TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U SVIBNJU 2011. – OSNOVNA RAZINA

I. ZADATCI VIŠESTRUKOGA IZBORA

1. D. Koristeći kalkulator izračunamo:

$$\pi^3 - 3^3 \approx 31.006 - 27 = 4.006.$$

Taj broj pripada intervalu $[3.5, 5\rangle$ jer tom intervalu pripadaju svi realni brojevi jednaki ili veći od 3.5, a strogo manji od 5.

2. B. Imamo redom:

$$2.7\% = \frac{2.7}{100} = \frac{27}{1000} = 0.027 .$$

3. C. Iz zadanoga razmjera slijedi

$$7 \cdot a = 5 \cdot b,$$

odnosno

$$a = \frac{5}{7} \cdot b .$$

Uvrstimo li u ovu jednakost $b = 9$, dobit ćemo

$$a = \frac{5}{7} \cdot 9 = \frac{45}{7} .$$

4. A. Označimo traženi broj s x. Polovica vrijednosti broja x jednaka je $\frac{1}{2} \cdot x$, a broj dvostruko veći od traženoga broja jednak je $2 \cdot x$. Prema uvjetu zadatka mora vrijediti jednakost:

$$x + \frac{1}{2} \cdot x = 2 \cdot x - 3 .$$

Pomnožimo li ovu jednadžbu s 2, dobit ćemo

$$2 \cdot x + x = 4 \cdot x - 6,$$

odnosno

$$2 \cdot x + x - 4 \cdot x = -6,$$

odnosno

$$(-1) \cdot x = -6.$$

Odatle je $x = 6$.

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U SVIBNJU 2011. – OSNOVNA RAZINA

5. **B.** Imamo:

$$f(1) = 10^{2 \cdot 1 + 1} = 10^{2+1} = 10^3 = 1\ 000.$$

6. **B.** Izračunajmo najprije iznos mjesečnih režija. On iznosi 24% od obiteljskih primanja, odnosno

$$\frac{24}{100} \cdot 8\ 750 = 2\ 100 \text{ kuna.}$$

Stoga je traženi iznos jednak

$$8\ 750 - (2\ 100 + 6\ 200) = 8\ 750 - 8\ 300 = 450 \text{ kuna.}$$

7. **C.** Koristeći identitet $a^2 \cdot b^2 = (a \cdot b)^2$ i formulu za razliku kvadrata dobivamo:

$$\left(\sqrt{3}-1\right)^2 \cdot \left(\sqrt{3}+1\right)^2 = \left[\left(\sqrt{3}-1\right) \cdot \left(\sqrt{3}+1\right)\right]^2 = \left[\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1^2\right]^2 = (3-1)^2 = 2^2 = 4 .$$

8. **A.** Pomnožimo drugu jednadžbu s (–10). Dobivamo:

$$(-10) \cdot y - 20 \cdot x - 70 = 0.$$

Zbrojimo dobivenu jednadžbu s prvom jednadžbom sustava, pa dobijemo

$$(-22) \cdot x - 66 = 0,$$

odnosno

$$(-22) \cdot x = 66.$$

Odatle je $x = -3$.

9. **C.** Ako nakon utovara teret tvori 60% ukupne mase vozila s teretom, onda masa vozila bez tereta tvori 100% – 60% = 40% ukupne mase vozila s teretom. Označimo li s m masu vozila s teretom, onda prema uvjetima zadatka vrijedi jednakost:

$$\frac{40}{100} \cdot m = 3\ 000 .$$

Odavde je

$$m = 3\ 000 : \frac{40}{100} = 3\ 000 \cdot \frac{100}{40} = 7\ 500 \text{ kg.}$$

