 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	zadaci za 2. grupne konzultacije 14.11.2017.
--	---	---

1. U nekom skladištu računala utvrdili su da je broj ispravnih računala trostruko veći od broja neispravnih računala. Ako se na slučajan način izaberu dva računala, vjerojatnost da će barem jedno od njih biti neispravno iznosi $\frac{17}{38}$. Koliko ukupno računala ima u skladištu?

Rezultat: 20 računala.

2. (*problem rođendana*) U grupi se nalazi ukupno 24 studenta. Izračunajte vjerojatnost da među njima postoji najmanje dvoje studenata rođenih na isti datum (ne nužno iste godine). Pretpostavite da godina ima točno 365 dana.

Rezultat: $p = 1 - \frac{\binom{365}{24} \cdot 24!}{365^{24}} \approx 0.538344$.

3. Pripremajući se za usmeni ispit iz *Vjerojatnosti i statistike* Marko je naučio odgovore na točno 15 od ukupno 25 pitanja. Na usmenom ispitu nastavnik postavlja točno tri pitanja (od njih ukupno 25). Usmeni ispit je položen ako student zna točno odgovoriti na barem dva postavljena pitanja. Izračunajte vjerojatnost da Marko neće položiti usmeni ispit.

Rezultat: $p = \frac{159}{460} \approx 0.345652$.

4. Na izvanrednom ispitnom roku moguće je polagati točno jedan ispit. Poznato je da 40% studenata izabire *Osnove elektrotehnike*, 30% studenata *Matematiku*, a svi ostali studenti *Fiziku*. Prolaznost iz *Osnova elektrotehnike* 1 iznosi 20%, iz *Matematike* 30%, a iz *Fizike* 40%.


- a) Izračunajte vjerojatnost da je slučajno odabrani student položio svoj izabrani ispit.
 b) Ako znamo da je slučajno odabrani student položio svoj izabrani ispit, izračunajte vjerojatnost da je taj student položio *Matematiku*.

Rezultati: a) $p_1 = \frac{29}{100} = 0.29$; b) $p_2 = \frac{9}{29} \approx 0.31034$.

5. Preparat protiv ćelavosti „*Ćelotonic*“ proizvode tri tvornice smještene u Babinoj Gredi, Banovoj Jaruzi i Generalskom Stolu. Tvornica u Babinoj Gredi proizvodi dvostruko više preparata od tvornice u Banovoj Jaruzi, a za 30% više preparata od tvornice u Generalskom Stolu. Statistički pokazatelji pokazuju da je neispravno 2% preparata iz tvornice u Babinoj Gredi, 3% preparata iz tvornice u Banovoj Jaruzi i 2.5% preparata iz tvornice u Generalskom Stolu. U nekom se skladištu nalaze preparati iz svih triju tvornica i na slučajan način bira se jedan preparat.

- a) Izračunajte vjerojatnost da je slučajno izabrani preparat neispravan.
 b) Ako znamo da je slučajno izabrani preparat neispravan, izračunajte vjerojatnost da ga je proizvela tvornica iz Banove Jaruge.

Rezultati: a) $p_1 = \frac{36}{1475} \approx 0.02441$; b) $p_2 = \frac{13}{48} \approx 0.27083$.

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	zadaci za 2. grupne konzultacije 14.11.2017.
---	---	---

6. Mirela želi stići u zračnu luku korištenjem taxi-prijevoza. Na raspolaganju su joj tri prijevozne tvrtke: *Cammeleo*, *Mobitaxi* i *Uber alles*. Mirelini statistički podaci pokazuju da je od ukupno 20 vožnji prema zračnoj luci 8 puta koristila vozila *Cammelea*, 7 puta vozila *Mobitaxija*, a vozila *Uber allesa* u svim ostalim vožnjama. Iskustva putnika objavljena na Facebook stranici *Taxi naš svagdašnji* tvrde da vozilo *Cammelea* stigne pravovremeno u 85% slučajeva, vozilo *Mobitaxija* u 75% slučajeva, a vozilo *Uber alles* u 90% slučajeva. Na slučajan način izabiremo jednu Mirelinu vožnju.

- a) Izračunajte vjerojatnost da je u toj vožnji Mirela nepravovremeno stigla u zračnu luku.
 b) Ako je u toj vožnji Mirela pravovremeno stigla u zračnu luku, izračunajte vjerojatnost da je pritom koristila vozilo *Cammelea*.

Rezultati: a) $p_1 = \frac{69}{400} = 0.1725$; b) $p_2 = \frac{136}{331} \approx 0.41088$.

