DRUŠTVENI ODJEL

KVANTITATIVNE METODE U TRGOVINI

riješeni primjeri 2. seminarskoga zadatka uz korištenje programa *Maxima*, *WolframAlpha* i *Linear Program Solver*

1. Odredite sve lokalne ekstreme funkcije $z = x^3 - y^2 - x \cdot y - 4 \cdot x - 3 \cdot y - 3$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

2. U pogonu tvornice čokolade *Njam–njam* d.o.o. izrađuju se dvije vrste čokolade: *Mljac-mljac* i *Fantazija.* Prigodom proizvodnje svaka čokolada prolazi kroz dvije grupe strojeva S_1 i S_2. Tehnološki uvjeti i tjedni kapaciteti navedeni su u Tablici 1.

Grupa strojeva	Vrijeme potrebno za proizvodnju *Mljac-mljac* [sati/kg]	Vrijeme potrebno za proizvodnju *Fantazije* [sati/kg]	Tjedni kapacitet [sati]
S_1	4	2	32
S_2	2	3	28

Tablica 1.

Prodajna cijena 1 kg čokolade „*Mljac-mljac*“ iznosi 30 n.j. Prodajna cijena 1 kg čokolade „*Fantazija*“ iznosi 27 n.j. Treba napraviti tjedni plan proizvodnje kojim će se ostvariti najveći ukupni prihod.

a) Formirajte matematički model promatranoga problema i riješite ga. Odredite optimalnu masu svake vrste čokolada i pripadni optimalni ukupni prihod.

b) Za svaku grupu strojeva utvrdite hoće li raditi najvećim dozvoljenim tjednim kapacitetom ili neće. Ako neće, izračunajte pripadni postotak iskorištenosti te grupe strojeva.

3. Zadani su funkcija troškova $T(K,L) = K^2 + 16 \cdot L^2 - 2 \cdot K \cdot L$ i funkcija proizvodnje $Q(K,L) = \sqrt{K \cdot L}$, pri čemu su K iznos kapitala i L količina rada. Odredite vrijednosti K i L tako da se na razini proizvodnje $Q = 2$ ostvaruju najmanji troškovi. Koliko iznose ti optimalni troškovi? Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

4. Tvrtka „*Mercedesić* d.o.o.“ iz Frkljevaca bavi se proizvodnjom luksuznih automobila. Uprava tvrtke odlučila je pokrenuti promidžbenu kampanju. Ciljana populacija kampanje su zaposlene osobe oba spola koja imaju natprosječna mjesečna primanja. Nakon analize medija donijeta je odluka da bude emitirana najmanje jedna poruka za vrijeme svih utakmica Lige prvaka i najmanje jedna poruka za vrijeme svih epizoda kultne hrvatske serije „*Djevojka imena Hloverka*“.

Procijenjeno je da će svaku emitiranu promidžbenu poruku za vrijeme emitiranja jedne epizode serije vidjeti približno 10 000 muškaraca i 30 000 žena iz ciljne grupe. Promidžbenu poruku emitiranu za vrijeme jedne utakmice Lige prvaka vidjet će 40 000 muškaraca i 20 000 žena iz ciljne grupe.

Cijena jedne promidžbene poruke emitirane za vrijeme jedne epizode serije iznosi 10 000 €, dok cijena jedne promidžbene poruke emitirane za vrijeme jedne utakmice Lige prvaka

iznosi 30 000 €.

Ciljevi tvrtke su da promidžbenu poruku vidi ukupno najmanje 90 000 muškaraca i 70 000 žena iz ciljane populacije.

Treba naći optimalnu strategiju oglašavanja tako da ukupni troškovi kampanje budu što manji.

a) Formirajte matematički model promatranoga problema i riješite ga. Interpretirajte optimalne vrijednosti nezavisnih varijabli i optimalnu vrijednost funkcije cilja.

b) Predviđa li optimalan plan strategije da neki (muški ili ženski) dio ciljane populacije vidi promidžbenu poruku više negoli je to propisano ciljevima tvrtke? Objasnite svoj odgovor.

DRUŠTVENI ODJEL

KVANTITATIVNE METODE U TRGOVINI

riješeni primjeri 2. seminarskoga zadatka uz korištenje programa *Maxima*, *WolframAlpha* i *Linear Program Solver*

Rješenja zadataka

1. U računalnom programu *Maxima* najprije zadajemo funkciju z. Upisujemo:

```
z(x,y):=x^3-y^2-x*y-4*x-3*y-3;
```

Pritisnemo tipku *Enter* na numeričkom dijelu tipkovnice. Da bismo odredili tražene lokalne ekstreme, najprije moramo odrediti sve stacionarne točke zadane funkcije. Te stacionarne točke su, prema definiciji, zajedničke nultočke svih parcijalnih derivacija zadane funkcije. Funkcija z je funkcija dviju varijabli, pa tražimo zajedničke nultočke parcijalnih derivacija z_x i z_y, pri čemu je z_x parcijalna derivacija funkcije z po varijabli x, a z_y parcijalna derivacija funkcije z po varijabli y. To znači da trebamo riješiti sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} z_x = 0, \\ z_y = 0. \end{cases}$$

Odredimo parcijalnu derivaciju z_x. U novi redak radnoga prozora *Maxime* utipkamo:

```
zx(x,y):=''diff(z(x,y),x,1);
```

Pritisnemo tipku *Enter* na numeričkom dijelu tipkovnice. Ovoga puta nismo koristili opciju *Differentiate…* iz izbornika *Calculus*. Naime, za rješavanje gornjega sustava potrebni su nam efektivni nazivi funkcija koje zadaju sustav, o čemu ćemo nešto više reći malo kasnije.

Odredimo parcijalnu derivaciju z_y. U novi redak radnoga prozora *Maxime* utipkamo:

```
zy(x,y):=''diff(z(x,y),y,1);
```

Time smo odredili pravila obiju parcijalnih derivacija. Ta pravila ne ispisujemo jer nam nisu efektivno potrebna u daljnjim koracima rješavanja zadatka. Ako ih želimo ispisati, to možemo učiniti koristeći funkciju `expand`.

U sljedećem koraku rješavamo gore navedeni sustav jednadžbi. U tu svrhu koristimo opciju *Solve Algebraic System…* iz izbornika *Equations*. (vidjeti Sliku 1.)

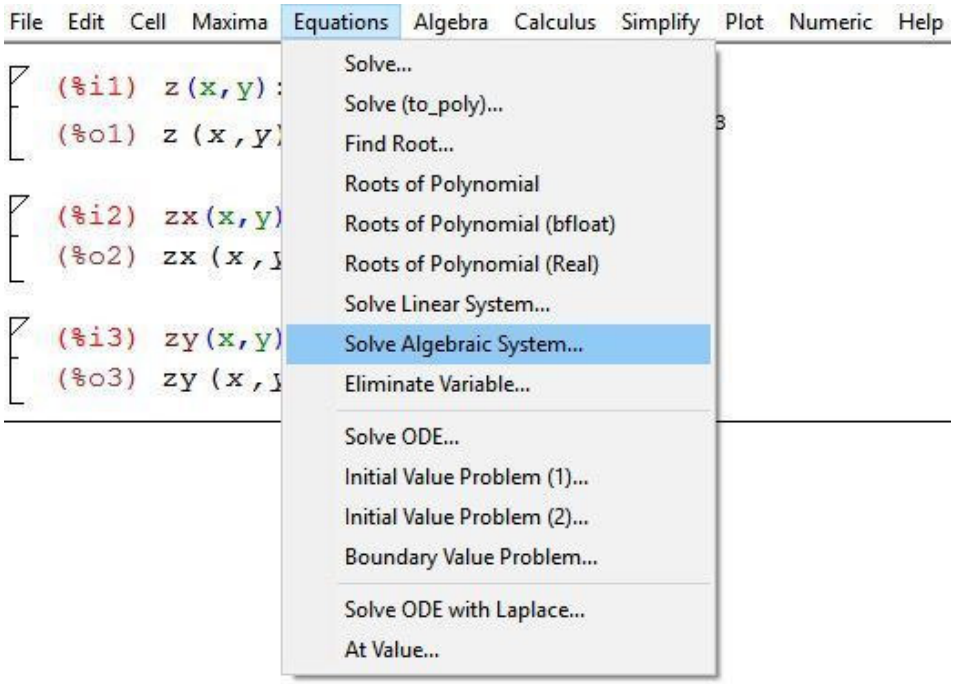
Pojavljuje se okvir u kojemu piše: *Number of equations*:. Naš sustav ima dvije jednadžbe, pa u pravokutnik ispod toga okvira treba upisati: 2. (vidjeti Sliku 2.) Potom kliknemo na *OK*.

