IZ INFORMATIKE

Rješavanje nekih problema primjene diferencijalnoga računa više varijabli u ekonomiji, uz korištenje računalnoga programa *Maxima*

Josipa Pavić[1], Bojan Kovačić[2] i Bojan Radišić[3]

Sažetak

U članku se na dva pogodno odabrana primjera iz gospodarske prakse ilustrira primjena računalnoga programa *Maxima* na rješavanje nekih problema iz primjene diferencijalnoga računa više varijabli u ekonomiji (optimizacija funkcije dobiti, izračun i interpretacija koeficijenata parcijalne elastičnosti). Odabrani primjeri predstavljaju uzorak zadataka kakve studenti specijalističkoga studija trgovinskoga poslovanja Veleučilišta u Požegi rješavaju u okviru predmeta *Kvantitativne metode u trgovini* na završnoj godini toga studija. Primjeri su riješeni metodički u skladu s postavljenim ciljevima i ishodima navedenoga predmeta.

1. Uvod

Na većini specijalističkih diplomskih studija iz područja ekonomije u Republici Hrvatskoj postoji barem jedan predmet u kojemu studenti upoznaju tzv. kvantitativne metode u ekonomiji. Takvi se predmeti zapravo bave relativno raznolikim spektrom primjena matematike na modeliranje i rješavanje različitih ekonomskih problema. Najčešće se razmatraju primjene linearnoga programiranja, odnosno različiti optimizacijski problemi.

U trećem semestru specijalističkoga studija trgovinskoga poslovanja Veleučilišta u Požegi studentima se kao izborni predmet nudi *Kvantitativne metode u trgovini*.

[1]Josipa Pavić, studentica specijalističkoga diplomskoga studija trgovinskoga poslovanja na Veleučilištu u Požegi
[2]Bojan Kovačić, Tehničko veleučilište u Zagrebu, Zagreb
[3]Bojan Radišić, Veleučilište u Požegi, Požega

Cilj toga predmeta je upoznati i svladati neke osnovne matematičke pojmove i tehnike nužne za kvalitetno razumijevanje i modeliranje ekonomskih procesa. Na primjeru linearnoga programiranja i njegovih odabranih primjena upoznaje se matematičko modeliranje jednostavnijih klasa problema iz područja trgovinskoga poslovanja, te njihovo rješavanje pomoću odabranih računalnih programa (*Eigenmath*, *Maxima*, *WinQSB*). Na taj način student u svojem daljnjem obrazovanju može primijeniti stečena znanja i vještine na modeliranje i rješavanje različitih tipova problema koje susreće u svojoj poslovnoj praksi.

U ovom ćemo članku ilustrirati kako se računalni program *Maxima* može iskoristiti za rješavanje dvaju ekonomskih problema modeliranih pomoću realnih funkcija dviju realnih varijabli. Istaknimo da je *Maxima* računalni program za različite algebarske operacije sa simboličkim i numeričkim izrazima. U te operacije ubrajaju se i deriviranje, integriranje, razvoj u Taylorov red, Laplaceova transformacija itd. Pomoću toga programa mogu se rješavati različite (ne)algebarske jednadžbe, obične diferencijalne jednadžbe, sustavi linearnih jednadžbi itd. Rezultati tih operacija vrlo su precizni, a ukupan broj znamenaka u njihovu prikazu ovisi o odabranom obliku zapisa (s točnošću od 10^{-4} („kratak oblik”, engl. *short format*) ili s točnošću od 10^{-12} („dugačak oblik”, engl. *long format*)). Izvorni kod programa je prilagođen i čitljiv u brojnim operacijskim sustavima, uključujući *Windows*, *Linux* i *MacOS X*.

Čitatelja zainteresiranoga za detaljnije podatke o programu *Maxima* upućujemo na [3].

2. Pregled korištenih funkcija programa *Maxima*

U rješavanju primjera koristit ćemo nekoliko funkcija programa *Maxima*, pa ćemo na ovome mjestu dati njihov kratak pregled. Riječ je o funkcijama `expand`, `diff`, `hessian`, `determinant`, float i `at`.

