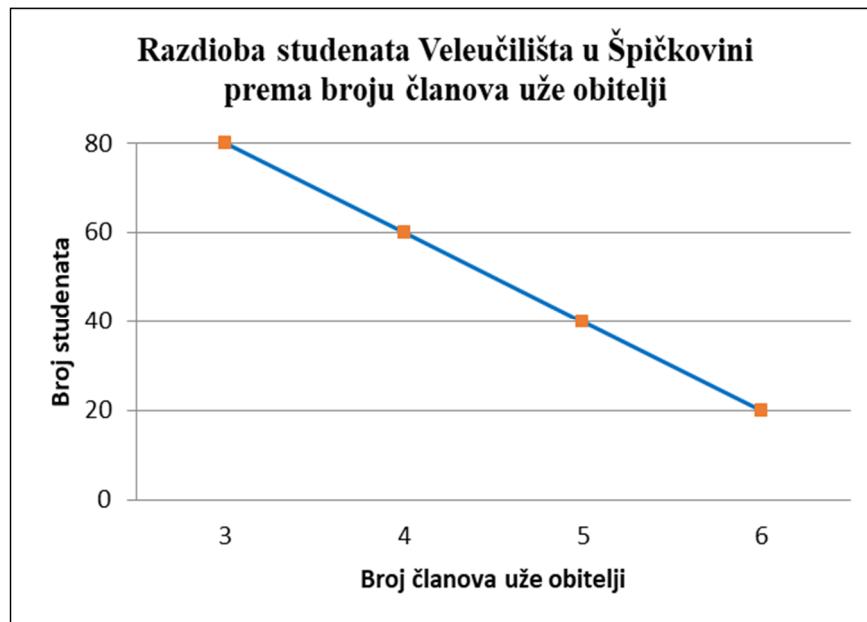


 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (stručni prijediplomski studij elektrotehnike)	Opisna statistika – zadaci za ponavljanje gradiva
--	---	--

1. Zadana je razdioba svih studenata Veleučilišta u Špičkovini u ak. god. 2022./2023. prema broju članova uže obitelji.



Slika 1.

Odredite pripadni:

- a) koeficijent varijacije;
- b) koeficijent kvartilne devijacije.

Objasnite značenje svakoga od tih dvaju pokazatelja.

Rješenje: a) Iz zadanoga grafičkoga prikaza očitamo:

$$x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 5, x_4 = 6, \\ f_1 = 80, f_2 = 60, f_3 = 40, f_4 = 20.$$

Da bismo odredili koeficijent varijacije, najprije trebamo odrediti aritmetičku sredinu i standardnu devijaciju zadane razdiobe. Imamo redom:

$$A = \frac{80 \cdot 3 + 60 \cdot 4 + 40 \cdot 5 + 20 \cdot 6}{80 + 60 + 40 + 20} = \\ = \frac{800}{200} = \\ = 4,$$

$$\sigma^2 = \frac{80 \cdot 3^2 + 60 \cdot 4^2 + 40 \cdot 5^2 + 20 \cdot 6^2}{80 + 60 + 40 + 20} - 4^2 = .$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (stručni prijediplomski studij elektrotehnike)	Opisna statistika – zadaci za ponavljanje gradiva
---	---	--

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{3400}{200} - 16 = \\ &= 17 - 16 = \\ &= 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\sigma^2} = \\ &= \sqrt{1} = \\ &= 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \frac{\sigma}{A} \cdot 100 = \\ &= \frac{1}{4} \cdot 100 = \\ &= 25\%.\end{aligned}$$

Zaključujemo da je *varijabilitet brojeva članova uže obitelji oko njihove aritmetičke sredine relativno nizak.*

- b) Iz zadanoga grafičkoga prikaza očitamo (pazeći na uzlaznu sortiranost podataka, tj. da podaci budu poredani od najmanjega do najvećega):

$$\begin{aligned}y_1 &= y_2 = \dots = y_{79} = y_{80} = 3, \\ y_{81} &= y_{82} = \dots = y_{139} = y_{140} = 4, \\ y_{141} &= y_{142} = \dots = y_{179} = y_{180} = 5, \\ y_{181} &= y_{182} = \dots = y_{199} = y_{200} = 6.\end{aligned}$$