U dobivenom okviru nalaze se tri pravokutnika u koja treba upisati potrebne podatke.

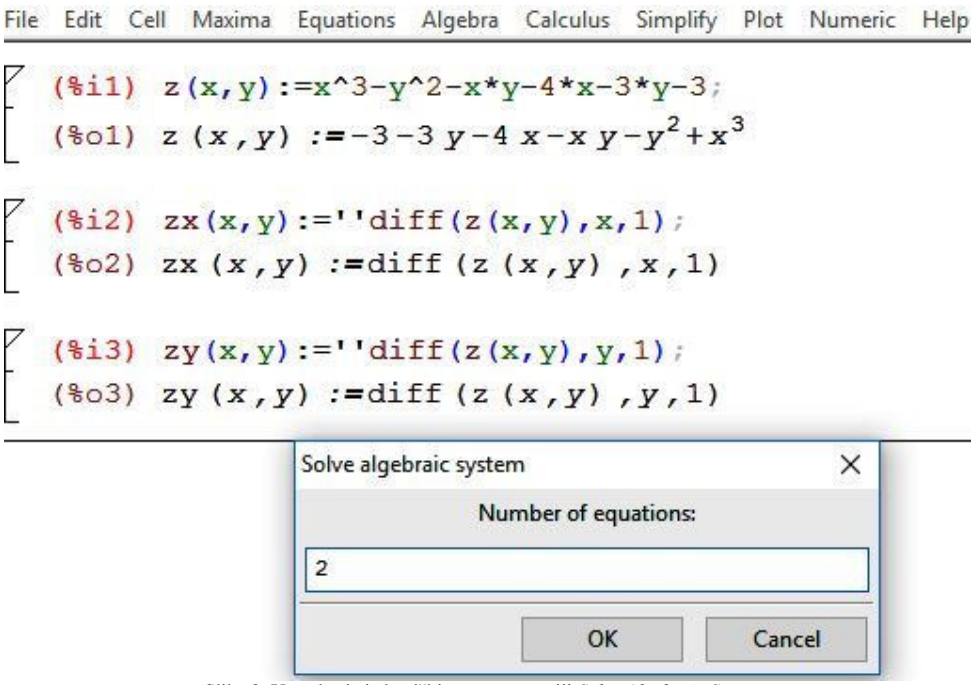
DRUŠTVENI ODJEL

KVANTITATIVNE METODE U TRGOVINI

riješeni primjeri 2. seminarskoga zadatka uz korištenje programa *Maxima*, *WolframAlpha* i *Linear Program Solver*



Slika 1. Izbornik *Equations* i opcija *Solve Algebraic System*.



Slika 2. Unos broja jednadžbi sustava u opciji *Solve Algebraic System*.

U pravokutnik pored natpisa *Equation* 1 upisujemo:

`zx(x,y)=0`

(bez uobičajenoga znaka ; na kraju). Ovim unosom zapravo zahtijevamo od *Maxime* da funkciju označenu sa `zx` izjednači s nulom, odnosno da odredi sve nultočke te funkcije. To je upravo prva jednadžba odredbenoga sustava za stacionarne točke.

Analogno, u pravokutnik pored natpisa *Equation* 2 upisujemo:

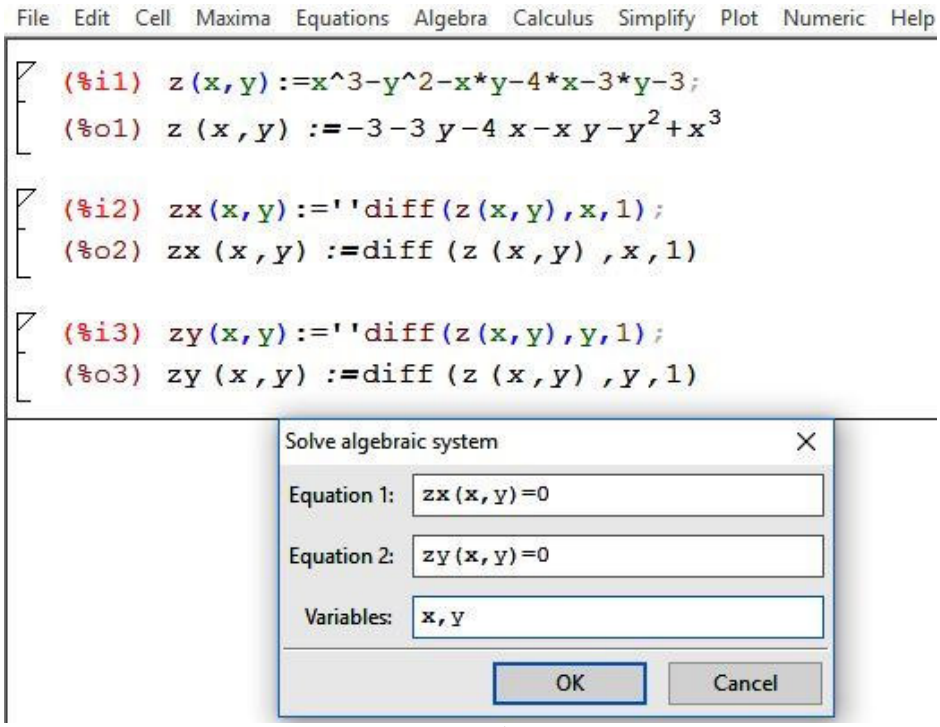
`zy(x,y)=0`

(opet bez znaka ; na kraju). Ovim unosom zapravo zahtijevamo od *Maxime* da funkciju označenu sa `zy` izjednači s nulom, odnosno da odredi sve nultočke te funkcije. To je upravo druga jednadžba odredbenoga sustava za stacionarne točke.

