TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U SVIBNJU 2010. – OSNOVNA RAZINA

I. ZADATCI VIŠESTRUKOGA IZBORA

1. **A.** Svih pet zadanih razlomaka svedemo na najmanji zajednički nazivnik. Taj nazivnik je najmanji zajednički višekratnik brojeva 2 i 3, tj. *NZV*(2, 3) = 6. Dobijemo:

$$\left(-\frac{15}{6}\right),\ \left(-\frac{21}{6}\right),\ \left(-\frac{10}{6}\right),\ \left(-\frac{9}{6}\right) \text{ i } \left(-\frac{4}{6}\right).$$

Usporedimo brojnike dobivenih razlomaka, pa zaključujemo da je jedino –21 strogo manji od –15.

2. **B.** Od 18:05 sati najprije oduzmemo 5 minuta. Tako dobijemo 18:00 sati. Preostaje od 18:00 sati (= 17 sati i 60 minuta) oduzeti preostalih 18 – 5 = 13 minuta. Tako dobijemo vrijeme: 17 sati i 60 – 13 = 47 minuta.

3. **D.** Imamo redom:

$$\frac{5}{6}-\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{6}-\frac{1\cdot 2}{6\cdot 3}=\frac{5}{6}-\frac{2}{18}=\frac{15}{18}-\frac{2}{18}=\frac{13}{18}.$$

4. **C.** Masa 20 olovaka je ukupno $\frac{256}{20}=\frac{64}{5}$ puta manja od mase 256 olovaka. Stoga je tražena masa jednaka:

$$4.24:\frac{64}{5}=4.24\cdot\frac{5}{64}=\frac{21.2}{64}=\frac{212}{640}=\frac{53}{160}=0.33125\text{ kg}=0.33125\cdot 1\,000\text{ g}=331.25\text{ g}.$$

5. **B.** Imamo redom:

$$\left(\frac{3\cdot a+1}{3}\right)^2=\frac{(3\cdot a+1)^2}{3^2}=\frac{(3\cdot a)^2+2\cdot(3\cdot a)\cdot 1+1^2}{9}=\frac{3^2\cdot a^2+6\cdot a+1}{9}=\frac{9\cdot a^2+6\cdot a+1}{9}.$$

6. **B.** Označimo položaj luke s *L*. Krećući se prema istoku, brod je prevalio ukupno s_1 = 12 km/h · · 2 h = 24 km i stigao je u točku *A*. Krećući se prema sjeveru iz točke *A* brod je prevalio ukupno s_2 = 14 km/h · 5 h = 70 km i stigao u točku *B*. Trokut *LAB* je pravokutan s pravim kutom u vrhu *A*. Duljine njegovih kateta su $a = s_1$ = 24 km i $b = s_2$ = 70 km. Tražena udaljenost jednaka je duljini stranice *BL*, odnosno duljini hipotenuze trokuta *LAB*. Koristeći Pitagorin poučak dobijemo:

$$|LB|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{24^2+70^2}=\sqrt{576+4900}=\sqrt{5476}=74\text{ km}.$$

7. **D.** Izračunamo redom:

$$f(-1)=4\cdot(-1)-(-1)^2=(-4)-1=-5,$$
$$f(2)=4\cdot 2-2^2=8-4=4,$$
$$f(3)=4\cdot 3-3^2=12-9=3.$$

Pripadna tablica je posljednja od četiriju ponuđenih tablica.

8. C. Izračunamo redom:

$$\frac{\sqrt{28}}{3} \approx \frac{5.2915026}{3} = 1.7638342\,.$$

Zaokružimo li ovaj broj na tri decimale, dobit ćemo 1.764 (posljednju decimalu zaokružujemo naviše jer je prva sljedeća decimala (8) strogo veća od 5.).