Da bismo odredili koeficijent kvartilne devijacije, najprije trebamo odrediti prvi i treći kvartil zadane razdiobe. Imamo redom:

$$n = 80 + 60 + 40 + 20 =$$

$$= 200,$$

200 je djeljivo s 4 \Rightarrow

$$\begin{aligned}Q_1 &= \frac{1}{2} \cdot \left(y_{\frac{200}{4}} + y_{\frac{200}{4}+1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (y_{50} + y_{51}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (3 + 3) = \\ &= 3,\end{aligned}$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (stručni prijediplomski studij elektrotehnike)	Opisna statistika – zadaci za ponavljanje gradiva
---	---	--

$$\begin{aligned}
 Q_3 &= \frac{1}{2} \cdot \left(y_{\frac{3}{4} \cdot 200} + y_{\frac{3}{4} \cdot 200+1} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (y_{150} + y_{151}) = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (5 + 5) = \\
 &= 5,
 \end{aligned}$$

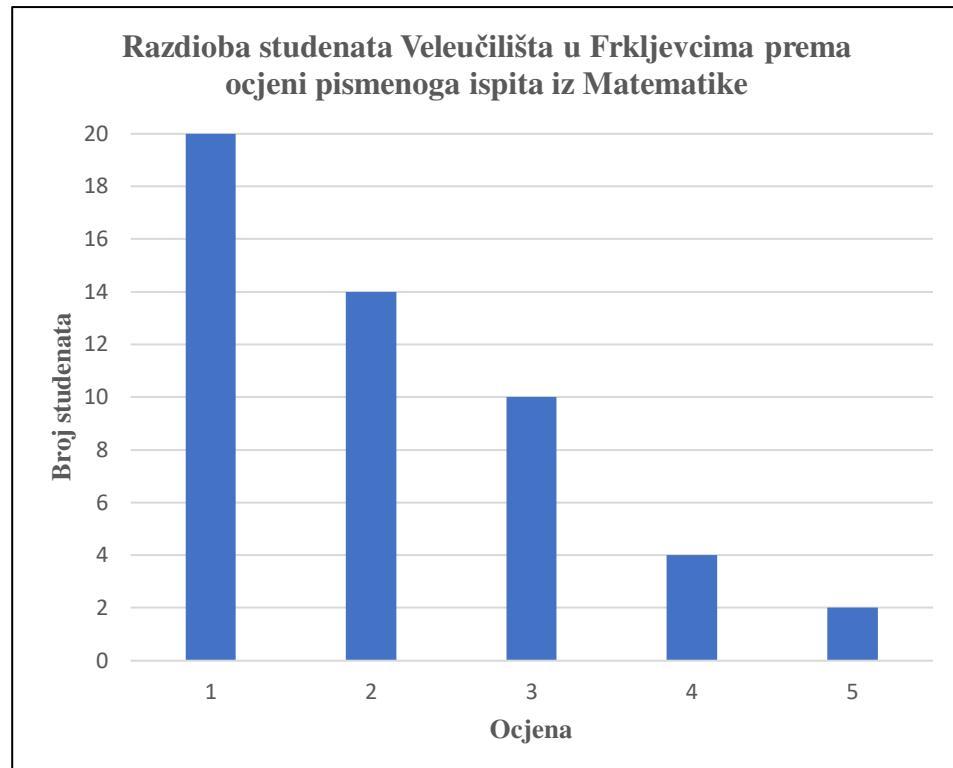
$$\begin{aligned}
 V_Q &= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \\
 &= \frac{5 - 3}{5 + 3} = \\
 &= \frac{2}{8} = \\
 &= \frac{1}{4} = 0.25.
 \end{aligned}$$

Odatle zaključujemo da je *varijabilitet brojeva članova uže obitelji oko njihova medijana umjeren.*

U usporedbi s rezultatom a) zadatka, to znači da aritmetička sredina reprezentativnije opisuje promatrani razdiobu.

