TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

# ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

# RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U SVIBNJU 2010. – VIŠA RAZINA

## I. ZADATCI VIŠESTRUKOGA IZBORA

1. **C.** Broj –1.5 je racionalan broj (zapisan u decimalnom obliku), ali ne i cijeli broj, pa ne pripada skupu cijelih brojeva **Z**. Broj $\sqrt{2}$ je iracionalan broj (ne može se zapisati u obliku razlomka), pa ne pripada skupu racionalnih brojeva **Q**. Analogna tvrdnja vrijedi i za broj π: riječ je o iracionalnom broju, pa taj broj ne pripada skupu racionalnih brojeva **Q**, a samim tim niti skupu prirodnih brojeva **N** koji je pravi podskup skupa **Q**. Broj $\frac{1}{2}$ je racionalan broj, pa pripada skupu svih racionalnih brojeva **Q**, a samim tim i skupu svih realnih brojeva **R** koji je pravi nadskup skupa svih racionalnih brojeva.

2. **A.** Zadanu mjeru kuta iskazanu u stupnjevima pretvaramo u radijane tako da je pomnožimo s razlomkom $\frac{\pi}{180}$ (jer vrijedi jednakost 180° = π radijana). Stoga je tražena mjera jednaka

$$162\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{162}{180}\cdot\pi=\frac{9}{10}\cdot\pi \text{ radijana.}$$

3. **B.** Imamo redom:

$$\begin{gathered}x-[3\cdot x-5-x]-8=3\cdot x+6-1\\ x-3\cdot x+5+x-8=3\cdot x+6-1\\ x-3\cdot x+x-3\cdot x=6-1-5+8\\ (-4)\cdot x=8\end{gathered}$$

Odatle dijeljenjem s (–4) dobijemo $x = -2$.

4. **A.** Traženu duljinu stranice $b$ izračunat ćemo koristeći kosinusov poučak:

$$b=\sqrt{a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta}=\sqrt{12^2+9^2-2\cdot 12\cdot 9\cdot\cos 82°17'}$$
$$b\approx\sqrt{144+81-216\cdot 0{,}13427444507}\approx\sqrt{195{,}99671986416}\approx 13{,}9998828518$$

Dakle, $b \approx 14$ cm.

5. **A**. Jedina nepoznata veličina potrebna za određivanje jednadžbe kružnice jest kvadrat duljine polumjera kružnice. Budući da kružnica prolazi ishodištem $O$ pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini, duljina njezina polumjera jednaka je udaljenosti ishodišta od središta kružnice, tj. udaljenosti točaka $S$ i $O$. Stoga je kvadrat duljine polumjera kružnice jednak kvadratu udaljenosti točaka $S$ i $O$:

$$r^2=|SO|^2=[0-(-2)]^2+(0-3)^2=2^2+(-3)^2=4+9=13$$

Stoga je tražena jednadžba kružnice:

$$k\ldots\ [x-(-2)]^2+(y-3)^2=13,$$

odnosno

$$k\ldots\ (x+2)^2+(y-3)^2=13.$$

**6.** **B.** Neka je $h$ visina planine (iskazana u metrima). Temperature zraka na svakih 100 metara visine, počevši s temperaturom na razini mora, tvore niz 26, 26 – 0.7, (26 – 0.7) – 0.7, [(26 – 0.7) – 0.7] – – 0.7, …, i općenito:

$$a_{\frac{n}{100}}=26-\frac{n}{100}\cdot 0.7\text{ , za } n=0,\ 100,\ 200,\ 300,\ \ldots$$

Mi tražimo $h \in \mathbf{N}$ takav da vrijedi jednakost

$$a_{\frac{h}{100}}=14.8\,.$$

Prema izrazu za član $a_{\frac{n}{100}}$ dobivamo jednadžbu:

$$26-\frac{h}{100}\cdot 0.7=14.8\,.$$

Odatle redom imamo:

$$-\frac{h}{100}\cdot 0.7=14.8-26$$
$$-\frac{h}{100}\cdot 0.7=-11.2\quad /\cdot 100$$
$$(-0.7)\cdot h=(-1\,120)$$

Dijeljenjem posljednje jednadžbe s (–0.7) dobijemo $h$ = 1 600. Stoga je visina planine 1 600 m.

**7.** **D.** Neka je $a$ duljina stranice kvadrata. Izračunajmo zasebno svaku pojedinu površinu kao funkciju varijable $a$. Četverokut čija je površina $P$ je četverokut s okomitim dijagonalama (jer su te dijagonale usporedne s dvjema susjednim stranicama kvadrata, a te stranice su međusobno okomite) i obje te dijagonale imaju duljinu $a$. Stoga je površina $P$ jednaka

$$P=\frac{1}{2}\cdot d_1\cdot d_2=\frac{1}{2}\cdot a\cdot a=\frac{1}{2}\cdot a^2\ \text{kv.jed.}$$

Nadalje, trokut čija je površina $Q$ je trokut kojemu su duljina jedne stranice (označimo je s $a_1$) i duljina visine na tu stranicu jednaki duljini stranice kvadrata. (Štoviše, jedna stranica trokuta se poklapa sa stranicom kvadrata.) Stoga je površina $Q$ jednaka

$$Q = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot v_{a_1} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{1}{2} \cdot a^2 \text{ kv. jed.}$$

Konačno, četverokut čija je površina $R$ je usporednik (paralelogram). Duljina jedne njegove stranice (označimo je s $a_2$) jednaka je polovici duljine stranice kvadrata, a duljina visine na tu stranicu jednaka je duljini stranice kvadrata. (Štoviše, uočena visina usporednika se poklapa s jednom stranicom kvadrata.). Stoga je površina $R$ jednaka

$$R = a_2 \cdot v_{a_2} = \left(\frac{1}{2} \cdot a\right) \cdot a = \frac{1}{2} \cdot a^2 \text{ kv. jed.}$$

Iz dobivenih izračuna zaključujemo da vrijedi jednakost:

$$P = Q = R = \frac{1}{2} \cdot a^2 \text{ kv. jed.}$$

**8. C.** Bilo koja logaritamska funkcija definirana je isključivo za strogo pozitivne vrijednosti logaritmanda. Stoga izraz koji je logaritmand mora biti strogo veći od nule. Tako dobivamo nejednadžbu:

$$2 \cdot x + 4 > 0,$$

odnosno

$$2 \cdot x > -4.$$

Dijeljenjem ove nejednadžbe s 2 (pri čemu se znak nejednakosti neće promijeniti) dobijemo $x > -2$. Taj skup tvore svi realni brojevi strogo veći od $-2$, pa ga možemo zapisati i kao otvoreni interval $\langle -2, +\infty \rangle$.