Funkcija `expand` omogućava ispis proširenoga zapisa simboličkih objekata (funkcija, algebarskih izraza, simboličkih brojeva itd.). Stoga je jedini argument ove funkcije neki simbolički objekt.

Funkcija `diff` vraća „običnu” ili parcijalnu derivaciju funkcije predstavljenu kao simbolički objekt. Kao argument ove funkcije nužno se navodi funkcija koju treba (parcijalno) derivirati. Kao ostali argumenti mogu se navesti red derivacije, varijabla po kojoj se derivira itd.

Funkcija `hessian` izračunava Hesseovu matricu funkcije više varijabli. Argumenti te funkcije su realna funkcija više realnih varijabli, nazivi varijabli i rangovi varijabli. Rangirati varijable znači navesti koja je varijabla prva, koja druga itd. Primjerice, ako je $z = f(x, y)$, onda je prvorangirana varijabla te funkcije varijabla x, a drugorangirana varijabla te funkcije varijabla y.

Funkcija `determinant` izračunava determinantu kvadratne realne ili kompleksne matrice.

Funkcija `float` pretvara simboličke objekte koji predstavljaju realne ili kompleksne brojeve u „obične" realne ili kompleksne brojeve s kojima se dalje može računati kao s brojevima, a ne kao sa simboličkim objektima. Jedini argument te funkcije je simbolički broj koji treba „pretvoriti" u „običan" realan ili kompleksan broj.

Funkcija `at` koristi se za uvrštavanje simboličkih vrijednosti (brojeva) u simbolički izraz. Takvo se uvrštavanje praktično se primjenjuje prilikom računanja vrijednosti neke funkcije u točki koja pripada njezinu prirodnu području definicije.

3. Primjer s maksimizacijom funkcije dobiti

Zadatak: Prodavaonica mješovite robe „*Sve za malo kuna*" u Frkljevcima nudi dvije vrste soka od jabuke: *Jabučko* čija je nabavna jedinična cijena 40 n.j.[4] i *Applejuice* čija je nabavna jedinična cijena 50 n.j. Na temelju analize tržišta procijenjeno je da će prodaja soka *Jabučko* po jediničnoj cijeni od x n.j. i soka *Applejuice* čija je jedinična cijena y n.j. rezultirati dnevnom prodajom od približno $72 - 4.5x + 3y$ bočica *Jabučka* i $86 + 7x - 7.3y$ bočica soka *Applejuice*. Treba odrediti jedinične cijene obiju vrsta soka tako da ukupna dobit od prodaje obiju vrsta sokova bude maksimalna. Pritom optimalne vrijednosti varijabli x i y moraju biti nenegativni cijeli brojevi.

Rješenje: Traženu ukupnu dnevnu dobit dobivamo zbrajanjem dnevne dobiti od prodaje soka *Jabučko* i dnevne dobiti od prodaje soka *Applejuice*. Dnevnu dobit od prodaje svakoga pojedinoga soka izračunavamo množenjem razlike prodajne i nabavne cijene toga soka s ukupnom dnevnom prodanom količinom toga soka. Prema podatcima iz primjera slijedi da ukupna dnevna dobit od prodaje soka *Jabučko* iznosi

$$P_1(x, y) = (x - 40) \times (72 - 4.5x + 3y).$$

Analogno, ukupna dnevna dobit od prodaje soka *Applejuice* iznosi:

$$P_2(x, y) = (y - 50) \times (86 + 7x - 7.3y).$$

Neka je $P = P(x, y)$ funkcija ukupne dobiti od prodaje obiju vrsta sokova. Tada je:

$$P(x, y) = P_1(x, y) + P_2(x, y).$$

Odredimo propis funkcije P koristeći program *Maxima*. Utipkamo redom:

```
P1(x,y):=(x-40)*(72-4.5*x+3*y);
P2(x,y):=(y-50)*(86+7*x-7.3*y);
P(x,y):=P1(x,y)+P2(x,y);
expand(P(x,y));
```

[4] Skraćenica za „novčanih jedinica".

