TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	**Vjerojatnost i statistika** (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	**zadaci za 9. grupne konzultacije 16.1.2018.**

1. Zadana je razdioba svih studenata 2. godine stručnoga studija elektrotehnike na Veleučilištu u Špičkovini u akademskoj godini 2017/2018. prema masi.

Masa [kg]	60 – 70	70 - 80	80 - 90	90 - 100	100 – (110)	*Ukupno*
Broj studenata	28	32	20	16	4	100

a) Procijenite aritmetičku sredinu, standardnu devijaciju i koeficijent varijacije.

b) Prikažite zadanu razdiobu histogramom.

2. Neka je $X \sim N(0,1)$. Odredite:

a) $P(X < 0.63)$;
b) $x \in \mathbb{R}$ takav da je $P(X \geq x) = 0.0099$.

3. U skladištu Visoke uzaludne škole u Špičkovini nalazi se ukupno 20 različitih računala. Na 55% tih računala instaliran je operativni sustav *Windows* 10. Na slučajan način izabiremo 5 računala. Izračunajte vjerojatnost da će na barem jednom izabranom računalu biti instaliran sustav *Windows* 10.

4. Andrijana i Martina su se dogovorile da će se sastati na Glavnom kolodvoru ispod konja kralja Tomislava između 12 i 13 sati. Ona koja dođe prva čeka najviše 10 minuta, a potom odlazi. Pretpostavimo da će obje doći nezavisno jedna o drugoj. Izračunajte vjerojatnost da će se njih dvije sastati.

5. Vjerojatnost da će Karlo bilo kojega radnoga dana zakasniti na početak nastave iznosi 10%. Izračunajte:

a) vjerojatnost da će u jednom radnom tjednu (= 5 radnih dana) točno dvaput zakasniti na nastavu;

b) očekivani broj dana u jednom radnom mjesecu (= 25 radnih dana) u kojima neće zakasniti na nastavu.

6. Najviša dnevna temperatura zraka (iskazana u °C) izmjerena u Grudnjaku tijekom mjeseca siječnja je normalna slučajna varijabla s očekivanjem 10°C i standardnom devijacijom 5°C. Izračunajte:

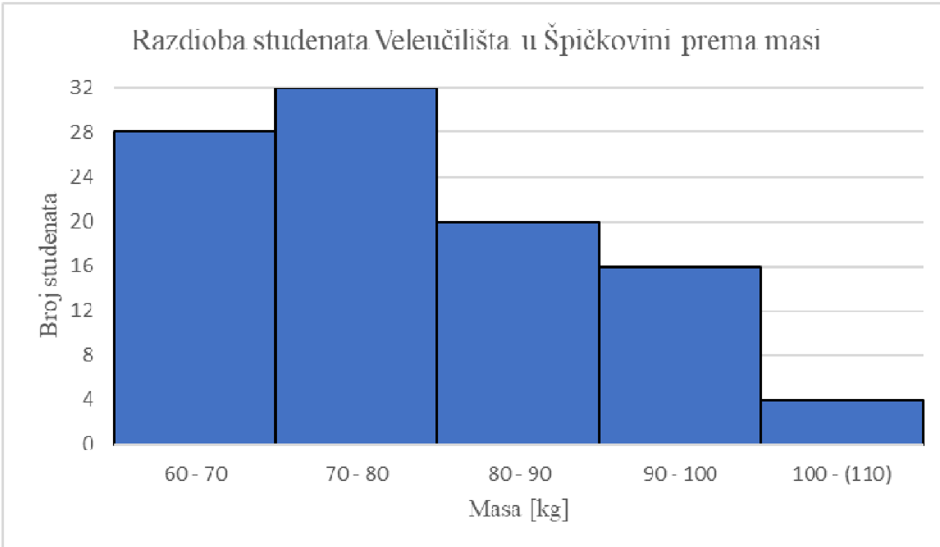
a) vjerojatnost da najviša temperatura zraka u Grudnjaku u slučajno izabranom danu siječnja bude između 12°C i 14°C;

b) očekivani broj siječanjskih dana u kojima najviša temperatura u Grudnjaku neće biti niža od 13°C. (Siječanj ima 31 dan.)

