Usporedba dvaju pristupa
u nastavi poslovne matematike

Milan Papić i Bojan Kovačić, Zagreb

Suvremena nastava poslovne matematike na stručnim i sveučilišnim studijima sve više koristi *MS Excel* kao osnovno pomagalo. U radu se na primjeru nastavne cjeline *Zajam – model otplate nominalno jednakim anuitetima* uspoređuju "klasična" (analitička) metoda i metoda koja u rješavanju zadataka koristi *MS Excel*. Ističe se praktičnost potonje metode i njezina usklađenost s razvojem tehnologije, prije svega informatike i nekih grana ekonomije. Autori smatraju da je optimalan pristup ovoj problematici kombiniranje obiju izloženih metoda.

1. Uvod

Na različitim stručnim studijima ekonomije, koji se izvode na našim veleučilištima i samostalnim visokim školama, jedan od temeljnih predmeta u 1. semestru je poslovna (gospodarska) matematika. Osnovni cilj toga predmeta je upoznati studente s primjenom matematike u gospodarskom poslovanju. U tu se svrhu u predmetu obično obrađuju temeljni gospodarski računi, jednostavni i složeni kamatni račun (s primjenama) te različiti modeli otplate zajma.

Na većini naših veleučilišta i samostalnih visokih škola ovaj se predmet izvodi "klasično", tj. kao predavanja i auditorne vježbe sa standardnim pomagalima (kreda, ploča, projektor itd.). Međutim, razvoj suvremene informatičke tehnologije i njezina primjena u gospodarskom poslovanju nameću uvođenje novih metoda i pristupa u poučavanju poslovne matematike. U srednjoškolskoj nastavi informatike većina učenika uči osnove rada u *MS Excelu*, a te se osnove obično ponavljaju i na 1. godini studija u sklopu predmeta Osnove informatike. I znatan dio poslovnih subjekata u svojem poslovanju koristi *MS Excel*. Zbog toga je ovaj računalni program i praktično i metodički pogodan kao podrška nastavi poslovne matematike.

U ovom ćemo radu na konkretnom primjeru iz tematske jedinice *Model otplate zajma nominalno jednakim anuitetima* usporediti "klasičnu" (analitičku) metodu i metodu koja u rješavanju zadataka koristi *MS Excel*. Pritom ćemo poseban naglasak staviti

mr. sc. Milan Papić, viši predavač, Međunarodno sveučilište Libertas, `milan.papic@libertas.hr`
mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač, Tehničko veleučilište u Zagrebu, `bojan.kovacic@tvz.hr`

Naslovna slika preuzeta sa `https://clarified.com/how-to-center-text-over-multiple-cells-in-ms-excel/`.

na metodičke prednosti i nedostatke svake pojedine metode.

Prije spomenutog primjera navedimo ukratko osnovne pojmove vezane uz zajam i model njegove otplate što ćemo koristiti u radu.

2. Osnovni pojmovi

Osnovne pretpostavke ovog modela su sljedeće:

a) obračun kamata je složen i dekurzivan
b) anuiteti (rate) su jednaki i dospijevaju u jednakim vremenskim jedinicama krajem razdoblja
c) razdoblje ukamaćivanja jednako je vremenskom razdoblju između dvaju uzastopnih anuiteta
d) kamatna stopa je konstantna u cijelom razdoblju otplate (amortizacije) zajma.

Oznake kojima ćemo se koristiti su sljedeće:

C_0 – ukupan nominalni (odobreni) iznos zajma

n – ukupan rok otplate zajma, a ujedno i ukupan broj anuiteta

p – (konstantna) dekurzivna kamatna stopa

a_k – iznos anuiteta na kraju k-toga razdoblja

I_k – iznos kamata na kraju k-toga razdoblja

I – iznos ukupnih kamata

R_k – iznos otplatne kvote (dijela nominalnoga iznosa zajma) na kraju k-toga razdoblja

C_k – ostatak nominalnoga iznosa zajma (duga) na kraju k-toga razdoblja.

Dodatno definiramo dekurzivni kamatni faktor s:

$$r = 1 + \frac{p}{100}$$

Može se pokazati da među navedenim veličinama vrijede sljedeće relacije:

$$a = C_0 \cdot \frac{r^n \cdot (r-1)}{r^n - 1}$$
$$I_k = \frac{p}{100} \cdot C_{k-1}, \quad \forall k = 1, \ldots, n$$
$$R_k = a - I_k, \quad \forall k = 1, \ldots, n$$
$$C_k = C_{k-1} - R_k, \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

Izvode ovih relacija ovdje izostavljamo, a mogu se naći npr. u [1] i [2].