Maxima će ispisati:

$$-7.3y^2+10xy+331.0y-4.5x^2-98.0x-7180$$

(vidjeti Sliku 1).

```
(%i7)  P1(x,y):=(x-40)*(72-4.5*x+3*y);
(%o7)  P1(x,y):=(x-40)(72-4.5 x+3 y)
(%i8)  P2(x,y):=(y-50)*(86+7*x-7.3*y);
(%o8)  P2(x,y):=(y-50)(86+7 x+(-7.3)y)
(%i9)  P(x,y):=P1(x,y)+P2(x,y);
(%o9)  P(x,y):=P1(x,y)+P2(x,y)
(%i10) expand(P(x,y));
(%o10) -7.3 y^2+10 x y+331.0 y-4.5 x^2-98.0 x-7180
```

Slika 1. Određivanje funkcije P u Primjeru 1.

Dakle,

$$P(x, y) = -4.5x^2 - 7.3y^2 + 10\,xy - 98x + 331y - 7180.$$

Nađimo lokalne ekstreme funkcije P. U tu svrhu najprije odredimo obje parcijalne derivacije te funkcije.[5] Neka su P_x i P_y redom parcijalna derivacija funkcije P po varijabli x, odnosno varijabli y. Odredimo ih pomoću programa *Maxima*.

Funkciju P_x određujemo utipkavanjem

```
Px(x,y):=''(diff(P(x,y),x));
```

a funkciju P_y utipkavanjem

```
Py(x,y):=''(diff(P(x,y),y));
```

Primijetimo da će *Maxima* ispisati nereducirane propise funkcija P_x i P_y, tj. ispisat će se:

```
Px(x,y):=3 y+7(y-50)-4.5 x-4.5(x-40)+72
Py(x,y):=-7.3 y-7.3(y-50)+7 x+3(x-40)+86
```

Pojednostavljene propise tih dviju funkcija dobivamo primjenom funkcije `expand`. Utipkamo:

```
expand(Px(x,y));expand(Py(x,y));
```

[5] Opširniji teorijski prikaz algoritma određivanja lokalnih ekstrema funkcije više varijabli ovdje izostavljamo. Zainteresiranoga čitatelja upućujemo na literaturu [2].

pa će *Maxima* ispisati:

```
10 y-9.0 x-98.0
-14.6 y+10 x+331.0
```

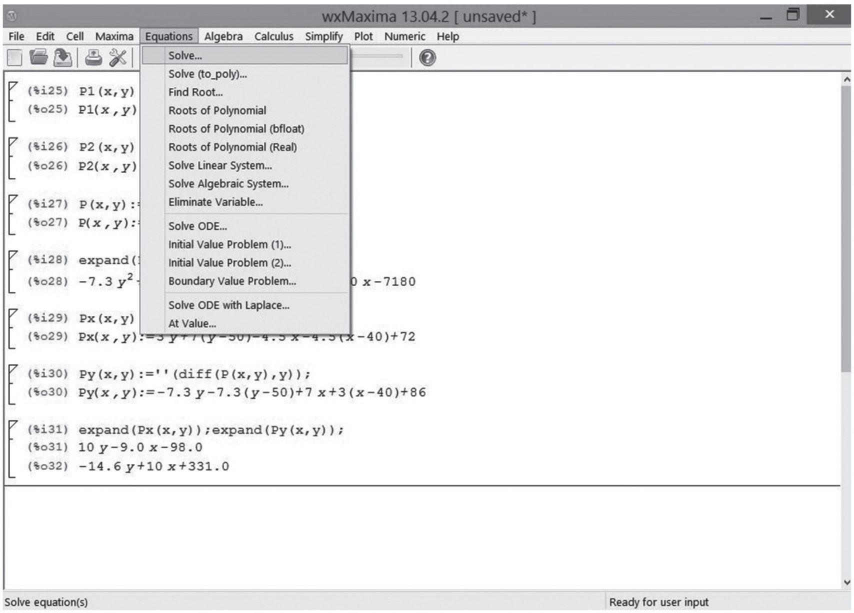
Dakle,

$$P_x(x, y) = -9 \cdot x + 10 \cdot y - 98,$$
$$P_y(x, y) = 10 \cdot x - 14.6 \cdot y + 331.$$

Stacionarne točke funkcije P su rješenja sustava jednadžbi:

$$\begin{cases} P_x = 0, \\ P_y = 0. \end{cases}$$

Riješimo taj sustav. U izborniku programa odabere se izbornik *Equations* i njezina opcija *Solve* (vidjeti Sliku 2.).



