 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	zadaci za 1. grupne konzultacije 7.11.2017.
--	---	--

1. U skupini od 20 studenata ELO TVZ nalazi se točno 8 studenata smjera AiPR, točno 5 studenata smjera KiRT, a ostali studenti su studenti smjera EE. Na slučajan način odabiremo točno 3 studenta. Izračunajte vjerojatnosti sljedećih događaja:

- a) $A = \{\text{sa svakoga smjera izabran je točno jedan student}\};$
 b) $B = \{\text{barem jedan izabrani student je student smjera KiRT}\}$

Rezultati: a) $P(A) = \frac{14}{57}$; b) $P(B) = \frac{137}{228}$.

2. 5 umjetnih plavuša, 6 umjetnih crnki i 7 umjetnih brineta natječe se za Miss Šuplje Lipe. Sve natjecateljice međusobno razlikujemo. Prigodom prvoga predstavljanja žiriju i publici *casting-manager* izbora ih treba poredati na slučajan način. Izračunajte vjerojatnosti sljedećih događaja:

- a) $A = \{\text{sve umjetne plavuše su poredane jedna do druge}\};$
 b) $B = \{\text{barem dvije umjetne crнке nisu poredane jedna do druge}\}.$

Rezultati: a) $P(A) = \frac{1}{612}$; b) $P(B) = \frac{1427}{1428}$.

3. U skladištu Visoke uzaludne škole u Špičkovini nalazi se ukupno 20 različitih računala. Na 60% tih računala instaliran je operativni sustav *Windows 10*. Na slučajan način izabiremo 8 računala. Izračunajte vjerojatnost sljedećih događaja:

- a) $A = \{\text{na točno polovici izabranih računala je instaliran Windows 10}\};$
 b) $B = \{\text{na barem jednom izabranom računalu nije instaliran Windows 10}\}.$

Rezultati: a) $P(A) = \frac{1155}{4199}$; b) $P(B) = \frac{8365}{8398}$.

4. Za usmeni ispit iz *Vjerojatnosti i statistike* Karlo je morao naučiti točno odgovoriti na 15 različitih pitanja. Međutim, naučio je točno odgovoriti na svega 7 pitanja. Za pozitivnu je ocjenu potrebno točno odgovoriti na barem 5 od 10 postavljenih pitanja. Izračunajte vjerojatnost da će Karlo uspjeti položiti ispit.


Rezultat: $p = \frac{82}{143}$.

5. U kružnicu je upisan kvadrat, a u taj kvadrat je upisana kružnica. Izračunajte vjerojatnost da će slučajno odabrana točka kruga omeđenoga većom kružnicom pripadati krugu omeđenom manjom kružnicom.

Rezultat: $p = \frac{1}{2}$.

6. Od konopca duljine 2 metra na slučajan način napravimo pravokutnik. Izračunajte vjerojatnost da je površina toga pravokutnika jednaka ili veća od 1600 cm^2 .

Rezultat: $p = \frac{9}{25}$.

 <p>TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE Elektrotehnički odjel</p>	<p>Vjerojatnost i statistika (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)</p>	<p>zadaci za 1. grupne konzultacije 7.11.2017.</p>
--	---	--

7. Na jesenkom ispitnom roku Veleučilišta u Gaćelezima ispitanici su mogli polagati točno dva predmeta: *Matematiku* i *Osnove elektrotehnike*. Nakon održanih ispita, utvrđeno je da 70% svih ispitanika nije položilo *Matematiku*, 60% svih ispitanika nije položilo *Osnove elektrotehnike*, a 40% svih ispitanika nije položilo nijedan od navedenih dvaju predmeta. Na slučajan način biramo jednoga ispitanika. Izračunajte vjerojatnosti sljedećih događaja:

- a) $A = \{\text{ako ispitanik nije položio } \textit{Matematiku}, \text{ onda nije položio } \textit{Osnove elektrotehnike}\};$
b) $B = \{\text{ako ispitanik nije položio } \textit{Osnove elektrotehnike}, \text{ onda nije položio } \textit{Matematiku}\};$
c) $C = \{\text{ispitanik je položio oba predmeta}\}.$

Rezultati: a) $P(A) = \frac{4}{7}$; b) $P(B) = \frac{2}{3}$; c) $P(C) = \frac{1}{10}$.

8. 60% svih poštanskih pošiljaka otprema se vlakom, 25% poštanskim kombijima, dok se sve preostale pošiljke otpremaju zrakoplovom. Udjeli paketa u tim vrstama pošiljaka su redom 70%, 40% i 30%. Na slučajan je način izabrana jedna pošiljka.