U pravokutnik pored natpisa *Variables* upisujemo:

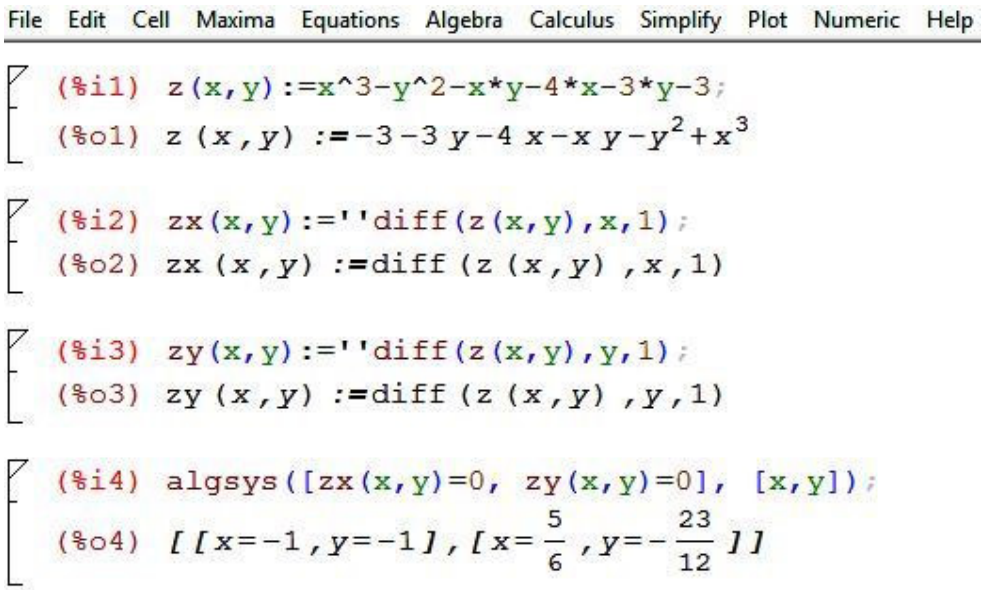
`x,y`

(Imena varijabli je potrebno odvojiti zarezom.) Time je unos podataka završen, pa kliknemo na *OK*. (vidjeti Sliku 3.)



Slika 3. Zadavanje sustava za određivanje stacionarnih točaka.

Maxima ispisuje da promatrani sustav ima dva rješenja: $(-1,-1)$ i $\left(\frac{5}{6},-\frac{23}{12}\right)$. (vidjeti Sliku 4.)



Slika 4. Ispis stacionarnih točaka funkcije *z* u *Maximi*.

Dakle, zadana funkcija ima točno dvije stacionarne točke: $S_1=(-1,-1)$ i $S_2=\left(\frac{5}{6},-\frac{23}{12}\right)$.

Utvrdimo je li riječ o lokalnim ekstremima ili (samo) o sedlastim točkama.

Odredimo Hesseovu matricu zadane funkcije. U tu svrhu koristimo *Maximinu* funkciju `hessian`. U novi redak radnoga prozora *Maxime* upišimo:

```
H:hessian(z(x,y),[x,y]);
```

Matricu *H* smo zadali na način kako smo ranije zadavali matrice iako su njezini elementi zapravo funkcije dviju varijabli. Pritisnimo tipku *Enter* na numeričkom dijelu tipkovnice. *Maxima* će ispisati matricu

$$H=\begin{bmatrix}6\cdot x & -1\\ -1 & -2\end{bmatrix}.$$

(vidjeti Sliku 5.)

File Edit Cell Maxima Equations Algebra Calculus Simplify Plot Numeric Help

```
(%i1) z(x,y):=x^3-y^2-x*y-4*x-3*y-3;
```

(%o1) $z(x,y) := -3-3y-4x-xy-y^2+x^3$

```
(%i2) zx(x,y):=''diff(z(x,y),x,1);
(%o2) zx(x,y) :=diff(z(x,y),x,1)

(%i3) zy(x,y):=''diff(z(x,y),y,1);
(%o3) zy(x,y) :=diff(z(x,y),y,1)

(%i4) algsys([zx(x,y)=0, zy(x,y)=0], [x,y]);
```

(%o4) $[[x=-1, y=-1], [x=\frac{5}{6}, y=-\frac{23}{12}]]$

```
(%i5) H:hessian(z(x,y),[x,y]);
```

(%o5) $\begin{bmatrix} 6x & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

Slika 5. Ispis Hesseove matrice funkcije *z* u *Maximi*.

Za utvrđivanje jesu li stacionarne točke lokalni ekstremi zapravo trebamo:

- predznak vrijednosti elementa $H_{1,1}$ u svakoj od stacionarnih točaka;
- izračun determinante matrice H u svakoj od stacionarnih točaka.

Odredimo navedene vrijednosti koristeći *Maximinu* funkciju `ev` koja računa vrijednosti simboličkih izraza za konkretne vrijednosti odgovarajućih varijabli u tim izrazima. Neka su H_{111} i H_{112} vrijednosti elementa $H_{1,1}$ u stacionarnoj točki S_1, odnosno stacionarnoj točki S_2. Izračunajmo te vrijednosti. U novi redak radnoga prozora utipkamo:

```
H111:ev(H[1,1],x=-1,y=-1);H112:ev(H[1,1],x=5/6,y=-23/12);
```

Pritisnemo tipku *Enter* na numeričkom dijelu tipkovnice. *Maxima* će ispisati:

```
-6
5
```

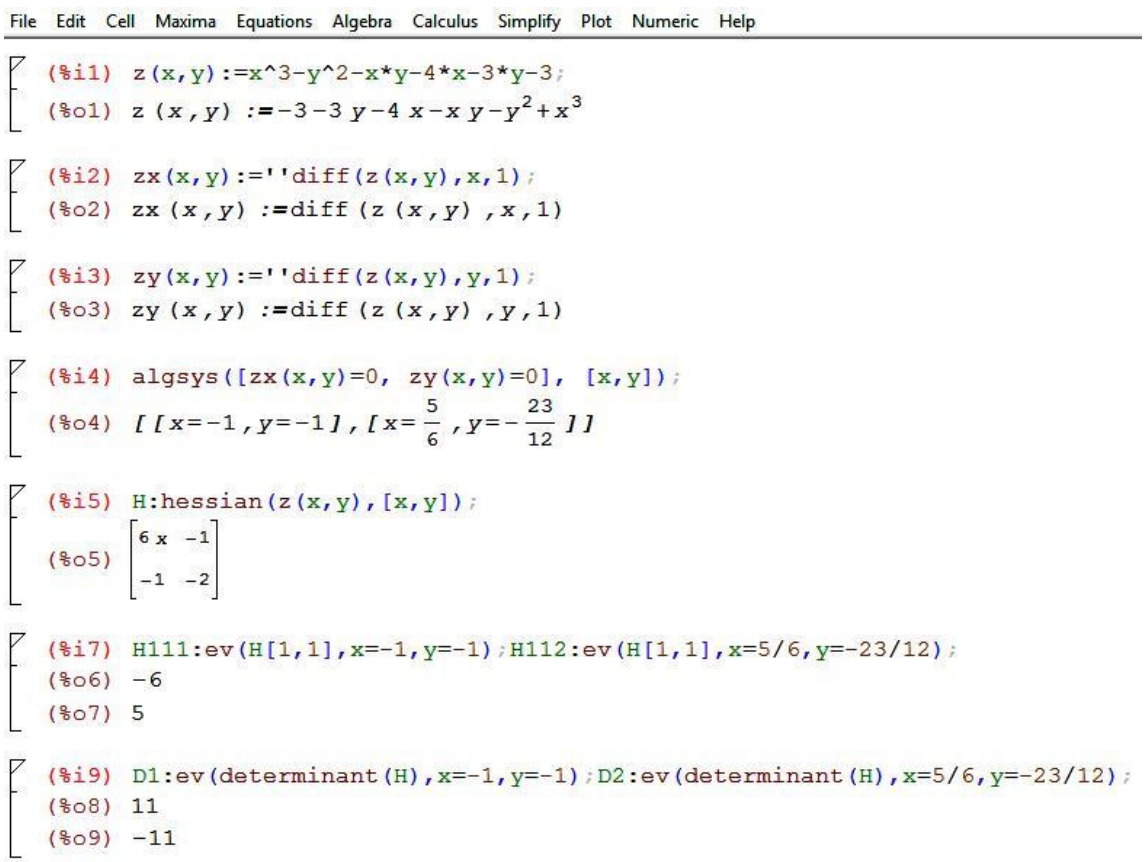
Dakle, $H_{111} = -6$ i $H_{112} = 5$.