Slika 2. Opcija Equations i njezina podopcija Solve

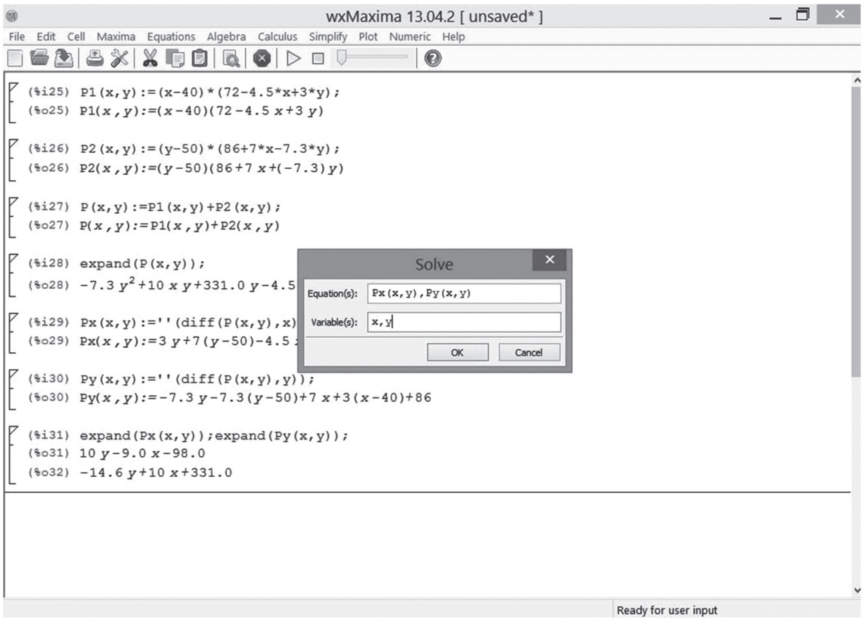
U pravokutnik pored natpisa *Equation*(*s*) u prozorčiću *Solve* upišemo:

```
Px(x,y),Py(x,y)
```

U pravokutnik pored natpisa *Variable*(*s*) u prozorčiću *Solve* upišemo:

```
x,y
```

(vidjeti Sliku 3.)



Slika 3. Unos podataka u podopciju Solve u Primjeru 1.

Kliknemo na OK. *Maxima* će ispisati:

```
rat: replaced -4.5 by -9/2 = -4.5
rat: replaced -4.5 by -9/2 = -4.5
rat: replaced -7.3 by -73/10 = -7.3
rat: replaced -7.3 by -73/10 = -7.3
[[x=9396/157,y=9995/157]]
```

Primijetimo da su prigodom izračuna decimalni brojevi koji se pojavljuju u propisima funkcija P_x i P_y zamijenjeni racionalnim brojevima. Dakle, stacionarna točka funkcije P je $T=\left(\frac{9396}{157},\frac{9995}{157}\right)$.

Napomena: Sustav jednadžbi $\begin{cases} P_x = 0, \\ P_y = 0. \end{cases}$ zapravo je sustav dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama. Stoga se u rješavanju toga sustava može primijeniti i opcija *Solve Linear System...* iz izbornika *Equations*. Nedostatak te opcije jest nužnost ručnoga unašanja svake pojedine jednadžbe sustava, koje se može izbjeći korištenjem opcije *Solve*.

