

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRAEENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (stručni prijediplomski studij elektrotehnike)	Slučajne varijable – zadaci za ponavljanje
--	---	--

1. U tvornici električnih žarulja *I bi svjetlo* iz Podbablja utvrdili su da se **prosječno** proizvede 2% neispravnih žarulja. Izračunajte vjerojatnost da slučajno odabrani uzorak s točno 20 žarulja sadrži barem dvije neispravne žarulje. **Obavezno zaokružite dobiveni rezultat na četiri decimale i potom ga izrazite u postotcima.**

Rješenje: U ovome je podzadatku slučajni pokus *ispitivanje ispravnosti žarulja u uzorku*.

Neka je Y slučajna varijabla koja označava broj neispravnih žarulja u odabranom uzorku. Odredimo njezine parametre.

Ukupan broj izvedenih pokusa jednak je ukupnom broju svih žarulja u uzorku, tj. $n = 20$.

Uspjeh u *svakom* slučajnom pokusu je „ispitana žarulja je neispravna“. Prema podacima iz zadatka, vjerojatnost uspjeha iznosi

$$p = 2\% = 0.02 .$$

Dakle, $Y \sim B(20, 0.02)$.

Trebamo izračunati vjerojatnost $P(Y \geq 2)$.

Promotrimo suprotan događaj, tj. da uzorak sadrži najviše jednu neispravnu žarulju. Izračunajmo vjerojatnost toga događaja.

On se razlaže na točno dva disjunktna događaja: da su sve žarulje u uzorku ispravne i da uzorak sadrži točno jednu neispravnu žarulju. Vjerojatnost prvoga događaja je jednaka $P(Y = 0)$, a vjerojatnost drugoga $P(Y = 1)$. Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka:

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2) &= 1 - (P(Y = 0) + P(Y = 1)) = \\ &= 1 - \left(0.98^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0.02^1 \cdot (1 - 0.02)^{19} \right) = \\ &= 1 - (0.98^{20} + 20 \cdot 0.02 \cdot 0.98^{19}) \approx \\ &\approx 0.0599 = 5.99\%. \end{aligned}$$

Napomena: Tražena vjerojatnost može se izračunati i kao

$$\sum_{k=2}^{20} P(Y = k) = P(Y = 2) + P(Y = 3) + \dots + P(Y = 19) + P(Y = 20).$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (stručni prijediplomski studij elektrotehnike)	Slučajne varijable – zadaci za ponavljanje
---	---	--

2. Broj e-poruka koje Anamarija primi u **jednom satu** je **Poissonova slučajna varijabla**. Anamarija je utvrdila da u **jednom radnom danu** (= 8 sati) primi **prosječno** 14 e-poruka. Odredite vjerojatnost da u slučajno odabranom satu Anamarija primi **barem jednu** e-poruku. **Obavezno zaokružite dobiveni rezultat na četiri decimale, pa ga izrazite u postotcima.**

Rješenje: Prosječan broj e-poruka koje Anamarija primi u jednom satu jednak je

$$\lambda = \frac{14}{8} = 1.75.$$

Neka je X promatrana Poissonova slučajna varijabla. Znamo da je očekivanje svake Poissonove slučajne varijable jednako njezinu parametru, pa zaključujemo da su:

$$E(X) = \lambda = 1.75, \\ X \sim \text{Poiss}(1.75).$$

Tako slijedi da je tražena vjerojatnost jednaka:

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X < 1) = \\ &= 1 - P(X = 0) = \\ &= 1 - \frac{1.75^0}{0!} \cdot e^{-1.75} = \\ &= 1 - e^{-1.75} \approx \\ &\approx 0.8262 = 82.62\%. \end{aligned}$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (stručni prijediplomski studij elektrotehnike)	Slučajne varijable – zadaci za ponavljanje
---	---	--

3. Vjerojatnost pojave kratkoga zastoja pri **dnevnom** emitiranju signala odašiljača iznosi 4%. Neka je X **Poissonova** slučajna varijabla koja označava ukupan **tjedni** (= 7 dana) broj pojave zastoja. Izračunajte vjerojatnost da se u jednom **tjednu** dogode **najviše dva** kratka zastoja. **Obavezno zaokružite dobiveni rezultat na četiri decimale, pa ga potom izrazite u postotcima.**

Rješenje: Odredimo najprije parametar slučajne varijable X .

