

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (stručni prijediplomski studij elektrotehnike)	zadaci za ponavljanje gradiva 13. 1. 2024.
--	---	---

1. Odredite vjerojatnost da u jednom kolu LOTO 7/35 svi izvučeni brojevi budu **složeni**. Izrazite dobiveni rezultat u postotcima i zaokružite ga na dvije decimale.

Napomena: Broj 1 nije ni prost, ni složen.

Rješenje: Ukupan broj mogućih ishoda jednak je ukupnom broju različitih sedmeročlanih podskupova 35-članoga skupa. Taj je broj jednak $\binom{35}{7}$.

Svi ne-složeni brojevi iz skupa $[35] := \{1, 2, \dots, 34, 35\}$ tvore skup

$$S = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\}.$$

Ima ih ukupno 12. Zbog toga se u skupu $[35]$ nalaze ukupno

$$35 - 12 = 23$$

složena broja.

Zaključujemo da je ukupan broj svih povoljnih ishoda jednak ukupnom broju različitih sedmeročlanih podskupova 23-članoga skupa. Taj je broj jednak $\binom{23}{7}$.

Tako slijedi da je tražena vjerojatnost jednaka:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\binom{23}{7}}{\binom{35}{7}} = \\ &= \frac{1311}{35\ 960} \approx 0.03646 \approx 3.65\%. \end{aligned}$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRBIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (stručni prijediplomski studij elektrotehnike)	zadaci za ponavljanje gradiva 13. 1. 2024.
---	---	---

2. Odredite vjerojatnost da u jednom kolu LOTO 6/45 **barem jedan** izvučeni broj bude neparan. (Dopunski broj zanemarujemo.) Izrazite dobiveni rezultat u postotcima i zaokružite ga na dvije decimale.

Rješenje: Neka je

$$A = \{\text{barem jedan izvučeni broj je neparan}\}.$$

Tada je:

$$A^C = \{\text{svi izvučeni brojevi su parni}\}.$$

Ukupan broj mogućih ishoda jednak je ukupnom broju različitih šesteročlanih podskupova 45-članoga skupa. Taj je broj jednak $\binom{45}{6}$.

U skupu $[45] := \{1, 2, \dots, 44, 45\}$ ima ukupno 22 parna broja. To su 2, 4, ..., 42 i 44. Zbog toga je ukupan broj ishoda **povoljnih za A^C** jednak ukupnom broju različitih šesteročlanih podskupova 22-članoga skupa. Taj je broj jednak $\binom{22}{6}$.

Tako zaključujemo da je tražena vjerojatnost jednak:

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A^C) = \\ &= 1 - \frac{\binom{22}{6}}{\binom{45}{6}} = \\ &= \frac{34\ 937}{35\ 260} \approx 0.99083 \approx 99.08\%. \end{aligned}$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (stručni prijediplomski studij elektrotehnike)	zadaci za ponavljanje gradiva 13. 1. 2024.
---	---	---

3. Ako se odreknete znanja i džokera, pa odgovore na posljednja četiri pitanja u kvizu *Tko želi biti milijunaš?* odlučite pogadati slučajno i nezavisno, kolika je vjerojatnost da će ste postati milijunaš?

Podsjetnik: Na svako pitanje ponuđena su točno četiri odgovora od kojih je točno jedan ispravan.

Rješenje: Vjerojatnost da ćemo ispravno odgovoriti na *svako* pitanje jednaka je $\frac{1}{4}$.

Zbog pretpostavljene nezavisnosti događaja, tražena je vjerojatnost jednaka:

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \\
 &= \frac{1}{4^4} \\
 &= \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256}.
 \end{aligned}$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABRIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (stručni prijediplomski studij elektrotehnike)	zadaci za ponavljanje gradiva 13. 1. 2024.
--	---	---

4. Kolika je vjerojatnost da će, ako budu pogađali, i natjecatelj i lovac u kvizu *Potjera* pogrešno odgovoriti na prvo pitanje?