Utvrdimo je li točka T točka lokalnoga ekstrema funkcije P. U tu svrhu računamo pripadnu Hesseovu matricu. U novi redak utipkamo:

```
H:hessian(P(x,y),[x,y]);
```

Maxima će ispisati:

$$\begin{bmatrix} -9.0 & 10 \\ 10 & -14.6 \end{bmatrix}.$$

Dakle,

$$H = \begin{bmatrix} -9 & 10 \\ 10 & -14.6 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo determinantu matrice H. U novi redak utipkamo:

```
determinant(H);
```

Pritisne se tipka *Enter*. *Maxima* će ispisati:

```
31.40000000000001
```

Tako smo utvrdili da je H_{11} = -9 < 0 i det(H) = 31.4 > 0. To znači da je T točka lokalnoga maksimuma funkcije P.

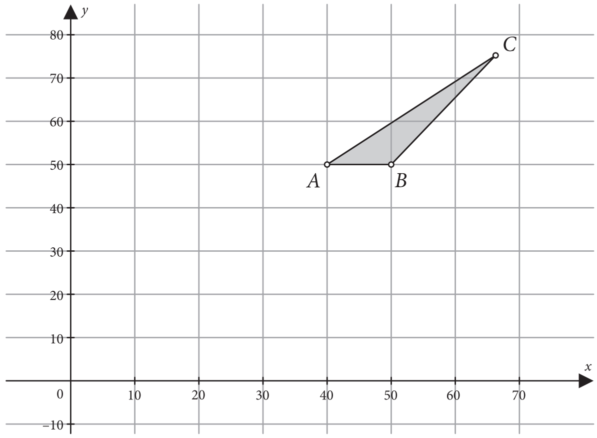
Pokažimo da je T točka globalnoga maksimuma funkcije P. U tu svrhu odredimo prirodno područje definicije (domenu) polinoma P. Na prvi bismo pogled mogli zaključiti da je tražena domena skup $\mathbf{R}^2$ jer je taj skup domena bilo kojega polinoma 2. stupnja. Međutim, funkcije P_1, P_2 i P su funkcije dobiti, pa iz ekonomskih razloga njihove vrijednosti moraju biti nenegativne. Iz propisa tih funkcija slijedi da istodobno moraju vrijediti sljedeće nejednakosti:

$$\begin{cases} x - 40 \geq 0, \\ 72 - 4.5 \cdot x + 3 \cdot y \geq 0, \\ y - 50 \geq 0, \\ 86 + 7 \cdot x - 7.3 \cdot y \geq 0. \end{cases}$$

Ovaj sustav nejednadžbi riješimo grafički. Njegovo rješenje je trokut ABC (vidjeti Sliku 4.). Koordinate vrhova toga trokuta dobijemo trima primjenama ranije opisane opcije *Solve*. Dobiva se $A = (40,\ 50),\ B = \left(\frac{148}{3},\ 50\right)$ i $C = \left(\frac{5224}{79}, \frac{5940}{79}\right)$.

Dakle, domena D polinoma P je trokut ABC. Taj trokut omeđen je i zatvoren podskup skupa $\mathbf{R}^2$, pa zaključujemo da je taj skup kompaktan.[6]

[6]Može se pokazati da je svaki omeđen i zatvoren podskup skupa $\mathbf{R}^2$ kompaktan skup. Za definiciju kompaktnoga skupa i dokaz navedene tvrdnje vidjeti [2].



Slika 4. Prirodno područje definicije polinoma P iz Primjera 1.

Polinom P je funkcija klase C^1 na skupu $\mathbf{R}^2$, pa posebno i na skupu $D \subset \mathbf{R}^2$. Dakle, razmatramo funkciju P koja je klase C^1 i čije je prirodno područje definicije D kompaktan skup. Stoga funkcija P na skupu D postiže globalne ekstreme, i to ili u točkama lokalnih ekstrema ili na rubu skupa D (ako ne postoje točke lokalnih ekstrema[7]). Budući da je T lokalni maksimum funkcije P, zaključujemo da je ta točka ujedno i globalni maksimum funkcije P. (Primijetimo da se globalni minimum funkcije P postiže na rubu trokuta ABC jer ne postoji točka lokalnoga minimuma.)