Izračunajmo determinantu matrice H u svakoj od stacionarnih točaka. Označimo s D_1 i D_2 redom determinantu matrice H u točki S_1 i determinantu te matrice u točki S_2 U novi redak radnoga prozora upišimo:

```
D1:ev(determinant(H),x=-1,y=-1);D2:ev(determinant(H),x=5/6,y=-23/12);
```

Pritisnemo *Enter* na numeričkom dijelu tipkovnice. *Maxima* će ispisati (vidjeti Sliku 6.):

```
11
-11
```



Slika 6. Ispis vrijednosti elementa H_{11} i determinante matrice H u svakoj od stacionarnih točaka.

Za stacionarnu točku S_1 dobili smo:

$$H_{1,1}(S_1) = -6 < 0,$$
$$\det(H(S_1)) = 11 > 0.$$

Odatle zaključujemo da funkcija z ima *lokalni maksimum* u točki S_1, odnosno da je S_1 točka lokalnoga maksimuma funkcije z.

Za stacionarnu točku S_2 dobili smo:

$$H_{1,1}(S_2) = 6 > 0,$$
$$\det(H(S_2)) = -11 < 0.$$

Budući da je pripadna determinanta strogo manja od nule, zaključujemo da je S_2 sedlasta točka funkcije z, odnosno da S_2 nije točka lokalnoga ekstrema funkcije z.

2. **a)** Označimo s x masu proizvedene čokolade *Mljac-mljac*, a s y masu proizvedene čokolade *Fantazija*. Iz zadane tablice zaključujemo:

Za proizvodnju 1 kg čokolade *Mljac-mljac* na grupi strojeva S_1 potrebna su 4 sata. Stoga je za proizvodnju x kg iste čokolade na toj grupi strojeva potrebno $4 \cdot x$ sati.

Za proizvodnju 1 kg čokolade *Fantazija* na grupi strojeva S_1 potrebna su 2 sata. Stoga je za proizvodnju y kg iste čokolade na toj grupi strojeva potrebno $2 \cdot y$ sati.

Ukupno vrijeme koje će raditi strojevi iz grupe S_1 jednako je zbroju gornjih vremena, tj. $4 \cdot x + 2 \cdot y$ sati. Ti strojevi tjedno smiju raditi najviše 32 sata, pa zbroj $4 \cdot x + 2 \cdot y$ mora biti najviše jednak 32. Taj zahtjev zapisujemo u obliku nejednakosti:

$$4 \cdot x + 2 \cdot y \leq 32.$$

Analogno razmatranje provodimo i za grupu strojeva S_2. Za proizvodnju 1 kg čokolade *Mljac-mljac* na grupi strojeva S_2 potrebna su 2 sata. Stoga je za proizvodnju x kg iste čokolade na toj grupi strojeva potrebno $2 \cdot x$ sati.

Za proizvodnju 1 kg čokolade *Fantazija* na grupi strojeva S_2 potrebna su 3 sata. Stoga je za proizvodnju y kg iste čokolade na toj grupi strojeva potrebno $3 \cdot y$ sati.

Ukupno vrijeme koje će raditi strojevi iz grupe S_2 jednako je zbroju gornjih vremena, tj. $2 \cdot x + 3 \cdot y$ sati. Ti strojevi tjedno smiju raditi najviše 28 sati, pa zbroj $2 \cdot x + 3 \cdot y$ mora biti najviše jednak 28. Taj zahtjev zapisujemo u obliku nejednakosti:

$$2 \cdot x + 3 \cdot y \leq 28.$$

Cijena 1 kg čokolade *Mljac-mljac* iznosi 30 n.j. Stoga će ukupni prihod nastao prodajom x kg te čokolade iznositi $30 \cdot x$ n.j.

Cijena 1 kg čokolade *Fantazija* iznosi 30 n.j. Stoga će ukupni prihod nastao prodajom y kg te čokolade iznositi $27 \cdot y$ n.j.

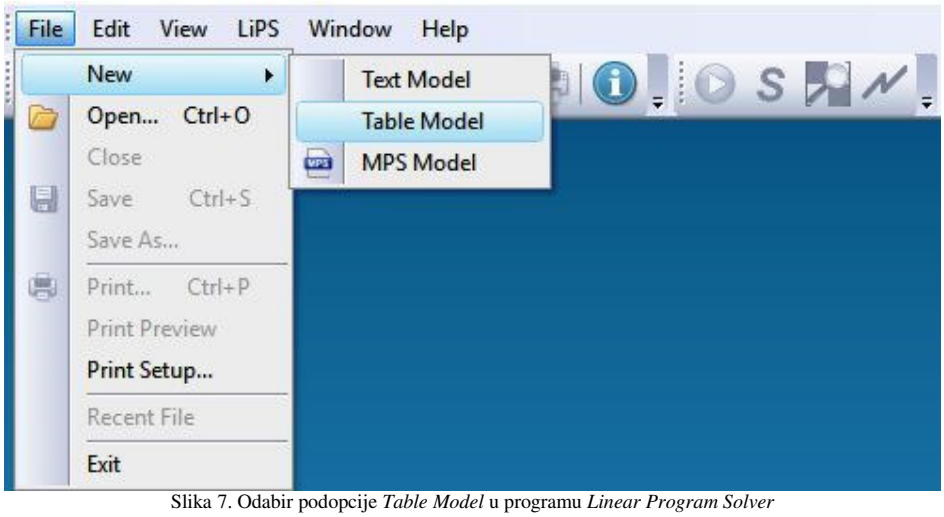
Ukupni prihod nastao prodajom obiju vrsta čokolada jednak je zbroju $30 \cdot x + 27 \cdot y$. Želimo da taj prihod bude što veći, što znači da navedeni zbroj treba maksimizirati.

Tako smo dobili sljedeći matematički model:

$$\begin{aligned}
&\max.\ z = 30 \cdot x + 27 \cdot y \\
&\text{p.u.} \\
&4 \cdot x + 2 \cdot y \le 32, \\
&2 \cdot x + 3 \cdot y \le 28, \\
&x,\ y \ge 0
\end{aligned}$$

Posljednju nejednakost $x, y \ge 0$ nadopisali smo jer prema prirodi problema vrijednosti x i y ne mogu biti strogo negativni realni brojevi. (Ti brojevi ne moraju biti prirodni brojevi jer je npr. moguće proizvesti 2.5 kg neke čokolade itd.)

Riješimo ovaj matematički model koristeći program *Linear Program Solver*. Pokrenimo taj program. Odaberimo izbornik *File*, opciju *New* i podopciju *Table Model* (vidjeti Sliku 7.)

