1. Trajanje usmenoga ispita iz predmeta *Vjerojatnost i statistika* je normalna slučajna varijabla čije je očekivanje 15 minuta, a standardna devijacija 5 minuta. Izračunajte vjerojatnost sljedećih događaja:

a) A = {slučajno odabrani ispitanik će usmeno odgovarati između 10 i 20 minuta};
b) B = {slučajno odabrani ispitanik će usmeno odgovarati kraće od 5 minuta};
c) C = {ispitanik će usmeno odgovarati dulje od 25 minuta};
d) D = {ispitanik će usmeno odgovarati točno pola sata}.

Rezultati: **a)** $p_A = 0.68268$; **b)** i **c)** $p_B = p_C = 0.02275$; **d)** $p_D = 0$.

2. Najveća siječanjska dnevna temperatura zraka u Konjskom Brdu je normalna slučajna varijabla čije je očekivanje –2°C, a standardna devijacija 4°C. Izračunajte vjerojatnost sljedećih događaja:

a) A = {dnevna temperatura zraka u slučajno odabranom danu siječnja nije bila veća od 0°C};
b) B = {najveća dnevna temperatura zraka u slučajno odabranom danu siječnja bila je između –5°C i –1°C};
c) C = {najveća dnevna temperatura zraka u slučajno odabranom danu siječnja bila je strogo veća od –10°C}.
d) Odredite očekivani broj siječanjskih dana u kojima će najveća dnevna temperatura biti strogo pozitivna.
e) Odredite vrijednost x tako da se s vjerojatnošću od najmanje 90% može tvrditi da najveća dnevna temperatura zraka u siječnju neće biti strogo veća od x°C. (Dobiveni rezultat zaokružite na cijeli broj.)
f) Odredite vrijednost y tako da se s vjerojatnošću od najmanje 90% može tvrditi da najveća dnevna temperatura zraka u siječnju neće biti strogo manja od y°C. (Dobiveni rezultat zaokružite na cijeli broj.)

Rezultati: **a)** $p_A = 0.69146$; **b)** $p_B = 0.37208$; **c)** $p_C = 0.97725$; **d)** $n \approx 10$; **e)** $x = 4$; **f)** $y = -8$.

3. Vrijeme čekanja na pregled pacijenta u liječničkoj ordinaciji doktora Jojbolija je normalna slučajna varijabla s očekivanjem 20 minuta. Doktor Jojboli je utvrdio da 21.186% svih njegovih pacijenata čeka na pregled manje od 15 minuta.

a) Izračunajte vjerojatnost da će slučajno odabrani pacijent čekati na pregled najviše 10 minuta.
b) Izračunajte vjerojatnost da će slučajno odabrani pacijent čekati na pregled barem pola sata.

Rezultati: **a)** i **b)** $p = 0.0548$.

4. Prilikom ocjenjivanja pismenoga ispita asistent Goran primjenjuje normalnu razdiobu s očekivanjem 60 bodova i standardnom devijacijom 20 bodova. Nakon što je silazno sortirao ispitanike prema broju postignutih bodova, Goran je utvrdio da je gornjih 59.871% ispitanika položilo ispit. Odredite najmanji broj bodova potreban za dobivanje pozitivne ocjene.

Rezultat: $n = 55$.

5. Vrijeme ispravnoga rada („životni vijek“) određene vrste baterija je normalna slučajna varijabla sa standardnom devijacijom 50 dana. Utvrđeno je da 84.134% svih baterija te vrste ima „životni vijek“ dulji od 450 dana.

a) Koji dio svih baterija ima „životni vijek“ dulji od godinu i pol (= 549 dana)?
b) Odredite najveću vrijednost x takvu da možemo očekivati da najmanje 75% svih baterija navedene vrste ima „životni vijek“ dulji od x dana.

Rezultati: **a)** $p = 16.354\%$; **b)** $x = 466$.

6. Masa studenata Veleučilišta u Špičkovini je normalna slučajna varijabla. Poznato je da 99.73% studenata Veleučilišta u Špičkovini ima masu između 50 i 110 kg.

a) Koji dio svih studenata ima masu manju od 70 kg?
b) Koji dio svih studenata ima masu veću od 100 kg?
c) Ako na veleučilištu studira ukupno 300 studenata, odredite očekivani broj studenata čija je masa između 80 i 90 kg.

Rezultati: **a)** $p_1 = 15.866\%$; **b)** $p_2 = 2.275\%$; **c)** $n \approx 102$.