7. Dva cruisera trebaju uploviti u luku na Mulinama. Zbog tehničkih preduvjeta, jedan cruiser smije uploviti u luku ako i samo ako se u njoj ne nalazi drugi cruiser. Vrijeme dolaska svakoga cruisera je slučajan trenutak u toku jednoga dana. Vrijeme zadržavanja prvoga cruisera je dva sata, a drugoga cruisera tri sata. Izračunajte vjerojatnost da će jedan od tih cruisera morati čekati da drugi cruiser napusti luku.

Rezultat: $p = \frac{227}{1152}$.

8. Zadan je jednakokratan trokut kojemu je duljina osnovice 16 cm, dok su krakovi duljine 10 cm. Na slučajan način izabiremo jednu točku unutar trokuta. Izračunajte vjerojatnost da ta točka ne pripada krugu kojega omeđuje trokutu upisana kružnica.

Rezultat: $p = 1 - \frac{4}{27} \cdot \pi \approx 0.53458$.

9. Krug u igri *Kolo sreće* podijeljen je na četiri kružna isječka: 1, 2, 3 i 4 tako da za svaki $i = 1, 2, 3$ kružni isječak i ima dvostruko manju površinu od isječka $i + 1$. Izračunajte vjerojatnost da se kazaljka zaustavi na „neparnu“ isječku (tj. isječku kojemu pripada neparan broj).

Rezultat: $p = \frac{1}{3}$.

10. Izračunajte vjerojatnost da slučajno odabrana točka kocke pripada toj kocki upisanoj:

- a) sferi;
 b) kugli.

Rezultati: a) $p = 0$; b) $p = \frac{\pi}{6}$.

DETALJNIJA RJEŠENJA ZADATAKA

1. Neka je n traženi broj računala. Broj ispravnih računala mora biti trostruko veći od broja neispravnih računala, a ukupan zbroj tih brojeva mora biti jednak ukupnom broju računala, tj. n . Odatle zaključujemo da je broj ispravnih računala jednak $\frac{3}{4} \cdot n$, a broj neispravnih računala $\frac{1}{4} \cdot n$.

Izaberemo li točno dva računala iz skupa od n računala, taj izbor možemo izvršiti na $\binom{n}{2}$ različitih načina. Taj broj je ujedno i broj svih mogućih ishoda.

Nadalje, neka je $A = \{\text{barem jedno izabrano računalo je neispravno}\}$. Promotrimo događaj suprotan događaju A . To je događaj $A^c = \{\text{oba izabrana računala su ispravna}\}$. Odredimo vjerojatnost događaja A^c . Ako su oba izabrana računala ispravna, to znači da smo ta računala zapravo izabrali iz skupa svih ispravnih računala. Prema gornjem razmatranju, taj skup ima $\frac{3}{4} \cdot n$ elemenata. Ukupan broj različitih načina na koji možemo izabrati točno

dva elementa iz skupa od $\frac{3}{4} \cdot n$ elemenata jednak je $\binom{\frac{3}{4} \cdot n}{2}$. Taj broj je ujedno ukupan broj

svih ishoda povoljnih za događaj A^c . Zbog toga je vjerojatnost toga događaja jednaka

$$P(A^c) = \frac{\binom{\frac{3}{4} \cdot n}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{\frac{\left(\frac{3}{4} \cdot n\right) \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot n - 1\right)}{2!}}{\frac{n \cdot (n-1)}{2!}} = \frac{\frac{9}{16} \cdot n - \frac{3}{4}}{n-1} = \frac{9 \cdot n - 12}{16 \cdot n - 16}.$$

Odatle slijedi da je vjerojatnost događaja A jednaka


$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{9 \cdot n - 12}{16 \cdot n - 16} = \frac{16 \cdot n - 16 - (9 \cdot n - 12)}{16 \cdot n - 16} = \frac{7 \cdot n - 4}{16 \cdot n - 16}.$$

Prema zahtjevu zadatka, ta vjerojatnost treba biti jednaka $\frac{17}{38}$. Tako dobivamo jednadžbu:

$$\frac{7 \cdot n - 4}{16 \cdot n - 16} = \frac{17}{38}.$$

Riješimo tu jednadžbu na uobičajen način:

$$\begin{aligned} 38 \cdot (7 \cdot n - 4) &= 17 \cdot (16 \cdot n - 16), \\ 266 \cdot n - 152 &= 272 \cdot n - 272, \end{aligned}$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	zadaci za 2. grupne konzultacije 14.11.2017.
--	---	---

$$\begin{aligned}
 38 \cdot (7 \cdot n - 4) &= 17 \cdot (16 \cdot n - 16), \\
 266 \cdot n - 152 &= 272 \cdot n - 272, \\
 266 \cdot n - 272 \cdot n &= -272 + 152, \\
 -6 \cdot n &= -120, \quad / : (-6) \\
 n &= 20.
 \end{aligned}$$

Dakle, u skladištu ima ukupno 20 računala.