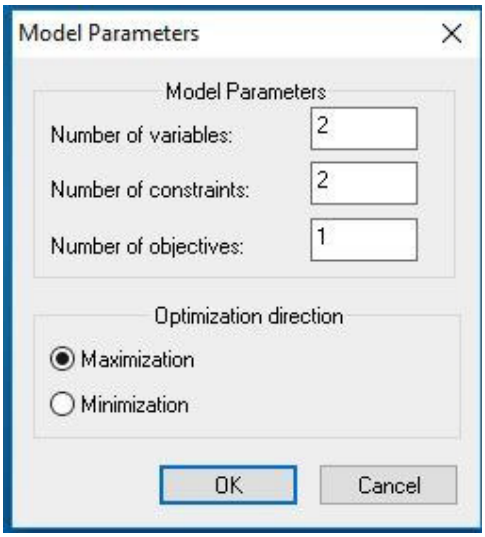


Slika 7. Odabir podopcije *Table Model* u programu *Linear Program Solver*

Pojavljuje se okvir *Model Parameters*. U ovom okviru trebamo zadati osnovne parametre našega matematičkoga modela. On ima ukupno dvije nezavisne varijable (x i y), dva uvjeta ($4 \cdot x + 2 \cdot y \leq 32$ i $2 \cdot x + 3 \cdot y \leq 28$) i točno jednu funkciju cilja ($z = 30 \cdot x + 27 \cdot y$). Stoga:

- u pravokutnik pored natpisa *Number of variables* upisujemo 2;
- u pravokutnik pored natpisa *Number of constraints* upisujemo 2;
- u pravokutnik pored natpisa *Number of obejctives* ne upisujemo ništa, nego ostavljamo upisan broj 1 (vidjeti Sliku 8.);
- u dijelu *Optimization direction* lijevim klikom miša kliknemo na kružić pored natpisa *Maximization* jer želimo maksimizirati funkciju cilja.

Potom kliknemo na *OK*. (vidjeti Sliku 9.)

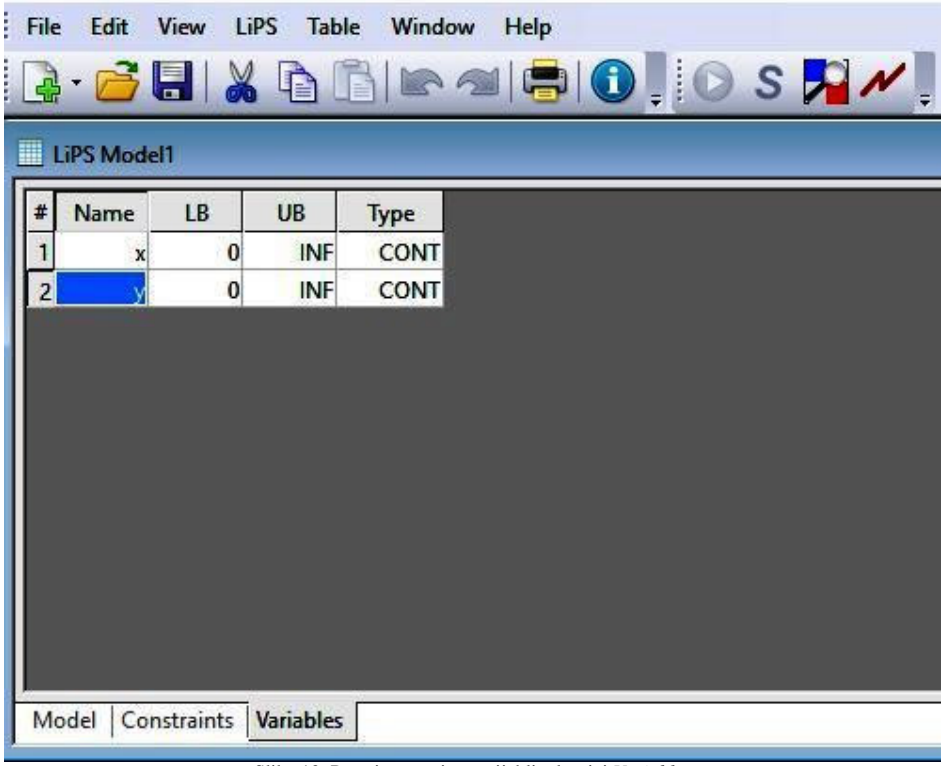


Slika 9. Unos parametara matematičkoga modela

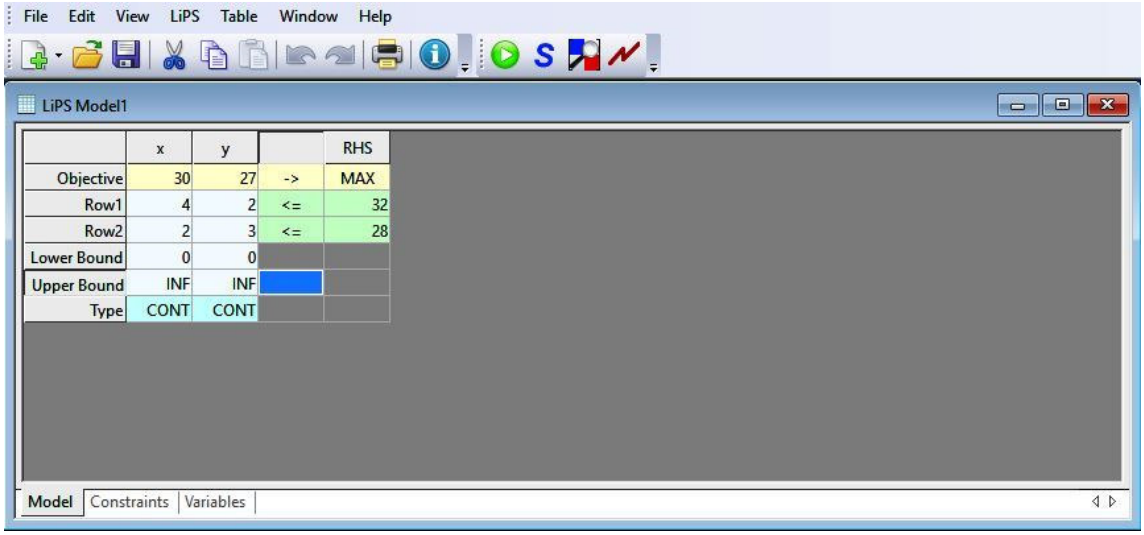
Dobili smo tablicu u kojoj trebamo zadati koeficijente uz svaku varijablu u funkciji cilja, odnosno uvjetima. Kliknimo lijevom tipkom miša na karticu *Variables* u toj tablici, pa promijenimo nazive varijabli u x i y (vidjeti Sliku 10.). Potom kliknimo lijevom tipkom miša na karticu *Model*.

U redak s natpisom *Objective* upisujemo koeficijente funkcije cilja: 30, 27.
U redak s natpisom *Row*1 upisujemo koeficijente prvoga uvjeta: 4, 2, 32.
U redak s natpisom *Row*2 upisujemo koeficijente drugoga uvjeta: 2, 3, 28.