REZULTATI ZADATAKA

1. **a)** $\bar{x} = 78.6$ kg, $\sigma \approx 11.62067$ kg, $V \approx 14.78\%$.

b) Vidjeti Sliku 1.



Slika 1.

2. **a)** $p = 0.73565$;

b) $x = 2.33$.

3. $p = \frac{2\,563}{2\,584} \approx 0.99817$.

4. $p = \frac{11}{36} \approx 0.30556$.

5. **a)** $p = \frac{729}{10\,000} = 0.0729$;

b) $n = 23$.

6. **a)** $p = 0.13272$;

b) $n = 9$.

DETALJNIJA RJEŠENJA ZADATAKA

1. a) Najprije izračunamo razrednu sredinu svakoga razreda:

$$s_1 = \frac{60+70}{2} = 65,\ s_2 = \frac{70+80}{2} = 75,\ s_3 = \frac{80+90}{2} = 85,\ s_4 = \frac{90+100}{2} = 95,\ s_5 = \frac{100+110}{2} = 105.$$

Potom računamo tražene podatke koristeći upravo izračunane razredne sredine kao modalitete:

$$\bar{x} = \frac{28\cdot 65 + 32\cdot 75 + 20\cdot 85 + 16\cdot 95 + 4\cdot 105}{100} = \frac{7860}{100} = 78.6 \text{ kg};$$

$$\sigma^2 = \frac{28\cdot 65^2 + 32\cdot 75^2 + 20\cdot 85^2 + 16\cdot 95^2 + 4\cdot 105^2}{100} - \left(\frac{786}{10}\right)^2 = \frac{631\ 300 - 617\ 796}{100} = \frac{3376}{25} =,$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{3376}{25}} = \sqrt{\frac{16\cdot 211}{25}} = \frac{4}{5}\cdot\sqrt{211} \approx 11.62067 \text{ kg};$$

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}}\cdot 100 \approx \frac{11.62067}{78.6}\cdot 100 \approx 14.78\%.$$

b) Na os apscisa nanesemo prave razrede tako da razredne širine budu jednake. Na os ordinata nanosimo apsolutne frekvencije razreda (s razmakom 4). Potom ucrtamo pravokutnike kojima su duljine jednake razrednim širinama, a širine apsolutnim frekvencijama, pazeći da između svakih dvaju uzastopnih pravokutnika nema razmaka. Dobivamo sliku 1.

2. Neka je F^* funkcija razdiobe vjerojatnosti standardne normalne razdiobe.

a) Odmah imamo:

$$P(X < 0.63) = F^*(0.63) = 0.73565\,;$$

b) Koristeći tablicu vrijednosti funkcije F^* imamo redom:

$$P(X \ge x) = 0.0099 \Leftrightarrow 1 - P(X \le x) = 0.0099 \Leftrightarrow P(X \le x) = 1 - 0.0099 \Leftrightarrow$$
$$F^*(x) = 0.9901 \Leftrightarrow F^*(x) = F^*(2.33) \Leftrightarrow x = 2.33.$$

3. Primijetimo da je operativni sustav *Windows* 10 instaliran na ukupno $\frac{55}{100}\cdot 20 = 11$ računala, a nije instaliran na ukupno $20 - 11 = 9$ računala. Označimo:

$$A = \{\text{na barem jednom izabranom računalu instaliran je Windows 10}\}.$$

Tada je:

$$A^C = \{\text{ni na jednom izabranom računalu nije instaliran Windows 10}\}.$$

Vjerojatnost događaja A^C je lakše i brže izračunati, pa ćemo to i napraviti. Ako ni na jednom izabranom računalu nije instaliran *Windows* 10, to znači da smo svih 5 računala izabrali iz skupa od ukupno 9 računala na kojima nije instaliran *Windows* 10. Taj izbor možemo napraviti na ukupno $\binom{9}{5}$ načina.

