TVŽ TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	**Vjerojatnost i statistika** (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	**zadaci za 3. grupne konzultacije 21.11.2017.**

1. Kate i William žive skladno u dugom i sretnom braku. Kate danas ima 80 godina, a William 85 godina. Vjerojatnost da će Kate doživjeti 90 godina iznosi 30%, dok vjerojatnost da će William doživjeti 95 godina iznosi 25%. Uz pretpostavku nezavisnosti starosti obiju osoba, izračunajte vjerojatnost sljedećih događaja:

a) A = {barem jedno od njih dvoje biti živ za točno 10 godina računajući od danas};
b) B = {samo Kate će biti živa za točno 10 godina računajući od danas}.

Rezultati: **a)** $P(A)=\frac{19}{40}=0.475$, **b)** $P(B)=\frac{9}{40}=0.225.$.

2. Nikola Vlašić, Mario Gavranović i Luka Modrić nezavisno izvode točno jedan slobodan udarac prema golu Dantea Stipice. Vjerojatnosti postizanja zgoditka iznose redom 60%, 70% i 50%. Izračunajte vjerojatnost da će Dante Stipica obraniti barem dva udarca.

Rezultat: $p=\frac{7}{20}=0.35$.

3. Administrator Miroslav nadgleda rad triju međusobno nezavisnih poslužitelja. Vjerojatnosti da u tijeku jednoga dana neće biti potrebe za intervencijom na pojedinom poslužitelju iznose redom 90%, 85% i 80%. Izračunajte vjerojatnosti sljedećih događaja:

a) A = {bit će potrebna intervencija na točno jednom poslužitelju};
b) B = {ni na jednom poslužitelju neće biti potrebna intervencija}.

Rezultati: **a)** $P(A)=\frac{329}{1000}=0.329$; **b)** $P(B)=\frac{153}{250}=0.612$.

4. Dario Šarić izvodi slobodna bacanja nezavisno jedno za drugim. Vjerojatnost ubačaja u koš za svako pojedino slobodno bacanje iznosi 75%. Koliko najmanje slobodnih bacanja treba izvesti Dario tako da vjerojatnost ubačaja barem jednoga koša bude najmanje 99%?

Rezultat: $n = 4$.

5. Bojan Bogdanović i Kruno Simon nezavisno gađaju „trice“. Vjerojatnost da Bojan pogodi „tricu“ iznosi 70%, a vjerojatnost da Kruno pogodi „tricu“ iznosi 60%. Bojan smije uputiti točno dva šuta prema košu. Koliko najmanje šuteva treba uputiti Kruno tako da vjerojatnost ubačaja barem jedne „trice“ bude najmanje 99%?

Rezultat: $n=3$.

6. Ivan Rakitić nezavisno izvodi ukupno 6 slobodnih udaraca prema golu Manuela Neuera s vjerojatnošću postizanja zgoditka od 40%. Izračunajte vjerojatnosti sljedećih događaja:

a) A = {Ivan Rakitić će postići točno tri zgoditka};
b) B = {Ivan Rakitić će postići barem dva zgoditka};
c) C = {Ivan Rakitić neće postići nijedan zgoditak}.

Rezultati: **a)** $P(A)=\frac{864}{3125}=0.27648$; **b)** $P(B)=\frac{2396}{3125}=0.76672$, **c)** $P(C)=\frac{729}{15625}=0.046656.$ **.**

7. U doigravanju NBA lige sastaju se košarkaši Miami Heata i Indiana Pacersa. Potrebno je odigrati onoliko utakmica sve dok točno jedna momčad ne ostvari četiri pobjede. Svaka utakmica mora završiti pobjedom jedne momčadi (tj. nema neriješenoga ishoda). Kladioničari prognoziraju da vjerojatnost pobjede Miami Heata u svakoj utakmici iznosi 55%. Sve utakmice su međusobno nezavisne i „nenamještene". Izračunajte vjerojatnost sljedećih događaja:

a) A = {Miami Heat će pobijediti u doigravanju};
b) B = {Indiana Pacersi neće pobijediti ni u jednoj utakmici};
c) C = {Miami Heat će pobijediti u točno dvije utakmice}.

Rezultati: **a**) $P(A) \approx 0.86719$; **b**) $P(B) \approx 0.09151$; **c**) $P(C) \approx 0.18607$.

8. Karlo se priprema za polaganje ispita iz *Elektroničkih strojeva*. Vjerojatnost da Karlo položi ispit jednaka je udjelu gradiva koje je naučio u odnosu na ukupno gradivo predmeta. Udio gradiva koje je Karlo naučio ne ovisi o broju izlaska na ispit. Polaganja ispita su međusobno nezavisni događaji.

a) Pretpostavimo da Karlo pri svakom izlasku na ispit nauči 40% gradiva. Koliko bi najmanje puta Karlo trebao polagati ispit tako da se s vjerojatnošću od najmanje 90% može tvrditi da je položio ispit?
b) Koliki dio ukupnoga gradiva bi Karlo trebao naučiti pri svakom izlasku na ispit tako da vjerojatnost da će ispit položiti najkasnije iz trećega pokušaja bude najmanje 90%? (Iskažite rješenje u postotcima.)