- a) Izračunajte vjerojatnost da je izabrana pošiljka paket.
b) Ako je izabrana pošiljka paket, izračunajte vjerojatnost da je taj paket stigao zrakoplovom.

Rezultati: a) $p_1 = \frac{113}{200}$; b) $p_2 = \frac{9}{113}$.

9. U tvrtki *Samo za moj džep* d.d. iz Djedine Rijeke 10% zaposlenika ima magisterij znanosti, 30% zaposlenika ima visoku stručnu spremu, a svi ostali zaposlenici imaju srednju stručnu spremu. Vjerojatnost da će zaposlenik koji ima magisterij znanosti raditi u toj tvrtki barem 5 godina iznosi 20%. Analogne vjerojatnosti za zaposlenike sa visokom, odnosno srednjom stručnom spremom iznose 40% i 70%. Na slučajan način biramo jednoga zaposlenika.


- a) Izračunajte vjerojatnost da izabrani zaposlenik u tvrtki radi barem 5 godina.
b) Ako izabrani zaposlenik radi u tvrtki barem 5 godina, izračunajte vjerojatnost da taj zaposlenik ima visoku stručnu spremu.

Rezultati: a) $p_1 = \frac{14}{25}$; b) $p_2 = \frac{3}{14}$.

10. Prateći ispravnost rada točno 10 osobnih računala u računalnoj učionici Veleučilišta u Babinoj Gredi, sistem-administrator Miroslav je utvrdio da vjerojatnost „pada“ operativnoga sustava na svakom računalu tijekom jednoga radnoga dana iznosi 0.6. Operativni sustavi „padaju“ slučajno i nezavisno. Izračunajte vjerojatnost sljedećih događaja:

- a) $A = \{\text{u slučajno izabranom radnom danu operativni sustav „pada“ na barem jednom računalu}\}.$
b) $B = \{\text{u slučajno izabranom radnom danu operativni sustav nije „pao“ na najviše jednom računalu}\}.$

Rezultati: a) $P(A) = \frac{9\,764\,601}{9\,765\,625}$; b) $P(B) = \frac{452\,709}{9\,765\,625}$.

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	zadaci za 1. grupne konzultacije 7.11.2017.
--	---	--

DETALJNIJA RJEŠENJA ZADATAKA

1. Ukupno 3 studenata iz skupa od 20 studenata možemo izabrati na $\binom{20}{3}$ različitih načina.

Taj broj je ujedno jednak broju svih mogućih ishoda u obama podzadacima.

a) Točno jednoga studenta sa smjera AiPR možemo izabrati na 8 različitih načina, točno jednoga studenta sa smjera KiRT na 5 različitih načina, a točno jednoga studenta sa smjera EE na $20 - (8 + 5) = 7$ različitih načina. Stoga je ukupan broj načina za izbor svih triju studenata jednak $8 \cdot 5 \cdot 7$. Taj broj je ujedno jednak broju svih povoljnih ishoda. Dakle, tražena vjerojatnost je jednaka

$$P(A) = \frac{8 \cdot 5 \cdot 7}{\binom{20}{3}} = \frac{14}{57} \approx 0.24561.$$

b) Promotrimo suprotni događaj. Taj događaj je $B^C = \{\text{nijedan izabrani student nije student smjera KiRT}\}$. To znači da smo sva tri studenta izabrali između 8 studenata smjera AiPR i 7 studenata smjera EE, tj. među ukupno $8 + 7 = 15$ studenata. Ukupan broj različitih načina na koji možemo izabrati 3 studenta iz skupa od 15 studenata jednak je $\binom{15}{3}$. Taj broj je ujedno jednak broju svih ishoda povoljnih za događaj B^C . Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P(B) = 1 - P(B^C) = 1 - \frac{\binom{15}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{137}{228} \approx 0.60088.$$

2. Svih $5 + 6 + 7 = 18$ natjecateljica međusobno razlikujemo, pa je ukupan broj različitih načina na koje ih možemo poredati u niz jednak $18!$. Taj broj je ujedno jednak broju mogućih ishoda u obama podzadacima.