**9. D.** Označimo kut $\angle CAB$ s $\alpha$, a kut $\angle CBA$ s $\beta$. U svakom je trokutu središte trokutu upisane kružnice ujedno i sjecište simetrala svih triju kuteva trokuta. To znači da dužina $\overline{AM}$ pripada simetrali kuta $\alpha$, a dužina $\overline{BM}$ pripada simetrali kuta $\beta$. Budući da svaka simetrala raspolavlja odgovarajući kut, vrijede jednakosti:

$$\angle MAB = \frac{1}{2} \cdot \angle CAB = \frac{1}{2} \cdot \alpha$$
$$\angle MBA = \frac{1}{2} \cdot \angle CBA = \frac{1}{2} \cdot \beta$$

Kako su kutovi $\angle MAB$, $\angle MBA$ i $\angle AMB$ kutovi trokuta $ABM$, mora vrijediti jednakost:

$$\angle MAB + \angle MBA + \angle AMB = 180°.$$

Odatle slijedi:

$$\angle AMB = 180° - \angle MAB - \angle MBA.$$

Uvrštavanjem prvih dviju jednakosti u gornju jednakost dobijemo:

$$\angle AMB = 180° - \frac{1}{2}\cdot\alpha - \frac{1}{2}\cdot\beta$$
$$\angle AMB = 180° - \frac{1}{2}\cdot(\alpha+\beta)$$

Iz činjenice da su $\alpha$ i $\beta$ šiljasti kutovi pravokutnoga trokuta $ABC$ slijedi:

$$\alpha + \beta = 90°.$$

(Zbroj obaju šiljastih kutova u *svakom* pravokutnom trokutu uvijek je jednak 90°.) Tako konačno dobivamo traženu mjeru kuta $\angle AMB$:

$$\angle AMB = 180° - \frac{1}{2}\cdot(\alpha+\beta)$$
$$\angle AMB = 180° - \frac{1}{2}\cdot 90°$$
$$\angle AMB = 180° - 45°$$
$$\angle AMB = 135°$$

**10.** **C**. Iskoristit ćemo jednakost

$$|z^n| = |z|^n, \text{ za svaki } z \in \mathbf{C} \text{ i za svaki } n \in \mathbf{N}.$$

Označimo $z = 1 - i$. Tada je:

$$a = \mathrm{Re}(z) = 1,$$
$$b = \mathrm{Im}(z) = -1.$$

Tako konačno dobivamo:

$$\left|(1-i)^6\right| = \left|1-i\right|^6 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^6 = (a^2+b^2)^{\frac{6}{2}} = (a^2+b^2)^3 = \left[1^2+(-1)^2\right]^3 = (1+1)^3 = 2^3 = 8.$$

**11.** **A**. Zadanu jednadžbu možemo transformirati na sljedeći način:

$$5^x \cdot 5^2 + \frac{1^{x+1}}{5^{x+1}} = 6$$
$$5^x \cdot 25 + \frac{1}{5^x \cdot 5^1} = 6$$

$$
\begin{aligned}
&5^x \cdot 25 + \frac{1}{5^x \cdot 5} = 6 \quad / \cdot 5^x \cdot 5 \\
&5^x \cdot 25 \cdot 5^x \cdot 5 + 1 = 6 \cdot 5^x \cdot 5 \\
&(25 \cdot 5) \cdot (5^x \cdot 5^x) - (6 \cdot 5) \cdot 5^x + 1 = 0 \\
&125 \cdot (5^x)^2 - 30 \cdot 5^x + 1 = 0
\end{aligned}
$$

Uvedimo zamjenu $t := 5^x$, pa dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$125 \cdot t^2 - 30 \cdot t + 1 = 0.$$

Njezina su rješenja:

$$
\begin{aligned}
&t_{1,2} = \frac{30 \pm \sqrt{30^2 - 4 \cdot 125 \cdot 1}}{2 \cdot 125} = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 500}}{250} = \frac{30 \pm \sqrt{400}}{250} = \frac{30 \pm 20}{250} \Rightarrow \\
&t_1 = \frac{30 + 20}{250} = \frac{50}{250} = \frac{1}{5}, \; t_2 = \frac{30 - 20}{250} = \frac{10}{250} = \frac{1}{25}
\end{aligned}
$$

Tako iz eksponencijalne jednadžbe

$$
\begin{aligned}
5^x &= t_1 \\
5^x &= \frac{1}{5} \\
5^x &= 5^{-1}
\end{aligned}
$$

slijedi $x_1 = -1$, a iz eksponencijalne jednadžbe

$$
\begin{aligned}
5^x &= t_2 \\
5^x &= \frac{1}{25} \\
5^x &= 25^{-1} \\
5^x &= (5^2)^{-1} \\
5^x &= 5^{-2}
\end{aligned}
$$

slijedi $x_2 = -2$. Stoga je traženi zbroj svih rješenja polazne jednadžbe jednak $x_1 + x_2 = (-1) + (-2) =$ $= -3$.

**12. C.** Izračunajmo najprije mjere svih triju kutova trokuta. Iz produženoga razmjera

$$\alpha : \beta : \gamma = 3 : 2 : 13$$

koji vrijedi za spomenute mjere kutova slijedi da postoji strogo pozitivan realan broj $k$ takav da vrijede jednakosti

$$\alpha = 3 \cdot k,$$
$$\beta = 2 \cdot k,$$
$$\gamma = 13 \cdot k.$$

Zbroj svih triju kutova trokuta mora biti jednak 180°:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°,$$

pa uvrštavanjem izraza za $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$ dobivamo jednadžbu:

$$(3 \cdot k) + (2 \cdot k) + (13 \cdot k) = 180°,$$

odnosno,

$$3 \cdot k + 2 \cdot k + 13 \cdot k = 180°,$$

odnosno

$$18 \cdot k = 180°.$$

Dijeljenjem ove jednadžbe s 18 dobivamo $k = 10°$. Dakle, mjere kutova trokuta su:

$$\alpha = 3 \cdot 10° = 30°,$$
$$\beta = 2 \cdot 10° = 20°,$$
$$\gamma = 13 \cdot 10° = 130°.$$

Najkraća stranica trokuta $ABC$ u svakome se trokutu nalazi nasuprot najmanjemu kutu trokuta. U ovome je slučaju taj najmanji kut očito kut $\beta$, pa je kutu $\beta$ nasuprotna stranica, tj. stranica $b$ najkraća stranica trokuta. Prema sinusovu poučku vrijedi:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta},$$

a odatle je

$$a = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \cdot b$$
$$a = \frac{\sin 30°}{\sin 20°} \cdot b.$$

Uvrštavanjem dobivene jednakosti u jednakost $a - b = 3$ cm dobijemo:

$$\frac{\sin 30°}{\sin 20°} \cdot b - b = 3$$

$$b \cdot \left( \frac{\sin 30°}{\sin 20°} - 1 \right) = 3$$

$$b \cdot \left( \frac{\sin 30° - \sin 20°}{\sin 20°} \right) = 3$$

$$b = 3 : \left( \frac{\sin 30° - \sin 20°}{\sin 20°} \right)$$

$$b = \frac{3 \cdot \sin 20°}{\sin 30° - \sin 20°} = \frac{3 \cdot \sin 20°}{\frac{1}{2} - \sin 20°} = \frac{3 \cdot \sin 20°}{\frac{1 - 2 \cdot \sin 20°}{2}} = \frac{6 \cdot \sin 20°}{1 - 2 \cdot \sin 20°}$$

$$b \approx \frac{6 \cdot 0.34202014332566873304409961468226}{1 - 2 \cdot 0.34202014332566873304409961468226} \approx 6.494881$$

Dakle, tražena duljina je (približno) jednaka 6.49 cm.