Ukupan broj „pokusa“ jednak je $n = 7$.

Vjerojatnost „uspjeha“ u jednom „pokusu“ je $p = 4\% = 0.04$.

Zbog toga parametar varijable X iznosi:

$$\lambda = 7 \cdot 0.04 = 0.28.$$

Dakle, $X \sim \text{Poiss}(0.28)$.

Tražena je vjerojatnost jednaka $P(X \leq 2)$. Odmah dobivamo:

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \\ &= \left(\frac{0.28^0}{0!} + \frac{0.28^1}{1!} + \frac{0.28^2}{2!} \right) \cdot e^{-0.28} = \\ &= 1.3192 \cdot e^{-0.28} \approx \\ &\approx 0.997 = 99.7\%. \end{aligned}$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (stručni prijediplomski studij elektrotehnike)	Slučajne varijable – zadaci za ponavljanje
--	---	--

4. Pacijentu je potrebna transplantacija bubrega. Bubreg mora donirati prikladni donator. Vjerojatnost da je slučajno odabrani donator prikladan iznosi 10%. Ispituje se prikladnost svakoga donatora na popisu sve dok se ne pronade prvi prikladan donator. Izračunajte vjerojatnost da će biti ispitan najviše sedam donatora. **Obavezno zaokružite dobiveni rezultat na četiri decimale, pa ga izrazite u postotcima.**

Rješenje: Neka je X slučajna varijabla koja označava ukupan broj ispitanih donatora. X je geometrijska slučajna varijabla s parametrom

$$p = 10\% = 0.1.$$

Dakle, $X \sim G(0.1)$.

Neka je F pripadna funkcija razdiobe vjerojatnosti. Treba izračunati $P(X \leq 7)$. Imamo redom:

$$\begin{aligned} p &= P(X \leq 7) = \\ &= F(7) = \\ &= 1 - (1 - 0.1)^7 = \\ &= 1 - 0.9^7 = \\ &= 0.5217031 \approx \\ &\approx 0.5217 = 52.17\%. \end{aligned}$$

Napomena: Tražena vjerojatnost može se izračunati i kao

$$\sum_{k=1}^7 P(X = k) = P(X = 1) + P(X = 2) + \dots + P(X = 7).$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRAEENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (stručni prijediplomski studij elektrotehnike)	Slučajne varijable – zadaci za ponavljanje
---	---	--

5. Vjerojatnost da će dalmatinski pas („dalmatiner“) na tijelu imati točno 15 pjega iznosi 80%. Na izložbi pasa stručni žiri broji pjege na svakom dalmatinskom psu sve dok ne pronađe psa koji na svojem tijelu ima točno 15 pjega. Izračunajte vjerojatnost da će stručni žiri morati prebrojati pjege na barem pet pasa. Izrazite dobiveni rezultat u **promilima**.

Rješenje: Neka je X slučajna varijabla koja označava ukupan broj ispitanih pasa. X je geometrijska slučajna varijabla s parametrom

$$p = 80\% = 0.8.$$

Dakle, $X \sim G(0.8)$.

Neka je F pripadna funkcija razdiobe vjerojatnosti. Treba izračunati $P(X \geq 5)$. Imamo redom:

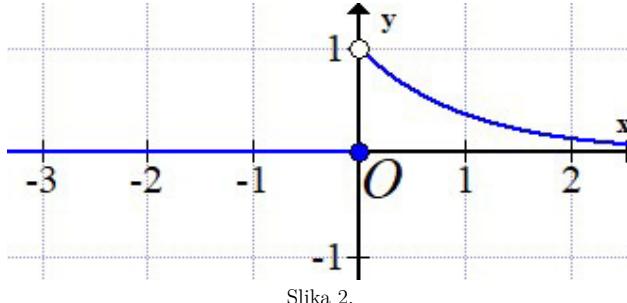
$$\begin{aligned} p &= P(X \geq 5) = \\ &= 1 - P(X \leq 4) = \\ &= 1 - F(4) = \\ &= (1 - 0.8)^4 = \\ &= 0.2^4 = \\ &= 0.0016 = 1.6\%. \end{aligned}$$