a) Sve umjetne plavuše najprije shvatimo kao jedan objekt (uz ispriku svim natjecateljicama, naravno). Ukupan broj različitih načina na koje $1 + 6 + 7 = 14$ objekata možemo složiti u niz jednak je $14!$. Na taj smo način posložili sve djevojke u niz tako da sve plavuše stoje jedna do druge. Međutim, budući da sve djevojke međusobno razlikujemo, same plavuše možemo međusobno posložiti u niz na $5!$ različitih načina. Stoga je ukupan broj svih povoljnih ishoda jednak $14! \cdot 5!$, pa je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P(A) = \frac{14! \cdot 5!}{18!} = \frac{1}{612} \approx 0.00163.$$

b) Promotrimo događaj suprotan zadanom. To je događaj $B^C = \{\text{sve umjetne crнке su poredane jedna do druge}\}$. Izračunajmo vjerojatnost toga događaja. Postupimo analogno kao u a) podzadatku, pa lako dobijemo:

$$P(B) = 1 - \frac{13! \cdot 6!}{18!} = \frac{1427}{1428} \approx 0.9993.$$

3. Ukupan broj različitih načina na koje možemo izabrati točno 8 računala iz skupa od 20 računala jednak je $\binom{20}{8}$. Taj broj je ujedno broj svih mogućih ishoda u obama podzadacima.


a) Ukupan broj računala na kojima je instaliran *Windows* 10 jednak je $\frac{60}{100} \cdot 20 = 12$, a ukupan broj računala na kojima nije instaliran *Windows* 10 jednak je $20 - 12 = 8$. Događaj A će se dogoditi ako točno $\frac{50}{100} \cdot 8 = 4$ računala izaberemo iz skupa od 12 računala na kojima je instaliran *Windows* 10 i ako preostalih $8 - 4 = 4$ računala izaberemo iz skupa od 8 računala na kojima nije instaliran *Windows* 10. Broj različitih načina na koje možemo izabrati 4 računala iz skupa od 12 računala jednak je $\binom{12}{4}$, a broj različitih načina na koje možemo izabrati 4 računala iz skupa od 8 računala jednak je $\binom{8}{4}$. Zbog toga je ukupan broj svih povoljnih ishoda jednak $\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4}$, pa je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P(A) = \frac{\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4}}{\binom{20}{8}} = \frac{1155}{4199} \approx 0.27507.$$

b) Promotrimo događaj suprotan događaju B . To je događaj $B^C = \{\text{na svim izabranim računalima je instaliran Windows 10}\}$. Prema razmatranju iz a) podzadatka, to znači da smo svih 8 računala izabrali iz skupa od 12 računala na kojima je instaliran *Windows* 10. Taj izbor smo mogli napraviti na ukupno $\binom{12}{8}$ različitih načina. Taj broj je ujedno broj ishoda povoljnih za događaj B^C . Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P(B) = 1 - P(B^C) = 1 - \frac{\binom{12}{8}}{\binom{20}{8}} = \frac{8365}{8398} \approx 0.99607.$$

4. Ukupan broj načina na koje možemo izabrati 10 pitanja iz skupa od 15 različitih pitanja jednak je $\binom{15}{10} = \binom{15}{15-10} = \binom{15}{5}$. Taj broj je ujedno jednak broju svih mogućih ishoda.

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	zadaci za 1. grupne konzultacije 7.11.2017.
--	---	--

Karlo će uspjeti položiti ispit bude li znao točno odgovoriti ili na točno 5 pitanja ili na točno 6 pitanja ili na točno 7 pitanja. (On ne može točno odgovoriti na svih 10 postavljenih pitanja jer je naučio odgovoriti na samo 7 pitanja.) Zbog toga razlikujemo sljedeće disjunktne slučajeve:

I.) Karlo će točno odgovoriti na točno 5 pitanja. Tih 5 pitanja tada biramo iz skupa od 7 pitanja na koja Karlo zna točan odgovor. Preostalih $10 - 5 = 5$ pitanja biramo iz skupa od $15 - 7 = 8$ pitanja na koja Karlo ne zna točno odgovoriti. Ukupan broj načina na koji možemo izvršiti oba izbora jednak je $\binom{7}{5} \cdot \binom{8}{5} = \binom{7}{7-5} \cdot \binom{8}{8-5} = \binom{7}{2} \cdot \binom{8}{3}$.

II.) Karlo će točno odgovoriti na točno 6 pitanja. Tih 6 pitanja tada biramo iz skupa od 7 pitanja na koja Karlo zna točan odgovor. Preostala $10 - 6 = 4$ pitanja biramo iz skupa od $15 - 7 = 8$ pitanja na koja Karlo ne zna točno odgovoriti. Ukupan broj načina na koji možemo izvršiti oba izbora jednak je $\binom{7}{6} \cdot \binom{8}{4} = \binom{7}{7-6} \cdot \binom{8}{4} = \binom{7}{1} \cdot \binom{8}{4}$.