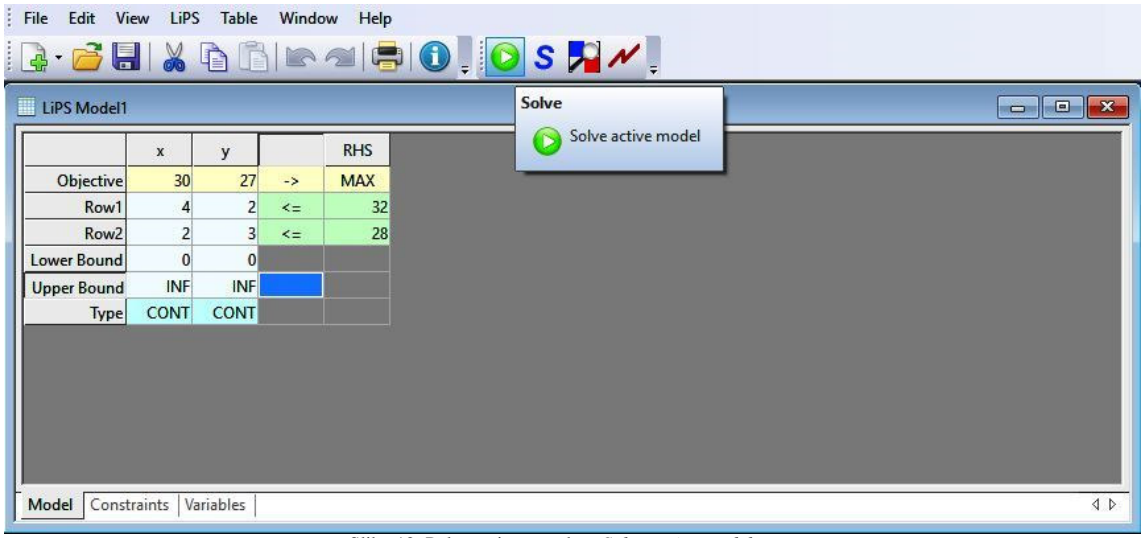
Sadržaj svih ostalih tabličnih ćelija ostavimo nepromijenjen. Tako dobivamo tablicu prikazanu na Slici 11. Potom kliknimo lijevom tipkom miša na ikonicu *Solve active model* (vidjeti Sliku 12.)



Slika 10. Promjena naziva varijabli u kartici *Variables*



Slika 11. Unos matematičkoga modela u program *Linear Program Solver*



Slika 12. Pokretanje procedure *Solve active model*

Dobivamo tablice prikazane na Slici 13.

```
>> Optimal solution FOUND
>> Maximum = 312
```

*** RESULTS - VARIABLES ***

Variable	Value	Obj. Cost	Reduced Cost
x	5	30	0
y	6	27	0

*** RESULTS - CONSTRAINTS ***

Constraint	Value	RHS	Dual Price
Row1	32	32	4.5
Row2	28	28	6

Slika 13. Optimalno rješenje zadanoga problema

Iz prve tablice očitamo: $\left(x^*, y^*\right) = (5,\ 6)$, $z^* = 312$. Stoga zaključujemo da je optimalan tjedni plan proizvodnje: *proizvesti* 5 kg *čokolade Mljac-mljac i* 6 kg *čokolade Fantazija*. Optimalan ukupni prihod iznosi 312 n.j.

b) Promotrimo vrijednosti u stupcima *Value* i *RHS* svakoga od redaka *Row*1 i *Row*2 u drugoj tablici. Te vrijednosti iznose 32, odnosno 28 i međusobno su jednake (u svakom pojedinom retku). To znači da će svaka grupa strojeva raditi najvećim dozvoljenim tjednim kapacitetom.

3. Znamo da je razina proizvodnje $Q = 2$. Ta razina je s pripadnim iznosom kapitala i količinom rada povezana relacijom $Q(K,L)=\sqrt{K\cdot L}$. Dakle, mora vrijediti jednakost $2=\sqrt{K\cdot L}$. Kvadriramo tu jednakost, pa dobijemo:

$$K\cdot L=4.$$

Stoga trebamo minimizirati vrijednosti izraza $T(K,L)=K^2+16\cdot L^2-2\cdot K\cdot L$ uz uvjet $K\cdot L=4$. To ćemo najlakše učiniti tako da problem svedemo na minimizaciju realne funkcije jedne realne varijable.

Iz uvjeta $K\cdot L=4$ izrazimo jednu od varijabli, npr. *L*:

$$L=\frac{4}{K}.$$

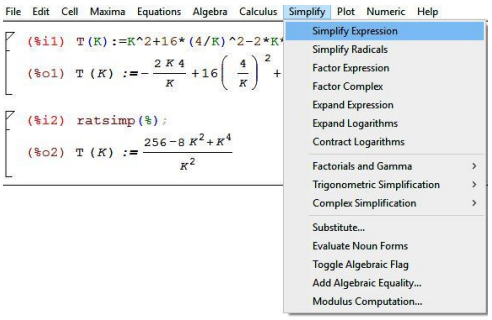
Uvrštavanjem ovoga izraza u funkciju troškova dobivamo realnu funkciju jedne realne varijable (*K*):

$$T=T(K)=K^2+16\cdot\left(\frac{4}{K}\right)^2-2\cdot K\cdot\left(\frac{4}{K}\right)=K^2+16\cdot\frac{16}{K^2}-2\cdot 4=$$
$$=\frac{K^2\cdot K^2+16\cdot 16-8\cdot K^2}{K^2}=\frac{K^4-8\cdot K^2+256}{K^2}.$$

Ovaj izraz smo mogli pojednostavniti i koristeći *Maximu*. U novi redak radnoga prozora utipkamo:

```
T(K):=K^2+16*(4/K)^2-2*K*(4/K);
```

Odaberemo izbornik *Simplify* i opciju *Simplify Expression* (vidjeti Sliku 14).



Slika 14. Odabir opcije *Simplify Expression*

Kliknemo na tu opciju, pa će *Maxima* ispisati upravo izraz koji smo dobili i „klasičnim“ pojednostavljivanjem.

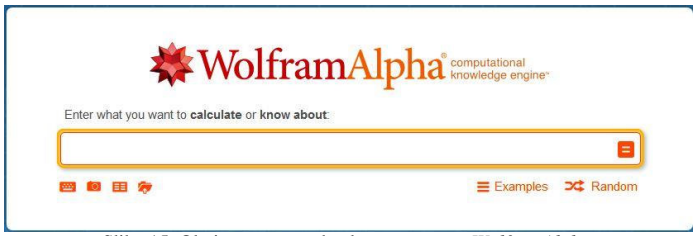
Globalni minimum najlakše i najbrže odredimo koristeći program *WolframAlpha.* Otvorimo neki od internetskih preglednika, pa u traku za adrese upišimo:

`www.wolframalpha.com`

U okvir prikazan na Slici 15. upišimo:

`global extrema of T(K)=(K^4-8*K^2+256)/K^2 for K>=0`

Uvjet $K \geq 0$ smo morali nadopisati jer bi *WolframAlpha* inače određivala globalne ekstreme na cijelom skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$. To je potpuno nepotrebno jer numerička vrijednost iznosa kapitala ne može biti strogo negativan realan broj.



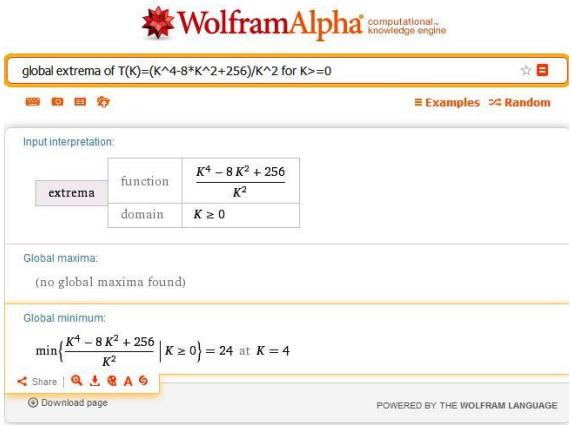
Slika 15. Okvir za unos podataka u programu *WolframAlpha*.