7. Visina studenata Veleučilišta u Donjem Muću je normalna slučajna varijabla. Poznato je da je 95.45% studenata Veleučilišta u Donjem Muću visoko između 1.6 m i 2 m.

a) Koji dio svih studenata je niži od 180 cm?
b) Koji dio svih studenata je viši od 195 m?
c) Ako na veleučilištu studira ukupno 250 studenata, odredite očekivani broj studenata visokih između 175 cm i 185 cm.

Rezultati: **a)** $p_1 = 50\%$; **b)** $p_2 = 6.681\%$; **c)** $n \approx 96$.

8. Dnevni promet vozila na dijelu autoceste Gornje Sitno – Donje Sitno je normalna slučajna varijabla s očekivanjem 800. Istraživanjem je utvrđeno da je u 97.725% dana dnevni promet strogo manji od 1000 vozila. Odredite:

a) standardnu devijaciju dnevnoga broja vozila;
b) vjerojatnost da u slučajno odabranom danu autocestom prođe između 600 i 700 vozila;
c) najveću vrijednost x takvu da u barem 90% dana autocestom prođe najviše x vozila.

Rezultati: **a)** $\sigma = 625$ vozila; **b)** $p = 0.13591$; **c)** $x_{\max} = 929$.

9. Trajanje Majina putovanja na posao je normalna slučajna varijabla čija je standardna devijacija 15 minuta. U 84.134% radnih dana njezino putovanje traje najviše sat vremena.

a) Odredite očekivano trajanje Majina putovanja na posao.
b) Odredite vjerojatnost da će Maja putovati na posao barem sat i pol.
c) Kada najkasnije (u odnosu na početak radnoga vremena) Maja treba krenuti na posao tako da vjerojatnost njezina pravovremena dolaska na posao bude barem 95%? (Zaokružite rezultat na prirodan broj.)

Rezultati: **a)** 45 minuta; **b)** $p = 0.00135$; **c)** 70 minuta prije početka radnoga vremena.

DETALJNIJA RJEŠENJA ZADATAKA

<u>Napomene</u>: U svim rješenjima zadataka F^* označava funkciju razdiobe vjerojatnosti standardne normalne razdiobe.

1. Neka je X normalna slučajna varijabla koja označava trajanje usmenoga ispita. Prema podacima iz zadatka vrijedi: $X \sim N(15, 5^2)$.

a) Tražimo vjerojatnost $P(10 \le X \le 20)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(10 \le X \le 20) = F^*\left(\frac{20-15}{5}\right) - F^*\left(\frac{10-15}{5}\right) = F^*(1) - F^*(-1) = F^*(1) - (1 - F^*(1)) =$$
$$= 2 \cdot F^*(1) - 1 = 2 \cdot 0.84134 - 1 = 0.68268.$$

b) Tražimo vjerojatnost $P(X < 5)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(X < 5) = F^*\left(\frac{5-15}{5}\right) = F^*(-2) = 1 - F^*(2) = 1 - 0.97725 = 0.02275.$$

c) Tražimo vjerojatnost $P(X > 25)$. Primjenom rezultata Zadatka 2. s predavanja slijedi:

$$P(X > 25) = P(X > 2 \cdot 15 - 5) = P(X < 5) \overset{\text{prema } \mathbf{a})}{=} 0.02275.$$

d) Za svaki $a \in \mathbb{R}$ vrijedi $P(X = a) = 0$. U ovom zadatku tražimo vjerojatnost $P(X = 30)$, pa iz navedene jednakosti izravno slijedi $P(X = 30) = 0$.

2. Neka je X normalna slučajna varijabla koja označava najveću siječanjsku dnevnu temperaturu zraka u Konjskom Brdu. Prema podacima iz zadatka vrijedi: $X \sim N(-2, 4^2)$.

a) Tražimo vjerojatnost $P(X \le 0)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(X \le 0) = F^*\left(\frac{0-(-2)}{4}\right) = F^*\left(\frac{1}{2}\right) = F^*(0.5) = 0.69146.$$

b) Tražimo vjerojatnost $P(-5 \le X \le -1)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(-5 \le X \le -1) = F^*\left(\frac{-1-(-2)}{4}\right) - F^*\left(\frac{-5-(-2)}{4}\right) = F^*\left(\frac{1}{4}\right) - F^*\left(-\frac{3}{4}\right) = F^*(0.25) - F^*(-0.75) =$$
$$= F^*(0.25) - (1 - F^*(0.75)) = F^*(0.25) + F^*(0.75) - 1 = 0.59871 + 0.77337 - 1 = 0.37208.$$

c) Tražimo vjerojatnost $P(X > -10)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(X > -10) = 1 - P(X \le -10) = 1 - F^*\left(\frac{-10-(-2)}{4}\right) = 1 - F^*(-2) = 1 - (1 - F^*(2)) = F^*(2) = 0.97725.$$

d) Izračunajmo najprije vjerojatnost da će najveća dnevna temperatura u slučajno odabranom siječanjskom danu biti strogo pozitivna. Dakle, tražimo $P(X>0)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(X>0)=1-P(X\le 0)=1-F^*\left(\frac{0-(-2)}{4}\right)=1-F^*(0.5)=1-0.69146=0.30854.$$

