TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U STUDENOM 2012. – OSNOVNA RAZINA

I. ZADATCI VIŠESTRUKOGA IZBORA

1. **C.** Imamo redom:

$$\frac{9+7\cdot 6}{18-4\cdot 2}=\frac{9+42}{18-8}=\frac{51}{10}=5.1$$

2. **B.** Pomoću kalkulatora nalazimo $2 \cdot 10^{1.5} = 63.2455532$. Četvrta decimala je očito jednaka 5, pa se zaokruživanje vrši tako da se cjelobrojni dio i prve dvije decimale prepišu, a treća decimala poveća za 1. Tako se dobiva broj 63.246.

3. **B.** $-\sqrt{3}$ i $\sqrt{5}$ su iracionalni brojevi, pa nisu cijeli brojevi. $-\frac{1}{3}$ i $\frac{3}{4}$ su racionalni brojevi koji također nisu cijeli brojevi. Stoga zadani skup sadrži točno tri cijela broja: –5, 0 i 6.

4. **A.** Točka A se nalazi u četvrtom kvadrantu, pa je njezina prva koordinata strogo pozitivan realan broj, a druga strogo negativan realan broj. Stoga tvrdnja **A** nije točna. Sve ostale tvrdnje su točne.

5. **D.** Ako je zadana funkcija f, onda njezin graf mora prolaziti točkama $(x, f(x))$, za svaki x iz domene funkcije f. Stoga graf zadane funkcije f mora prolaziti točkama (–3, –3), (–2, –2,), (–1, 0), (0, 2) i (1, 4). Od tih se točaka u ponuđenim odgovorima nalazi jedino posljednja točka.

6. **D.** Razdijelimo broj 168 u omjeru 5 : 7 prema jednostavnom računu diobe. Najprije izračunamo omjerni (diobeni) koeficijent

$$k=\frac{168}{5+7}=\frac{168}{12}=14,$$

pa potom odmah dobivamo da je traženi broj neprodanih ulaznica jednak

$$N = 7 \cdot 14 = 98.$$

7. **C.** Neka je x nepoznata osnovna vrijednost. Koristeći zakon asocijativnosti množenja realnih brojeva imamo redom:

$$\frac{45}{100}\cdot x=\left(\frac{45}{14}\cdot\frac{14}{100}\right)\cdot x=\frac{45}{14}\cdot\left(\frac{14}{100}\cdot x\right)=\frac{45}{14}\cdot 343=\frac{45}{2}\cdot 49=\frac{2205}{2}=1102.5\,.$$

8. **B.** Ako se materijal za jednoga klijenta može spakirati za 3 minute, onda se materijal za 1564 klijenta može spakirati za $1564 \cdot 3 = 4692$ minuta. 8 radnih sati iznosi $8 \cdot 60 = 480$ minuta, pa je traženi broj radnika zapravo najmanji prirodan broj jednak ili veći od $\frac{4692}{480}=\frac{391}{40}=9.775$. Taj je broj jednak 10.

9. **D.** Prema definiciji, interval $\langle a, b\rangle$ sadrži sve realne brojeve strogo veće od a i strogo manje od b. Stoga interval $\langle 1, 4\rangle$ sadrži sve realne brojeve strogo veće od 1 i strogo manje od 4.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U STUDENOM 2012. – OSNOVNA RAZINA

10. A. U brojniku izlučimo zajednički faktor 2, pa dobivamo:

$$\frac{4+2\cdot\sqrt{a}}{4}=\frac{2\cdot\left(2+\sqrt{a}\right)}{4}=\frac{2+\sqrt{a}}{2}$$

11. A. Primjenom formule za razliku kvadrata imamo redom:

$$\frac{2\cdot a+3}{a^2-16}-\frac{1}{a+4}=\frac{2\cdot a+3}{a^2-4^2}-\frac{1}{a+4}=\frac{2\cdot a+3}{(a-4)\cdot(a+4)}-\frac{1}{a+4}=\frac{2\cdot a+3-1\cdot(a-4)}{(a-4)\cdot(a+4)}=$$
$$=\frac{2\cdot a+3-a+4}{(a-4)\cdot(a+4)}=\frac{a+7}{(a-4)\cdot(a+4)}=\frac{a+7}{a^2-16}$$