**13. A.** Koristeći identitete

$$a^3 - 1 = (a - 1) \cdot (a^2 + a + 1),$$
$$a^4 - 1 = (a - 1) \cdot (a^3 + a^2 + a + 1),$$

za $a \neq 0, 1$ imamo redom:

$$\left( \frac{1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3}}{a} - \frac{1}{a-1} \right) \cdot \frac{1 - a^3}{a} = \left( \frac{\frac{a^3 + a^2 + a + 1}{a^3}}{a} - \frac{1}{a-1} \right) \cdot \frac{1 - a^3}{a} =$$

$$= \left( \frac{a^3 + a^2 + a + 1}{a^4} - \frac{1}{a-1} \right) \cdot \frac{1 - a^3}{a} = \left[ \frac{(a^3 + a^2 + a + 1) \cdot (a-1) - a^4}{a^4 \cdot (a-1)} \right] \cdot \frac{1 - a^3}{a} =$$

$$= \frac{(a^4 - 1) - a^4}{a^4 \cdot (a-1)} \cdot \frac{1 - a^3}{a} = \frac{a^4 - 1 - a^4}{a^4 \cdot (a-1)} \cdot \frac{1 - a^3}{a} = \frac{-1}{a^4 \cdot (a-1)} \cdot \frac{1 - a^3}{a} = \frac{1}{a^4 \cdot (1-a)} \cdot \frac{1 - a^3}{a} =$$

$$= \frac{1 - a^3}{a^5 \cdot (1-a)} = \frac{(1-a) \cdot (1 + a + a^2)}{a^5 \cdot (1-a)} = \frac{1 + a + a^2}{a^5} = \frac{a^2 + a + 1}{a^5}$$

**14. B.** Neka je $r$ polumjer kugle. Pretapljanjem kocke u kuglu ne mijenja se obujam geometrijskoga tijela, što znači da je obujam prvotne kocke jednak obujmu nastale kugle. Obujam prvotne kocke određen je izrazom

$$V_{kocke} = a^3,$$

dok je obujam nastale kugle određen izrazom

## RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U SVIBNJU 2010. – VIŠA RAZINA

$$V_{kugle} = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \,.$$

Izjednačavanjem tih dvaju izraza dobivamo:

$$\begin{aligned} & a^3 = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \quad / \cdot \frac{6}{\pi} \\ & \frac{6}{\pi} \cdot a^3 = 8 \cdot r^3 \\ & \frac{6}{\pi} \cdot a^3 = (2 \cdot r)^3 \quad / \sqrt[3]{\phantom{x}} \\ & \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} \cdot a = 2 \cdot r \end{aligned}$$

Dakle, traženi promjer kugle jednak je

$$d = 2 \cdot r = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} \cdot a \approx 1.240701 \cdot a \,.$$

**15.** **C.** Zadanu jednadžbu najprije transformirajmo na sljedeći način:

$$m \cdot \sin x = 1 \ \ /:m \neq 0$$
$$\sin x = \frac{1}{m} \,.$$

Skup svih međusobno različitih vrijednosti funkcije $f(x) = \sin x$ je segment $[-1, 1]$. Da bi posljednja jednadžba imala barem jedno realno rješenje, mora vrijediti nejednakost

$$-1 \leq \frac{1}{m} \leq 1 \,.$$

Pomnožimo li tu nejednakost s $m^2$ (što smijemo jer za $m \neq 0$ vrijedi nejednakost $m^2 > 0$, pa se množenjem niti jedan od dvaju znakova nejednakosti neće promijeniti), dobijemo:

$$-m^2 \leq m \leq m^2.$$

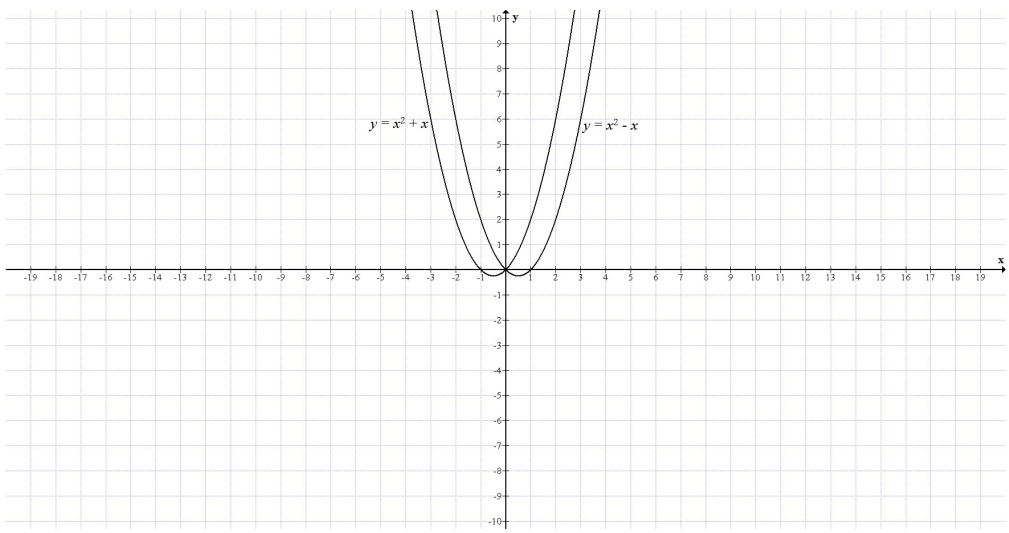
Iz ove nejednadžbe proizlazi toj nejednadžbi ekvivalentan sustav kvadratnih nejednadžbi:

$$-m^2 \leq m,$$
$$m^2 \geq m,$$

koji možemo zapisati u obliku:

$$m^2 + m \geq 0,$$
$$m^2 - m \geq 0.$$

Ovaj sustav najlakše i najbrže ćemo riješiti grafički. U pravokutnom kooordinatnom sustavu u ravnini nacrtajmo parabole $y = x^2 + x$ i $y = x^2 - x$, pa utvrdimo za koje $x \neq 0$ obje te parabole nisu ispod osi $x$. Naime, ispod osi $x$ nalaze se točke čija je druga koordinata strogo negativan realan broj, a takve točke ne dolaze u obzir zbog gornjega sustava nejednadžbi.



Slika 1.

Iz slike vidimo da je za $x \in \langle -1, 0\rangle$ parabola $y = x^2 + x$ ispod osi $x$, dok je za $x \in \langle 0, 1\rangle$ parabola $y = x^2 - x$ ispod osi $x$. Za sve ostale $x \neq 0$ obje parabole nisu ispod osi $x$. Stoga skup svih traženih vrijednosti parametra $m$ dobijemo tako da iz skupa realnih brojeva **R** „izbacimo" otvorene intervale $\langle -1, 0\rangle$ i $\langle 0, 1\rangle$, te realan broj 0 (jer je $m \neq 0$ prema pretpostavci). Lako vidimo da time iz skupa **R** zapravo „izbacujemo" sve elemente otvorenoga intervala $\langle -1, 1\rangle$. Stoga je rješenje zadatka $m \in \mathbf{R} \setminus \langle -1, 1\rangle$.