9. A. Graf funkcije f je pravac p čija je jednadžba $y = 2 \cdot x - 4$. Zapišimo tu jednadžbu u segmentnom obliku jer se iz toga oblika odmah mogu očitati obje tražene točke:

$$(-2)\cdot x + y = -4 \quad / : (-4)$$
$$\frac{(-2)\cdot x}{(-4)} + \frac{y}{(-4)} = 1$$
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{(-4)} = 1$$

Odatle slijedi da je sjecište pravca p s osi x točka $A(2.\ 0)$, a sjecište pravca p s osi y točka $B(0, -4)$.

Napomena: Ako je jednadžba pravca u segmentnom obliku $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$, onda taj pravac siječe os x u točki $S_1(m, 0)$, a os y u točki $S_2(0, n)$. Vrijedi i obrat: ako pravac siječe os x u točki $S_1(m, 0)$, a os y u točki $S_2(0, n)$, onda je njegova jednadžba u segmentnom obliku $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$.

10. C. ***Napomena*: U izračunu pretpostavljamo da jedna godina ima 365 dana**. U 70 godina ljudskoga života ima ukupno $70 \cdot 365$ dana, pa u tih $70 \cdot 365$ dana ljudsko srce otkuca približno

$$n = 70 \cdot 365 \cdot 100\,000 = 2\,555\,000\,000 = 2.555 \cdot 1\,000\,000\,000 = 2.555 \cdot 10^9 \approx 2.6 \cdot 10^9 \text{ puta.}$$

11. D. Graf kvadratne funkcije očito ne siječe os x, što znači da pripadna kvadratna jednadžba nema realnih rješenja. Odatle slijedi $D < 0$. Nadalje, iz oblika grafa kvadratne funkcije (parabola s otvorom prema dolje) zaključujemo da je vodeći koeficijent $a < 0$.

12. C. Imamo redom:

$$2 \cdot s = a + b + c$$
$$a = 2 \cdot s - b - c.$$

13. A. Iz podatka da je Martina za $n = 3$ tjedna platila ukupno $c = 2\,092$ kn dobivamo jednadžbu:

$$2\,092 = t \cdot 3 + d.$$

Iz podatka da je Maja za $n = 5$ tjedana platila ukupno $c = 3\,412$ kn dobivamo jednadžbu:

$$3\,412 = t \cdot 5 + d.$$

Pomnožimo prvu jednadžbu s (–5), a drugu s 3. Dobivamo:

$$-10\,460 = t \cdot (-15) + (-5) \cdot d,$$
$$10\,236 = t \cdot 15 + 3 \cdot d.$$

Zbrajanjem tih dviju jednadžbi dobijemo:

$$-224 = (-2) \cdot d,$$

a odatle dijeljenjem s (–2) slijedi da je traženi iznos jednak $d = 112$ kn.

14. A. Za $x \neq \pm 2$ primjenom formule za razliku kvadrata dobijemo da je zadani izraz jednak:

$$\frac{2 \cdot x}{x^2 - 2^2} - \frac{1}{x-2} = \frac{2 \cdot x}{(x-2)\cdot(x+2)} - \frac{1}{x-2} = \frac{2 \cdot x - 1 \cdot (x+2)}{(x-2)\cdot(x+2)} = \frac{2 \cdot x - x - 2}{(x-2)\cdot(x+2)} = \frac{x-2}{(x-2)\cdot(x+2)} = \frac{1}{x+2}$$

15. D. Označimo s x ukupan broj pakiranja od 330 g, a s y ukupan broj pakiranja od 500 g. Iz podatka da je ukupan broj svih pakiranja jednak 140 dobivamo jednadžbu:

$$x + y = 140.$$

Nadalje, ukupna masa svih pakiranja od 330 g iznosi $x \cdot 330$ g, a ukupna masa svih pakiranja od 500 g iznosi $y \cdot 500$ g. Iz podatka da ukupna masa svih pakiranja iznosi 55 550 g dobivamo jednadžbu:

$$x \cdot 330 + y \cdot 500 = 55\,550.$$

Iz prve jednadžbe je

$$y = 140 - x,$$

pa uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobijemo:

$$x \cdot 330 + (140 - x) \cdot 500 = 55\,550,$$
$$x \cdot 330 + 140 \cdot 500 - 500 \cdot x = 55\,550,$$
$$x \cdot (330 - 500) = 55\,550 - 140 \cdot 500,$$
$$(-170) \cdot x = 55\,550 - 70\,000,$$
$$(-170) \cdot x = (-14\,450).$$

Odatle dijeljenjem sa (–170) dobijemo $x = 85$. Dakle, trgovac je dobio 85 manjih pakiranja.