S druge strane, *ista* vjerojatnost je jednaka količniku broja dana u siječnju u kojima je najveća dnevna temperatura bila strogo pozitivna i ukupnoga broja dana u siječnju. Ukupan broj dana u siječnju bilo koje godine jednak je 31. Označimo li traženi broj s n, odmah dobivamo:

$$n=31\cdot P(X>0)=31\cdot 0.30854=9.56474\approx 10.$$

e) Tražimo $x\in\mathbb{R}$ takav da je $P(X\le x)\ge 90\%=0.9$. U tablici vrijednosti funkcije F^* nalazimo da je prva vrijednost te funkcije strogo veća od 0.9 jednaka $F^*(1.29)=$ $=0.90147$. Stoga broj 0.9 zamijenjujemo brojem 0.90147, pa primjenom rezultata zadatka 3. a) s predavanja dobivamo:

$$-2\le x-4\cdot 1.29 \Leftrightarrow x\ge -2+4\cdot 1.29=3.16$$

Najmanje cjelobrojno rješenje ove nejednadžbe je $x=4$.

f) Tražimo $y\in\mathbb{R}$ takav da je $P(X\ge y)\ge 90\%=0.9$. Postupimo analogno kao u prethodnom zadatku, ali primijenimo rezultat zadatka 3.b) s predavanja. Dobivamo:

$$-2\ge y-4\cdot 1.29 \Leftrightarrow y\le -2-4\cdot 1.29=-7.16.$$

Najveće cjelobrojno rješenje ove nejednadžbe je $y=-8$.

3. Neka je T normalna slučajna varijabla koja označava vrijeme čekanja pacijenata (u minutama). Poznato nam je očekivanje te varijable $E(T)=20$ minuta. Međutim, ne znamo njezinu standardnu devijaciju σ. Nju ćemo odrediti koristeći podatak da 21.186% liječnikovih pacijenata čeka na pregled manje od 15 minuta. Dakle, znamo da vrijedi nejednakost:

$$P(T<15)=21.186\%=0.21186.$$

Ta jednakost ekvivalentna je jednakosti

$$P(T\ge 15)=1-0.21186=0.78814.$$

Iz tablice vrijednosti funkcije F^* očitamo: $F^*(0.8)=0.78814$. Primjenom rezultata zadatka 3. b) s predavanja dobijemo:

$$20=15+0.8\cdot\sigma \Leftrightarrow \sigma=6.25 \text{ minuta.}$$

Dakle, $T\sim N(20, 6.25^2)$.

a) Tražimo vjerojatnost $P(T<10).$ Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(T<10)=F^*\left(\frac{10-20}{6.25}\right)=F^*(-1.6)=1-F^*(1.6)=1-0.9452=0.0548.$$

b) Vrijeme od pola sata je jednako vremenu od 30 minuta, pa tražimo vjerojatnost $P(T>30).$ Primjenom rezultata zadatka 2. s predavanja i rezultata **a)** podzadatka odmah dobivamo:

$$P(T>30)=P(T>2\cdot 20-10)=P(T<10)=0.0548.$$

4. Neka je B normalna slučajna varijabla koja označava broj ostvarenih bodova. Iz podataka u zadatku zaključujemo da je $B\sim N(60,20^2)$.

Neka je b traženi broj bodova. Iz podatka da je postotak studenata koji su ostvarili najmanje b bodova jednak 59.871% zaključujemo da mora vrijediti jednakost:

$$P(B\geq b)=59.871\%=0.59871.$$

Iz tablice vrijdnosti funkcije F^* očitamo: $F^*(0.25)=0.59871.$ Primjenom rezultata zadatka 3.b) s predavanja dobijemo:

$$60=b+20\cdot 0.25\Leftrightarrow b=55.$$

5. Neka je T normalna slučajna varijabla koja označava „životni vijek“ baterije (iskazan u danima). Standardna devijacija te varijable je $\sigma=50$ dana. Očekivanje μ te varijable nije zadano, ali ga možemo odrediti iz podatka da 84.134% svih baterija ima životni vijek dulji od 450 dana.