## II. ZADATCI KRATKIH ODGOVORA

**16.** $\frac{46}{3}$**.** Imamo redom:

$$36^{\frac{1}{2}} + 27^{\frac{2}{3}} + 9^{-\frac{1}{2}} = (6^2)^{\frac{1}{2}} + (3^3)^{\frac{2}{3}} + (3^2)^{-\frac{1}{2}} = 6^{2\cdot\frac{1}{2}} + 3^{3\cdot\frac{2}{3}} + 3^{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = 6^1 + 3^2 + 3^{-1} = 6 + 9 + \frac{1}{3} = 15 + \frac{1}{3} =$$
$$= \frac{15 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{46}{3}$$

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

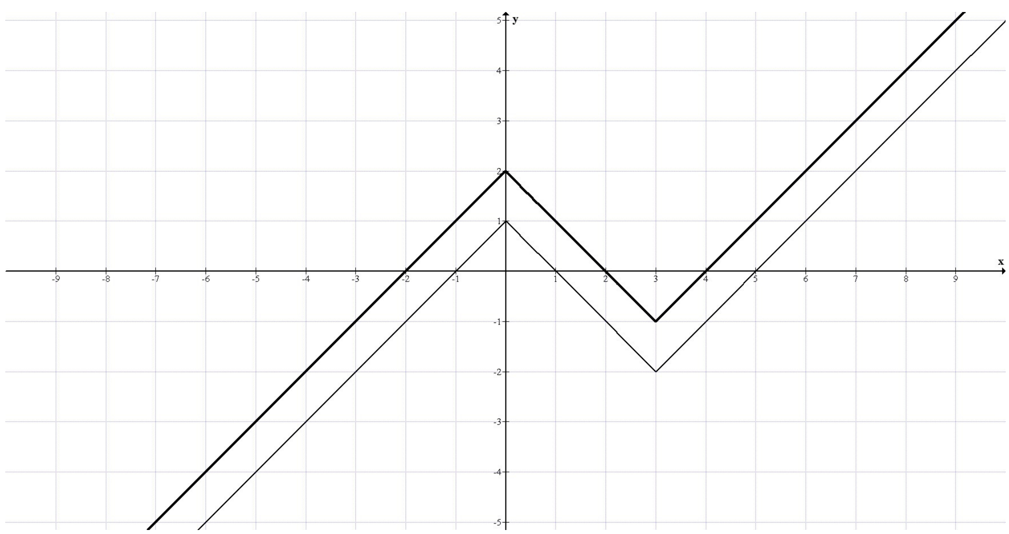
# ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

# RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U SVIBNJU 2010. – VIŠA RAZINA

**17.** Svaku točku traženoga grafa dobijemo tako da svaku točku polaznoga grafa pomaknemo usporedno s osi $y$ za jednu mjernu jedinicu prema gore. Uočimo da se zadani graf sastoji od jednoga polupravca određenoga točkama (–1, 0) i (0, 1), dužine određene točkama (0, 1) i (1, 0), te polupravca određenoga točkama (2, –2) i (5, 0). Stoga će se traženi graf sastojati od sljedeća tri dijela:

– jednoga polupravca određenoga točkama (–1, 0 + 1) i (0, 1 + 1), tj. točkama (–1, 1) i (0, 2);
– jedne dužine određene točkama (0, 2) i (1, 0 + 1), tj. točkama (0, 2) i (1, 1);
– jednoga polupravca određenoga točkama (2, –2 + 1) i (5, 0 + 1), tj. točkama (2, –1) i (5, 1).

Traženi graf prikazan je na Slici 2. (Nacrtan je debljom od dviju linija.)



Slika 2.

**18. 1.)** $\frac{3}{2}$. Zadanu jednadžbu pravca prevedemo iz segmentnoga oblika u eksplicitni oblik na sljedeći način:

$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1 \quad / \cdot 3$$
$$\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot x+y=3$$
$$y=\frac{3}{2}\cdot x+3$$

Traženi koeficijent smjera jednak je koeficijentu uz $x$ u navedenoj jednadžbi pravca. Dakle, $k = \frac{3}{2}$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

**ELEKTROTEHNIČKI ODJEL**

# RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U SVIBNJU 2010. – VIŠA RAZINA

**2.) $y = -x + 3$.** Odredimo najprije koordinate krajnje točke vektora $\overrightarrow{AB}$. Nju dobijemo tako da se iz početne točke $A(1, 2)$ pomaknemo za 4 mjesta udesno (jer je koeficijent uz $\vec{i}$ jednak 4), a potom iz tako dobivene točke za 4 mjesta nadolje (jer je koeficijent uz $\vec{j}$ jednak (–4)). Tako dolazimo u točku čije su koordinate (1 + 4, 2 – 4), tj. u točku $B(5, -2)$. Preostaje napisati jednadžbu pravca koji prolazi točkama $A$ i $B$:

$$p\ldots y-2=\frac{-2-2}{5-1}\cdot(x-1)$$
$$p\ldots y=\frac{-4}{4}\cdot(x-1)+2$$
$$p\ldots y=(-1)\cdot(x-1)+2$$
$$p\ldots y=-x+1+2$$
$$p\ldots y=-x+3$$

**19. 1.) –1.** Prema Vièteovim formulama, zbroj rješenja bilo koje kvadratne jednadžbe dobijemo tako da koeficijent uz $x$ podijelimo s koeficijentom uz $x^2$ i dobivenom količniku promijenimo predznak. U našem je slučaju, dakle,

$$x_1+x_2=-\frac{1}{1}=-1.$$

**2.) –2; 3.** Iz zadane jednadžbe proizlazi da mora vrijediti ili $\frac{2\cdot x-1}{5}=-1$ ili $\frac{2\cdot x-1}{5}=1$. Množenjem obiju jednadžbi s 5 dobivamo da mora vrijediti ili $2 \cdot x - 1 = -5$ ili $2 \cdot x - 1 = 5$, odnosno ili $2 \cdot x = = -5 + 1$ ili $2 \cdot x = 5 + 1$, odnosno ili $2 \cdot x = -4$ ili $2 \cdot x = 6$. Odatle slijedi $x = -2$ ili $x = 3$, pa su oba rješenja polazne jednadžbe upravo ta dva realna broja.