Stoga ukupna masa tereta iznosi:

$$m_t = 7\ 500 - 3\ 000 = 4\ 500 \text{ kg.}$$

Nakon što se istovari trećina tereta, u vozilu preostanu dvije trećine tereta. Masa te dvije trećine tereta iznosi:

$$m_{ot} = \frac{2}{3} \cdot 4\ 500 = 3\ 000 \text{ kg},$$

pa je ukupna masa vozila s preostalim teretom jednaka:

$$m_{uk} = 3\ 000 + 3\ 000 = 6\ 000 \text{ kg}.$$

Tako dobivamo da je traženi postotak jednak;

$$p = \frac{m_{ot}}{m_{uk}} \cdot 100 = \frac{3\ 000}{6\ 000} \cdot 100 = 50,$$

tj. $p = 50\%$.

10. D. Iz zadane jednakosti slijedi

$$r \cdot \pi \cdot s = P - B.$$

Dijeljenjem lijeve i desne strane s $r \cdot \pi$ dobijemo

$$s = \frac{P - B}{r \cdot \pi}$$

11. B. Iz zadanoga grafa vidimo daje tjeme parabole $T = (3, 2)$. Stoga pripadna kvadratna funkcija postiže najveću vrijednost 2 za $x = 3$.

12. A. Primjenom formule za kvadrat razlike dobivamo:

$$(a^5 - 2)^2 = (a^5)^2 - 2 \cdot a^5 \cdot 2 + 2^2 = a^{5 \cdot 2} - \; - 4 \cdot a^5 + 4 = a^{10} - 4 \cdot a^5 + 4.$$

13. C. Označimo traženi broj godina s x. Za x godina otac će biti star $52 + x$ godina, a sinovi $24 + + x$ i $18 + x$ godina. Prema uvjetu zadatka mora vrijediti jednakost:

$$52 + x = (24 + x) + (18 + x).$$

Odatle slijedi

$$52 + x = 24 + x + 18 + x,$$

odnosno

$$x - x - x = 24 + 18 - 52,$$

odnosno

$$-x = -10,$$

Odatle je $x = 10$. Doista, za 10 godina otac će biti star 52 + 10 = 62 godine, a sinovi 24 + 10 = = 34 godine i 18 + 10 = 28 godina, pa će otac doista biti star koliko i oba njegova sina zajedno (62 = 34 + 28).

14. D. Bez izračuna bilo kojega od ostalih elemenata odmah vidimo da je duljina D prostorne dijagonale kvadra jednaka duljini brida AB, što je nemoguće jer je kod „nedegeneriranoga“ kvadra duljina prostorne dijagonale nužno strogo veća od duljine bilo kojega brida kvadra. Stoga je veličina D pogrješno izračunana. Radi provjere, izračunajmo sve navedene veličine za $a = 12$ cm, $b = 4$ cm i $c = 3$ cm:

$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) = 2 \cdot (12 \cdot 4 + 12 \cdot 3 + 4 \cdot 3) = 2 \cdot (48 + 36 + 12) = 2 \cdot 96 = 192$ cm^2;

$V = a \cdot b \cdot c = 12 \cdot 4 \cdot 3 = 144$ cm^3;

$d = \sqrt{|BC|^2 + |CG|^2} = \sqrt{|BC|^2 + |AE|^2} = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ cm;

$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{12^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{144 + 16 + 9} = \sqrt{169} = 13$ cm.

15. A. Primijetimo da vrijedi identitet

$$x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x - 1) \cdot (x + 1).$$

Prema pretpostavci je $x \neq \pm 1$, pa je zadani izraz jednak:

$$\frac{2 \cdot (x-2)}{x^2 - 1} - \frac{3}{x+1} = \frac{2 \cdot (x-2)}{(x-1) \cdot (x+1)} - \frac{3}{x+1} = \frac{2 \cdot (x-2)}{(x-1) \cdot (x+1)} - \frac{3 \cdot (x-1)}{(x-1) \cdot (x+1)} = \frac{2 \cdot (x-2) - 3 \cdot (x-1)}{(x-1) \cdot (x+1)} =$$
$$= \frac{2 \cdot x - 4 - 3 \cdot x + 3}{(x-1) \cdot (x+1)} = \frac{-x-1}{(x-1) \cdot (x+1)} = \frac{(-1) \cdot (x+1)}{(x-1) \cdot (x+1)} = \frac{-1}{x-1} = \frac{(-1) \cdot (-1)}{(-1) \cdot (x-1)} = \frac{1}{-x+1} = \frac{1}{1-x}$$