Pritisnemo *Enter* na bilo kojemu dijelu tipkovnice. Nakon kraćega računanja *WolframAlpha* će ispisati:

`Global minimum:`

$$\min\left\{\frac{K^4-8K^2+256}{K^2} \mid K \geq 0\right\} = 24 \text{ at } K = 4$$

(vidjeti Sliku 16.)



Slika 16. Globalni minimum funkcije ukupnih troškova

Dakle, funkcija T postiže najmanju vrijednost 24 za $K = 4$. Pripadna vrijednost količine rada jednaka je

$$L = \frac{4}{K} = \frac{4}{4} = 1.$$

Stoga možemo zaključiti: *Najmanja vrijednost funkcije ukupnih troškova iznosi* 24 n.j. *i postiže se za* $(K, L) = (4, 1)$.

4. **a)** Formirajmo najprije matematički model promatranoga problema. Neka je x ukupan broj emitiranih promidžbenih poruka za vrijeme svih utakmica Lige prvaka, a y ukupan broj emitiranih promidžbenih poruka za vrijeme svih epizoda serije *Djevojka imena Hloverka*.

Brojevi x i y nužno moraju biti nenegativni cijeli brojevi. Budući da mora biti emitirana najmanje jedna promidžbena poruka u svim utakmicama Lige prvaka, odnosno svim epizodama serije *Djevojka imena Hloverka*, zaključujemo da mora vrijediti nejednakost

$$x, y \geq 1.$$

Jednu promidžbenu poruku emitiranu za vrijeme jedne epizode serije *Djevojka imena Hloverka* vidjet će 10 000 muškaraca i 30 000 žena iz ciljne grupe. To znači da će y promidžbenih poruka emitiranih za vrijeme svih epizoda serije *Djevojka imena Hloverka* vidjeti ukupno $10000 \cdot y$ muškaraca i $30000 \cdot y$ žena.

Jednu promidžbenu poruku emitiranu za vrijeme jedne utakmice Lige prvaka vidjet će 40 000 muškaraca i 20 000 žena iz ciljne grupe. To znači da će x promidžbenih poruka emitiranih za vrijeme svih utakmica Lige prvaka vidjeti ukupno $40000 \cdot x$ muškaraca i $20000 \cdot x$ žena.

Dakle, ukupan broj svih muškaraca koji će vidjeti barem jednu promidžbenu poruku iznosi $40\,000 \cdot x + 10\,000 \cdot y$. Cilj je da taj broj bude barem jednak 90 000. Stoga mora vrijediti nejednakost:

$$40\,000 \cdot x + 10\,000 \cdot y \geq 90\,000.$$

Analogno, ukupan broj svih žena koje će vidjeti barem jednu promidžbenu poruku iznosi $20\,000 \cdot x + 30\,000 \cdot y$. Cilj je da taj broj bude barem jednak 70 000, pa vrijedi nejednakost:

$$20\,000 \cdot x + 30\,000 \cdot y \geq 70\,000.$$

Cijena jedne poruke emitirane za vrijeme jedne epizode serije *Djevojka imena Hloverka* iznosi 10 000 €. Stoga cijena y poruka emitiranih za vrijeme svih epizoda te serije iznosi $10\,000 \cdot y$ €.

Cijena jedne poruke emitirane za vrijeme jedne utakmice Lige prvaka iznosi 30 000 €. Stoga cijena x poruka emitiranih za vrijeme svih utakmica Lige prvaka iznosi $30\ 000 \cdot x$ €.

Ukupan iznos koji će biti potrošen za plaćanje emitiranja svih promidžbenih poruka iznosi $30\ 000 \cdot x + 10\ 000 \cdot y$ €. Taj iznos treba minimizirati.

Tako smo dobili sljedeći matematički model:

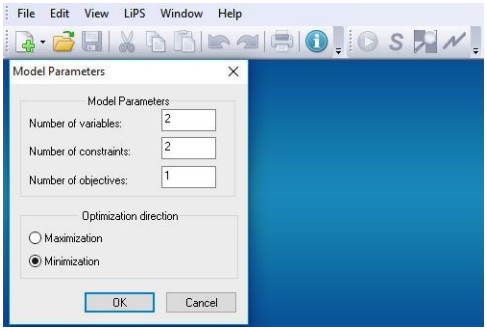
$$\begin{aligned}
&\min.\ z = 10\ 000 \cdot x + 30\ 000 \cdot y \\
&\text{p.u.} \\
&40\ 000 \cdot x + 10\ 000 \cdot y \geq 90\ 000, \\
&20\ 000 \cdot x + 30\ 000 \cdot y \geq 70\ 000, \\
&x,\ y \in \mathbb{N} := \{1,\ 2,\ 3, \ldots\}
\end{aligned}$$

Riješimo taj model primjenom računalnoga programa *Linear Program Solver*. Pokrenimo taj program. Odaberimo izbornik *File*, opciju *New* i podopciju *Table Model* (vidjeti Sliku 7.)

Pojavljuje se okvir *Model Parameters*. U ovom okviru trebamo zadati osnovne parametre našega matematičkoga modela. On ima ukupno dvije nezavisne varijable (x i y), dva uvjeta ($40\ 000 \cdot x + 10\ 000 \cdot y \geq 90\ 000$ i $20\ 000 \cdot x + 30\ 000 \cdot y \geq 70\ 000$) i točno jednu funkciju cilja ($z = 10\ 000 \cdot x + 30\ 000 \cdot y$). Stoga:

- u pravokutnik pored natpisa *Number of variables* upisujemo 2;
- u pravokutnik pored natpisa *Number of constraints* upisujemo 2;
- u pravokutnik pored natpisa *Number of obejctives* ne upisujemo ništa, nego ostavljamo upisan broj 1 (vidjeti Sliku 8.);
- u dijelu *Optimization direction* lijevim klikom miša kliknemo na kružić pored natpisa *Minimization* jer želimo minimizirati funkciju cilja.

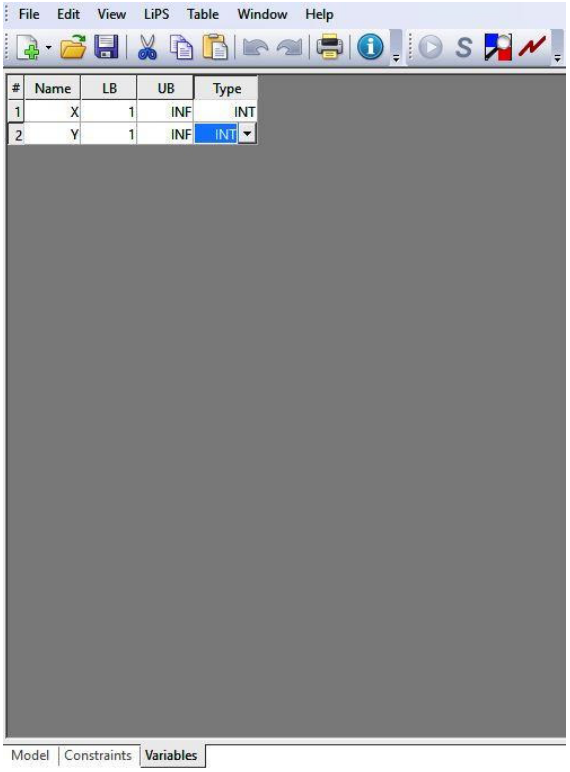
Potom kliknemo na *OK*. (vidjeti Sliku 17.)



Slika 17. Unos parametara matematičkoga modela.

