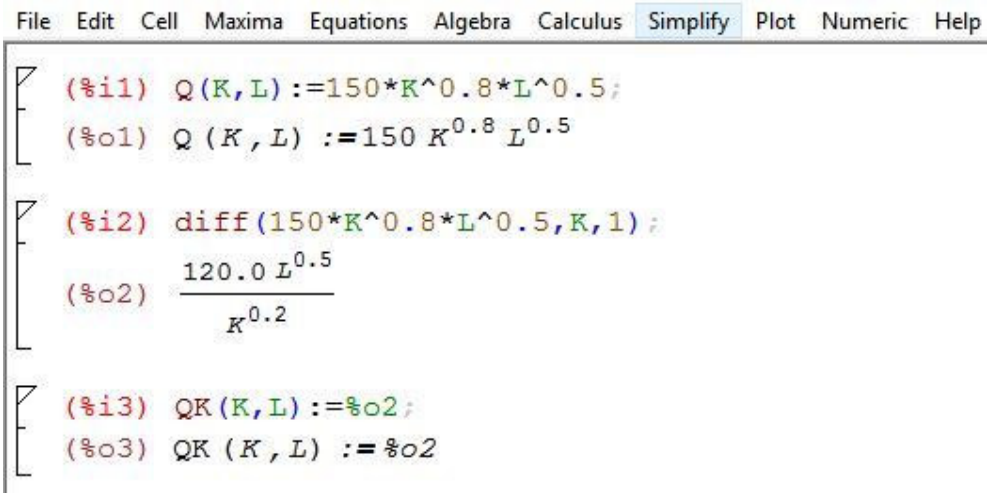
U novi redak radnoga prozora *Maxime* upišimo:

```
QK(K,L):=%o2;
```

Naizgled, nije se dogodilo ništa jer je *Maxima* ispisala:

```
QK(K,L):=%o2;
```

(vidjeti Sliku 39.)



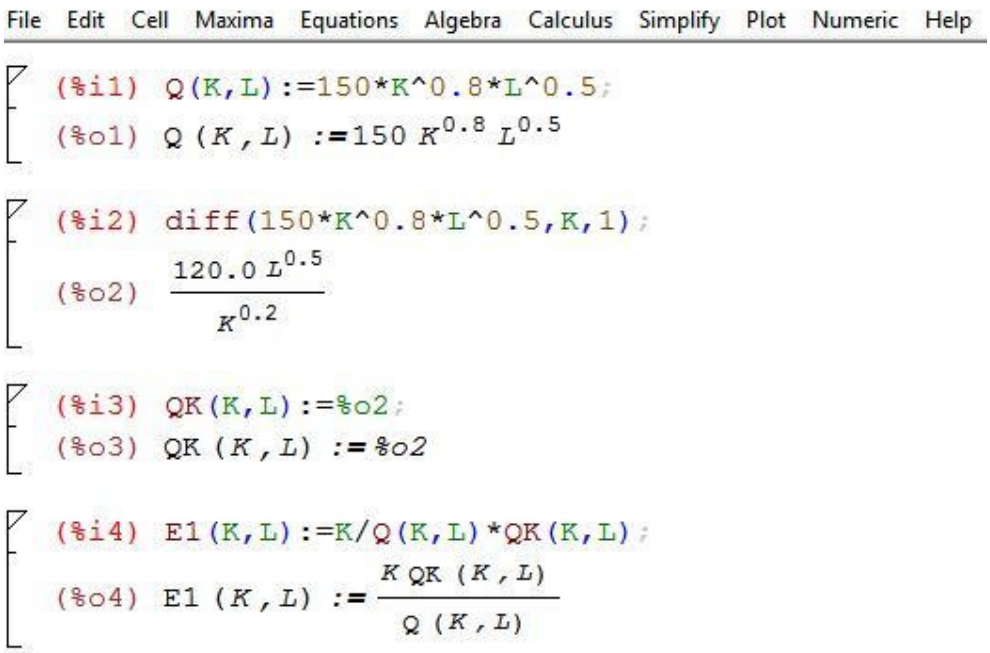
Slika 39. Dodjeljivanje sadržaja na adresi %o2 varijabli Q_K.