**20. 1.) 28 561.** Primijenit ćemo identitet:

$$z\cdot\overline{z}=|z|^2=(\operatorname{Re}z)^2+(\operatorname{Im}z)^2\text{, za svaki } z\in\mathbf{C}.$$

U našem je slučaju

$$\operatorname{Re}(z)=3,$$
$$\operatorname{Im}(z)=2,$$

pa dobivamo redom:

$$\left(i\cdot z\cdot\overline{z}\right)^4=i^4\cdot\left(z\cdot\overline{z}\right)^4=1\cdot\left\{\left[\operatorname{Re}(z)\right]^2+\left[\operatorname{Im}(z)\right]^2\right\}^4=1\cdot(3^2+2^2)^4=(9+4)^4=13^4=28\ 561.$$

## RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U SVIBNJU 2010. – VIŠA RAZINA

**2.)** $z = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right)$**.** Zadatak se može najbrže riješiti tako da zadani kompleksan broj prikažemo u kompleksnoj (Gaussovoj) ravnini. Kompleksnom broju $z$ pripadajuća točka kompleksne ravnine je $Z(0, 2)$. (Prva koordinata je uvijek realni, a druga imaginarni dio kompleksnoga broja.) Spojnica te točke s ishodištem kompleksne ravnine, tj. s točkom $O(0, 0)$ ima duljinu $r = 2$, a s pozitivnim dijelom realne osi zatvara kut $\varphi = \frac{\pi}{2}$ radijana. Tako je traženi trigonometrijski oblik zadanoga kompleksnoga broja:

$$z = r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$$
$$z = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

**21. 1.) 7.** Neka je $x$ ukupan broj autobusa s 52 sjedala, a $y$ ukupan broj autobusa s 43 sjedala. Iz podatka da je škola osigurala ukupno 15 autobusa slijedi:

$$x + y = 15.$$

Svi autobusi s 52 sjedala prevezli su ukupno $x\cdot 52$ učenika, a svi autobusi s 43 sjedala prevezli su ukupno $y\cdot 43$ učenika. Na taj je način prevezeno svih 708 učenika škole, pa mora vrijediti jednakost

$$52\cdot x + 43\cdot y = 708.$$

Tako smo dobili sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$x + y = 15,$$
$$52\cdot x + 43\cdot y = 708.$$

Pomnožimo li prvu jednadžbu s (–43) i zbrojimo dobivenu jednadžbu s drugom jednadžbom sustava, dobit ćemo:

$$(-43)\cdot x + 52\cdot x = 15\cdot(-43) + 708,$$

odnosno

$$9\cdot x = 63.$$

Odatle je $x = 7$. Dakle, bilo je ukupno 7 autobusa s 52 sjedala.

**2.) 344.** Iz rješenja podzadatka **1.)** slijedi da je bilo osigurano ukupno $y = 15 - x = 15 - 7 = 8$ autobusa s po 43 sjedala. Tih 9 autobusa prevezlo je ukupno $8\cdot 43 = 344$ učenika.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

# ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

# RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U SVIBNJU 2010. – VIŠA RAZINA

**22. 1.)** $\langle -\infty, -4] \cup [-3, +\infty\rangle$**.** Najprije riješimo kvadratnu jednadžbu $x^2 + 7 \cdot x + 12 = 0$. Nju možemo riješiti i napamet koristeći Vièteove formule: tražimo dva broja koja pomnožena daju 12, a zbrojena (–7). To su $x_1 = = -4$ i $x_2 = -3$. Sada se prisjetimo da kvadratna funkcija koja ima strogo pozitivan vodeći koeficijent (tj. koeficijent uz $x^2$) poprima strogo negativne vrijednosti isključivo na otvorenom intervalu koji određuju njezine realne nultočke. To znači da vrijedi ekvivalencija:

$$(x^2 + 7 \cdot x + 12 < 0) \Leftrightarrow (x \in \langle -4, -3\rangle).$$

Prema tome, traženi skup svih rješenja polazne jednadžbe dobit ćemo tako da iz skupa svih realnih brojeva **R** „izbacimo“ otvoreni interval $\langle -4, -3\rangle$. Stoga je rješenje zadatka skup $S = \mathbf{R} \setminus \langle -4, -3\rangle$. Zapišemo li taj skup u obliku unije intervala, dobit ćemo: $S = \langle -\infty, -4] \cup [-3, +\infty\rangle$.

**2.) (–5) · *a*.** Pomnožimo drugu jednadžbu sustava s (–2) i zbrojimo tako dobivenu jednadžbu s prvom jednadžbom sustava. Dobit ćemo:

$$3 \cdot y + (-2) \cdot 2 \cdot y + (-2) \cdot 2 \cdot a = a + (-2) \cdot 0,$$

odnosno

$$(-1) \cdot y = a + 4 \cdot a.$$

Odatle je $y = (-5) \cdot a$ .

**23. 1.) sin α.** Odredimo najprije ostatak pri dijeljenju kuta od 3 960° s 360°, tj. svedimo kut od 3 960° na neki kut iz intervala [0, 360°⟩. Dobijemo:

$$3\,960° : 360° = 11 \text{ i ostatak } 0.$$

Dakle, kut od 3 960° sukladan je kutu od 0°. Tako sada imamo:

$$\sin(3\,960° + \alpha) = \sin(0° + \alpha) = \sin \alpha.$$

**2.)** $x = \frac{2}{3} \cdot \pi$ . Najprije se prisjetimo da su $2 \cdot \pi$ i $(-4) \cdot \pi$ periodi funkcija $\sin x$ i $\cos x$. Prema definiciji perioda, to znači da vrijede sljedeće jednakosti:

$$\sin(x + 2 \cdot \pi) = \sin x,$$
$$\cos(x + 3 \cdot \pi) = \cos[(x + \pi) + 2 \cdot \pi] = \cos(x + \pi),$$
$$\cos(x - 4 \cdot \pi) = \cos x.$$

Nadalje, prema adicionim formulama za funkcije $\sin x$ i $\cos x$ vrijede jednakosti:

$$\sin(x + \pi) = \sin x \cdot \cos \pi + \cos x \cdot \sin \pi = \sin x \cdot (-1) + \cos x \cdot 0 = -\sin x,$$
$$\cos(x + \pi) = \cos x \cdot \cos \pi - \sin x \cdot \sin \pi = \cos x \cdot (-1) - \sin x \cdot 0 = -\cos x.$$

Tako polaznu jednadžbu možemo zapisati u ekvivalentnom obliku:

$$(-\sin x) \cdot \sin x = 3 \cdot (-\cos x) \cdot \cos x,$$

odnosno

$$\sin^2 x = 3 \cdot \cos^2 x.$$

Traženo rješenje, prema uvjetu zadatka, treba pripadati segmentu $\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$. Uvrštavanjem $x = \frac{\pi}{2}$ u posljednju jednadžbu dobivamo:

$$\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^2 = 3 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2}\right)^2,$$

odnosno

$$1 = 3 \cdot 0,$$

što je netočno. Zbog toga $x = \frac{\pi}{2}$ nije rješenje polazne jednadžbe. Za svaki $x \in \left\langle\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$ vrijedi nejednakost $\cos x < 0$, odnosno $\cos^2 x > 0$. Stoga posljednju jednadžbu smijemo podijeliti s $\cos^2 x$. Dobit ćemo:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 3,$$

odnosno

$$\operatorname{tg}^2 x = 3.$$

Također, za svaki $x \in \left\langle\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$ vrijedi nejednakost $\operatorname{tg} x \le 0$. Stoga je za $x \in \left\langle\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$ posljednja jednadžba ekvivalentna jednadžbi

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}.$$

Jedino rješenje ove jednadžbe u intervalu $\left\langle\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$ je $x = \frac{2}{3} \cdot \pi$, i to je traženo rješenje.