Plan otplate (amortizacije) zajma pregledno prikazujemo otplatnom tablicom (vidjeti tablicu 1).

k	a_k	I_k	R_k	C_k
0	–	–	–	C_0
1	a	I_1	R_1	C_1
2	a	I_2	R_2	C_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	a	I_{n-1}	R_{n-1}	C_{n-1}
n	a	I_n	R_n	0
$\sum$	$n \cdot a$	I	C_0	

Tablica 1. Opći oblik otplatne tablice zajma

3. Primjer

(Prema primjeru iz [3].) Napravimo plan otplate za zajam od 200 000 kn uz složen i dekurzivan obračun kamata te nominalno jednake anuitete koji se plaćaju krajem svake od sljedećih pet godina uz godišnju kamatnu stopu 5 %. Izvršimo i provjeru.

3.1. Analitičko rješenje primjera

Iz podataka u zadatku slijedi:

$$C_0 = 200\,000.00 \text{ kn}$$
$$n = 5$$
$$p = 5 \implies r = 1 + \frac{5}{100} = 1.05.$$

Iznos svakoga od pet nominalno jednakih anuiteta jednak je:

$$a = C \cdot \frac{r^n \cdot (r-1)}{r^n - 1} = 200\,000.00 \cdot \frac{1.05^5 \cdot (1.05-1)}{1.05^5 - 1}$$
$$\approx 46\,194.9596 \text{ kn}.$$

Taj iznos zaokružujemo na dvije decimale:

$$a = 46\,194.96 \text{ kn}.$$

Potom računamo kamatu u prvoj godini otplate zajma:

$$I_1 = \frac{p}{100} \cdot C_0 = \frac{5}{100} \cdot 200\,000.00 = 10\,000.00 \text{ kn.}$$

Otplatna kvota u prvoj godini zajma iznosi:

$$\begin{aligned} R_1 &= a - I_1 = 46\,194.96 - 10\,000.00 \\ &= 36\,194.96 \text{ kn.} \end{aligned}$$

Ostatak zajma na kraju prve godine iznosi:

$$\begin{aligned} C_1 &= C_0 - R_1 = 200\,000.00 - 36\,194.96 \\ &= 163\,805.04 \text{ kn.} \end{aligned}$$

Na potpuno analogan način računamo kamate, otplatnu kvotu i ostatak zajma za svaku sljedeću godinu. Izračunate vrijednosti upisujemo u otplatnu tablicu. Dobivamo tablicu 2.

k	a_k	I_k	R_k	C_k
0	–	–	–	200 000.00
1	46 194.96	10 000.00	36 194.96	163 805.04
2	46 194.96	8190.25	38 004.71	125 800.33
3	46 194.96	6290.02	39 904.94	85 895.39
4	46 194.96	4294.77	41 900.19	43 995.20
5	46 194.96	2199.76	43 995.20	0.00
$\sum$	230 974.80	30 974.80	200 000.00	

Tablica 2. Otplatna tablica u primjeru

Istaknimo da posljednji redak tablice, u kojem su izračunani zbrojevi iznosa u stupcima, služi za provjeru točnosti cijelog postupka. Naime, ukupan iznos svih anuiteta mora biti jednak zbroju iznosa ukupnih kamata i iznosa zajma. Doista,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{5} a_k &= 230\,974.80 = 30\,974.80 + 200\,000.00 \\ &= \sum_{k=1}^{5} I_k + \sum_{k=1}^{5} R_k = \sum_{k=1}^{5} I_k + C_0. \end{aligned}$$

Napomena. Zbog zaokruživanja izračunanih vrijednosti na dvije decimale moguća su neznatna odstupanja. Ona se mogu tolerirati. Želimo li potpuno precizne rezultate, morali bismo računati vrijednosti u tablici s većom točnošću, odnosno na više decimala.

3.2. Rješenje primjera 1 *MS Excelom*

Iznos svakoga anuiteta izračunat ćemo koristeći se funkcijom PMT. Naziv te funkcije potječe od engleske riječi *payment* (plaćanje). Njezina sintaksa je:

=PMT(kamatna_stopa;broj_anutiteta;iznos_zajma;[konačni_dug];[tip_anuiteta])

Napomenimo da posljednja dva ulazna podatka možemo izostaviti, odnosno ne moramo ništa upisivati. Naime, konačni dug nakon isplate svih anuiteta jednak je 0, a *MS Excel* prema deklariranim postavkama (engl. *default*) pretpostavlja da anuiteti dospijevaju krajem razdoblja.