Dakle, znamo da vrijedi jednakost $P(T>450)=84.134\%=0.84134.$ Iz tablice vrijednosti funkcije F^* očitamo: $F^*(1)=0.84134.$ Primjenom zadatka 3.b) s predavanja dobijemo:

$$\mu=450+50\cdot 1=500.$$

Zbog toga je $T\sim N(500,50^2)$.

a) Tražimo vjerojatnost $P(T>549).$ Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(T>549)=1-P(T\leq 549)=1-F^*\left(\frac{549-500}{50}\right)=1-F^*(0.98)=1-0.83646=0.16354=16.354\%.$$

b) Tražimo vrijednost x takvu da vrijedi nejednakost: $P(T>x)\geq 75\%=0.75.$ U tablici vrijednosti funkcije F^* ne nalazimo vrijednost 0.75, pa uzimamo prvu strogo veću tabeliranu vrijednost. To je $F^*(0.68)=0.75175.$ Dakle, tražimo vrijednost x takvu da vrijedi nejednakost $P(T\geq x)\geq F^*(0.68).$ Primjenom rezultata zadatka 3.b) s predavanja odmah dobivamo:

$$500\geq x+50\cdot 0.68\Leftrightarrow x\leq 500-50\cdot 0.68=466\Leftrightarrow x_{\max}=466.$$

6. Neka je M normalna slučajna varijabla koja označava mase studenata. Budući da nisu zadani ni očekivanje, ni standardna devijacija varijable M, uzmimo da je $M \sim N(\mu, \sigma^2)$, za neke $\mu, \sigma > 0$ (očekivanje mora biti strogo pozitivno jer su sve mase studenata strogo pozitivni brojevi). Pravilo $3 \cdot \sigma$ kaže da se 99.73% svih vrijednosti varijable M nalazi u segmentu $[\mu - 3 \cdot \sigma,\ \mu + 3 \cdot \sigma]$. U ovome je slučaju taj segment $[50, 110]$, pa dobivamo sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} \mu - 3 \cdot \sigma = 50, \\ \mu + 3 \cdot \sigma = 110. \end{cases}$$

Rješenje toga sustava je $(\mu, \sigma) = (80, 10)$. Dakle, $M \sim N(80, 10^2)$.

a) Tražimo vjerojatnost $P(M < 70)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(M < 70) = F^*\left(\frac{70 - 80}{10}\right) = F^*(-1) = 1 - F^*(1) = 1 - 0.84134 = 0.15866 = 15.866\%.$$

b) Tražimo vjerojatnost $P(M > 100)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(M > 100) = 1 - P(M \le 100) = 1 - F^*\left(\frac{100 - 80}{10}\right) = 1 - F^*(2) = 1 - 0.97725 = 0.02275 = 2.275\%.$$

c) Izračunajmo najprije vjerojatnost da slučajno odabrani student ima masu između 80 i 90 kg. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(80 < M < 90) = F^*\left(\frac{90 - 80}{10}\right) - F^*\left(\frac{80 - 80}{10}\right) = F^*(1) - F^*(0) = 0.84134 - 0.5 = 0.34134.$$

S druge strane, *ista* vjerojatnost je jednaka količniku ukupnoga broja studenata koji imaju masu između 80 i 90 kg i ukupnoga broja svih studenata. Potonji broj je jednak 300, pa je traženi broj studenata jednak:

$$n = 300 \cdot P(80 < M < 90) = 300 \cdot 0.34134 = 102.402 \approx 102.$$

7. Neka je V normalna slučajna varijabla koja označava visine studenata (iskazane u cm). Budući da nisu zadani ni očekivanje, ni standardna devijacija varijable V, uzmimo da je $V \sim N(\mu, \sigma^2)$, za neke $\mu, \sigma > 0$ (očekivanje mora biti strogo pozitivno jer su sve visine studenata strogo pozitivni brojevi). Pravilo $2 \cdot \sigma$ kaže da se 95.45% svih vrijednosti varijable M nalazi u segmentu $[\mu - 2 \cdot \sigma,\ \mu + 2 \cdot \sigma]$. U ovome je slučaju taj segment $[160, 200]$, pa dobivamo sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} \mu - 2 \cdot \sigma = 160, \\ \mu + 2 \cdot \sigma = 200. \end{cases}$$

Rješenje toga sustava je $(\mu, \sigma) = (180, 10)$. Dakle, $V \sim N(180, 10^2)$.