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (stručni prijediplomski studij elektrotehnike)	Opisna statistika – zadaci za ponavljanje gradiva
--	---	--

2. Zadana je razdioba svih studenata Veleučilišta u Frkljevcima prema ocjeni pismenoga ispita iz *Matematike* na ispitnom roku 1. 9. 2022.



Slika 2.

Odredite pripadni:

- a) koeficijent varijacije;
- b) koeficijent kvartilne devijacije.

Objasnite značenje svakoga od tih dvaju pokazatelja.

Rješenje: a) Iz zadanoga grafičkoga prikaza očitamo:

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5, \\ f_1 = 20, f_2 = 14, f_3 = 10, f_4 = 4, f_5 = 2.$$

Da bismo odredili koeficijent varijacije, najprije trebamo odrediti aritmetičku sredinu i standardnu devijaciju zadane razdiobe. Imamo redom:

$$A = \frac{20 \cdot 1 + 14 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{20 + 14 + 10 + 4 + 2} = \\ = \frac{104}{50} = \\ = 2.08,$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (stručni prijediplomski studij elektrotehnike)	Opisna statistika – zadaci za ponavljanje gradiva
--	---	--

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= \frac{20 \cdot 1^2 + 14 \cdot 2^2 + 10 \cdot 3^2 + 4 \cdot 4^2 + 2 \cdot 5^2}{20+14+10+4+2} - 2.08^2 = \\
 &= \frac{280}{50} - 4.3264 = \\
 &= 5.6 - 4.3264 = \\
 &= 1.2736,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \sqrt{\sigma^2} = \\
 &= \sqrt{1.2736} \approx \\
 &\approx 1.12854,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{\sigma}{A} \cdot 100 \approx \\
 &\approx \frac{1.12854}{2.08} \cdot 100 \approx \\
 &\approx 54.3\%.
 \end{aligned}$$

Zaključujemo da je *varijabilitet ocjena studenata oko njihove aritmetičke sredine relativno visok.*

b) Iz zadanoga grafičkoga prikaza očitamo:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= y_2 = \dots = y_{19} = y_{20} = 1, \\
 y_{21} &= y_{22} = \dots = y_{33} = y_{34} = 2, \\
 y_{35} &= y_{36} = \dots = y_{43} = y_{44} = 3, \\
 y_{45} &= y_{46} = y_{47} = y_{48} = 4, \\
 y_{49} &= y_{50} = 5.
 \end{aligned}$$

Da bismo odredili koeficijent kvartilne devijacije, najprije trebamo odrediti prvi i treći kvartil zadane razdiobe. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
 n &= 20+14+10+4+2 = \\
 &= 50,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 50 \text{ nije djeljiv s } 4 &\Rightarrow \\
 Q_1 &= y_{\left\lceil \frac{50}{4} \right\rceil} = \\
 &= y_{13} = \\
 &= 1,
 \end{aligned}$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (stručni prijediplomski studij elektrotehnike)	Opisna statistika – zadaci za ponavljanje gradiva
---	---	--