Istaknimo da je rezultat primjene ove funkcije strogo negativan. To je posljedica pretpostavke da se radi o dugu koji moramo podmiriti. Negativnoga predznaka možemo se riješiti množenjem sa (-1), korištenjem funkcije ABS koja računa apsolutnu vrijednost realnoga broja itd. Za detalje, kao i detalje vezane uz osnove korištenja *MS Excela* pogledajte npr. [4].

Otvorimo novi radni list *MS Excela*. Unesimo zadane podatke u ćelije A1:A5 (vidjeti sliku 1.)

	A
1	Primjer 1.
2	C = 200.000,00 kn
3	n = 5 godina
4	način otplate: jednaki anuiteti
5	p = 5% (godišnja)

Slika 1. Unos podataka u radni list *MS Excela*

Izračunajmo iznos anuiteta. Odaberimo ćeliju B9. U tu ćeliju upišemo:

=PMT(5 %;5;200000)

Pritisnemo *Enter*, pa ćemo dobiti: $-46\,194.96$. Da bismo se riješili negativnoga predznaka, u ćeliju C9 upišimo:

=ABS(B9)

Pritisnemo *Enter*, pa ćemo dobiti: 46 194.96 (vidjeti sliku 2.)

	A	B	C
8			
9	anuitet	-46.194,96	46.194,96

Slika 2. Izračunavanje anuiteta

Formiramo otplatnu tablicu. Ona će se nalaziti u bloku ćelija D11:H18.

Popunimo najprije prvi redak (blok ćelija D11:H11). U ćeliju D11 upišimo: k. U ćelije E11, F11, G11 i H11 upišimo redom: a, I_k, R_k, C_k. Time je prvi redak tablice popunjen.

Popunimo preostala polja u prvom stupcu. U ćelije D12, D13, . . . , D17 upišimo redom 0, 1, . . . , 5. U ćeliju D18 upišimo znak $\sum$ (nađemo ga u tablici simbola). Time je prvi stupac popunjen.

Blok ćelija E12:G12 ostavljamo praznim. U ćeliju H12 upišimo iznos zajma: $200\,000$. Popunimo drugi stupac. U svaku od ćelija bloka E13:E17 prekopirajmo iznos anuiteta iz ćelije C9. To najbrže možemo napraviti tako da kliknemo na ćeliju C9, istovremeno pritisnemo tipke Ctrl i C, mišem označimo blok E13:E17 i primijenimo funkciju *Paste Special/Posebno lijepljenje*. Primjena ove funkcije je nužna jer smo anuitet izračunali koristeći se funkcijom s relativnom (nefiksiranom) adresom ćelije B9. Ako bismo u ćeliju C9 upisali:

=ABS(B9)

onda bismo se mogli koristiti funkcijom *Paste/Zalijepi*. Navedena primjedba vrijedi i za druge analogne situacije.

Kamatu za prvu godinu računamo u ćeliji F13. U tu ćeliju upišemo:

=H12*5/100

Otplatnu kvotu za prvu godinu računamo u ćeliji G13. U tu ćeliju upišemo:

=E13-F13

Ostatak duga na kraju prve godine računamo u ćeliji H13. U tu ćeliju upišemo:

=H12-G13

Sada označimo blok ćelija F13:H13. Postavimo miš u donji desni kut označenih ćelija (tako da pokazivač miša bude +). Kopiramo označeni blok ćelija povlačenjem miša do ćelije H17.

Preostaje popuniti posljednji redak. Zbrojimo anuitete, kamate i otplatne kvote koristeći se funkcijom SUM ili ikonicom $\sum$.

Izvršimo provjeru. Zbrojimo iznose dobivene u ćelijama F18 i G18. Zbroj treba biti jednak iznosu dobivenom u ćeliji E18.

Na opisani način dobivamo sljedeću tablicu (vidjeti sliku 3.).