Koordinate točke T zapišimo kao decimalne brojeve. U novi redak utipkamo:

```
float([x=9396/157,y=9995/157]);
```

Maxima će ispisati:

```
[x=59.84713375796179,y=63.66242038216561]
```

Prema zahtjevu zadatka, optimalne vrijednosti trebaju biti nenegativni cijeli brojevi, pa su mogući sljedeći slučajevi:

1.) $x^* = 59, y^* = 63$;
2.) $x^* = 59, y^* = 64$;
3.) $x^* = 60, y^* = 63$;
4.) $x^* = 60, y^* = 64$.

Utipkavanjem

```
P(59,63);P(59,64);P(60,63);P(60,64)
```

u novi redak *Maxime* lako izračunamo:

$$P(59, 63) = 422.8,\ P(59, 64) = 416.7,\ P(60, 63) = 419.3,\ P(60, 64) = 432.2$$

[7] O definiciji neprekidnosti funkcije više varijabli i svojstvima funkcija koje su neprekidne na kompaktnom skupu vidjeti [2].

Dakle, maksimalna dnevna dobit iznosi 423.2 n.j. i postiže se za $x = 60$ i $y = 64$. To znači da sokove *Jabučko* treba prodavati po jediničnoj cijeni od 60 n.j., a sokove *Applejuice* po jediničnoj cijeni od 64 n.j.

4. Primjer s koeficijentima parcijalne elastičnosti

Zadatak: Procjenjuje se da je ukupna tjedna proizvodnja čokolade u tvornici *Čokolicija d.d.* iz Velike jednaka $Q(x, y) = 1.731x + 925y + x^2y - 2.7x^2 - 1.3\,y^{\frac{3}{2}}$ jedinica, gdje je x broj kvalificiranih radnika, a y broj nekvalificiranih radnika zaposlenih u tvornici. Trenutačna radna snaga sastoji se od 43 kvalificirana i 85 nekvalificiranih radnika. Izračunajmo relativnu promjenu ukupne tjedne proizvodnje u svakome od sljedećih dvaju slučajeva:

a) broj kvalificiranih radnika poveća se za 1%, a broj nekvalificiranih radnika ostane nepromijenjen;

b) broj nekvalificiranih radnika poveća se za 1%, a broj kvalificiranih radnika ostane nepromijenjen.

Rješenje: Tražene relativne promjene jednake su vrijednostima koeficijenata parcijalne elastičnosti[8] $E_{Q,x}$ i $E_{Q,y}$ za $x = 43$ i $y = 85$. Ti su koeficijenti definirani izrazima:

$$E_1 := E_{Q,x}(43{,}85) = \frac{43}{Q(43{,}85)} \cdot Q_x(43{,}85)$$

$$E_2 := E_{Q,y}(43{,}85) = \frac{85}{Q(43{,}85)} \cdot Q_y(43{,}85)$$

Da bismo izračunali navedene koeficijente, odredit ćemo obje parcijalne derivacije funkcije Q. Neka su Q_x i Q_y redom parcijalna derivacija funkcije Q po varijabli x, odnosno varijabli y.

a) Prvo odredimo Q_x. Utipkajmo:

```
Q(x,y):=1.731*x+925*y+x^2*y-2.7*x^2-1.3*y^(3/2);
Qx(x,y):=''(diff(Q(x,y),x));
```

Koeficijent parcijalne elastičnosti E_1 računamo prema gore navedenoj formuli. U novi redak utipkamo:

```
E1=43/Q(43,85)*Qx(43,85);
```

Maxima će ispisati:

$$E1 = \frac{304419.833}{230872.133 - 1.3\ 85^{3/2}}$$

[8]Više o koeficijentima parcijalne elastičnosti može se naći u [1].