III.) Karlo će točno odgovoriti na točno 7 pitanja. To su ujedno sva pitanja na koja Karlo zna točan odgovor, pa je njihov izbor jedinstven. Preostala $10 - 7 = 3$ pitanja biramo iz skupa od $15 - 7 = 8$ pitanja na koja Karlo ne zna točno odgovoriti. Ukupan broj načina na koji možemo izvršiti oba izbora jednak je $1 \cdot \binom{8}{3} = \binom{8}{3}$.

Prema pravilu zbroja zaključujemo da je ukupan broj svih ishoda povoljnih za zadani događaj jednak $\binom{7}{2} \cdot \binom{8}{3} + \binom{7}{1} \cdot \binom{8}{4} + \binom{8}{3}$. Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p = \frac{\binom{7}{2} \cdot \binom{8}{3} + \binom{7}{1} \cdot \binom{8}{4} + \binom{8}{3}}{\binom{15}{5}} = \frac{82}{143} \approx 0.57343.$$

5. Neka su R polumjer veće kružnice, a duljina stranice upisanoga kvadrata i r polumjer manje kružnice. Duljina dijagonale upisanoga kvadrata jednaka je promjeru veće kružnice. Zbog toga mora vrijediti jednakost $a \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot R$, a odavde je $a = \sqrt{2} \cdot R$. Nadalje, promjer manje kružnice jednak je duljini stranice upisanoga kvadrata. Zbog toga mora vrijediti jednakost $2 \cdot r = a$. Ovamo uvrstimo jednakost $a = \sqrt{2} \cdot R$, pa dobijemo:

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot R \Leftrightarrow \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Prema tome, tražena vjerojatnost je jednaka:

$$p = \frac{r^2 \cdot \pi}{R^2 \cdot \pi} = \frac{r^2}{R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

6. Neka su x i y duljine stranica pravokutnika. Opseg pravokutnika mora biti 2 metra = 200 cm, pa zaključujemo da vrijedi jednakost $2 \cdot (x + y) = 200$, odnosno $x + y = 100$. Odavde je $y = 100 - x$, pa je površina pravokutnika jednaka:

$$P = x \cdot y = x \cdot (100 - x) = -x^2 + 100 \cdot x.$$

Znamo da je $x + y = 100$, kao i $x, y \geq 0$, pa odatle zaključujemo da je $x \in [0, 100]$. Zbog toga promatramo funkciju $P = P(x) = -x^2 + 100 \cdot x$ na segmentu $[0, 100]$. Njezina najmanja vrijednost na tom segmentu jednaka je 0, dok je njezina najveća vrijednost na tom segmentu jednaka 2500 (dokažite!). Tako smo zaključili da vrijednost površine P pripada segmentu $[0, 2500]$. Taj segment je ujedno skup svih mogućih ishoda.

Skup svih povoljnih ishoda je očito segment $[1600, 2500]$, pa je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p = \frac{2500 - 1600}{2500} = \frac{9}{25} = 0.36.$$

7. Označimo:

$A_1 = \{\text{ispitanik nije položio Matematiku}\};$

$A_2 = \{\text{ispitanik nije položio Osnove elektrotehnike}\};$

$A_3 = \{\text{ispitanik nije položio ni Matematiku, ni Osnove elektrotehnike}\}.$

Primijetimo da je $A_3 = A_1 \cap A_2$. Iz podataka u zadatku slijedi:

$$P(A_1) = 70\% = 0.7, P(A_2) = 60\% = 0.6, P(A_3) = P(A_1 \cap A_2) = 40\% = 0.4.$$

- a) Tražena vjerojatnost je jednaka $P(A_2 | A_1)$. Prema definiciji uvjetne vjerojatnosti je:

$$P(A_2 | A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} = \frac{0.4}{0.7} = \frac{4}{7} \approx 0.57143.$$

- b) Tražena vjerojatnost je jednaka $P(A_1 | A_2)$. Prema definiciji uvjetne vjerojatnosti je:

$$P(A_1 | A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{0.4}{0.6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 0.66667.$$

- c) Promotrimo događaj suprotan događaju C . To je događaj $C^C = \{\text{ispitanik nije položio barem jedan predmet}\}$. Taj događaj je unija događaja A_1 i A_2 . Prema formuli za vjerojatnost unije događaja vrijedi:

$$P(C^C) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_3) = 0.7 + 0.6 - 0.4 = 0.9.$$

Prema tome, tražena vjerojatnost je jednaka $P(C) = 1 - P(C^C) = 1 - 0.9 = 0.1 = \frac{1}{10}$.