	C	D	E	F	G	H	I
10							
11		k	a_k	I_k	R_k	C_k	
12		0	-	-	-	200.000,00	
13		1	46.194,96	10.000,00	36.194,96	163.805,04	
14		2	46.194,96	8.190,25	38.004,71	125.800,33	
15		3	46.194,96	6.290,02	39.904,94	85.895,39	
16		4	46.194,96	4.294,77	41.900,19	43.995,20	
17		5	46.194,96	2.199,76	43.995,20	0,00	
18		Σ	230.974,80	30.974,80	200.000,00		
19							
20		Provjera:	=G18+F18				
21							

Slika 3. Rješenje primjera *MS Excelom*

4. Zaključak

Uočavamo da smo primjer koristeći se *MS Excelom* riješili bitno brže negoli analitički. Izbjegli smo i problem odstupanja na koji smo upozorili u napomeni na kraju točke 3.1. Razlog za to je izračunavanje podataka s bitno većom točnošću negoli u točki 3.1. Pritom treba upozoriti da se točnost izračunavanja podataka ne smije poistovjetiti s načinom prikaza podataka u tablici (oblikovanjem ćelije). Npr. ako je izračunana vrijednost 1234.56789, onda ćelija u kojoj je dobiven taj broj može biti oblikovana tako da prikaz izračunane vrijednosti bude 1234.57, ali se u svim izračunima koristi točna vrijednost 1234.56789.

Kritičari korištenja *MS Excela*, odnosno, općenito korištenja računalnih programa u nastavi poslovne matematike, kao najveći nedostatak te metode navode nerazumijevanje izračuna koji se provode pri izradi otplatne tablice, odnosno veza među veličinama koje se pojavljuju u toj tablici. Oni taj nedostatak najčešće argumentiraju tvrdeći da je zapravo dovoljno popuniti redak tablice koji se odnosi na prvo otplatno razdoblje, a potom prekopirati izračune u retke koji se odnose na ostala otplatna razdoblja, čime se zapravo izbjegava promatranje veza ostalih veličina u tablici. Takvo razmišljanje je opravdano ako se naglasak stavi isključivo na izračunavanje iznosa, a ne na *razumijevanje* cijeloga postupka. U postupku opisanom u točki 3.2. student treba znati i *razumjeti* ne samo veze među veličinama u tablici, nego i način rada u *MS Excelu* (što zapravo znači prekopirati formulu upisanu u neku ćeliju, kakva je razlika između relativne i apsolutne adrese itd.). U tom smislu je postupak opisan u točki 3.1. značajno jednostavniji.

Međutim, isti je postupak vrlo dugotrajan i spor u slučajevima iz svakodnevne poslovne prakse. Takav je npr. slučaj kad treba sastaviti plan otplate stambenoga kredita u iznosu od 100 000.00 € na 30 godina uz godišnju kamatnu stopu 5.25 % i plaćanje nominalno jednakih mjesečnih anuiteta krajem mjeseca. U tom slučaju treba izračunati ukupno 1080 vrijednosti (bez provjere ispravnosti!). U tako opsežnom poslu vjerojatnost pogreške u barem jednom provedenom izračunu nije nimalo zanemariva. Uz sve navedeno, kao pedagoški radnici trebamo utjecati na naše studente da razvijaju ekološku svijest o očuvanje šuma kroz uštedu papira. Zbog toga je u takvim slučajevima praktički nužno koristiti neki pogodno odabrani računalni program.

Smatramo da je optimalan pristup ovoj problematici kombiniranje obiju izloženih metoda. Nastava iz poslovne matematike podijeljena je na predavanja i auditorne vježbe, pri čemu fond sati predavanja najčešće odgovara fondu sati auditornih vježbi. Na predavanjima bi naglasak trebalo staviti na "teoriju", odnosno na definiranje potrebnih pojmova/veličina i *razumijevanje* njihovih međusobnih odnosa, tim više što su ti odnosi opisani sustavom rekurzivnih relacija. Uz na taj način obrađenu "teoriju", rješavanje praktičnih zadataka na vježbama uz korištenje računalnih programa zasigurno će ispuniti osnovni cilj predmeta, odnosno upoznati studente s primjenom matematike u gospodarskom poslovanju.

LITERATURA

1/ M. Papić (2014.): *Poslovna matematika uz primjenu MS Excela*, Likarija, Tounj.

2/ B. Relić (1996.): *Gospodarska matematika*, Hrvatska zajednica računovođa i financijskih djelatnika, Zagreb.

3/ B. Kovačić, B. Radišić (2011.): *Zbirka zadataka iz gospodarske matematike*, Školska knjiga, Zagreb.

4/ B. Plazibat, S. Jerčić (2003.): *Informatika*, Veleučilište u Splitu, Split.