**24. 1.) 7 975.** Zadani niz je aritmetički niz čiji je prvi član $a_1 = -12$, a razlika $d = 7$. Stoga je zbroj prvih 50 članova zadanoga niza jednak

$$S_{50} = \frac{50}{2} \cdot [2 \cdot (-12) + (50-1) \cdot 7] = 25 \cdot (-24 + 49 \cdot 7) = 25 \cdot (-24 + 343) = 25 \cdot 319 = 7\ 975.$$

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

# ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

# RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U SVIBNJU 2010. – VIŠA RAZINA

**2.) 1.2.** Osnovno svojstvo geometrijskoga niza je da je svaki član niza, osim prvoga, geometrijska sredina neposredno susjednih članova niza. To znači da je drugi član geometrijskoga niza geometrijska sredina prvoga i trećega člana, odnosno, prema definiciji geometrijske sredine, drugi korijen iz umnoška prvoga i trećega člana. Tako dobivamo:

$$g_2 = \sqrt{g_1 \cdot g_3} = \sqrt{1.44} = 1.2\,.$$

**25. 1.)** $\frac{3}{2}$**.** U zadanu jednadžbu parabole uvrstimo $x = 3$ i $y = 3$. Dobijemo:

$$3^2 = 2 \cdot p \cdot 3,$$
$$9 = 6 \cdot p.$$

Odatle slijedi $p = \frac{3}{2}$.

**2.)** $\frac{11}{5} \cdot \sqrt{5}$ . Iz jednadžbe parabole „očitamo“:

$$2 \cdot p = 12.$$

Odatle je $p = 6$. Stoga je fokus zadane parabole točka $\left(\frac{6}{2},\, 0\right)$, tj. točka $F(3,\, 0)$. Preostaje izračunati udaljenost točke $F$ od pravca $2 \cdot x - y + 5 = 0$. Ta je udaljenost jednaka:

$$d = \left|\frac{2 \cdot 3 - 0 + 5}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}\right| = \left|\frac{11}{\sqrt{4+1}}\right| = \frac{11}{\sqrt{5}} = \frac{11}{5} \cdot \sqrt{5}$$

**3.)** $y = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot x - \frac{3}{2}$**.** Iz apscise fokusa parabole „očitamo“:

$$\frac{p}{2} = 1\,.$$

Odatle množenjem s 2 dobijemo $p = 2$, pa je $2 \cdot p = 4$. Stoga je jednadžba parabole

$$y^2 = 4 \cdot x.$$

Nepoznatu apscisu točke $A$ odredit ćemo tako da u jednadžbu parabole uvrstimo $y = -3$. Dobit ćemo:

$$(-3)^2 = 4 \cdot x,$$
$$9 = 4 \cdot x.$$

Odatle je $x = \frac{9}{4}$. Dakle, koordinate točke $A$ su $A\left(\frac{9}{4},\ -3\right)$. Stoga tražena jednadžba tangente na parabolu povučene u točki $A$ glasi:

$$t \ldots y \cdot (-3) = 2 \cdot \left(x + \frac{9}{4}\right)$$
$$t \ldots y = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(x + \frac{9}{4}\right)$$
$$t \ldots y = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot x + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{9}{4}$$
$$t \ldots y = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot x - \frac{3}{2}$$

**26. 7.847; 3.661.** Koristit ćemo sljedeću tvrdnju: *Ako se neki iznos najprije promijeni za* $p_1$%, *potom za* $p_2$%, …, *potom za* $p_n$%, *onda je ukupna strukturna promjena toga iznosa* (*iskazana u* %)

$$R = 100 \cdot \left[\left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{p_n}{100}\right) - 1\right].$$

U prvom slučaju imamo točno dvije strukturne promjene: $p_1$ = +4.2 [%] i $p_2$ = +3.5 [%]. Stoga je ukupna strukturna promjena

$$R = 100 \cdot \left[\left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) - 1\right]$$
$$R = 100 \cdot \left[\left(1 + \frac{4.2}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{3.5}{100}\right) - 1\right]$$
$$R = 100 \cdot (1.042 \cdot 1.035 - 1)$$
$$R = 7.847$$

Dakle, troškovi života u svibnju su za 7.847% veći u odnosu na troškove života u ožujku.

U drugom slučaju znamo jednu strukturnu promjenu $p_1$ = 3.8 [%] i ukupnu strukturnu promjenu $R$ = 0. Tražimo strukturnu promjenu $p_2$. Uvrštavanjem tih dvaju podataka u izraz za $R$ dobijemo:

$$0 = 100 \cdot \left[\left(1 + \frac{3.8}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) - 1\right] \quad /:100$$
$$0 = \left(1 + \frac{3.8}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) - 1$$

$$1=\left(1+\frac{3.8}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p_2}{100}\right)$$

$$1=\frac{103.8}{100}\cdot\left(1+\frac{p_2}{100}\right)\quad /:\frac{103.8}{100}$$

$$\frac{100}{103.8}=1+\frac{p_2}{100}$$

$$\frac{p_2}{100}=\frac{100}{103.8}-1\quad /\cdot 100$$

$$p_2=\frac{100\cdot(100-103.8)}{103.8}=\frac{100\cdot(-3.8)}{103.8}=-\frac{380}{103.8}=-\frac{3\ 800}{1\ 038}=-\frac{1900}{519}$$

$$p_2\approx -3.66088632$$

Dakle, troškovi života u studenome morali bi se smanjiti za približno 3.66%.

**27.** $\langle$**3, 5**]. Odredimo najprije za koje $x \in \mathbf{R}$ cijela jednadžba uopće ima smisla. Bilo koja logaritamska funkcija definirana je isključivo za strogo pozitivne vrijednosti logaritmanda. Stoga istodobno moraju vrijediti nejednakosti

$$x-1>0$$
$$x-3>0.$$

Iz prve nejednakosti dobiva se $x > 1$, a iz druge $x > 3$. Prema tome, polazna nejednadžba je definirana za sve $x > 3$. Uvažavajući tu pretpostavku, nejednadžbu možemo transformirati ovako:

$$\log_2[(x-1)\cdot(x-3)]\leq 3$$
$$(x-1)\cdot(x-3)\leq 2^3$$
$$x^2-x-3\cdot x+3\leq 8$$
$$x^2-4\cdot x+3-8\leq 0$$
$$x^2-4\cdot x-5\leq 0$$

Sada se prisjetimo da kvadratna funkcija kojoj je vodeći koeficijent (tj. koeficijent uz $x^2$) strogo pozitivan realan broj poprima nepozitivne vrijednosti (tj. vrijednosti jednake nuli ili manje od nule) isključivo na segmentu kojega određuju realne nultočke te kvadratne funkcije. Stoga riješimo kvadratnu jednadžbu

$$x^2-4\cdot x-5=0$$

Koristeći Vièeteove formule, tu jednadžbu možemo riješiti i napamet: tražimo dva realna broja koja zbrojena daju 4, a pomnožena (–5). To su očito $x_1 = -1$ i $x_2 = 5$. Dakle, skup svih rješenja nejednadžbe $x^2 - 4\cdot x - 5 \leq 0$ je segment $[-1, 5]$. Međutim, zbog pretpostavke $x > 3$, rješenje polazne nejednadžbe su oni elementi toga segmenta koji su strogo veći od 3. Ti elementi tvore interval $\langle 3, 5]$.