Maxima nije ispisala pravilo funkcije Q_K zato što to od nje nismo ni tražili. U sljedećem retku radnoga prozora *Maxime* izračunat ćemo traženi koeficijent E_1. Upišimo:

```
E1(K,L):=K/Q(K,L)*QK(K,L);
```

Pripazimo: i koeficijent E_1 je također funkcija varijabli K i L, pa to moramo navesti prigodom njegova zadavanja.

Pritisnemo tipku *Enter* na numeričkom dijelu tipkovnice. Opet se naizgled nije dogodilo ništa jer je *Maxima* samo ispisala prethodni izraz u obliku razlomka $\frac{K \cdot Q_K(K,L)}{Q(K,L)}$ (vidjeti Sliku 40).



Slika 40. Ispis formalnoga izraza za E_1.

Da bismo dobili pravilo koeficijenta E_1, moramo „razviti“ ovaj izraz koristeći funkciju `expand`. U novi redak radnoga prozora *Maxime* upišemo:

```
expand(E1(K,L));
```

Pritisnemo tipku *Enter* na numeričkom dijelu tipkovnice. *Maxima* će ispisati:

```
0.8
```

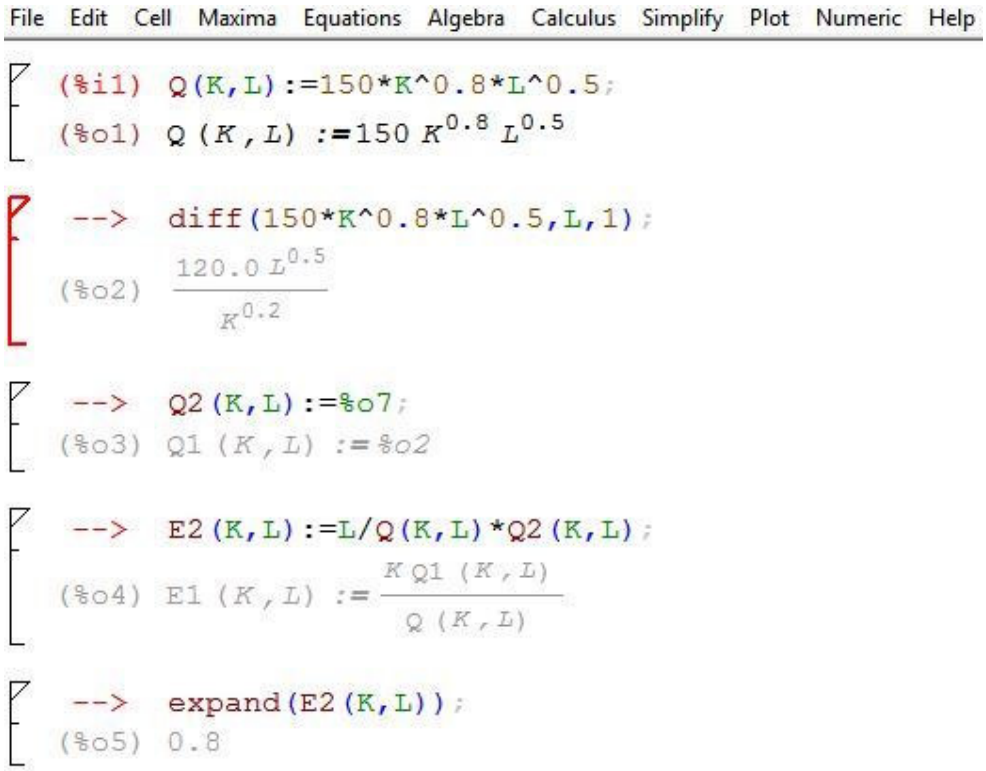
Dakle, $E_1 = 0.8$. Interpretacija toga koeficijenta je sljedeća:

Ako se iznos kapitala poveća za 1%, *a količina rada ostane nepromijenjena*, *količina proizvodnje će se povećati za* 0.8%.

S obzirom na sličnost izraza za izračun koeficijenata elastičnosti, koeficijent E_2 najbrže i najkraće ćemo izračunati na sljedeći način (i navedenim redoslijedom postupaka, a ni u kojem slučaju proizvoljnim redoslijedom):

- u retku `%i5` promijenimo znamenku 1 u znamenku 2;
- u retku `%i4` promijenimo obje znamenke 1 u znamenke 2, a slovo *K* u brojniku razlomka promijenimo u slovo *L*;
- u retku `%i3` promijenimo znamenku 1 u znamenku 2, a znamenku 2 iza slova `o` u znamenku 7.
- u retku `%i2` promijenimo slovo *K* (drugu varijablu funkcije `diff`) u slovo *L*.