8. Svaka pošiljka (neovisno o tome je li paket ili nije) otprema se ili vlakom ili poštanskim kombijem ili zrakoplovom. Zbog toga postavljamo hipoteze:

$$H_1 = \{\text{pošiljka je otpremljena vlakom}\},$$

$$H_2 = \{\text{pošiljka je otpremljena poštanskim kombijem}\},$$

$$H_3 = \{\text{pošiljka je otpremljena zrakoplovom}\}.$$

Iz podataka u zadatku slijedi:

$$P(H_1) = 60\% = 0.6, P(H_2) = 25\% = 0.25, P(H_3) = 1 - (P(H_1) + P(H_2)) = 1 - (0.6 + 0.25) = 0.15.$$

Neka je $A = \{\text{izabrana pošiljka je paket}\}$. Iz podataka u zadatku slijedi:

$$P(A|H_1) = 70\% = 0.7, P(A|H_2) = 40\% = 0.4, P(A|H_3) = 30\% = 0.3.$$

- a) Trebamo izračunati vjerojatnost $P(A)$. Primjenom formule potpune vjerojatnosti dobivamo:

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(H_i) \cdot P(A|H_i) = 0.6 \cdot 0.7 + 0.25 \cdot 0.4 + 0.15 \cdot 0.3 = \frac{113}{200} = 0.565.$$

- b) Trebamo izračunati vjerojatnost $P(H_3|A)$. Primjenom Bayesove formule dobijemo:

$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A|H_3)}{P(A)} = \frac{0.15 \cdot 0.3}{0.565} = \frac{9}{113} \approx 0.07965.$$

9. Svaki zaposlenik (neovisno o tome koliko dugo radi u tvrtki) ima ili magisterij znanosti ili visoku stručnu spremu ili srednju stručnu spremu. Zbog toga postavljamo hipoteze:

$$H_1 = \{\text{zaposlenik ima magisterij znanosti}\},$$

$$H_2 = \{\text{zaposlenik ima visoku stručnu spremu}\},$$

$$H_3 = \{\text{zaposlenik ima srednju stručnu spremu}\}.$$

Iz podataka u zadatku slijedi:


$$P(H_1) = 10\% = 0.1, P(H_2) = 30\% = 0.3, P(H_3) = 1 - (P(H_1) + P(H_2)) = 1 - (0.1 + 0.3) = 0.6.$$

Neka je $A = \{\text{izabrani zaposlenik u tvrtki radi barem 5 godina}\}$. Iz podataka u zadatku slijedi:

$$P(A|H_1) = 20\% = 0.2, P(A|H_2) = 40\% = 0.4, P(A|H_3) = 70\% = 0.7.$$

- a) Trebamo izračunati vjerojatnost $P(A)$. Primjenom formule potpune vjerojatnosti dobivamo:

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(H_i) \cdot P(A|H_i) = 0.1 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.7 = \frac{14}{25} = 0.56.$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	zadaci za 1. grupne konzultacije 7.11.2017.
--	---	--

b) Trebamo izračunati vjerojatnost $P(H_2 | A)$. Primjenom Bayesove formule dobijemo:

$$P(H_2 | A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A | H_2)}{P(A)} = \frac{0.3 \cdot 0.4}{0.56} = \frac{3}{14} \approx 0.21429.$$

10. Primijetimo da promatrani slučajni pokus (ispitivanje ispravnosti rada operativnoga sustava na računalu u slučajno izabranom danu) ima točno dva ishoda: *uspjeh* (tj. ako nije zabilježen „pad“ operativnoga sustava) i *neuspjeh* (ako je zabilježen „pad“ operativnoga sustava). Vjerojatnost *neuspjeha* iznosi $q = 0.6$. Stoga možemo primijeniti Bernoullijevu shemu.

a) Promotrimo događaj suprotan događaju A . To je događaj $A^C = \{\text{operativni sustav nije „pao“ ni na jednom računalu}\}$. Njegova je vjerojatnost jednaka $P(A^C) = (1 - q)^{10} = 0.4^{10}$, pa je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - 0.4^{10} = 0.9998951424 = \frac{9\,764\,601}{9\,765\,625}.$$

b) Zadani događaj je disjunktna unija dvaju događaja: $B_1 = \{\text{operativni sustav je „pao“ na svim računalima}\}$ i $B_2 = \{\text{operativni sustav je „pao“ na točno 9 računala}\}$. Zbog toga imamo:

$$P(B) = P(B_1) + P(B_2) = q^{10} + \binom{10}{9} \cdot (1 - q) \cdot q^9 = 0.6^{10} + 10 \cdot 0.4 \cdot 0.6^9 = 0.0463574016 = \frac{452\,709}{9\,765\,625}.$$