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

# RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U SVIBNJU 2010. – VIŠA RAZINA

**28. 1.) 20 000.** U izraz pomoću kojega se određuje veličina $K$ uvrstimo $t = 0$. Dobijemo:

$$K = \frac{20\ 000 \cdot (4 \cdot 0 + 1)}{0 + 1} = \frac{20\ 000 \cdot 1}{1} = 20\ 000\,.$$

**2.) 5.** Tražimo vrijednost $t$ za koju je pripadna vrijednost veličine $K$ jednaka 70 000. U tu svrhu u izraz za $K$ uvrstimo $K$ = 70 000 i riješimo dobivenu jednadžbu po nepoznanici $t$:

$$\begin{aligned}
&70\ 00 = \frac{20\ 000 \cdot (4 \cdot t + 1)}{t + 1} \quad / \cdot (t+1)\\
&70\ 000 \cdot (t+1) = 20\ 000 \cdot (4 \cdot t + 1)\\
&70\ 000 \cdot t + 70\ 000 = 20\ 000 \cdot 4 \cdot t + 20\ 000\\
&70\ 000 \cdot t + 70\ 000 = 80\ 000 \cdot t + 20\ 000\\
&70\ 000 \cdot t - 80\ 000 \cdot \mathrm{t} = 20\ 000\ - 70\ 000\\
&(-10\ 000) \cdot t = (-50\ 000) \quad / : (-10\ 000)\\
&t = 5
\end{aligned}$$

Dakle, nakon $t$ = 5 mjeseci broj korisnika kabelske televizije bio je 70 000.

**3.)** $\boldsymbol{\frac{K - 20\ 000}{80\ 000 - K}}$**.** Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&K = \frac{20\ 000 \cdot (4 \cdot t + 1)}{t + 1} \quad / \cdot (t+1)\\
&K \cdot (t+1) = 20\ 000 \cdot (4 \cdot t + 1)\\
&K \cdot t + K = 20\ 000 \cdot 4 \cdot t + 20\ 000\\
&K \cdot t + K = 80\ 000 \cdot t + 20\ 000\\
&K \cdot t - 80\ 000 \cdot t = 20\ 000 - K\\
&t \cdot (K - 80\ 000) = 20\ 000 - K \quad / : (K - 80\ 000)\\
&t = \frac{20\ 000 - K}{K - 80\ 000} = \frac{(-1) \cdot (K - 20\ 000)}{(-1) \cdot (80\ 000 - K)} = \frac{K - 20\ 000}{80\ 000 - K}
\end{aligned}$$

## III. ZADATCI PRODUŽENIH ODGOVORA

**29. 1.) $S_1$(–4, 0), $S_2$(–1, 0), $S_3$(4, 0).** Apscise svih sjecišta grafa zadane funkcije s osi apscisa su realna rješenja jednadžbe $f(x) = 0$. Pri rješavanju te jednadžbe koristit ćemo identitet

$$x^2 - 16 = (x - 4) \cdot (x + 4).$$

Imamo redom:

$$f(x)=0$$
$$\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(x^2-16)\cdot(x+1)=0 \quad /\cdot(-4)$$
$$(x^2-16)\cdot(x+1)=0$$
$$(x-4)\cdot(x+4)\cdot(x+1)=0$$

Umnožak triju realnih brojeva jednak je nuli ako i samo ako je barem jedan od tih brojeva jednak nuli. Iz $x - 4 = 0$ slijedi $x = 4$, iz $x + 4 = 0$ slijedi $x = -4$, a iz $x + 1 = 0$ slijedi $x = -1$. Stoga su sve nultočke zadane funkcije $x_1 = -4$, $x_2 = -1$ i $x_3 = 4$. Dakle, tražene točke su $S_1(-4, 0)$, $S_2(-1, 0)$ i $S_3(4, 0)$.

**2.)** $f'(x)=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(3\cdot x^2+2\cdot x-16)$**.** Zadanu funkciju deriviramo prema pravilu za deriviranje umnoška dviju funkcija, a konstantu $\left(-\frac{1}{4}\right)$ ćemo samo prepisati:

$$f'(x)=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left[(x^2-16)'\cdot(x+1)+(x^2-16)\cdot(x+1)'\right]=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left\{\left[(x^2)'-16'\right]\cdot(x+1)+(x^2-16)\cdot\left[(x)'+1'\right]\right\}$$
$$f'(x)=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left[(2\cdot x^{2-1}-0)\cdot(x+1)+(x^2-16)\cdot(1+0)\right]=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left[2\cdot x\cdot(x+1)+(x^2-16)\right]$$
$$f'(x)=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(2\cdot x^2+2\cdot x+x^2-16)=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(3\cdot x^2+2\cdot x-16)$$

**3.)** $\left\langle -\frac{8}{3},\ 2\right\rangle$**.** Interval(e) strogoga rasta zadane funkcije tvore sva rješenja nejednadžbe $f'(x) >$ $> 0$. Iz podzadatka **2.)** znamo da je $f'(x)=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(3\cdot x^2+2\cdot x-16)$. Stoga iz $\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(3\cdot x^2+$ $+2\cdot x-16)>0$ dijeljenjem s $\left(-\frac{1}{4}\right)$, pri čemu se znak nejednakosti mijenja iz > u <, dobivamo kvadratnu nejednadžbu

$$3\cdot x^2+2\cdot x-16<0.$$

U rješenju zadatka **22. 1)** istaknuli smo da kvadratna funkcija kojoj je vodeći koeficijent strogo pozitivan realan broj poprima strogo negativne vrijednosti isključivo na otvorenom intervalu kojega određuju realne nultočke te funkcije. Stoga rješavamo kvadratnu jednadžbu

$$3\cdot x^2+2\cdot x-16=0.$$

Dobivamo:

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 3\cdot(-16)}}{2\cdot 3}=\frac{-2\pm\sqrt{4+192}}{6}=\frac{-2\pm\sqrt{196}}{6}=\frac{-2\pm 14}{6}\Rightarrow$$
$$x_1=\frac{-2+14}{6}=\frac{12}{6}=2,\ x_2=\frac{-2-14}{6}=-\frac{16}{6}=-\frac{8}{3}$$

Dobivena rješenja određuju otvoreni interval $\left\langle -\frac{8}{3},\ 2\right\rangle$. Stoga je jedini interval (strogoga) rasta zadane funkcije $\left\langle -\frac{8}{3},\ 2\right\rangle$.