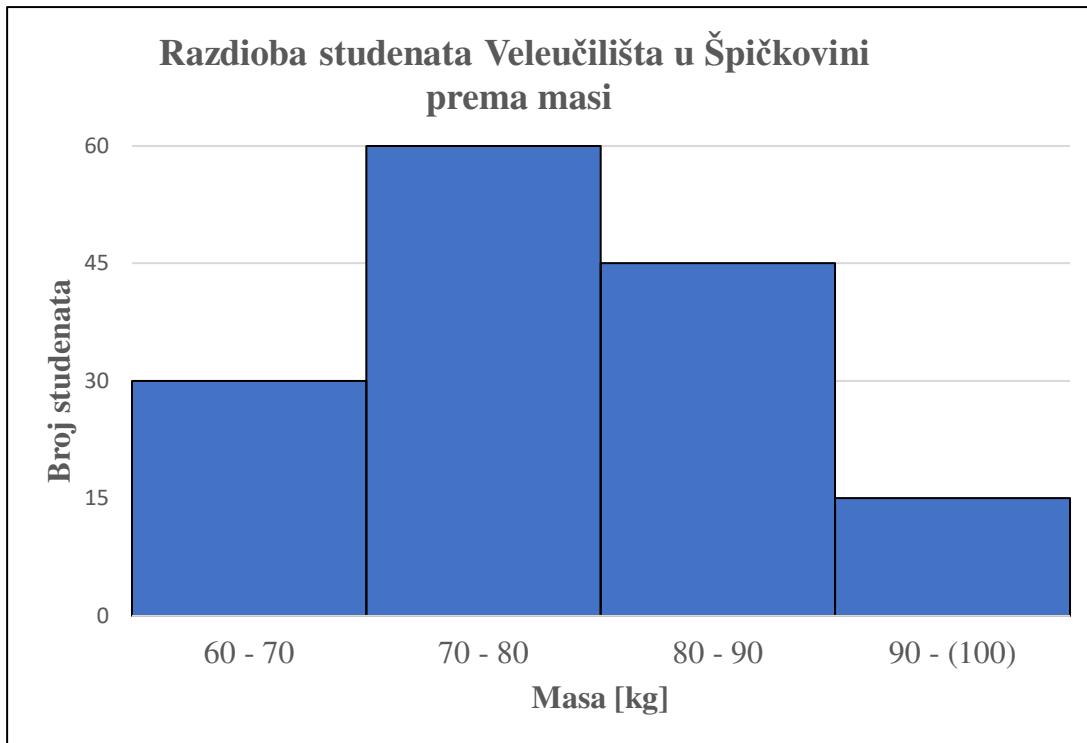
$$\begin{aligned}
 Q_3 &= y_{\left\lceil \frac{3}{4} \cdot 50 \right\rceil} = \\
 &= y_{38} = \\
 &= 3,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_Q &= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \\
 &= \frac{3-1}{3+1} = \\
 &= \frac{2}{4} = \\
 &= \frac{1}{2} = 0.5.
 \end{aligned}$$

Odatle zaključujemo da je *varijabilitet ocjena studenata oko njihova medijana visok*.

U usporedbi s rezultatom **a)** podzadatka, to znači da i aritmetička sredina i medijan jednako (preciznije, loše) reprezentiraju promatranu razdiobu, pa je u ovakvim slučajevima razdiobu primjereno opisivati kvartilima.

3. Zadana je razdioba svih studenata 1. godine Veleučilišta u Špičkovini u ak. god. 2022./2023. prema masi.



Slika 3.

Procijenite pripadni:

- a) koeficijent varijacije;
- b) koeficijent kvartilne devijacije.

Objasnite značenje svakoga od tih dvaju pokazatelja.

Rješenje: a) Da bismo procijenili koeficijent varijacije, najprije moramo odrediti razrednu sredinu svakoga razreda. Potom računamo aritmetičku sredinu i standardnu devijaciju kao u prethodnim zadacima:

$$f_1 = 30, f_2 = 60, f_3 = 45, f_4 = 15,$$

$$s_1 = \frac{60+70}{2} = 65,$$

$$s_2 = \frac{70+80}{2} = 75,$$

$$s_3 = \frac{80+90}{2} = 85,$$

$$s_4 = \frac{90+100}{2} = 95,$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (stručni prijediplomski studij elektrotehnike)	Opisna statistika – zadaci za ponavljanje gradiva
---	---	--