16. C. Neka je a duljina stranice kvadrata. Prema uvjetu zadatka vrijedi $|CE| = |BC| = a$. To znači da je trokut BCE jednakokračan. Kut kod vrha C toga trokuta jednak je

$$\angle BCE = \angle BCD + \angle DCE = 90° + 60° = 150°.$$

Budući da je trokut BCE jednakokračan, kut kod vrha E jednak je kutu kod vrha B jer se nasuprot jednakim stranicama trokuta nalaze jednaki kutovi. Označimo li $x = \angle BEC$, onda iz

$$\angle BEC + \angle BCE + \angle EBC = 180°$$

i

$$\angle BEC = \angle EBC$$

slijedi

$$x + 150° + x = 180°,$$

odnosno

$$2 \cdot x = 180° - 150°,$$

odnosno

$$2 \cdot x = 30°.$$

Odatle je $x = 15°$. Tako iz jednakosti

$$x + \alpha = \angle DEC = 60°$$

uvrštavanjem $x = 15$ dobijemo:

$$\alpha = 60° - x = 60° - 15° = 45°.$$

II. ZADATCI KRATKIH ODGOVORA

17. $-\frac{3}{7}$. Imamo redom:

$$\frac{5}{23}\cdot\left(\frac{3}{7}-2.4\right)=\frac{5}{23}\cdot\left(\frac{3}{7}-\frac{24}{10}\right)=\frac{5}{23}\cdot\left(\frac{3}{7}-\frac{12}{5}\right)=\frac{5}{23}\cdot\left(\frac{3\cdot 5-12\cdot 7}{35}\right)=\frac{5}{23}\cdot\left(\frac{15-84}{35}\right)=\frac{5}{23}\cdot\left(-\frac{69}{35}\right)=$$
$$=-\frac{5\cdot 69}{23\cdot 35}=-\frac{1\cdot 3}{1\cdot 7}=-\frac{3}{7}$$

18. 2.40 kn. Budući da je 28 kn i 40 lipa = 28.40 kn, cijena svih 9 bilježnica iznosi 50 – 28.4 = 21.6 kn. Stoga je cijena jedne bilježnice 21.6 : 9 = 2.40 kn = 2 kn 40 lp.

19. 12 sati i 50 minuta. Do 19. svibnja u 20 sati preostalo je 50 minuta. Do završetka dana (19. svibnja) preostala su 4 sata. Stoga je traženo vrijeme

$$t = 50 \text{ minuta} + 4 \text{ sata} + 8 \text{ sati} = 12 \text{ sati i } 50 \text{ minuta}.$$

20. 72 putnika. Označimo ukupan broj popunjenih mjesta s x, a ukupan broj praznih mjesta s y. Budući da u zrakoplovu ima ukupno 108 mjesta, vrijedi jednakost

$$x + y = 108.$$

Iz uvjeta da na svaka dva popunjena mjesta dolazi po jedno prazno mjesto proizlazi razmjer

$$x : y = 2 : 1.$$

Odatle je

$$x \cdot 1 = 2 \cdot y,$$

odnosno

$$y = \frac{1}{2} \cdot x .$$

Tako smo dobili sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} x + y &= 108 \\ y &= \frac{1}{2} \cdot x \end{aligned}$$

Njega je najbrže riješiti metodom zamjene (supstitucije), tj. tako da se u prvu jednadžbu sustava uvrsti druga. Dobiva se:

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{2} \cdot x &= 108 \,/ \cdot 2 \\ 2 \cdot x + x &= 216 \\ 3 \cdot x &= 216 \\ x &= \frac{216}{3} = 72 \end{aligned}$$

Dakle, u zrakoplovu ima ukupno 72 putnika (i 36 praznih mjesta).