Napomena: Tražena vjerojatnost može se izračunati i kao

$$P(X \geq 5) = P(X > 4) = (1 - 0.8)^4.$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (stručni prijediplomski studij elektrotehnike)	Slučajne varijable – zadaci za ponavljanje
--	---	--

6. Na donjoj je slici prikazan dio grafa **funkcije gustoće vjerojatnosti eksponencijalne slučajne varijable X** .



Slika 2.

Odredite (i obrazložite postupak) $P(X < 1)$. **Obavezno zaokružite dobiveni rezultat na četiri decimale, pa ga potom izrazite u postotcima.**

Rješenje: Prepostavimo da je $X \sim Ex(a)$, za neki $a > 0$. Iz definicije funkcije gustoće vjerojatnosti eksponencijalne slučajne varijable znamo da vrijedi jednakost

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a.$$

Iz slike se vidi da je

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1,$$

pa zaključujemo da je $a = 1$, odnosno $X \sim Ex(1)$.

Koristeći definiciju funkcije **razdioibe** vjerojatnosti eksponencijalne slučajne varijable, zaključujemo da je tražena vjerojatnost jednaka:

$$\begin{aligned} F(1) &= 1 - e^{-1} = \\ &= 1 - e^{-1} \approx \\ &\approx 0.6321 = 63.21\%. \end{aligned}$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRAEENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (stručni prijediplomski studij elektrotehnike)	Slučajne varijable – zadaci za ponavljanje
--	---	--

7. Na pisač Veleučilišta u Piškorevcima **u prosjeku** se upute tri zahtjeva za ispis u jednom satu. Pretpostavimo da je trenutak upućivanja zahtjeva za ispis slučajan. Neka je X **eksponencijalna** slučajna varijabla koja označava vrijeme (iskazano u **minutama**) između dvaju uzastopnih zahtjeva za ispis. Odredite vjerojatnost da će između dva uzastopna zahtjeva za ispis proći najviše 5 minuta.

Rješenje: Pretpostavimo da je $X \sim Ex(a)$, za neki $a > 0$.

Iz zadanih podataka zaključujemo da se u prosjeku svakih 20 minuta uputi po jedan zahtjev za ispis. To znači da **prosječno** vrijeme između dvaju zahtjeva za ispis iznosi 20 minuta.

Nadalje, znamo da je očekivanje svake eksponencijalne slučajne varijable jednako recipročnoj vrijednosti njezina parametra. Tako iz jednadžbe

$$\frac{1}{a} = 20$$

odmah slijedi

$$a = 0.05,$$

pa je

$$X \sim Exp(0.05).$$

Tražena je vjerojatnost jednaka $P(X \leq 5)$. Neka je F funkcija razdiobe vjerojatnosti varijable X . Koristeći tu funkciju odmah dobivamo:

$$\begin{aligned} P(X \leq 5) &= F(5) = \\ &= 1 - e^{-0.05 \cdot 5} = \\ &= 1 - e^{-0.25} \approx \\ &\approx 0.2212 = 22.12\%. \end{aligned}$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRAEENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (stručni prijediplomski studij elektrotehnike)	Slučajne varijable – zadaci za ponavljanje
---	---	--

8. Bruto mjesecni dohodak stanovnika Kraljevine Drplandije je **normalna slučajna varijabla** čije je očekivanje 10 000 €, a standardna devijacija 2500 €. Prema posljednjem popisu stanovništva, u toj zemlji živi 4 000 000 stanovnika. Procijenite **ukupan broj stanovnika** te zemlje čiji bruto mjesecni dohodak **nije veći** od 8000 €.

Rješenje: Neka je X promatrana normalna slučajna varijabla. Iz podataka u zadatku zaključujemo da je $X \sim N(10\ 000, 2500^2)$.