2. Neka je $A = \{\text{postoji najmanje dvoje studenata rođenih na isti datum}\}$. Promotrimo događaj suprotan događaju A . To je događaj $A^C = \{\text{nikoja dva studenta nisu rođena na isti datum}\}$. Izračunajmo vjerojatnost događaja A^C .

Ako grupu tvore ukupno 24 studenta, onda svaki od njih može izabrati točno jedan od 365 dana u godini za datum svojega rođendana. Pritom prirodno dozvoljavamo mogućnost da barem dva studenta (pa čak i svi studenti!) izaberu isti datum. Dakle, riječ je o 24-permutaciji s ponavljanjem skupa od ukupno 365 elemenata. Ukupan broj svih takvih permutacija jednak je 365^{24} . Taj broj jednak je ukupnom broju mogućih ishoda.

Odredimo broj ishoda povoljnih za događaj A^C . Prvi student može izabrati svoj datum rođenja na 365 različitih načina. Drugi student može izabrati svoj datum rođenja na 364 različita načina. Treći student može izabrati svoj datum rođenja na 363 različita načina. Postupak nastavimo dalje sve dok i posljednji, 24. student ne izabere svoj datum rođenja. On to može učiniti na 342 različita načina. Dakle, ukupan broj svih ishoda povoljnih za događaj A^C jednak je ukupnom broju 24-permutacija bez ponavljanja 365-članoga skupa, a taj je broj jednak $365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 343 \cdot 342 = \binom{365}{24} \cdot 24!$.


Odatle slijedi da je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p = 1 - \frac{\binom{365}{24} \cdot 24!}{365^{24}} \approx 0.53834.$$

3. Ukupan broj različitih načina na koji nastavnik može izabrati točno tri pitanja iz skupa od 25 pitanja jednak je $\binom{25}{3}$. Taj broj je jednak ukupnom broju svih mogućih ishoda.

Marko neće položiti usmeni ispit ako bude znao odgovoriti na najviše jedno pitanje, odnosno ako ili ne bude znao odgovoriti ni na jedno pitanje ili bude znao odgovoriti na točno jedno pitanje. Riječ je o međusobno disjunktним slučajevima, pa razmotrimo zasebno svaki od njih.

Ako Marko ne zna odgovoriti ni na jedno pitanje, to znači da su sva tri pitanja izabrana iz skupa od ukupno $25 - 15 = 10$ pitanja na koja Marko ne zna odgovoriti. Ukupan broj različitih načina na koji je moguće napraviti taj izbor jednak je $\binom{10}{3}$.

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	zadaci za 2. grupne konzultacije 14.11.2017.
---	---	---

Ako Marko zna odgovoriti na točno jedno pitanje, to znači da je to pitanje izabrano iz skupa od 15 pitanja na koja Marko zna odgovoriti, a da su preostala dva pitanja izabrana iz skupa od ukupno 10 pitanja na koja Marko ne zna odgovoriti. Ukupan broj različitih načina na koji je moguće napraviti taj izbor jednak je $\binom{15}{1} \cdot \binom{10}{2}$.

Primjenom pravila zbroja zaključujemo da je ukupan broj povoljnih ishoda jednak $\binom{10}{3} + \binom{15}{1} \cdot \binom{10}{2}$. Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p = \frac{\binom{10}{3} + \binom{15}{1} \cdot \binom{10}{2}}{\binom{25}{3}} = \frac{159}{460} \approx 0.34565.$$

4. Svaki student bira ili *Matematiku* ili *Osnove elektrotehnike 1* ili *Osnove elektrotehnike 2*. Zbog toga postavljamo hipoteze:

$$H_1 = \{\text{izabrane su Osnove elektrotehnike}\},$$

$$H_2 = \{\text{izabrana je Matematika}\},$$

$$H_3 = \{\text{izabrana je Fizika}\}.$$

Iz podataka u zadatku slijedi:

$$P(H_1) = 40\% = 0.4, P(H_2) = 30\% = 0.3, P(H_3) = 1 - (P(H_1) + P(H_2)) = 1 - (0.4 + 0.3) = 0.3.$$

Neka je $A = \{\text{student je položio izabrani predmet}\}$. Iz podataka u zadatku slijedi:

$$P(A|H_1) = 20\% = 0.2, P(A|H_2) = 30\% = 0.3, P(A|H_3) = 40\% = 0.4.$$

a) Trebamo izračunati vjerojatnost $P(A)$. Primjenom formule potpune vjerojatnosti dobivamo:

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(H_i) \cdot P(A|H_i) = 0.4 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.4 = \frac{29}{100} = 0.29.$$

b) Trebamo izračunati vjerojatnost $P(H_2|A)$. Primjenom Bayesove formule dobijemo:


$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{0.3 \cdot 0.3}{0.29} = \frac{9}{29} \approx 0.31034.$$

5. Svaki preparat je proizveden ili u Babinoj Gredi ili u Banovoj Jaruzi ili u Generalskom Stolu. Zbog toga postavljamo hipoteze:

$$H_1 = \{\text{preparat je proizveden u Babinoj Gredi}\},$$

$$H_2 = \{\text{preparat je proizveden u Banovoj Jaruzi}\},$$

$$H_3 = \{\text{preparat je proizveden u Generalskom Stolu}\}.$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	zadaci za 2. grupne konzultacije 14.11.2017.
--	---	---

Najprije trebamo izračunati koji dio svih preparata se proizvodi na svakoj pojedinoj lokaciji. Ti brojevi će ujedno biti i vjerojatnosti postavljenih hipoteza. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da tvornica u Generalskom Stolu proizvodi točno 100 preparata. Tada tvornica u Babinoj Gredi proizvodi $100 + \frac{30}{100} \cdot 100 = 100 + 30 = 130$ preparata, a tvornica u Banovoj Jaruzi $\frac{1}{2} \cdot 130 = 65$ preparata. Ukupan broj preparata jednak je $100 + 130 + 65 = 295$, pa su vjerojatnosti hipoteza redom:

$$P(H_1) = \frac{100}{295} = \frac{20}{59}, P(H_2) = \frac{65}{295} = \frac{13}{59}, P(H_3) = \frac{130}{295} = \frac{26}{59}.$$

Neka je $A = \{\text{izabrani preparat je neispravan}\}$. Iz podataka u zadatku slijedi:

$$P(A|H_1) = 2\% = 0.02, P(A|H_2) = 3\% = 0.03, P(A|H_3) = 2.5\% = 0.025.$$

a) Trebamo izračunati vjerojatnost $P(A)$. Primjenom formule potpune vjerojatnosti dobivamo:

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(H_i) \cdot P(A|H_i) = \frac{20}{59} \cdot \frac{2}{100} + \frac{13}{59} \cdot \frac{3}{100} + \frac{26}{59} \cdot \frac{25}{1000} = \frac{36}{1475} \approx 0.02441.$$

b) Trebamo izračunati vjerojatnost $P(H_2|A)$. Primjenom Bayesove formule dobijemo:

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{13}{59} \cdot \frac{3}{100}}{\frac{36}{1475}} = \frac{13}{48} \approx 0.27083.$$

6. Svaka vožnja je ostvarena korištenjem vozila ili u *Cammelea* ili *Mobitaxija* ili *Uber allesa*. Zbog toga postavljamo hipoteze:

$$H_1 = \{\text{korišteno je vozilo Cammelea}\},$$

$$H_2 = \{\text{korišteno je vozilo Mobitaxija}\},$$

$$H_3 = \{\text{korišteno je vozilo Uber allesa}\}.$$

Iz podataka u zadatku slijedi da vjerojatnosti hipoteza redom iznose:

$$P(H_1) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0.4, P(H_2) = \frac{7}{20} = 0.35, P(H_3) = \frac{20 - (8 + 7)}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

Neka je $A = \{\text{Mirela je pravovremeno stigla u zračnu luku}\}$. Iz zadanih podataka slijedi:

$$P(A|H_1) = 85\% = 0.85, P(A|H_2) = 75\% = 0.75, P(A|H_3) = 90\% = 0.9.$$

a) Treba izračunati $P(A^C)$. Primjenom formule potpune vjerojatnosti dobivamo:

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(H_i) \cdot P(A|H_i) = \frac{2}{5} \cdot \frac{17}{20} + \frac{7}{20} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{10} = \frac{331}{400} = 0.8275,$$

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{331}{400} = \frac{69}{400} = 0.1725.$$

b) Treba izračunati $P(H_1 | A)$. Primjenom Bayesove formule dobijemo:

$$P(H_1 | A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A | H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{17}{20}}{\frac{331}{400}} = \frac{136}{331} \approx 0.41088.$$