21. 8. Označimo brojnik polaznoga razlomka s x. Tada je nazivnik razlomka $x + 40$. Prema uvjetu zadatka mora vrijediti jednakost:

$$\frac{x}{x + 40} = \frac{2}{7} .$$

Množenjem ove jednadžbe s $7 \cdot (x + 40)$ dobijemo jednadžbu

$$7 \cdot x = 2 \cdot (x + 40),$$

odnosno

$$7 \cdot x = 2 \cdot x + 80,$$

odnosno

$$7 \cdot x - 2 \cdot x = 80,$$

odnosno

$$5 \cdot x = 80.$$

Otuda je $x = 16$. Dakle, polazni razlomak je jednak

$$\frac{16}{16+40}=\frac{16}{56}.$$

Najveći zajednički djelitelj njegova brojnika i nazivnika je $NZD(16,\ 56) = 8$ i s tim brojem valja skratiti polazni razlomak da se dobije razlomak $\frac{2}{7}$.

22. $x_1 = \sqrt{7}+1,\ x_2 = \sqrt{7}-1$. Imamo redom:

$$x_{1,2}=\frac{2\cdot\sqrt{7}\pm\sqrt{\left(2\cdot\sqrt{7}\right)^2-4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1}=\frac{2\cdot\sqrt{7}\pm\sqrt{2^2\cdot\left(\sqrt{7}\right)^2-24}}{2}=\frac{2\cdot\sqrt{7}\pm\sqrt{4\cdot 7-24}}{2}=$$
$$=\frac{2\cdot\sqrt{7}\pm\sqrt{28-24}}{2}=\frac{2\cdot\sqrt{7}\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{2\cdot\sqrt{7}\pm 2}{2}=\frac{2\cdot\sqrt{7}}{2}\pm\frac{2}{2}=\sqrt{7}\pm 1\Rightarrow x_1=\sqrt{7}+1,\ x_2=\sqrt{7}-1$$

23. Vidjeti Sliku 1. Traženi pravac nacrtan je zelenom bojom. Njegova je jednadžba (zapisana u eksplicitnom obliku) $y=\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}$. Zadatak se može riješiti na barem dva različita načina:

I. Konstrukcijski: U priloženi koordinatni sustav ucrtamo točke A, B i M. Povučemo pravac kroz točke A i B. Potom konstruiramo pravac kroz točku M usporedan s pravcem kroz točke A i B (lakši i brži način).

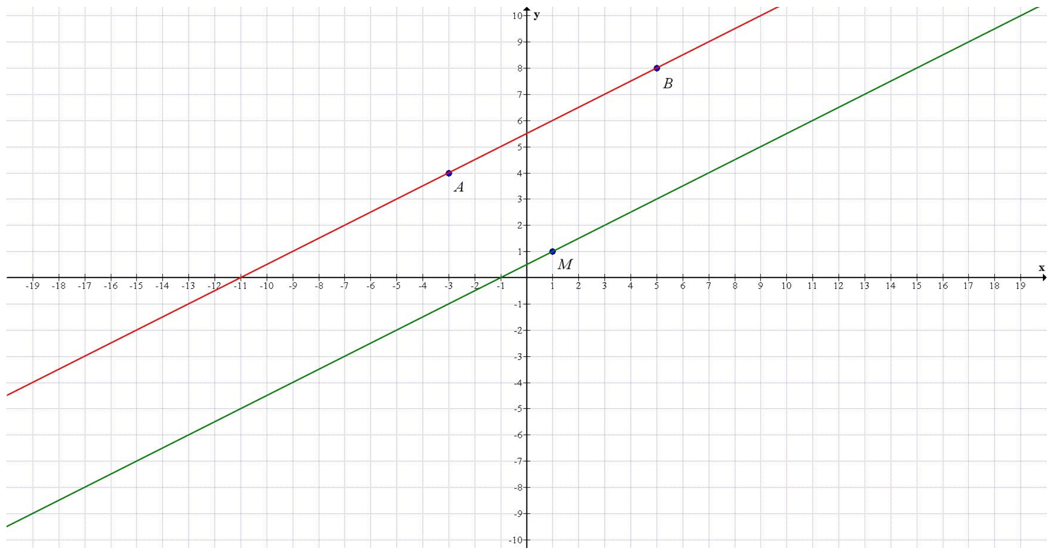
II. Analitički: Koeficijent smjera pravca kroz točke A i B jednak je:

$$k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{8-4}{5-(-3)}=\frac{4}{5+3}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

Budući da je traženi pravac p usporedan s pravcem kroz točke A i B, i njegov je koeficijent smjera jednak $k=\frac{1}{2}$. Koristeći formulu za jednadžbu pravca kojemu je zadan koeficijent smjera i jedna točka dobivamo jednadžbu pravca p:

$$p \ldots y-1=\frac{1}{2}\cdot(x-1)\Rightarrow p\ldots y=\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}+1\Rightarrow p\ldots y=\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}.$$

Osim točke M, taj pravac prolazi npr. točkom $C(-1,\ 0)$. (Točku C dobijemo tako da u jednadžbu pravca p uvrstimo $x = -1$ i izračunamo $y=\frac{1}{2}\cdot(-1)+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$.) Ucrtamo točke M i C u priloženi pravokutni koordinatni sustav u ravnini, te ih spojimo jednim pravcem.



Slika 1.

24. Svota iskazana u dolarima i svota iskazana u kunama su upravno razmjerne veličine s koeficijentom upravne razmjernosti k = 5.7256. Stoga 352.74 USD vrijedi kao i 352.74 · · 5.7256 = 2 019.648144 kn, a 1 000 kuna vrijedi kao i $\frac{1\,000}{5.7256}$ = 174.65418 USD. Izračunane vrijednosti moramo zaokružiti na dvije decimale (jer je najmanja novčana jedinica manja od 1 USD jednaka 1 cent = $\frac{1}{100}$ USD i analogno za HRK), pa konačno dobijemo:

352.74 USD = **2 019.65 kn**
174.65 USD = 1 000 kn.

25. 1.) $\frac{6}{11}$. Iz zadane jednadžbe slijedi:

$$6 - 3 \cdot x = 8 \cdot x,$$

odnosno

$$(-3) \cdot x - 8 \cdot x = -6,$$

odnosno

$$(-11) \cdot x = -6.$$

Odatle je $x = \frac{6}{11}$.

2.) $x \le \frac{28}{5}$ ili $x \in \left\langle -\infty, \frac{28}{5} \right]$. Pomnožimo zadanu nejednadžbu s najmanjim zajedničkim višekratnikom svih razlomaka koji se u njoj pojavljuju, tj. s $NZV(5, 4) = 20$. Dobivamo:

$$4 \cdot (5 \cdot x - 2) - 3 \cdot x \cdot 5 \le 1 \cdot 20,$$

odnosno

$$20 \cdot x - 8 - 15 \cdot x \le 20,$$

odnosno

$$5 \cdot x \le 28.$$

Odatle je $x \le \frac{28}{5}$ ili, ekvivalentno, $x \in \left\langle -\infty, \frac{28}{5} \right]$.

26. 1.) 101.6. U zadanu formulu uvrstimo $x = 40$. Dobivamo:

$$y = 2.54 \cdot 40 = 101.6.$$

Dakle, 40 incha iznosi 101.6 cm.