**4.) strogi lokalni minimum $\left(-\frac{100}{27}\right)$ za $x=-\frac{8}{3}$; strogi lokalni maksimum 9 za $x$ = 2**.
Kandidati za lokalne ekstreme su sva realna rješenja jednadžbe $f\,'(x)$ = 0, tj. jednadžbe $\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(3\cdot x^2+2\cdot x-16)=0$, odnosno jednadžbe $3\cdot x^2+2\cdot x-16=0$. Tu jednadžbu riješili smo u podzadatku **3.**) i dobili $x_1=2$ i $x_2=-\frac{8}{3}$. Također, zaključili smo da funkcija $f$ strogo raste na otvorenom intervalu $\left\langle -\frac{8}{3},\ 2\right\rangle$. Budući da je funkcija $f$ definirana za svaki $x\in\mathbf{R}$, zaključujemo da $f$ strogo pada na intervalima $\left\langle -\infty,\ -\frac{8}{3}\right\rangle$ i $\langle 2, +\infty\rangle$. Sada lako slijedi:

– funkcija $f$ strogo pada na okolini lijevo od točke $x=-\frac{8}{3}$, a strogo raste na okolini desno od te točke, pa $f$ postiže strogi lokalni minimum za $x=-\frac{8}{3}$ i taj minimum je jednak

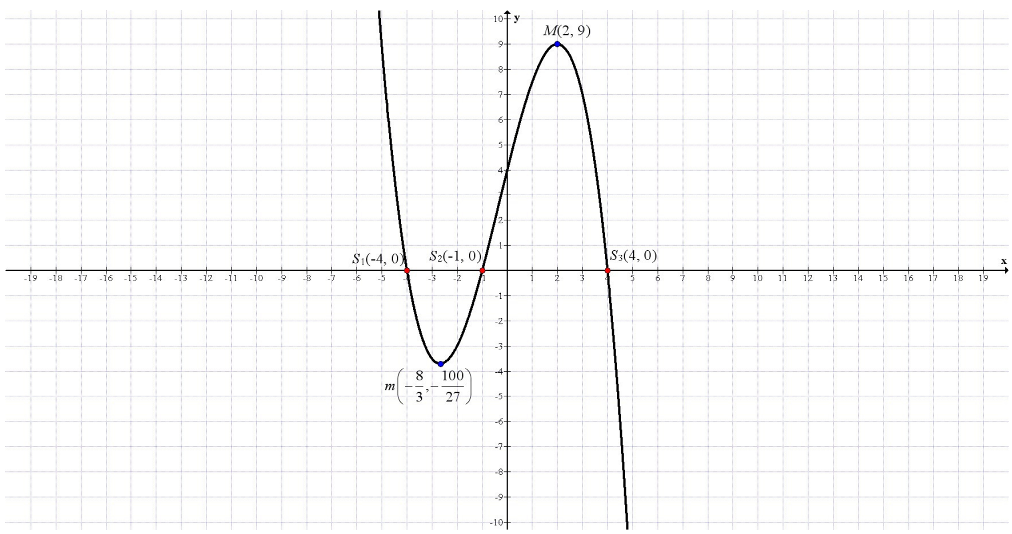
$$f\left(-\frac{8}{3}\right)=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left[\left(-\frac{8}{3}\right)^2-16\right]\cdot\left[\left(-\frac{8}{3}\right)+1\right]=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left[\frac{(-8)^2}{3^2}-16\right]\cdot\left(\frac{-8+3}{3}\right)=$$
$$=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{64}{9}-16\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{64-16\cdot 9}{9}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{80}{9}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{100}{27}$$

– funkcija $f$ strogo raste na okolini lijevo od točke $x$ = 2, a strogo pada na okolini desno od te točke , pa $f$ postiže strogi lokalni maksimum za $x$ = 2 i taj maksimum je jednak

$$f(2)=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(2^2-16)\cdot(2+1)=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(4-16)\cdot 3=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(-12)\cdot 3=9\,.$$

Grubo (i neprecizno) govoreći, možemo reći da $f$ ima lokalni minimum u točki $\left(-\frac{8}{3},-\frac{100}{27}\right)$, a strogi lokalni maksimum u točki (2, 9).

**5.)** Graf zadane funkcije prikazan je na Slici 3. Ucrtana su sjecišta grafa s osi apscisa izračunana u podzadatku **1.**), te lokalni ekstremi izračunani u podzadatku **4.)** Korisno je primijetiti da je $f(0) = 4$, što znači da graf zadane funkcije siječe os $y$ u točki (0, 4). Također, iz slike je razvidno da dobiveni lokalni ekstremi nisu i globalni ekstremi zadane funkcije.



Slika 3.

**30. (približno) 20.5 mm.** Neka su $A$ točka u kojoj zraka svjetlosti upada na ploču, $B$ točka u kojoj zraka svjetlosti izlazi iz ploče, $C$ ortogonalna projekcija točke $B$ na pravac kojim bi nastavila putovati zraka svjetlosti bez loma na ploči i $D$ ortogonalna projekcija točke $A$ na donju stranicu planparalelne ploče.
Trokut $ADB$ je pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu $D$. Duljina jedne njegove katete je $|AD| = d$, a mjera šiljastoga kuta pri vrhu $A$ jednaka je $\alpha$. Iz toga pravokutnoga trokuta proizlazi

$$\cos\beta = \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{d}{|AB|},$$

a odavde je

$$|AB| = \frac{d}{\cos\beta}.$$

# ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

# RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U SVIBNJU 2010. – VIŠA RAZINA

Trokut $ABC$ je pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu $C$. Duljina jedne njegove katete je $|BC| = p$, duljina hipotenuze jednaka je $|AB|$, a kut kod vrha $A$ jednak je $\alpha - \beta$. Iz toga pravokutnoga trokuta proizlazi

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{|BC|}{|AB|}=\frac{p}{|AB|},$$

odnosno

$$|AB|=\frac{p}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Izjednačavanjem dobivenih izraza za duljinu $|AB|$ dobivamo:

$$\frac{p}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{d}{\cos\beta},$$

a odatle je

$$p=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta}\cdot d=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\beta}\cdot d=\left(\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\beta}-\frac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\beta}\right)\cdot d$$
$$p=(\sin\alpha-\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta)\cdot d$$

Iz definicijske formule indeksa loma proizlazi:

$$\sin\beta=\frac{\sin\alpha}{n},$$

pa slijedi

$$\mathrm{tg}\,\beta=\frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}=\frac{\frac{\sin\alpha}{n}}{\sqrt{1-\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right)^2}}=\frac{\frac{\sin\alpha}{n}}{\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}}}=\frac{\frac{\sin\alpha}{n}}{\sqrt{\frac{n^2-\sin^2\alpha}{n^2}}}=\frac{\frac{\sin\alpha}{n}}{\frac{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}{n}}=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}.$$

Uvrštavanjem dobivenoga izraza u izraz za $p$ dobijemo:

$$p=(\sin\alpha-\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta)\cdot d=\left(\sin\alpha-\cos\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right)\cdot d$$

Preostaje uvrstiti konkretne numeričke podatke i pojednostavniti dobiveni izraz:

$$p=\left(\sin 60^\circ-\cos 60^\circ\cdot\frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\sin^2 60^\circ}}\right)\cdot 40=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{3}{4}}}\right)\cdot 40=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{6}{4}}}\right)\cdot 40$$

$$p=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}}\right)\cdot 40=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)\cdot 40=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{6}}\right)\cdot 40=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\cdot 40$$

$$p=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot 40=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot 40=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\cdot 40=\frac{2\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}\cdot 40=10\cdot(2\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

$$p\approx 20.49888053\approx 20.5$$

Dakle, paralelni pomak zrake svjetlosti iznosi (približno) 20.5 mm.