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{30 \cdot 65 + 60 \cdot 75 + 45 \cdot 85 + 15 \cdot 95}{30 + 60 + 45 + 15} = \\
 &= \frac{11700}{150} = \\
 &= 78,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= \frac{30 \cdot 65^2 + 60 \cdot 75^2 + 45 \cdot 85^2 + 15 \cdot 95^2}{30 + 60 + 45 + 15} - 78^2 = \\
 &= \frac{924750}{150} - 6084 = \\
 &= 6165 - 6084 = \\
 &= 81,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \sqrt{\sigma^2} = \\
 &= \sqrt{81} = \\
 &= 9,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{\sigma}{A} \cdot 100 = \\
 &= \frac{9}{78} \cdot 100 \approx \\
 &\approx 11.54\%.
 \end{aligned}$$

Zaključujemo da je *varijabilitet masa studenata oko njihove aritmetičke sredine relativno nizak.*

- b) Da bismo procijeniti koeficijent kvartilne devijacije, najprije moramo procijeniti prvi i treći kvartil. U tu svrhu formiramo kumulativni niz apsolutnih frekvencija „manje od“:

$$f_1^< = f_1 = 30,$$

$$\begin{aligned}
 f_2^< &= f_1^< + f_2 = \\
 &= 30 + 60 = \\
 &= 90,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_3^< &= f_2^< + f_3 = \\
 &= 90 + 45 = \\
 &= 135,
 \end{aligned}$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (stručni prijediplomski studij elektrotehnike)	Opisna statistika – zadaci za ponavljanje gradiva
--	---	--

$$\begin{aligned}
 f_4^< &= f_3^< + f_4 = \\
 &= 135 + 15 = \\
 &= 150.
 \end{aligned}$$

Tako dobivamo sljedeću tablicu:

<i>razred</i>	60 - 70	70 - 80	80 - 90	90 - (100)
<i>f_i</i>	30	60	45	15
<i>f_i^{<}</i>	30	90	135	150

Prvi član kumulativnoga niza apsolutnih frekvencija „manje od“ koji sadrži najmanje

$$\left\lceil \frac{150}{4} \right\rceil = 38$$

podataka je

$$f_2^< = 90.$$

Taj član odgovara razredu 70 – 80 čija je apsolutna frekvencija jednaka $f_2 = 60$.
 Zbog toga su:

$$\begin{aligned}
 n &= 150, \\
 L_1 &= 70, \\
 g &= 2, \\
 f_g &= f_2 = 60, \\
 f_{g-1}^< &= f_1^< = 30, \\
 h &= 80 - 70 = 10 \Rightarrow \\
 Q_1 &= L_1 + \frac{\frac{1}{4} \cdot n - f_{g-1}^<}{f_g} \cdot h = \\
 &= 70 + \frac{\frac{1}{4} \cdot 150 - 30}{60} \cdot 10 = \\
 &= 71.25.
 \end{aligned}$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (stručni prijediplomski studij elektrotehnike)	Opisna statistika – zadaci za ponavljanje gradiva
--	---	--

Prvi član kumulativnoga niza apsolutnih frekvencija „manje od“ koji sadrži najmanje

$$\left\lceil \frac{3}{4} \cdot 150 \right\rceil = 113$$

podataka je

$$f_3^< = 135.$$

Taj član odgovara razredu 80 – 90 čija je apsolutna frekvencija jednaka $f_3 = 45$.
 Zbog toga su:

$$\begin{aligned} n &= 150, \\ L_1 &= 80, \\ g &= 3, \\ f_g &= f_3 = 45, \\ f_{g-1}^< &= f_2^< = 90, \\ h &= 90 - 80 = 10 \Rightarrow \\ Q_3 &= L_1 + \frac{\frac{3}{4} \cdot n - f_{g-1}^<}{f_g} \cdot h = \\ &= 80 + \frac{\frac{3}{4} \cdot 150 - 90}{45} \cdot 10 = \\ &= 85. \end{aligned}$$

Tako konačno dobivamo:

$$\begin{aligned} V_Q &= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \\ &= \frac{85 - 71.25}{85 + 71.25} = \\ &= \frac{11}{125} = \\ &= 0.088. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je *varijabilitet masa oko njihova medijana nizak*.

U odnosu na rezultat **a)** podzadatka, možemo zaključiti da je medijan bolji reprezentant promatrane razdiobe od aritmetičke sredine.