Vjerojatnost da *slučajno odabrani stanovnik* ima bruto mjesecni dohodak ne veći od 8000 € možemo izračunati na dva načina. Prvi način je: podijeliti ukupan broj stanovnika Drplandije čiji bruto mjesecni dohodak nije veći od 8000 € s ukupnim brojem svih stanovnika te zemlje. Drugi način je: izračunati $P(X \leq 8000)$ koristeći pretpostavku da je X normalna slučajna varijabla. Oba načina moraju dati *istu krajnju vjerojatnost*.

Tako slijedi da je traženi broj jednak:

$$\begin{aligned}
 n_1 &= n \cdot P(X \leq 8000) = \\
 &= 4\ 000\ 000 \cdot F(8000) = \\
 &= 4\ 000\ 000 \cdot F^*\left(\frac{8000 - 10\ 000}{2500}\right) = \\
 &= 4\ 000\ 000 \cdot F^*(-0.8) = \\
 &= 4\ 000\ 000 \cdot (1 - F^*(0.8)) = \\
 &= 4\ 000\ 000 \cdot (1 - 0.78814) = \\
 &= 847\ 440.
 \end{aligned}$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (stručni prijediplomski studij elektrotehnike)	Slučajne varijable – zadaci za ponavljanje
--	---	--

9. Najveća siječanska dnevna temperatura zraka u Konjskom Brdu je normalna slučajna varijabla čije je očekivanje -2°C , a standardna devijacija 4°C . Izračunajte vjerojatnost sljedećih događaja:

- a) $A = \{\text{najveća dnevna temperatura zraka u slučajno odabranom siječanjskom danu nije bila veća od } 0^{\circ}\text{C}\};$

Rješenje: Neka je X normalna slučajna varijabla iz zadatka. Prema podacima iz zadatka zaključujemo da je $X \sim N(-2, 4^2)$. Tražena vjerojatnost je jednaka:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X \leq 0) = \\ &= F(0) = \\ &= F^*\left(\frac{0 - (-2)}{4}\right) = \\ &= F^*(0.5) = \\ &= 0.69146. \end{aligned}$$

- b) $B = \{\text{najveća dnevna temperatura zraka u slučajno odabranom siječanjskom danu bila je između } -5^{\circ}\text{C} \text{ i } -1^{\circ}\text{C}\};$

Rješenje: Tražena vjerojatnost je jednaka:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(-5 \leq X \leq -1) = \\ &= F(-1) - F(-5) = \\ &= F^*\left(\frac{-1 - (-2)}{4}\right) - F^*\left(\frac{-5 - (-2)}{4}\right) = \\ &= F^*(0.25) - F^*(-0.75) = \\ &= F^*(0.25) - (1 - F^*(0.75)) = \\ &= F^*(0.25) + F^*(0.75) - 1 = \\ &= 0.59871 + 0.77337 - 1 = \\ &= 0.37208. \end{aligned}$$

- c) $C = \{\text{najveća dnevna temperatura zraka u slučajno odabranom siječanjskom danu bila je strogo veća od } -10^{\circ}\text{C}\}.$

Rješenje: Tražena vjerojatnost je jednaka

$$\begin{aligned} P(C) &= P(X > -10) = \\ &= 1 - P(X \leq -10) = \\ &= 1 - F(10) = \end{aligned}$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (stručni prijediplomski studij elektrotehnike)	Slučajne varijable – zadaci za ponavljanje
---	---	--

$$\begin{aligned}
 &= 1 - F^*\left(\frac{-10 - (-2)}{4}\right) = \\
 &= 1 - F^*(-2) = \\
 &= 1 - (1 - F^*(2)) = \\
 &= F^*(2) = \\
 &= 0.97725.
 \end{aligned}$$

- d) Procijenite **ukupan broj** siječanskih dana u kojima će najveća dnevna temperatura biti **strogo pozitivna**. Zaokružite dobiveni rezultat na **najблиži** prirodan broj.