2.) 0.3937. U zadanu formulu uvrstimo $y = 1$. Dobivamo linearnu jednadžbu

$$1 = 2.54 \cdot x$$

čije rješenje je

$$x = \frac{1}{2.54} = 0.3937 .$$

27. 1.) (–10, –20). Do točke J dolazimo iz točke (0, 0) ili koračajući 10 metara ulijevo, pa 20 metara nadolje ili 20 metara nadolje, pa 20 metara ulijevo. Kretanje prema gore ili udesno bilježimo kao kretanje u pozitivnom smjeru (s predznakom +), a kretanje prema dolje ili ulijevo bilježimo kao kretanje u negativnom smjeru (s predznakom –). Pri pisanju koordinata najprije pišemo koliko smo metara išli ulijevo ili udesno, a potom koliko smo metara išli prema gore ili dolje. Stoga su tražene koordinate točke J jednake $J(-10, 20)$.

2.) $10 \cdot \sqrt{26} \approx 50.9902$. Trebamo izračunati duljinu dužine $\overline{NJ}$. Povucimo kroz točku J pravac usporedan s osi y, a kroz točku N pravac usporedan s osi x. Ti se pravci sijeku u točki $S(-10, 30)$. Trokut NSJ je pravokutan trokut s pravim kutom u točki S, te hipotenuzom $\overline{NJ}$. Duljine kateta toga trokuta su $|NS| = 10$ metara i $|SJ| = 50$ metara. Primjenom Pitagorina poučka na trokut NSJ dobivamo:

$$|NJ| = \sqrt{|NS|^2 + |SJ|^2} = \sqrt{10^2 + 50^2} = \sqrt{100 + 2\ 500} = \sqrt{2\ 600} = \sqrt{100 \cdot 26} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{26} = 10 \cdot \sqrt{26}$$

Stoga je tražena duljina jednaka $10 \cdot \sqrt{26} \approx 50.9902$ m.

3.) 1000. Koristimo iste oznake kao u podzadatku **2.** Površina trokuta *JMN* jednaka je polovici umnoška duljine stranice *MN* i duljine visine na tu stranicu povučene iz vrha *J*. Duljina stranice *MN* jednaka je 40 metara, dok je duljina visine na tu stranicu jednaka duljini dužine *JS*, tj. 50 metara. Stoga je tražena površina jednaka

$$P_{JMN} = \frac{|MN| \cdot |JS|}{2} = \frac{50 \cdot 40}{2} = 1\ 000 \text{ m}^2.$$

28. 1.) 600. Najveći mogući broj bodova dobije se ispravnim odgovaranjem na svih 40 pitanja. Budući da se ispravnim odgovorom na jedno pitanje dobije 15 bodova, traženi broj jednak je $40 \cdot 15 = 600$.

2.) 24. Označimo s x broj pitanja na koja je učenik odgovorio točno, a s y broj pitanja na koja je učenik odgovorio netočno. Budući da je učenik odgovorio na svih 40 pitanja, vrijedi jednakost

$$x + y = 40.$$

Ukupan broj bodova postignutih točnim odgovorima jednak je $15 \cdot x$, dok je ukupan broj negativnih bodova postignutih netočnim odgovorima jednak $5 \cdot y$. Budući da je ukupan broj postignutih bodova jednak 280, mora vrijediti jednakost

$$15 \cdot x - 5 \cdot y = 280,$$

odnosno nakon dijeljenja lijeve i desne strane jednakosti s 5,

$$3 \cdot x - y = 56.$$

Tako smo dobili sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$x + y = 40,$$
$$3 \cdot x - y = 56.$$

Zbrajanjem obiju jednadžbi dobivamo jednadžbu:

$$4 \cdot x = 96,$$

a odatle je $x = 24$. Dakle, učenik je točno odgovorio na 24 pitanja (a netočno na preostalih $40 - 24 = 16$ pitanja).