16. B. Neka je s tražena svota. Za kupnju bilježnica Marin je izdvojio ukupno $\frac{1}{3} \cdot s$ kuna, pa mu je nakon kupnje bilježnica preostalo ukupno

$$s_1 = s - \frac{1}{3} \cdot s = \frac{3 \cdot s - 1 \cdot s}{3} = \frac{2 \cdot s}{3} = \frac{2}{3} \cdot s \text{ kuna.}$$

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U SVIBNJU 2010. – OSNOVNA RAZINA

Za kupnju olovaka Marin je izdvojio ukupno $\frac{1}{4}\cdot s_1=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot s\right)=\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot s=\frac{1}{6}\cdot s$ kuna, pa mu je nakon kupnje olovaka preostalo ukupno

$$s_2=s_1-\frac{1}{4}\cdot s_1=\frac{2}{3}\cdot s-\frac{1}{6}\cdot s=\frac{4}{6}\cdot s-\frac{1}{6}\cdot s=\frac{4-1}{6}\cdot s=\frac{3}{6}\cdot s=\frac{1}{2}\cdot s \text{ kuna.}$$

Polovicu toga iznosa Marin je potrošio za kupnju pernice, pa mu je nakon kupnje pernice preostalo ukupno

$$s_3=s_2-\frac{1}{2}\cdot s_2=\frac{1}{2}\cdot s-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot s\right)=\frac{1}{2}\cdot s-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot s=\frac{1}{2}\cdot s-\frac{1}{4}\cdot s=\frac{2}{4}\cdot s-\frac{1}{4}\cdot s=\frac{2-1}{4}\cdot s=\frac{1}{4}\cdot s \text{ kuna.}$$

Prema uvjetu zadatka, taj iznos treba biti jednak 18 kuna. Stoga dobivamo jednadžbu:

$$\frac{1}{4}\cdot s=18\,.$$

Množenjem te jednadžbe s 4 slijedi $s = 72$ kn.

II. ZADATCI KRATKIH ODGOVORA

17. 80. Označimo traženi broj s x. Iz zadanih podataka dobiva se jednadžba:

$$\frac{8}{100}\cdot x=6.4\,.$$

Odavde je

$$x=6.4:\frac{8}{100}=6.4\cdot\frac{100}{8}=\frac{6.4\cdot 100}{8}=\frac{640}{8}=80\,.$$

18. –6. Uvrstimo drugu jednadžbu sustava u prvu, pa dobijemo:

$$\begin{gathered}x=2\cdot(2\cdot x+7)+4,\\ x=4\cdot x+14+4,\\ x-4\cdot x=18,\\ (-3)\cdot x=18.\end{gathered}$$

Odatle dijeljenjem s (–3) slijedi $x = -6$.

19. 20. Neka je $š$ tražena masa šećera (iskazana u dekagramima). Iz zadanih podataka postavljamo razmjer:

$$\check{s} : 15 = 4 : 3.$$

Odatle slijedi:

$$3 \cdot \check{s} = 15 \cdot 4,$$
$$3 \cdot \check{s} = 60.$$

Dijeljenjem s 3 dobije se $\check{s} = 20$.