Podsjetnik: Na svako pitanje ponuđena su točno tri odgovora od kojih je točno jedan ispravan. Natjecatelj i lovac odgovaraju na pitanje nezavisno jedan o drugom.

Rješenje: Bez smanjenja općinitosti možemo pretpostaviti da su odgovori označeni slovima A , B i C , te da je ispravan odgovor označen slovom A . (Ako nije, jednostavno označimo odgovore tako da ispravan odgovor bude označen tim slovom.)

Odgovore natjecatelja i lovca možemo modelirati uređenim parovima (N, L) , pri čemu su $N, L \in \{A, B, C\}$. Ukupan broj mogućih ishoda jednak je ukupnom broju navedenih uređenih parova, tj. $3 \cdot 3 = 9$.

Povoljne ishode možemo modelirati uređenim parovima (N, L) , pri čemu su $N, L \in \{B, C\}$. Ukupan broj povoljnih ishoda jednak je ukupnom broju tih uređenih parova, tj. $2 \cdot 2 = 4$.

Tako zaključujemo da je tražena vjerojatnost jednaka

$$p = \frac{4}{9}.$$

5. Na slučajan način biramo točno jedan broj x iz intervala $[0, 2 \cdot \pi]$. Izračunajte vjerojatnost da za izabrani broj vrijedi nejednakost

$$2 \cdot \sin(2 \cdot x) - 1 < 0.$$

Rješenje: Primjenit ćemo geometrijsku vjerojatnost. U ovome je slučaju $\Omega = [0, 2 \cdot \pi]$, pa je njegova mjera

$$m(\Omega) = 2 \cdot \pi - 0 = 2 \cdot \pi.$$

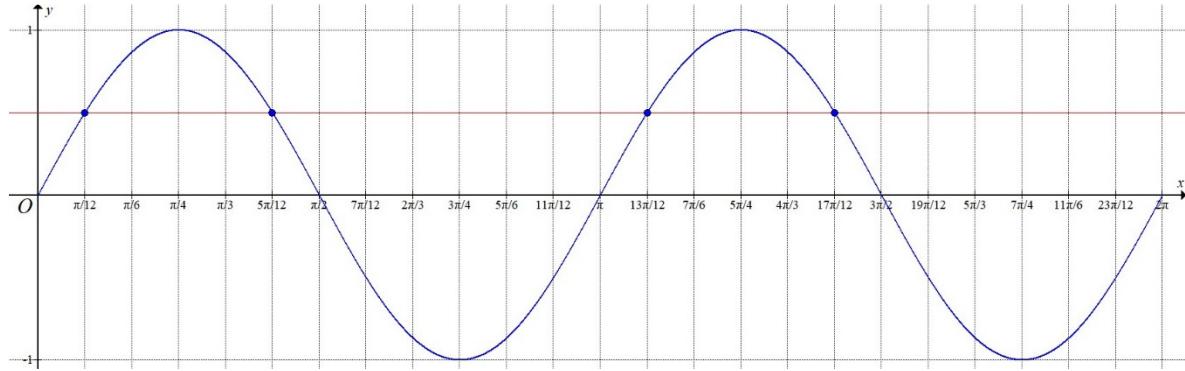
Zadana nejednakost je ekvivalentna nejednakosti

$$\sin(2 \cdot x) < \frac{1}{2}.$$

Zbog toga nacrtajmo graf (harmonijske) funkcije

$$h(x) = \sin(2 \cdot x)$$

na segmentu $[0, 2 \cdot \pi]$. (Ovdje smo skup Ω „proširili“ dodajući mu broj $2 \cdot \pi$, ali taj postupak nema utjecaja na konačan rezultat.) Dobivamo donju sliku.



Slika 1.