Rješenje: Izračunajmo najprije vjerojatnost da će najveća dnevna temperatura u slučajno odabranom siječanskom danu biti strogo pozitivna. Dakle, tražimo $P(X > 0)$:

$$\begin{aligned}
 P(X > 0) &= 1 - P(X \leq 0) = \\
 &= 1 - F^*\left(\frac{0 - (-2)}{4}\right) = \\
 &= 1 - F^*(0.5) = \\
 &= 1 - 0.69146 = \\
 &= 0.30854.
 \end{aligned}$$

S druge strane, *ista* vjerojatnost je jednaka količniku broja dana u siječnju u kojima je najveća dnevna temperatura bila strogo pozitivna i ukupnoga broja dana u siječnju. Ukupan broj dana u siječnju bilo koje godine jednak je 31. Označimo li traženi broj s n , odmah dobivamo:

$$\begin{aligned}
 n &= 31 \cdot P(X > 0) = \\
 &= 31 \cdot 0.30854 = \\
 &= 9.56474 \approx 10.
 \end{aligned}$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (stručni prijediplomski studij elektrotehnike)	Slučajne varijable – zadaci za ponavljanje
--	---	--

10. Trajanje Ivanina putovanja na posao je normalna slučajna varijabla čija je standardna devijacija 15 minuta. U 84.134% radnih dana njezino putovanje traje najviše sat vremena.

- a) Odredite **prosječno** trajanje Ivanina putovanja na posao.

Rješenje: Neka je Y normalna slučajna varijabla iz zadatka. Znamo da standardna devijacija te slučajne varijable iznosi 15 minuta. Dakle, $Y \sim N(\mu, 15^2)$. Trebamo odrediti očekivanje μ .

Taj ćemo parametar odrediti iz podatka da u 84.134% radnih dana Ivanino putovanje na posao traje najviše sat vremena, odnosno 60 minuta. To zapravo znači da je

$$P(Y \leq 60) = 0.84134.$$

Primjenom svojstva

$$P(X \leq a) = F^*(b) \Leftrightarrow \mu = a - \sigma \cdot b$$

odmah dobivamo:

$$\mu = 60 - 1 \cdot 15 = 45 \text{ minuta.}$$

Dakle, $Y \sim N(45, 15^2)$.

- b) Odredite vjerojatnost da će Ivana putovati na posao najmanje sat i pol. (Izrazite dobiveni rezultat u **postotcima**.)

Rješenje: Vrijeme od sat i pol jednako je vremenu od 90 minuta, pa tražimo $P(Y \geq 90)$. Dobivamo:

$$\begin{aligned} P(Y \geq 90) &= 1 - P(Y \leq 90) = \\ &= 1 - F(90) = \\ &= 1 - F^*\left(\frac{90 - 45}{15}\right) = \\ &= 1 - F^*(3) = \\ &= 1 - 0.99865 = \\ &= 0.00135 = 0.135\%. \end{aligned}$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRAEENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (stručni prijediplomski studij elektrotehnike)	Slučajne varijable – zadaci za ponavljanje
--	---	--

- c) Kada **najkasnije** (u odnosu na službeni početak svojega radnoga vremena) Ivana treba krenuti na posao tako da vjerojatnost njezina pravovremena dolaska na posao bude barem 95%? (Zaokružite rezultat na **najbliži** prirodan broj.)

Rješenje: Neka je t traženo vrijeme. Mora vrijediti nejednakost

$$P(Y \leq t) \geq 0.95.$$

U tablici vrijednosti funkcije F^* ne nalazimo vrijednost 0.95, pa uzimamo prvu strogo veću vrijednost. To je

$$F^*(1.65) = 0.95053.$$

Dakle, tražimo $t > 0$ takav da vrijedi nejednakost

$$P(Y \leq t) \geq 0.95053 = F^*(1.65).$$

Primjenom svojstva

$$P(X \leq a) \geq F^*(b) \Leftrightarrow \mu \leq a - \sigma \cdot b$$

odmah dobivamo:

$$45 \leq t - 15 \cdot 1.65,$$

$$t \geq 45 + 15 \cdot 1.65,$$

$$t \geq 69.75,$$

$$t_{\min} = 70.$$

Zaključujemo da Ivana mora krenuti na posao najkasnije 70 minuta prije službenoga početka svojega radnoga vremena.