12. C. Zemljište možemo podijeliti na kvadrat stranice $a = 4 \cdot 10$ m = 40 m i polukrug polumjera $r = 2 \cdot 10$ m = 20 m. Stoga je traženi opseg zemljišta jednak zbroju duljina triju stranica kvadrata i duljine polukružnice, tj.

$$O=3\cdot a+\frac{1}{2}\cdot(2\cdot r\cdot\pi)=3\cdot a+r\cdot\pi=3\cdot 40+20\cdot\pi\approx 182.8\approx 183\ \text{m}.$$

13. D. Izračunajmo najprije vrijednost svakoga pojedinoga broja. Imamo redom:

$$a=3-5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=3-5\cdot\frac{1}{4}=3-\frac{5}{4}=\frac{12-5}{4}=\frac{7}{4},$$
$$b=\sqrt{1.44}:\frac{1}{5}=\sqrt{\frac{144}{100}}\cdot 5=\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{100}}\cdot 5=\frac{12}{10}\cdot 5=\frac{6}{5}\cdot 5=6,$$
$$c=\left|4\frac{1}{4}-7\right|=\left|\frac{4\cdot 4+1}{4}-7\right|=\left|\frac{16+1-7\cdot 4}{4}\right|=\left|\frac{17-28}{4}\right|=\left|-\frac{11}{4}\right|=\frac{11}{4},$$
$$d=2^{-1}+6^{-1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Tako slijedi:

$$\frac{a+b}{c-d}=\frac{\frac{7}{4}+6}{\frac{11}{4}-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{7+4\cdot 6}{4}}{\frac{11\cdot 3-4\cdot 2}{4\cdot 3}}=\frac{\frac{7+24}{4}}{\frac{33-8}{4\cdot 3}}=\frac{\frac{31}{4}}{\frac{25}{4\cdot 3}}=\frac{31\cdot 4\cdot 3}{25\cdot 4}=\frac{372}{100}=3.72\,.$$

14. C. Neka su x ukupan broj novčanica vrijednosti 20 kn i y ukupan broj novčanica vrijednosti 10 kn. Iz podatka da Marko ima ukupno 16 novčanica slijedi jednakost:

$$x + y = 16.$$

Ukupna vrijednost svih novčanica vrijednosti 20 kn iznosi $x \cdot 20$ kn, a ukupna vrijednost svih novčanica vrijednosti 10 kn iznosi $y \cdot 10$ kn. Iz podatka da ukupna vrijednost svih 16 novčanica treba biti jednaka 250 kn slijedi jednakost:

$$20 \cdot x + 10 \cdot y = 250,$$

odnosno, nakon dijeljenja s 10,

$$2 \cdot x + y = 25.$$

Tako smo dobili sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$x + y = 16,$$
$$2 \cdot x + y = 25.$$

Oduzmemo li te dvije jednadžbe, dobit ćemo:

$$-x = -9.$$

Odatle slijedi $x = 9$. Uvrštavanjem u prvu jednadžbu sustava izravno slijedi $y = 7$. Razlika ukupne vrijednosti svih novčanica vrijednosti 20 kn i ukupne vrijednosti svih novčanica vrijednosti 10 kn iznosi $20 \cdot x - 10 \cdot y = 20 \cdot 9 - 10 \cdot 7 = 180 - 7 = 110$ kn.

15. B. Neka su a i b duljine stranica zadanoga pravokutnika. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a > b$. Iz podatka da se duljine stranica razlikuju za 7 cm slijedi:

$$a - b = 7.$$

Površina zadanoga pravokutnika je $P = a \cdot b$ cm^2. Ako se dulja stranica zadanoga pravokutnika smanji za 2 cm, duljina nove stranice je $a_1 = a - 2$ cm. Ako se kraća stranica zadanoga pravokutnika produlji za 1 cm, duljina nove stranice je $b_1 = b + 1$. Površina tako dobivenoga pravokutnika je

$$P_1 = a_1 \cdot b_1 = (a - 2) \cdot (b + 1) = a \cdot b - 2 \cdot b + a - 2 \text{ cm}^2.$$