Skup svih rješenja jednadžbe $\sin(2 \cdot x) = \frac{1}{2}$ na intervalu $[0, 2 \cdot \pi]$ je:

$$S = \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{5}{12} \cdot \pi, \frac{13}{12} \cdot \pi, \frac{17}{12} \cdot \pi \right\}.$$

Zbog toga je skup svih povoljnih ishoda

$$A = \left[0, \frac{\pi}{12} \right) \cup \left(\frac{5}{12} \cdot \pi, \frac{13}{12} \cdot \pi \right) \cup \left(\frac{17}{12} \cdot \pi, 2 \cdot \pi \right).$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (stručni prijediplomski studij elektrotehnike)	zadaci za ponavljanje gradiva 13. 1. 2024.
---	---	---

Mjera toga skupa jednaka je:

$$\begin{aligned}
 m(A) &= \left(\frac{\pi}{12} - 0 \right) + \left(\frac{13}{12} \cdot \pi - \frac{5}{12} \cdot \pi \right) + \left(2 \cdot \pi - \frac{17}{12} \cdot \pi \right) = \\
 &= \frac{\pi}{12} + \frac{8}{12} \cdot \pi + \frac{7}{12} \cdot \pi = \\
 &= \frac{16}{12} \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot \pi.
 \end{aligned}$$

Tako je tražena vjerojatnost jednaka:

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \\
 &= \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = \\
 &= \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

6. Na slučajan način biramo dva broja iz segmenta $[0,4]$. Odredite vjerojatnost da će zbroj njihovih kvadrata biti strogog manji od 16.

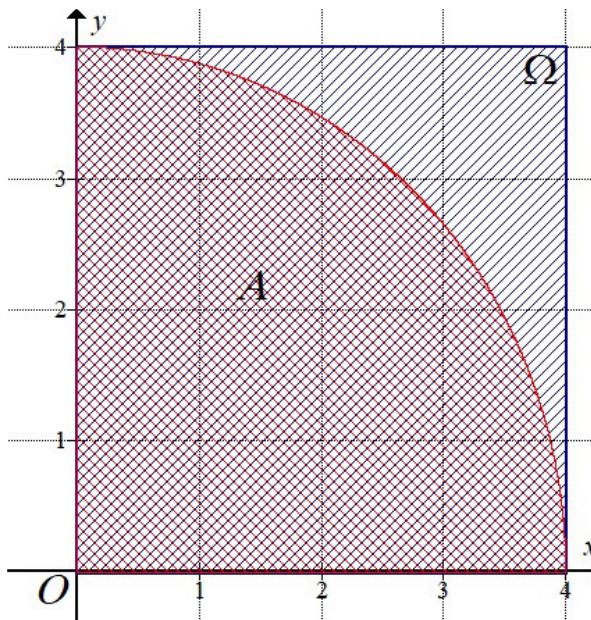
Rješenje: U ovome su slučaju skup svih mogućih ishoda

$$\Omega = \{(x, y) : x, y \in [0, 4]\}$$

i skup svih povoljnijih ishoda

$$A = \{(x, y) \in \Omega : x^2 + y^2 < 16\}.$$

Prikažimo te skupove u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo donju sliku.



Slika 2.

(Kružnica $x^2 + y^2 = 16$ je skup mjere 0, pa za određivanje vjerojatnosti nije važno je li ona dio skupa A .)

Tako zaključujemo da je tražena vjerojatnost jednaka:

$$\begin{aligned} p &= \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \\ &= \frac{\frac{1}{4} \cdot 4^2 \cdot \pi}{4^2} = \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRAEENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (stručni prijediplomski studij elektrotehnike)	zadaci za ponavljanje gradiva 13. 1. 2024.
---	---	---

7. Vjerojatnost da će profesor Matkić pri izlasku iz kuće ponijeti svoj kišobran iznosi 90%. Statistički podaci pokazuju da kiša pada u 70% dana u kojima profesor poneše kišobran te u 20% dana u kojima profesor ne poneše kišobran. Na slučajan način biramo točno jedan dan.

- a) Izračunajte vjerojatnost da je toga dana padala kiša. **Obavezno** izrazite dobiveni rezultat u **postotcima**.
- b) Ako znamo da je toga dana padala kiša, izračunajte vjerojatnost da profesor istoga dana nije ponio svoj kišobran. **Obavezno zaokružite** dobiveni rezultat **na dvije decimale**, pa ga izrazite u **postotcima**.