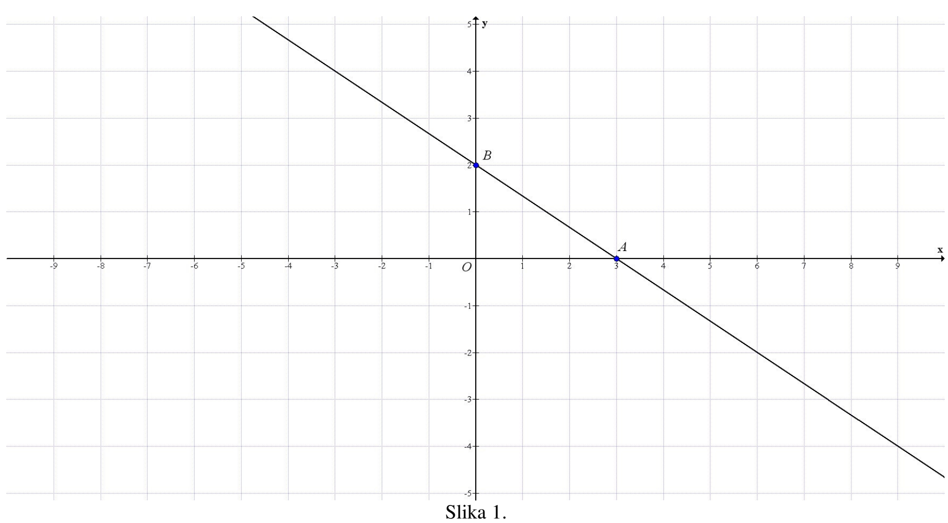
20. $\frac{3402}{3125} = 1.08864$. Imamo redom:

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{18}{25}\right)^2 \cdot 6.3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{18^2}{25^2} \cdot \frac{63}{10} = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{63}{10}\right) \cdot \frac{18^2}{25^2} = \frac{21}{10} \cdot \frac{18^2}{25^2} = \frac{6804}{6250} = \frac{3402}{3125} = 1.08864 .$$

21. Vidjeti Sliku 1. Za crtanje bilo kojega pravca dovoljno je odrediti koordinate bilo kojih dviju njegovih točaka. Prevedimo jednadžbu zadanoga pravca u segmentni oblik:

$$2 \cdot x + 3 \cdot y = 6 \quad / : 6$$
$$\frac{2 \cdot x}{6} + \frac{3 \cdot y}{6} = 1$$
$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

Analogno kao u 9. zadatku zaključujemo da zadani pravac prolazi točkama $A(3,\ 0)$ i $B(0,\ 2)$. Ucrtamo te dvije točke u priloženi pravokutni koordinatni sustav u ravnini, te ih spojimo jednim pravcem.



Slika 1.

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U SVIBNJU 2010. – OSNOVNA RAZINA

22. $x_1 = \sqrt{3}+1,\ x_2 = \sqrt{3}-1$. Imamo redom:

$$x_{1,2} = \frac{2\cdot\sqrt{3} \pm \sqrt{\left(2\cdot\sqrt{3}\right)^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{2\cdot\sqrt{3} \pm \sqrt{2^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2 - 8}}{2} = \frac{2\cdot\sqrt{3} \pm \sqrt{4\cdot 3 - 8}}{2} =$$
$$= \frac{2\cdot\sqrt{3} \pm \sqrt{12-8}}{2} = \frac{2\cdot\sqrt{3} \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{2\cdot\sqrt{3} \pm 2}{2} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{2} \pm \frac{2}{2} = \sqrt{3} \pm 1 \Rightarrow x_1 = \sqrt{3}+1,\ x_2 = \sqrt{3}-1$$

23. Duljina iskazana u stopama i duljina iskazana u metrima su upravno razmjerne veličine s koeficijentom upravne razmjernosti k = 0.3048. Stoga je duljina od 5.8 stopa jednaka duljini od 0.3048 · 5.8 = 1.76784 metara, a duljina od 1.40208 metara jednaka duljini od $\frac{1.40208}{0.3048}$ = 4.6 stopa. Dakle, konačno imamo:

5.8 stopa = **1.76784 metara,**
4.6 stopa = 1.40208 metara.

