TVŽ TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	**Vjerojatnost i statistika** (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	**zadaci za 3. grupne konzultacije 20.11.2018.**

1. Kate i William žive skladno u dugom i sretnom braku. Kate danas ima 70 godina, a William 75 godina. Vjerojatnost da će Kate doživjeti 80 godina iznosi 50%, dok vjerojatnost da će William doživjeti 85 godina iznosi 40%. Uz pretpostavku nezavisnosti starosti obiju osoba, izračunajte vjerojatnost sljedećih događaja:

a) $A = \{$barem jedno od njih dvoje bit će živ za točno 10 godina računajući od danas$\}$;

b) $B = \{$samo William će biti živ za točno 10 godina računajući od danas$\}$.

Rezultati: **a)** $P(A) = \frac{7}{10} = 0.7$, **b)** $P(B) = \frac{1}{5} = 0.2$.

2. Luka Modrić, Miralem Pjanić i Ivan Rakitić nezavisno izvode točno jedan slobodan udarac prema golu Lovre Kalinića. Vjerojatnosti postizanja zgoditka iznose redom 80%, 90% i 70%. Izračunajte vjerojatnost da će Kalinić obraniti barem dva udarca.

Rezultat: $p = \frac{49}{50} = 0.098$.

3. Administrator Miroslav nadgleda rad triju međusobno nezavisnih poslužitelja. Vjerojatnosti da u tijeku jednoga dana neće biti potrebe za intervencijom na pojedinom poslužitelju iznose redom 95%, 90% i 85%. Izračunajte vjerojatnosti sljedećih događaja:

a) $A = \{$bit će potrebna intervencija na točno jednom poslužitelju$\}$;

b) $B = \{$ni na jednom poslužitelju neće biti potrebna intervencija$\}$.

Rezultati: **a)** $P(A) = \frac{41}{125} = 0.328$; **b)** $P(B) = \frac{2907}{4000} = 0.72675$.

4. Dario Šarić izvodi slobodna bacanja nezavisno jedno za drugim. Vjerojatnost ubačaja u koš za svako pojedino slobodno bacanje iznosi 80%. Koliko najmanje slobodnih bacanja treba izvesti Dario tako da vjerojatnost ubačaja barem jednoga koša bude najmanje 95%?

Rezultat: $n = 2$.

5. Bojan Bogdanović i Kruno Simon nezavisno gađaju „trice". Vjerojatnost da Bojan pogodi „tricu" iznosi 80%. Vjerojatnost da Kruno pogodi „tricu" iznosi 75%. Bojan smije uputiti točno tri šuta prema košu. Koliko najmanje šuteva treba uputiti Kruno tako da vjerojatnost ubačaja barem jedne „trice" bude najmanje 90%?

Rezultat: $n = 2$.

6. Lionel Messi nezavisno izvodi ukupno šest slobodnih udaraca prema golu Thibauta Courtoisa, s vjerojatnošću postizanja zgoditka od 20%. Izračunajte vjerojatnosti sljedećih događaja:

a) $A = \{\text{Messi će postići točno tri zgoditka}\}$;
b) $B = \{\text{Messi će postići barem dva zgoditka}\}$;
c) $C = \{\text{Messi neće postići nijedan zgoditak}\}$.

Rezultati: **a)** $P(A) = \frac{192}{3125} = 0.06144$; **b)** $P(B) = \frac{1077}{3125} = 0.34464$, **c)** $P(C) = \frac{4096}{15625} = 0.262144$.

7. U doigravanju NBA lige sastaju se košarkaši Miami Heata i Indiana Pacersa. Potrebno je odigrati onoliko utakmica sve dok točno jedna momčad ne ostvari četiri pobjede. Svaka utakmica mora završiti pobjedom jedne momčadi (tj. nema neriješenoga ishoda). Kladioničari prognoziraju da vjerojatnost pobjede Miami Heata u svakoj utakmici iznosi 51%. Sve utakmice su međusobno nezavisne i „nenamještene“. Izračunajte vjerojatnost sljedećih događaja:

a) $A = \{\text{Miami Heat će pobijediti u doigravanju}\}$;
b) $B = \{\text{Indiana Pacersi neće pobijediti ni u jednoj utakmici}\}$;
c) $C = \{\text{Miami Heat će pobijediti u točno dvije utakmice}\}$.

Rezultati: **a)** $P(A) \approx 0.75562$; **b)** $P(B) \approx 0.06765$; **c)** $P(C) \approx 0.22491$.

8. Ispit se sastoji od 10 pitanja. Uz svako pitanje navedena su točno četiri odgovora, od kojih je samo jedan točan. Ispitanik je položio ispit ako je točno odgovorio na barem polovicu svih postavljenih pitanja. Nevesinko nije naučio ispitno gradivo, pa uz svako pitanje slučajno i nezavisno zaokružuje točno jedan od ponuđenih odgovora. Izračunajte vjerojatnost da će Nevesinko uspjeti položiti ispit.

Rezultat: $p = \frac{40961}{524288} \approx 0.07813$.

9. Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ konačan vjerojatnosni prostor takav da je $\text{card}(\Omega) = p$ prost broj. Dokažite da tada ne postoje događaji $A, B \subset \Omega$ takvi da su A i B nezavisni.

Rješenje: Iz pretpostavke $A, B \subset \Omega$ slijedi $\text{card}(A), \text{card}(B) < \text{card}(\Omega) = p$. Zahtjev $P(A \mid B) = P(A)$ ekvivalentan je jednakosti $\frac{\text{card}(A \mid B)}{\text{card}(B)} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$. Odatle slijedi $\text{card}(\Omega) \cdot \text{card}(A \mid B) = \text{card}(A) \cdot \text{card}(B)$ pa p mora dijeliti umnožak $\text{card}(A) \cdot \text{card}(B)$, odnosno umnožak dvaju prirodnih brojeva strogo manjih od p. To je nemoguće jer je p, prema pretpostavci, prost broj, pa ne može dijeliti umnožak dvaju prirodnih brojeva strogo manjih od njega.