Rješenje: Neka su:

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\text{profesor je ponio kišobran}\}, \\ H_2 &= \{\text{profesor nije ponio kišobran}\}, \\ A &= \{\text{padala je kiša}\}. \end{aligned}$$

Iz podataka u zadatku proizlaze sljedeće vjerojatnosti:

$$\begin{aligned} P(H_1) &= 90\%, & P(A|H_1) &= 70\%, \\ P(H_2) &= 1 - P(H_1) = 1 - 90\% = 10\%, & P(A|H_2) &= 20\%, \end{aligned}$$

- a) Treba izračunati vjerojatnost $P(A)$. Primjenom formule potpune vjerojatnosti dobivamo:

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^2 P(H_i) \cdot P(A|H_i) = \\ &= 0.9 \cdot 0.7 + 0.1 \cdot 0.2 = \\ &= 0.65 = 65\%. \end{aligned}$$

- b) Treba izračunati vjerojatnost $P(H_2|A)$. Primjenom Bayesove formule dobivamo:

$$\begin{aligned} P(H_2|A) &= \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(A)} = \\ &= \frac{0.1 \cdot 0.2}{0.65} = \\ &= \frac{0.02}{0.65} = \\ &= \frac{2}{65} \approx 0.03 = 3\%. \end{aligned}$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (stručni prijediplomski studij elektrotehnike)	zadaci za ponavljanje gradiva 13. 1. 2024.
--	---	---

8. Žarulje se proizvode u točno tri pogona. Udjeli proizvodnje prvoga, odnosno drugoga pogona u ukupnoj proizvodnji iznose redom 40% i 25%. 10% od ukupnoga broja svih žarulja proizvedenih u prvom pogonu tvore neispravne žarulje. Analogni postotci za drugi, odnosno treći pogon iznose redom 5% i 8%. Na slučajan način izaberemo jednu žarulju.

- a) Izračunajte vjerojatnost da je izabrana žarulja neispravna. **Obavezno** izrazite dobiveni rezultat u **postotcima bez zaokruživanja decimala**.
- b) Ako smo utvrdili da je izabrana žarulja neispravna, izračunajte vjerojatnost da je ona proizvedena u trećem pogonu. **Obavezno zaokružite dobiveni rezultat na dvije decimalne**, pa ga potom izrazite u **postotcima**.

Rješenje: Neka su:

$$H_i := \{\text{žarulja je proizvedena u } i\text{-tom pogonu}\}, \text{ za } i = 1, 2, 3, \\ A = \{\text{žarulja je neispravna}\}.$$

Tada je $\{H_1, H_2, H_3\}$ potpun sustav događaja. Iz zadanih podataka zaključujemo:

$$\begin{aligned} P(H_1) &= 40\%, & P(A|H_1) &= 10\%, \\ P(H_2) &= 25\%, & P(A|H_2) &= 5\%, \\ P(H_3) &= 100\% - (40\% + 25\%) = 35\%, & P(A|H_3) &= 8\%. \end{aligned}$$

- a) Treba izračunati vjerojatnost $P(A)$. Primjenom formule potpune vjerojatnosti dobivamo:

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^3 P(H_i) \cdot P(A|H_i) = \\ &= 0.4 \cdot 0.1 + 0.25 \cdot 0.05 + 0.35 \cdot 0.08 = \\ &= 0.0805 = 8.05\%. \end{aligned}$$

- b) Treba izračunati vjerojatnost $P(H_3 | A)$. Primjenom Bayesove formule dobivamo:

$$\begin{aligned} P(H_3 | A) &= \frac{P(H_3) \cdot P(A|H_3)}{P(A)} = \\ &= \frac{35\% \cdot 8\%}{8.05\%} = \\ &= \frac{8}{23} \approx 35\%. \end{aligned}$$