24. $\frac{168}{5} = 33.6$ **; 168**. Izračunajmo najprije duljinu dužine $\overline{EF}$. Površina pravokutnoga trokuta CEF jednaka je:

$$P_{CEF} = \frac{\left|\overline{CE}\right|\cdot\left|\overline{EF}\right|}{2} \text{ cm}^2.$$

Odavde je

$$2\cdot P_{CEF} = \left|\overline{CE}\right|\cdot\left|\overline{EF}\right|,$$
$$\left|\overline{EF}\right| = \frac{2\cdot P_{CEF}}{\left|\overline{CE}\right|}$$

U posljednju jednakost uvrstimo P_{CEF} = 12 i $\left|\overline{CE}\right|$ = 6, pa dobijemo:

$$\left|\overline{EF}\right| = \frac{2\cdot 12}{5} = \frac{24}{5} \text{ cm}.$$

Prema uvjetu zadatka, duljina stranice $\overline{AB}$ je sedam puta veća od duljine katete $\overline{EF}$, pa slijedi:

$$\left|\overline{AB}\right| = 7\cdot\left|\overline{EF}\right| = 7\cdot\frac{24}{5} = \frac{168}{5} = 33.6 \text{ cm}.$$

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U SVIBNJU 2010. – OSNOVNA RAZINA

Površina paralelograma $ABCD$ jednaka je umnošku duljine bilo koje stranice toga paralelograma i duljine pripadne visine na tu stranicu. Uočimo da je dužina $\overline{CE}$ visina iz vrha C povučena na stranicu $\overline{AB}$. Prema tome, površina paralelograma $ABCD$ jednaka je:

$$P_{ABCD} = \left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{CE}\right| = \frac{168}{5} \cdot 5 = 168 \text{ cm}^2.$$

25. 1.) $-\frac{4}{3}$. Iz zadane jednadžbe slijedi:

$$\begin{aligned} 2 \cdot x + 2 + 4 &= 2 - x, \\ 2 \cdot x + x &= 2 - 2 - 4, \\ 3 \cdot x &= -4. \end{aligned}$$

Odatle dijeljenjem s 3 slijedi $x = -\frac{4}{3}$.

2.) $x < -\frac{9}{4}$ **ili** $x \in \left\langle -\infty, -\frac{9}{4} \right\rangle$. Pomnožimo zadanu nejednadžbu najmanjim zajedničkim višekratnikom svih razlomaka koji se pojavljuju u njoj, tj s $NZV(6, 2) = 6$. Dobivamo:

$$\begin{aligned} 1 \cdot (5 \cdot x - 3) - 3 \cdot (3 \cdot x) &> 1 \cdot 6, \\ 5 \cdot x - 3 - 9 \cdot x &> 6, \\ 5 \cdot x - 9 \cdot x &> 6 + 3, \\ (-4) \cdot x &> 9. \end{aligned}$$

Dijeljenjem ove nejednadžbe s (–4), pri čemu se znak nejednakosti mijenja iz > u <, slijedi $x < -\frac{9}{4}$, odnosno, zapisano u obliku intervala, $x \in \left\langle -\infty, -\frac{9}{4} \right\rangle$.

26. 1.)10; 2.) 15. Neka je c cijena (iskazana u kunama) jedne čokolade prije poskupljenja. Tada je cijena jedne čokolade nakon poskupljenja

$$c_1 = c + \frac{25}{100} \cdot c = c + \frac{1}{4} \cdot c = c \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4} \cdot c \text{ kuna.}$$

Za iznos od 120 kn se prije poskupljenja moglo kupiti ukupno $n = \frac{120}{c}$ čokolada, dok se nakon poskupljenja može kupiti ukupno $n_1 = \frac{120}{c_1} = \frac{120}{\frac{5}{4} \cdot c} = \frac{120 \cdot 4}{5 \cdot c} = \frac{24 \cdot 4}{c} = \frac{96}{c}$ čokolada. Prema uvjetu zadatka, razlika brojeva n i n_1 treba biti jednaka 2. Stoga dobivamo jednadžbu:

$$\frac{120}{c}-\frac{96}{c}=2,$$

odnosno

$$\frac{24}{c}=2.$$

Pomnožimo li tu jednadžbu s c (što smijemo jer je cijena jedne čokolade sigurno strogo pozitivan realan broj), dobit ćemo:

$$24 = 2 \cdot c,$$

a odavde dijeljenjem s 2 dobijemo $c = 12$. Dakle, cijena jedne čokolade prije poskupljenja iznosila je $c = 12$ kn, dok je cijena jedne čokolade nakon poskupljenja

$$c_1=\frac{5}{4}\cdot c=\frac{5}{4}\cdot 12 = 15 \text{ kuna.}$$

Prije poskupljenja se za 120 kuna moglo kupiti ukupno $n=\frac{120}{c}=\frac{120}{12}=10$ čokolada, dok se nakon poskupljenja za isti iznos može kupiti ukupno $n_1=\frac{96}{c}=\frac{96}{12}=8$ čokolada.

27. **1.) 600, 250.** Svaki pomak udesno ima duljinu 100 metara, dok svaki pomak prema gore ima duljinu 50 metara. Od kuće do točke K imamo ukupno 6 pomaka udesno i 5 pomaka prema gore. Stoga su koordinate točke K:

$$K(6 \cdot 100, 5 \cdot 50),$$

tj. $K(600, 250)$.

2.) 1 400. Od kuće do škole Karlo je napravio ukupno 10 pomaka udesno i 8 pomaka prema gore. Stoga je tražena duljina Karlova puta jednaka

$$s = 10 \cdot 100 + 8 \cdot 50 = 1\,000 + 400 = 1\,400 \text{ metara.}$$

3.) 122.8. Dovoljno je promatrati samo put od točke K do škole jer su oboje hodajući od kuće do točke K prevalili putove jednakih duljina. Od točke K do škole Karlo je prevalio put koji se sastoji od 4 pomaka udesno i 3 pomaka prema gore, pa je duljina toga puta jednaka

$$s_1 = 4 \cdot 100 + 3 \cdot 50 = 400 + 150 = 550 \text{ metara.}$$

Od točke K do škole Karmela je prevalila put čija je duljina jednaka duljini hipotenuze pravokutnoga trokuta kojemu katete imaju duljine $a = 4 \cdot 100 = 400$ metara i $b = 3 \cdot 50 = 150$ metara. Primjenom Pitagorina poučka dobijemo da je duljina toga puta jednaka

$$s_2 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{400^2 + 450^2} = \sqrt{160\ 000 + 22\ 500} = \sqrt{182\ 500} = \sqrt{2500 \cdot 73} = \sqrt{2500} \cdot \sqrt{73}$$
$$s_2 = 50 \cdot \sqrt{73} \approx 427.2 \text{ metara}$$

Stoga je razlika duljina Karlova puta i Karmelina puta jednaka

$$\Delta s = s_1 - s_2 \approx 550 - 427.2 = 122.8 \text{ metara}$$

28. **1.) 20.** Obujam oblika leda jednak je

$$V_{led} = 3.5 \cdot 3 \cdot 2 = 21 \text{ cm}^3.$$

Prema uvjetu zadatka, obujam leda dobije se tako da se početni obujam vode poveća za 5%. Označimo li s V početni obujam vode, dobivamo jednadžbu:

$$V + \frac{5}{100} \cdot V = 21 .$$

Odavde je

$$V \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 21$$
$$V \cdot \frac{100+5}{100} = 21$$
$$V \cdot \frac{105}{100} = 21$$
$$V = 21 : \frac{105}{100}$$
$$V = \frac{21 \cdot 100}{105}$$
$$V = 20$$

Dakle, za jedan promatrani oblik leda potrebno je ukupno 20 cm^3 vode.

2.) 50. Označimo traženi broj s n. Jedna litra, tj. 1 dm^3 vode jednak je obujmu od $1 \cdot 1\ 000 = 1\ 000$ cm^3 vode. Iz **1.)** znamo da je 1 oblik leda, tj. za 21 cm^3 leda potrebno ukupno 20 cm^3 vode. Stoga je traženi broj jednak

$$n = \frac{1\ 000}{20} = 50 .$$