Površina novoga pravokutnika mora biti jednaka površini zadanoga pravokutnika, tj. mora vrijediti jednakost $P = P_1$. Tako dobivamo:

$$a \cdot b = a \cdot b - 2 \cdot b + a - 2,$$

odnosno, nakon reduciranja i sređivanja,

$$a - 2 \cdot b = 2.$$

Tako smo dobili sljedeći sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$a - b = 7,$$
$$a - 2 \cdot b = 2.$$

Oduzimanjem zadanih jednadžbi odmah dobivamo $b = 5$ cm, pa uvrštavanjem u prvu jednadžbu sustava izravno slijedi $a = 12$ cm. Veći opseg ima zadani pravokutnik jer, ako opseg polaznoga pravokutnika označimo s O, a opseg drugoga pravokutnika s O_1, vrijedi jednakost:

$O - O_1 = 2 \cdot (a + b) - 2 \cdot (a_1 + b_1) = 2 \cdot a + 2 \cdot b - 2 \cdot a_1 - 2 \cdot b_1 = 2 \cdot a + 2 \cdot b - 2 \cdot (a - 2) - 2 \cdot (b + 1) = 2 \cdot a + 2 \cdot b - 2 \cdot a + 4 - 2 \cdot b - 2 = 2.$

Stoga je traženi opseg jednak opsegu zadanoga pravokutnika, a taj je jednak

$$O = 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (12 + 5) = 2 \cdot 17 = 34 \text{ cm}.$$

16. C. Vidimo da zadana parabola prolazi ishodištem pravokutnoga koordinatnoga sustava, tj. točkom (0, 0). To znači da je $f(0) = 0$, pa uvrštavanjem $x = 0$ u propis funkcije odmah dobivamo $c = 0$. Nadalje, parabola ima oblik $\cup$, što znači da je vodeći koeficijent pripadne kvadratne funkcije strogo pozitivan. Dakle, vrijedi nejednakost $a > 0$. Napokon, parabola siječe os apscisa u dvije različite točke, što znači da pripadna kvadratna funkcija ima dvije različite realne nultočke. To je moguće ako i samo ako je diskriminanta pripadne kvadratne jednadžbe strogo pozitivan realan broj, tj. $D > 0$. Zaključimo: $D > 0$, $a > 0$ i $c = 0$.

II. ZADATCI KRATKIH ODGOVORA

17. 29.63. Traženi postotak je jednak

$$p = \frac{8}{27} \cdot 100 = \frac{800}{27} \approx 29.6296\% \approx 29.63\% .$$

18. $2 \cdot a + 2 \cdot b$ ili $2 \cdot b + 2 \cdot a$. Pomnožimo zadanu jednakost s 2. Dobivamo:

$$2 \cdot b = c - 2 \cdot a$$
$$c = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$

19. $4 \cdot b^2 + 12 \cdot b$. Imamo redom:

$$7 \cdot b^2 + 6 \cdot b - 3 \cdot b \cdot (b - 2) = 7 \cdot b^2 + 6 \cdot b - 3 \cdot b^2 + 6 \cdot b = 4 \cdot b^2 + 12 \cdot b.$$

20. $-\frac{7}{2}$. Pomnožimo zadanu jednadžbu najmanjim zajedničkim višekratnikom brojeva 3 i 5, tj. s 15. Imamo redom:

$$5 \cdot (x - 1) + 1 \cdot 15 = 3 \cdot (x + 1)$$
$$5 \cdot x - 5 + 15 = 3 \cdot x + 3$$
$$5 \cdot x - 3 \cdot x = 3 + 5 - 15$$
$$2 \cdot x = -7$$

Odavde dijeljenjem s 2 dobivamo $x = -\frac{7}{2}$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U STUDENOM 2012. – OSNOVNA RAZINA

21. $x < -\frac{11}{5}$ **ili** $x \in \left\langle -\infty, -\frac{11}{5} \right\rangle$. Imamo redom:

$$4 \cdot x - 9 \cdot x > 11$$
$$(-5) \cdot x > 11$$

Dijeljenjem s (–5) mijenja se znak nejednakosti, pa slijedi $x < -\frac{11}{5}$, odnosno, ekvivalentno, $x \in \left\langle -\infty, -\frac{11}{5} \right\rangle$.