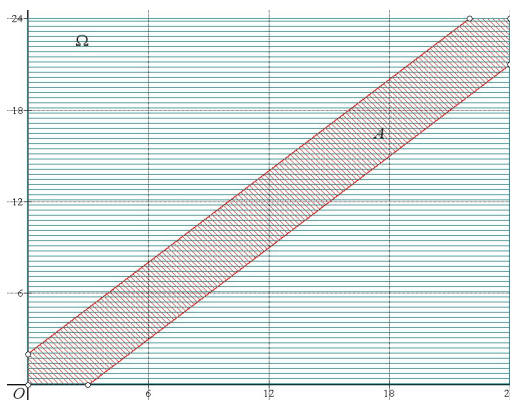
7. Neka su x i y redom vrijeme dolaska prvoga, odnosno drugoga skutera. Oba vremena pripadaju intervalu $[0, 24]$. Zbog toga je skup svih mogućih ishoda:

$$\Omega = \{(x, y) : x, y \in [0, 24]\}.$$

Odredimo skup svih povoljnih ishoda. Prvi cruiser će morati čekati na uplovljavanje u luku ako vrijedi nejednakost $0 \leq x - y \leq 3$. (Ta nejednakost znači da je drugi cruiser prvi uplovio u luku i da je prvi cruiser stigao do luke u razmaku ne većem od tri sata računajući od trenutka uplovljavanja drugoga cruisera.) Drugi cruiser će morati čekati na uplovljavanje u luku ako vrijedi nejednakost $0 \leq y - x \leq 2$. (Ta nejednakost znači da je prvi cruiser prvi uplovio u luku i da je drugi cruiser stigao do luke u razmaku ne većem od dva sata računajući od trenutka uplovljavanja prvoga cruisera.). Dakle, skup svih povoljnih ishoda je:

$$A = \{(x, y) \in \Omega : (0 \leq x - y \leq 3) \vee (0 \leq y - x \leq 2)\}.$$

Prikažimo te skupove u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo Sliku 1.



Slika 1.

Površina skupa A dobije se tako da se od površine skupa Ω oduzme zbroj površina dvaju jednakokračnih pravokutnih trokutova od kojih prvi ima katete duge 21 jed., a drugi katete duge 22 jed. Tako slijedi da je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p = 1 - \frac{\frac{21^2 + 22^2}{2}}{24^2} = \frac{227}{1152} \approx 0.19705.$$

8. Duljina visine povučene na osnovicu trokuta iznosi:

$$v = \sqrt{10^2 - \left(\frac{16}{2}\right)^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6 \text{ cm.}$$

Površina zadanoga trokuta iznosi $P = \frac{16 \cdot 6}{2} = 48 \text{ cm}^2$. Ta vrijednost je mjera skupa svih mogućih ishoda.

Odredimo mjeru skupa svih povoljnih ishoda. Polumjer trokutu upisanoga kruga je:

$$r = \frac{P}{s} = \frac{48}{\frac{16+10+10}{2}} = \frac{96}{36} = \frac{8}{3} \text{ cm.}$$

Površina toga kruga iznosi $P_1 = r^2 \cdot \pi = \frac{64}{9} \cdot \pi \text{ cm}^2$. Dakle, mjera skupa svih povoljnih ishoda je $P_2 = P - P_1 = 48 - \frac{64}{9} \cdot \pi \text{ cm}^2$, pa je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p = \frac{P_2}{P} = 1 - \frac{\frac{64}{9}}{48} \cdot \pi = 1 - \frac{4}{27} \cdot \pi \approx 0.53458.$$

9. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je površina najvećega isječka jednaka

1. Tada površine isječka tvore niz $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$. Njihova ukupna površina jednaka je:

$$P = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8} \text{ kv. jed.}$$

Ta vrijednost je mjera skupa svih mogućih ishoda.

Odredimo mjeru skupa svih povoljnih ishoda. Zbrojimo površine prvoga i trećega isječka, pa dobijemo $P_1 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \text{ kv. jed.}$ Stoga je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p = \frac{P_1}{P} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{15}{8}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

10. Volumen bilo koje sfere jednak je nuli, pa je prva vjerojatnost jednaka nuli. Druga vjerojatnost je jednaka omjeru volumena kugle i volumena kocke. Neka je a duljina brida kocke. Promjer kugle jednak je duljini brida kocke, pa je tražena vjerojatnost jednaka

$$p = \frac{V_{\text{kugla}}}{V_{\text{kocka}}} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 \cdot \pi}{a^3} = \frac{1}{6} \cdot \pi.$$