Ukupan broj načina na koji možemo izabrati točno 5 računala iz skupa od njih 20 jednak je $\binom{20}{5}$. Zbog toga je:

$$P(A^C) = \frac{\binom{9}{5}}{\binom{20}{5}},$$

pa je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{\binom{9}{5}}{\binom{20}{5}} = 1 - \frac{\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5!}}{\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{5!}} = 1 - \frac{21}{2\,584} = \frac{2\,563}{2\,584} \approx 0.99187.$$

4. Neka su m i a redom vrijeme Martinina, odnosno Andrijanina dolaska na trg. Vremenu dolaska svake djevojke bijektivno pridružimo neki realan broj iz segmenta $[0,60]$. Zbog toga bez smanjenja općenitosti za skup elementarnih događaja možemo uzeti:

$$\Omega = \{(m,a) : m, a \in [0,60]\}.$$

Pokažimo najprije da je događaj $A_1 = \{\text{obje djevojke su istovremeno stigle na trg}\}$ nemoguć. U tu svrhu uočimo da vrijedi jednakost $A_1 = \{(m,a) \in \Omega : a = m\}$ (u smislu jednakosti skupova). Krivulja $K \ldots a = m$ je pravac (simetrala I. i III. kvadranta). Površina toga pravca jednaka nuli. Skup A_1 je dio krivulje K unutar skupa Ω, pa je i njegova površina jednaka nuli. Stoga je $P(A_1) = 0$. To znači da je događaj A_1 nemoguć, što smo i željeli pokazati.

Budući da je događaj istovremenoga dolaska obiju djevojaka nemoguć, zaključujemo da točno jedna djevojaka mora prva doći na trg. Pretpostavimo najprije da će prva doći Martina. To znači da vrijedi nejednakost $a > m$. Prema podacima iz zadatka, u ovom će se slučaju djevojke sastati ako vrijedi nejednakost $a \le m + 10$.

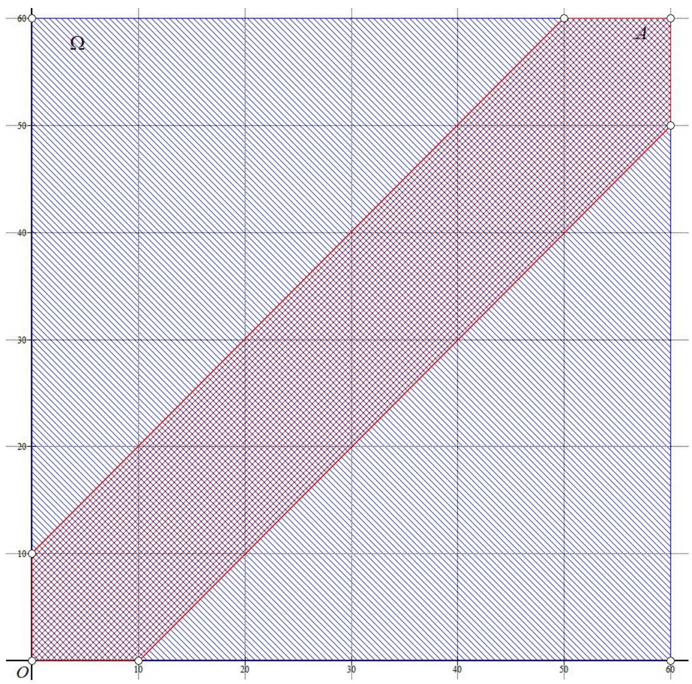
Pretpostavimo sada da će prvi doći Andrijana. To znači da vrijedi nejednakost $m > a$. U ovom će se slučaju djevojke sastati ako vrijedi nejednakost $m \le a + 10$, odnosno (ekvivalentna) nejednakost $a \ge m - 10$.