Dobivamo Sliku 41.



Slika 41. Postavke za izračun koeficijenta E_2

Pritisnemo istodobno tipke *Ctrl* i *R*. Kombinacija tih dviju tipki rezultira ponovnim izvršenjem svih upisanih sadržaja redaka. Posljednji od tih redaka ima staru oznaku 5. Stoga će pri ponovnom izvršenju svih upisanih sadržaja redaka „stari“ redak 1 dobiti novu oznaku 1 + 5 = 6, „stari“ redak 2 dobiti novu oznaku 2 + 5 = 7 itd. To je razlog zbog kojega smo u „starom“ retku `%i2` morali preinačiti `%o2` u `%o7`.

U posljednjem retku (koji sad ima oznaku `%o10`) *Maxima* će ispisati:

```
0.5
```

Dakle, $E_2 = 0.5$. Interpretacija toga koeficijenta je sljedeća:

Ako se količina rada poveća za 1%, *a iznos kapitala ostane nepromijenjen*, *količina proizvodnje će se povećati za* 0.5%.

4. Primijetimo da je funkcija Q homogena funkcija. Doista, za bilo koji $\alpha \in \mathbb{R}$ imamo:

$$Q(\alpha \cdot K,\ \alpha \cdot L) = 200 \cdot (\alpha \cdot K)^x \cdot (\alpha \cdot L)^{x-0.2} = 200 \cdot \alpha^x \cdot K^x \cdot \alpha^{x-0.2} \cdot L^{x-0.2} =$$
$$= \alpha^{x+(x-0.2)} \cdot 200 \cdot K^x \cdot L^{x-0.2} = \alpha^{x+x-0.2} \cdot \left(200 \cdot K^x \cdot L^{x-0.2}\right) = \alpha^{2 \cdot x-0.2} \cdot Q(K,\ L).$$

Dakle, Q je homogena funkcija. Njezin stupanj homogenosti je $k = 2 \cdot x - 0.2$. Teorijska interpretacija toga stupnja je:

Ako se iznos kapitala i količina rada istodobno povećaju za 1%, *onda će se količina proizvodnje promijeniti za* $(2 \cdot x - 0.2)$%.

No, u zadatku je zadan podatak da istodobno povećanje vrijednosti iznosa kapitala i količine rada za 1% povlači povećanje količine proizvodnje za 1.4%. Odatle zaključujemo da mora vrijediti jednakost:

$$2 \cdot x - 0.2 = 1.4.$$

Riješimo tu jednadžbu na uobičajen način (ili koristeći opciju *Solve* programa *Maxima*):

$$\begin{aligned} &2 \cdot x - 0.2 = 1.4, \\ &2 \cdot x = 1.4 + 0.2, \\ &2 \cdot x = 1.6 \quad / : 2 \\ &x = 0.8 \end{aligned}$$

Dakle, funkcija proizvodnje glasi:

$$Q = Q(K, L) = 200 \cdot K^{0.8} \cdot L^{0.8-0.2} = 200 \cdot K^{0.8} \cdot L^{0.6}.$$

U zadanim podzadacima zapravo se traži izračun obaju koeficijenata parcijalne elastičnosti. Uz oznake iz prethodnoga zadatka, rješenje **a)** podzadatka je koeficijent E_1 (jer je u tom podzadatku zadana interpretacija toga koeficijenta) a rješenje **b)** podzadatka koeficijent E_2 (jer je u tom zadatku zadana interpretacija toga koeficijenta).

Potpuno analognim postupkom kao u rješenju prethodnoga zadatka izračunamo:

$$\begin{aligned} E_1 &= 0.8, \\ E_2 &= 0.6. \end{aligned}$$

Stoga zaključujemo:

a) Ako se iznos kapitala poveća za 1%, a količina rada ostane nepromijenjena, ukupna količina proizvodnje će se *povećati za* 0.8%.

b) Ako se količina rada poveća za 1%, a iznos kapitala ostane nepromijenjen, ukupna količina proizvodnje će se *povećati za* 0.6%.