Broj E_1 zapišimo kao decimalni broj. U novi redak utipkamo:

```
float(%);
```
[9]

Maxima će ispisati:

```
E1=1.324408811495026
```

(vidjeti Sliku 5.)

```
(%i7) Q(x,y):=1.731*x+925*y+x^2*y-2.7*x^2-1.3*y^(3/2);
(%o7) Q(x,y):=1.731 x+925 y+x^2 y+(-2.7) x^2+(-1.3) y^(3/2)
(%i8) Qx(x,y):=''(diff(Q(x,y),x));
(%o8) Qx(x,y):=2 x y-5.4 x+1.731
(%i9) E1=43/Q(43,85)*Qx(43,85);
(%o9) E1=304419.833/(230872.133-1.3 85^(3/2))
(%i10) float(%);
(%o10) E1=1.324408811495026
```

Slika 5. Izračun vrijednosti E1 u Primjeru 2.

Zaključujemo: ako se broj kvalificiranih radnika poveća za 1%, tjedna ukupna proizvodnja očekivano će se povećati za približno 1.32 %.

Napomena: Vrijednost koeficijenta E_1 možemo izračunati i korištenjem funkcije at, odnosno bez korištenja dvostrukih navodnika u zadavanju funkcije Q_x. Konkretno, utipkamo li:

```
Q(x,y):=1.731*x+925*y+x^2*y-2.7*x^2-1.3*y^(3/2);
Qx(x,y):=diff(Q(x,y),x);
E1=43/Q(43,85)*at(Qx(x,y),[x=43,y=85]);
```

Maxima će ponovno ispisati:

$$E1=\frac{304419.833}{230872.133-1.3\,85^{3/2}}$$

U ovom slučaju *Maxima* neće ispisati propis funkcije Q_x, pa je ovaj način pogodniji ako nas ne zanimaju „međurezultati” (nego samo krajnji rezultati izračuna). Nedostatak ovoga načina nešto je složeniji izračun vrijednosti $Q_x(43, 85)$.

[9](%) označava posljednji izlazni podatak

b) U ovom slučaju treba odrediti Q_y. U novi redak utipkamo:

```
Qy(x,y):=''(diff(Q(x,y),y));
```

Potom se računa koeficijent E_2 prema gore navedenoj formuli. U novi redak utipkamo:

```
E2=85/Q(43,85)*Qy(43,85);
```

Maxima će ispisati:

$$E2=\frac{85\left(2774-1.95\sqrt{85}\right)}{230872.133-1.3\,85^{3/2}}$$

Izraz E_2 zapišimo kao decimalni broj. Utipkamo:

```
float(%);
```

Maxima će ispisati:

```
E2=1.019179562626049
```

Zaključujemo: ako se broj nekvalificiranih radnika poveća za 1%, tjedna ukupna proizvodnja očekivano će se povećati za približno 1.02 %. S obzirom da je koeficijent E_1 strogo veći od koeficijenta E_2, možemo zaključiti da bi se upravi tvornice isplatilo ulagati u obrazovanje radnika.

5. Zaključak

U nastavi matematičkih predmeta na stručnim i specijalističkim studijima veleučilišta i samostalnih visokih škola sve se više koriste različiti računalni programi. Njihova svrha nije samo ubrzavanje analitičkih izračuna, nego i omogućavanje kvalitetnije analize dobivenih rezultata. Pritom korištenje računalnih programa ne smije biti nauštrb razumijevanja teorijskoga dijela gradiva jer studenti moraju razumjeti svrhu svakoga pojedinoga izračuna provedenoga pomoću računala. U ovom smo članku na dvama primjerima nastojali ilustrirati sintezu razumijevanja teorijskoga dijela gradiva i izračuna provedenih pomoću računalnoga programa *Maxima*. Uvjereni smo da se analogna sinteza može kvalitetno provesti i na ostalom matematičkom gradivu koje se izlaže u matematičkim predmetima, uz nužan pažljiv odabir računalnoga programa prilagođenoga krajnjim korisnicima i njihovom informatičkom predznanju.

6. Literatura

1. L. Neralić, B. Šego: *Matematika*, Element, Zagreb, 2009.
2. Š. Ungar: *Matematička analiza u* $\mathbf{R}^n$, Golden marketing – Tehnička knjiga, Zagreb, 2005.
3. Sadržaji s internetske stranice http://andrejv.github.io/wxmaxima/ (23.6.2014.)