Dakle, djevojke će se sastati ako i samo ako vrijedi ili nejednakost $a \le m+10$ ili nejednakost $a \ge m-10$. Te dvije nejednakosti možemo objediniti u nejednakost $m-10 \le a \le m+10$.

Označimo skup svih povoljnih događaja s *A*, pa je:

$$A = \{(m, a) \in \Omega : m-10 \le a \le m+10\}.$$

Skicirajmo skupove Ω i A u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 2.



Slika 2.

Izračunajmo površine skiciranih skupova. Površina skupa Ω jednaka je:

$$m(\Omega) = 60^2 = 3600 \text{ kv. jed.}$$

Površina skupa *A* jednaka je:

$$m(A) = 60^2 - 2 \cdot \frac{50 \cdot 50}{2} = 60^2 - 50^2 = 3600 - 2500 = 1100 \text{ kv. jed.}$$

Dakle, tražena vjerojatnost je jednaka:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1100}{3600} = \frac{11}{36}.$$

5. Neka je *K* slučajna varijabla koja označava broj Karlovih kašnjenja. Iz podataka u zadatku zaključujemo da je *K* binomna slučajna varijabla s vjerojatnošću uspjeha $p = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$.

a) U ovome je slučaju ukupan broj pokusa jednak ukupnom broju radnih dana u tjednu, tj. $n = 5$. Dakle, $K \sim B\left(5, \frac{1}{10}\right)$. Tražena vjerojatnost je jednaka $P(K = 2)$, pa odmah imamo:

$$P(K=2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{10}\right)^{5-2} = \frac{5 \cdot 4}{2!} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{9^3}{1000} = \frac{729}{10\ 000}.$$

b) U ovome je slučaju ukupan broj pokusa jednak ukupnom broju radnih dana u mjesecu, tj. $n = 25$. Dakle, $K \sim B\left(25, \frac{1}{10}\right)$. Očekivanje varijable *K* jednako je

$$E(K) = n \cdot p = 25 \cdot \frac{1}{10} = \frac{5}{2}.$$

Taj podatak možemo interpretirati kao očekivani broj radnih dana u mjesecu u kojima će Karlo zakasniti na nastavu. Stoga je traženi broj dana jednak:

$$n_1 = n - E(X) = 25 - \frac{5}{2} = \frac{45}{2} = 22.5 \approx 23.$$

6. Neka je *T* normalna slučajna varijabla koja označava najvišu dnevnu temperaturu zraka u Grudnjaku. Iz podataka u zadatku zaključujemo da je $T \sim N(10, 5^2)$. Označimo s *F* funkciju razdiobe vjerojatnosti varijable *T*. Neka je F^* funkcija razdiobe vjerojatnosti standardne normalne slučajne varijable.

a) Tražena vjerojatnost je jednaka $P(12 \le T \le 14)$. Izračunajmo tu vjerojatnost:

$$P(12 \le T \le 14) = F(14) - F(12) = F^*\left(\frac{14-10}{5}\right) - F^*\left(\frac{12-10}{5}\right) = F^*(0.8) - F^*(0.4) =$$
$$= 0.78814 - 0.65542 = 0.13272.$$

b) Izračunajmo najprije vjerojatnost da temperatura zraka u slučajno odabranome siječanjskome danu neće biti niža od 13°C. Ta vjerojatnost je jednaka $P(T \ge 13)$, pa imamo:

$$P(T \ge 13) = 1 - P(T \le 13) = 1 - F(13) = 1 - F^*\left(\frac{13-10}{5}\right) = 1 - F^*(0.6) = 1 - 0.72575 = 0.27425.$$

S druge je strane *ista* vjerojatnost jednaka omjeru traženoga broja dana i ukupnoga broja dana u siječnju. Potonji broj je jednak 31, pa je traženi broj dana jednak:

$$n_1 = 31 \cdot P(T \ge 13) = 31 \cdot 0.27425 = 8.50175 \approx 9.$$