a) Tražimo vjerojatnost $P(V<180)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(V<180)=F^*\left(\frac{180-180}{10}\right)=F^*(0)=0.5=50\%.$$

b) Tražimo vjerojatnost $P(V>195)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(V>195)=1-P(V\le 195)=1-F^*\left(\frac{195-180}{10}\right)=1-F^*(1.5)=1-0.93319=0.06681=6.681\%.$$

c) Izračunajmo najprije vjerojatnost da slučajno odabrani student visok između 175 cm i 185 cm. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(175<V<185)=F^*\left(\frac{185-180}{10}\right)-F^*\left(\frac{175-180}{10}\right)=F^*(0.5)-F^*(-0.5)=$$
$$=F^*(0.5)-(1-F^*(0.5))=2\cdot F^*(0.5)-1=2\cdot 0.69146-1=0.38292.$$

S druge strane, *ista* vjerojatnost je jednaka količniku ukupnoga broja studenata visokih između 175 cm i 185 cm i ukupnoga broja svih studenata. Potonji broj je jednak 250, pa je traženi broj studenata jednak:

$$n=250\cdot P(175<V<185)=250\cdot 0.38292=95.73\approx 96.$$

8. Neka je *X* normalna slučajna varijabla koja označava dnevni promet vozila. Očekivanje te varijable je $\mu=800$.

a) Standardnu devijaciju te varijable ne znamo, ali je možemo odrediti iz podatka da je u 97.725% dana dnevni promet vozila manji od 1000. To znači da vrijedi jednakost:

$$P(X\le 1000)=97.725\%=0.97725.$$

Iz tablice vrijednosti funkcije F^* očitamo $F^*(2)=0.97725$. Tako dobijemo $P(X\le 1000)=F^*(2)$, pa primjenom rezultata zadatka 3.a) s predavanja dobivamo:

$$800=1000-2\cdot\sigma \Leftrightarrow \sigma=100.$$

Dakle, $X\sim N(800,100^2)$.

b) Tražimo vjerojatnost $P(600<X<700)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(600<X<700)=F^*\left(\frac{700-800}{100}\right)-F^*\left(\frac{600-800}{100}\right)=F^*(-1)-F^*(-2)=$$
$$=1-F^*(1)-(1-F^*(2))=F^*(2)-F^*(1)=0.97725-0.84134=0.13591.$$

c) Tražimo vrijednost *x* takvu da vrijedi nejednakost $P(X\le x)\ge 90\%=0.9$. U tablici vrijednosti funkcije F^* ne nalazimo vrijednost 0.9. Prva strogo veća vrijednost je $F^*(1.29)=0.90147$. Dakle, tražimo najveću vrijednost *x* takvu da vrijedi nejednakost $P(X\le x)\ge 0.90147=F^*(1.29)$. Primjenom zadatka 3.a) s predavanja dobivamo:

$$800\ge x-100\cdot 1.29 \Leftrightarrow x\le 929 \Leftrightarrow x_{\max}=929.$$

9. Neka je Y normalna slučajna varijabla koja označava trajanje Majina putovanja na posao (u minutama). Standardna devijacija te varijable iznosi 15 minuta.

a) Očekivanje varijable Y odredit ćemo iz podatka da u 84.134% radnih dana Majino putovanje na posao traje najviše sat vremena, odnosno 60 minuta. To zapravo znači da je $P(Y \leq 60) = 0.84134$. Primjenom rezultata zadatka 3.a) s predavanja odmah dobivamo:

$$\mu = 60 - 1 \cdot 15 = 45 \text{ minuta. } ,$$

Dakle, $Y \sim N(45, 15^2)$.

b) Sat i pol ima ukupno 90 minuta, pa tražimo vjerojatnost $P(Y \geq 90)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(Y \geq 90) = 1 - P(Y \leq 90) = 1 - F^*\left(\frac{90-45}{15}\right) = 1 - F^*(3) = 1 - 0.99865 = 0.00135.$$

c) Neka je t traženo vrijeme. Mora vrijediti nejednakost $P(Y \leq t) \geq 0.95$. U tablici vrijednosti funkcije F^* ne nalazimo vrijednost 0.95, pa uzimamo prvu strogo veću vrijednost. To je $F^*(1.65) = 0.95053$. Dakle, tražimo $t > 0$ takav da vrijedi nejednakost $P(Y \leq t) \geq 0.95053 = F^*(1.65)$. Preostaje primijeniti rezultat zadatka 3.a) s predavanja:

$$45 \leq t - 15 \cdot 1.65 \Leftrightarrow t \geq 69.75 \Leftrightarrow t_{\max} = 70.$$

Dakle, Maja mora krenuti na posao najkasnije 70 minuta prije početka radnoga vremena.