22. **1 726; 6**. U zadanu formulu najprije uvrstimo $s = 3$ i $b = 35$, pa dobivamo:

$$C = 342 \cdot 3 + 20 \cdot 35 = 1\,026 + 700 = 1\,726 \text{ kn.}$$

Nadalje, uvrstimo li u zadanu formulu $C = 2\,892$ i $b = 42$, dobit ćemo linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom:

$$2\,892 = 342 \cdot s + 20 \cdot 42.$$

Riješimo je na uobičajen način:

$$2\,892 = 342 \cdot s + 20 \cdot 42,$$
$$2\,892 = 342 \cdot s + 840,$$
$$342 \cdot s = 2\,892 - 840,$$
$$342 \cdot s = 2\,052.$$

Odatle dijeljenjem s 342 slijedi $s = 6$.

23. **–1; 7 ili 7; –1.** Broj 16 je kvadrat točno dvaju cijelih brojeva: –4 i 4. Stoga mora vrijediti ili $x - 3 = -4$ ili $x - 3 = 4$. Iz prve se jednadžbe dobije $x = -1$, a iz druge $x = 7$. Dakle, sva rješenja polazne jednadžbe su brojevi –1 i 7.

24. **Vidjeti Sliku 1. i Sliku 2.** Krivulja $y = -x + 3$ je pravac. Za crtanje bilo kojega pravca dovoljno je odrediti koordinate bilo kojih dviju različitih točaka toga pravca. Stoga uzmimo npr. $x = 0$ i $x = 1$, pa izračunajmo pripadne vrijednosti varijable y. Dobivamo:

x	0	1
y	$-0 + 3 = 0 + 3 = 3$	$-1 + 3 = 2$

Dakle, u prvi pravokutni koordinatni sustav treba ucrtati točke $T_1 = (0, 3)$ i $T_2 = (1, 2)$, te ih spojiti jednim pravcem. Dobiva se graf prikazan na Slici 1.

Druga krivulja je parabola. Svaka parabola je jedinstveno određena zadavanjem bilo kojih triju različitih točaka te parabole. Najpodesnije je izabrati sjecišta s osi apscisa, te tjeme parabole. Odredimo zasebno navedene točke.

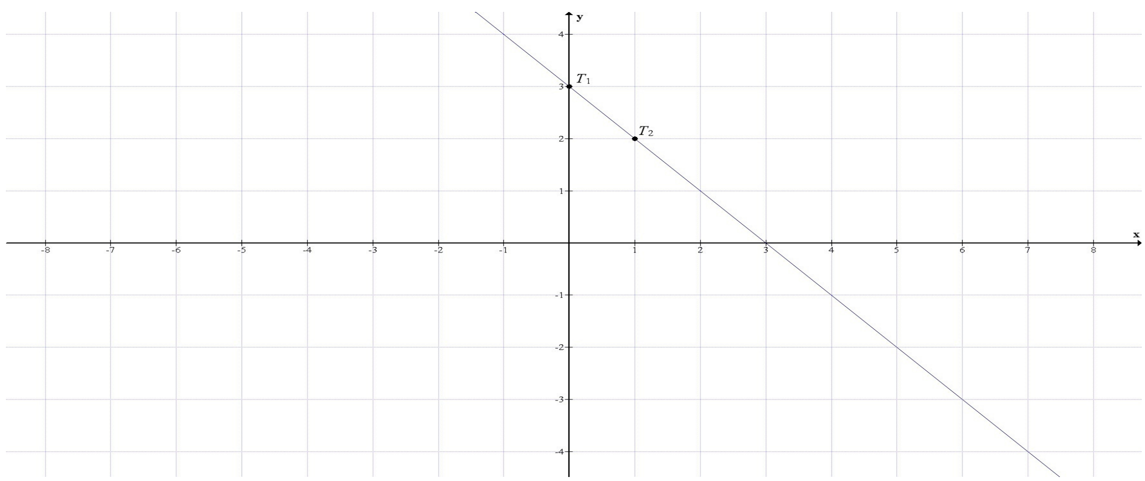
Sjecišta s osi apscisa dobijemo tako da u jednadžbu parabole uvrstimo $y = 0$, te riješimo dobivenu jednadžbu po nepoznanici x. Imamo:

$$x^2 - 4 = 0,$$
$$x^2 = 4.$$

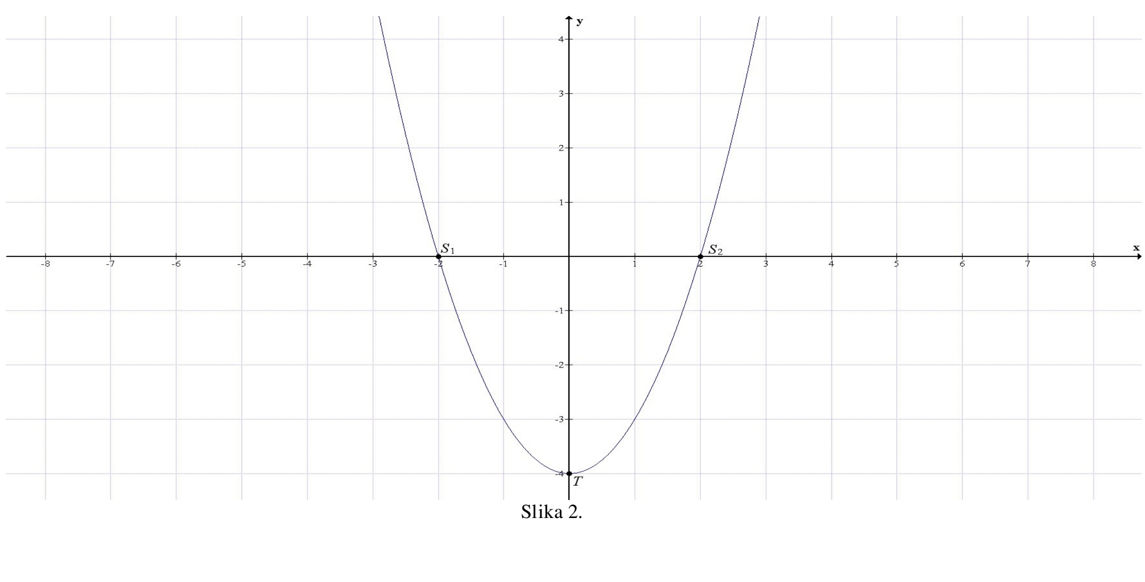
Broj 4 kvadrat je točno dvaju cijelih brojeva: –2 i 2. Stoga jednadžba $x^2 = 4$ ima točno dva različita realna rješenja: $x_1 = -2$ i $x_2 = 2$. Dakle, tražena parabola prolazi točkama $S_1 = (-2, 0)$ i $S_2 = (2, 0)$.

Preostaje odrediti tjeme parabole. U tu svrhu prisjetimo se da svaka parabola čija jednadžba ima oblik $y = a \cdot x^2 + c$ ima tjeme u točki $T = (0, c)$. Stoga je tjeme tražene parabole točka $T = (0, -4)$.

Na taj smo način odredili tri različite točke parabole. Tražena krivulja prikazana je na Slici 2.



Slika 1.



Slika 2.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U STUDENOM 2012. – OSNOVNA RAZINA

25. **1.) 35 – 3 · *a* ili –3 · *a* + 35**. Pomnožimo prvu jednadžbu sustava s 5, a drugu s (–3). Dobivamo:

$$\begin{cases} 10\cdot x+15\cdot y=35 \\ -9\cdot x-15\cdot y=-3\cdot a \end{cases}$$

Odatle zbrajanjem jednadžbi dobivamo $x = 35 - 3 \cdot a$ ili $x = -3 \cdot a + 35$.

2.) 3. Podijelimo zadanu jednadžbu s 200. Dobivamo:

$$10^{1-x}=\frac{2}{200}$$
$$10^{1-x}=\frac{1}{100}$$
$$10^{1-x}=\frac{1}{10^2}$$
$$10^{1-x}=10^{-2}$$

Uspoređivanjem eksponenata slijedi $1 - x = -2$, a odatle je $x = 3$.