Dobili smo tablicu u kojoj trebamo zadati koeficijente uz svaku varijablu u funkciji cilja, odnosno uvjetima. Kliknimo lijevom tipkom miša na karticu *Variables* u toj tablici, pa:

- promijenimo nazive varijabli u *x* i *y*;
- u stupac *LB* upišimo: 1, 1;
- klikom na trokutić pored svakoga od dvaju natpisa *CONT* u stupcu *Type* promijenimo tip varijabli u *INT* (vidjeti Sliku 18.).

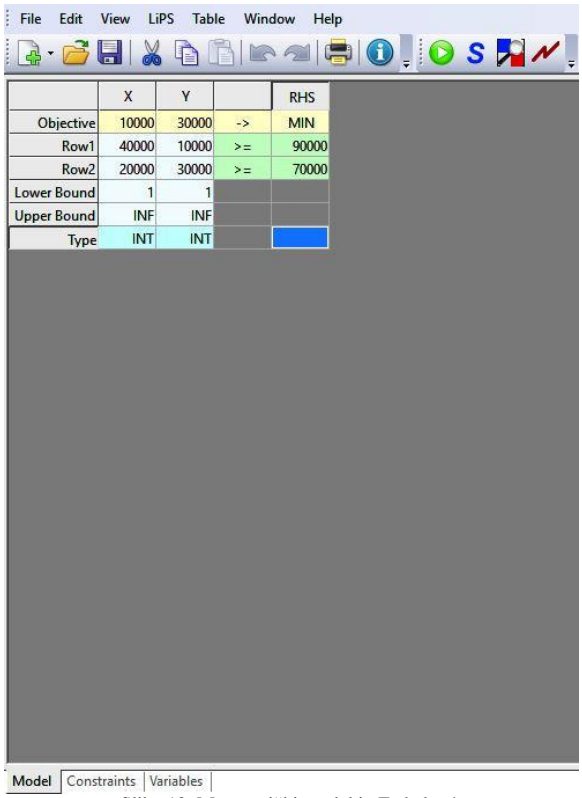


Slika 18. Postavke varijabli u Zadatku 4.

Potom kliknimo lijevom tipkom miša na karticu *Model*.

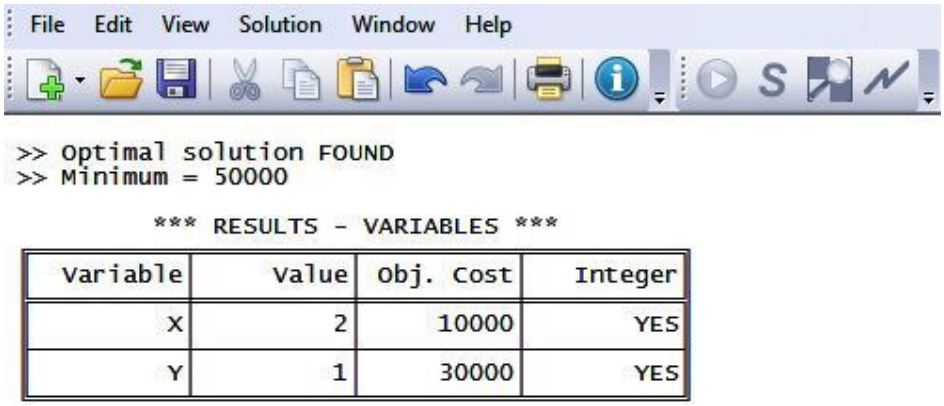
U redak s natpisom *Objective* upisujemo koeficijente funkcije cilja: 10000, 30000.
U redak s natpisom *Row*1 upisujemo koeficijente prvoga uvjeta: 40000, 10000, 90000.
U redak s natpisom *Row*2 upisujemo koeficijente drugoga uvjeta: 20000, 30000, 70000.
Lijevim klikom miša na znak <= i potom na trokutić koji se pojavio u tom pravokutniku promijenimo svaki od tih znakova u >=

Sadržaj svih ostalih tabličnih ćelija ostavimo nepromijenjen. Tako dobivamo tablicu prikazanu na Slici 19. Potom kliknimo lijevom tipkom miša na ikonicu *Solve active model* (vidjeti Sliku 12.). Dobivamo tablicu prikazanu na Slici 20.



	X	Y		RHS
Objective	10000	30000	->	MIN
Row1	40000	10000	>=	90000
Row2	20000	30000	>=	70000
Lower Bound	1	1		
Upper Bound	INF	INF		
Type	INT	INT		

Slika 19. Matematički model iz Zadatka 4.

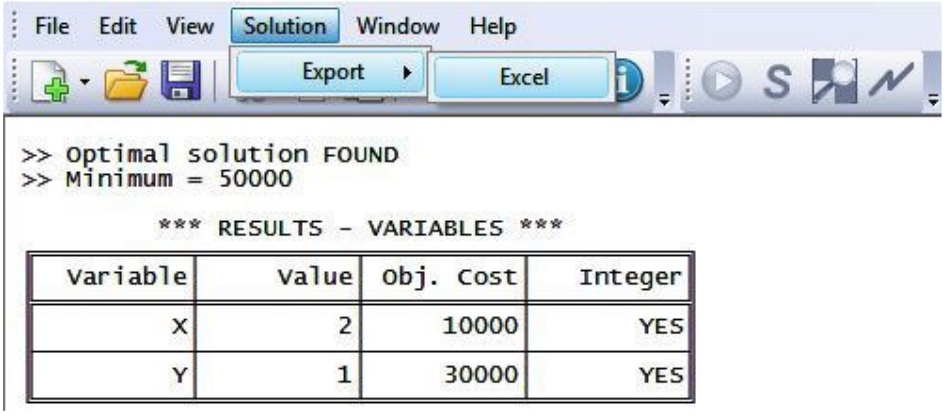


Variable	Value	Obj. Cost	Integer
X	2	10000	YES
Y	1	30000	YES

Slika 20. Rješenje Zadatka 4.

Iz ove tablice očitamo: $\left(x^*, y^*\right) = (2,\ 1),\ z^* = 50000$. Dakle, treba platiti dvije promidžbene poruke koje će biti emitirane za vrijeme utakmica Lige prvaka i jednu promidžbenu poruku koja će biti emitirana za vrijeme trajanja serije *Djevojka imena Hloverka*. Ukupni trošak svih emitiranih poruka iznosi 50 000 €.

b) Iz tablice prikazane na Slici 20. ne možemo „očitati“ ukupan broj muškaraca, odnosno žena koje će vidjeti barem jednu od ukupno tri promidžbene poruke predviđene optimalnim planom. Zbog toga rješenje zadatka „izvezemo“ u računalni program MS Excel. Odaberemo izbornik *Solution*, opciju *Export* i podopciju *Excel* (vidjeti Sliku 21.).



Slika 21. „Izvoz“ podataka u MS Excel.

Pohranimo izvezene podatke u datoteku *rjesenje.xls*. Otvorimo tu datoteku. Dobivamo sljedeću tablicu.

Variable	*Value*	*Obj. Cost*	*Reduced Cost*
X	2	10000	0
Y	1	30000	0
Constraint	*Value*	*RHS*	*Dual Price*
Row1	90000	90000	0,25
Row2	70000	70000	0
BND.X	2	1	0
BND.Y	1	1	27500

Tablica 2.

Primjećujemo da su brojevi u stupcima *Value* i *RHS* u svakom od redaka *Row*1 i *Row*2 međusobno jednaki (90 000, odnosno 70 000). To znači da optimalan plan strategije predviđa da svaku poruku vidi točno onoliko muškaraca, odnosno žena koliko je propisano ciljevima tvrtke.