26. **1.) 53°54'**. Neka je α tražena mjera kuta. Promatrani jednakokračni trokut ima tri kuta. Mjere dvaju od njih (onih uz osnovicu) jednake su α, dok je mjera trećega (kuta nasuprot osnovici) 72°12'. Zbroj svih triju mjera treba biti jednak 180°, pa dobivamo linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom:

$$2 \cdot \alpha + 72°12' = 180°,$$

tj.

$$2 \cdot \alpha = 107°48'.$$

Odatle dijeljenjem s 2 (pri čemu zasebno dijelimo stupnjeve, a zasebno minute) slijedi $\alpha = 53.5°24'' = 53° + 0.5° + 24' = 53° + (0.5 \cdot 60)' + 24' = 53° + 30' + 24' = 53°54''$.

2.) $66\cdot\sqrt{14}$**.** Izračunajmo najprije duljinu visine povučene na osnovicu. Ako je $b = 25$ cm, a $a = 22$ cm, onda je duljina visine na osnovicu jednaka

$$v=\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{25^2-\left(\frac{22}{2}\right)^2}=\sqrt{25^2-11^2}=\sqrt{625-121}=\sqrt{504}=\sqrt{36\cdot 14}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{14}=6\cdot\sqrt{14}\ \text{cm}.$$

Stoga je tražena površina jednaka:

$$P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot v=\frac{1}{2}\cdot 22\cdot 6\cdot\sqrt{14}=11\cdot 6\cdot\sqrt{14}=66\cdot\sqrt{14}\ \text{cm}^2.$$

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U STUDENOM 2012. – OSNOVNA RAZINA

27. **1.) 55.25.** 2 dana imaju ukupno 2 · 24 = 48 sati, dok je 15 minuta = $\frac{15}{60}=\frac{1}{4}=0.25$ sati. Stoga je traženo vrijeme jednako 48 + 7 + 0.25 = 55.25 sati.

2.) 13 000. 1 cm ima 10 mm, pa 1 cm^3 ima 10^3 = 1 000 mm^3. Dakle, 13 cm^3 ima 13 · 1 000 = = 13 000 mm^3.

3.) ≈ 133.91. Preračunajmo najprije zadanu brzinu u brzinu iskazanu u m/s:

$$248\text{ km/h} = \frac{248\ 000\text{ m}}{60\cdot 60\text{ s}} = \frac{248\ 000\text{ m}}{3\ 600\text{ s}} = \frac{620}{9}\text{ m/s}.$$

Brzina iskazana u m/s i brzina iskazana u čvorovima su upravno razmjerne veličine, pa možemo formirati shemu:

$$\begin{array}{lc} \uparrow\ 1\text{ čvor} & 0.51444\text{ m/s}\ \uparrow \\ x\text{ čvorova} & \frac{620}{9}\text{ m/s} \end{array}$$

Primjenom jednostavnoga trojnoga pravila dobivamo razmjer:

$$x : 1 = \frac{620}{9} : 0.51444 .$$

Odatle odmah slijedi $x=\frac{620}{9\cdot 0.51444}=\frac{620}{4.62996}=133.91044415 \approx 133.91$ čvor.

28. **1.) 50.00.** Za knjigu mase 325 g plaća se osnovna cijena od 24.50 kn jer ta masa pripada intervalu $\langle 250, 500]$. Podijelimo li 325 s 20, dobit ćemo količnik 16 i ostatak 5. To znači da ćemo platiti još 17 dopunskih cijena za Sjevernu Ameriku, odnosno još 17 · 1.5 = 25.50 kn. Dakle, ukupno ćemo platiti 24.50 + 25.50 = 50.00 kn.

2.) 1 120; 1 140. Neka je m masa poslane knjige. Osnovne cijene slanja knjiga su jednake, pa razlika u cijeni nastaje isključivo plaćanjem dopunskih cijena. Na svakih 20 grama mase nastaje razlika u cijeni čiji je iznos 1.70 – 1 = 0.70 kn. Podijelimo li 39.90 s 0.70 dobit ćemo 57 i ostatak 0. Dakle, doplatili smo ukupno 57 dopunskih cijena, što znači da masa m pripada intervalu čije su granice 56 · 20 = 1 120 g (dotična masa se ne uračunava jer za knjigu mase točno 1 120 g plaćamo točno 56 dopunskih cijena) i 57 · 20 = 1 140 g. Dakle, $m \in \langle 1\ 120, 1\ 140]$.

pripremio:

mr.sc. Bojan Kovačić, viši predavač