Rezultati: **a**) $n = 5$ puta; **b**) $x = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{10}} \approx 53.584\%$.

9. Ispit se sastoji od 10 pitanja. Uz svako pitanje navedena su točno četiri odgovora, od kojih je samo jedan točan. Ispitanik je položio ispit ako je točno odgovorio na barem polovicu svih postavljenih pitanja. Nevesinko nije naučio ispitno gradivo, pa uz svako pitanje slučajno i nezavisno zaokružuje točno jedan od ponuđenih odgovora. (Zaokruženi odgovor na svako pitanje ne zavisi ni o jednom od prethodnih odgovora.) Izračunajte vjerojatnost da će Nevesinko uspjeti položiti ispit.

Rezultat: $p = \frac{40961}{524288} \approx 0.07813.$

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	**Vjerojatnost i statistika** (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	**zadaci za 3. grupne konzultacije 21.11.2017.**

DETALJNIJA RJEŠENJA ZADATAKA

1. Neka su $K =$ {Kate će biti živa nakon 10 godina računajući od danas} i $W =$ {William će biti živ nakon 10 godina računajući od danas}. Iz podataka u zadatku zaključujemo da vrijede jednakosti $P(K) = 30\% = 0.3,\ P(W) = 25\% = 0.25.$

a) Tražimo vjerojatnost $P(K+W)$. Ta vjerojatnost je jednaka $P(K)+P(W)-P(K \cdot W)$. Međutim, događaji K i W su međusobno nezavisni, pa vrijedi jednakost: $P(K \cdot W) = P(K) \cdot P(W)$. Iz tih dviju jednakosti dobivamo:

$$P(K+W) = P(K)+P(W)-P(K)\cdot P(W) = 0.3+0.25-0.3\cdot 0.25 = 0.475 = \frac{19}{40}.$$

b) Tražimo vjerojatnost $P(K \cdot W^C)$. Primijetimo da vrijedi jednakost $K = K\cdot(W+W^C)$, pri čemu su skupovi $K \cdot W$ i $K \cdot W^C$ disjunktni. Zbog toga je $P(K) = P(K\cdot W)+$ $+P(K\cdot W^C)$, a odatle je:

$$P(K\cdot W^C) = P(K)-P(K\cdot W) = P(K)-P(K)\cdot P(W) = P(K)\cdot(1-P(W)) =$$
$$= 0.3\cdot(1-0.25) = 0.225 = \frac{9}{40}.$$

2. Neka su $L =$ {Luka Modrić je postigao zgoditak}, $M =$ {Mario Gavranović je postigao zgoditak} i $N =$ {Nikola Vlašić je postigao zgoditak}. Iz podataka u zadatku zaključujemo da vrijede jednakosti:

$$P(L) = 50\% = 0.5,\ P(M) = 70\% = 0.7,\ P(N) = 60\% = 0.6\,.$$

Događaj $A =$ {Dante Stipica obranit će barem dva udarca} možemo zapisati kao disjunktnu uniju događaja $A_1 =$ {Dante Stipica će obraniti točno dva udarca} = {točno jedan od igrača je postigao zgoditak} i $A_2 =$ {Dante Stipica će obraniti sva tri udarca}. Tako redom imamo:

$$P(A) = P(A_1+A_2) = P(A_1)+P(A_2) = P(L\cdot M^C\cdot N^C)+P(L^C\cdot M\cdot N^C)+P(L^C\cdot M^C\cdot N)+$$
$$+P(L^C\cdot M^C\cdot N^C) = P(L)\cdot(1-P(M))\cdot(1-P(N))+(1-P(L))\cdot P(M)\cdot(1-P(N))+$$
$$+(1-P(L))\cdot(1-P(M))\cdot P(N)+(1-P(L))\cdot(1-P(M))\cdot(1-P(N)) =$$
$$= 0.5\cdot 0.3\cdot 0.4+0.5\cdot 0.7\cdot 0.4+0.5\cdot 0.3\cdot 0.6+0.5\cdot 0.3\cdot 0.4 = 0.35 = \frac{7}{20}.$$

3. Radi određenosti, označimo poslužitelje s P_1, P_2 i P_3. Neka su $A_i =$ {poslužitelj P_i će raditi ispravno}, za $i = 1,2,3.$ Iz podataka u zadatku zaključujemo da vrijede jednakosti $P(A_1) = 90\% = 0.9,\ P(A_2) = 85\% = 0.85,\ P(A_3) = 80\% = 0.8.$

a) Primijetimo da je $A = A_1^C\cdot A_2\cdot A_3 + A_1\cdot A_2^C\cdot A_3 + A_1\cdot A_2\cdot A_3^C$, pa slijedi:

$$P(A)=P\left(A_1^C\cdot A_2\cdot A_3\right)+P\left(A_1\cdot A_2^C\cdot A_3\right)+P\left(A_1\cdot A_2\cdot A_3^C\right)=P(A_1^C)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)+$$
$$+P(A_1)\cdot P(A_2^C)\cdot P(A_3)+P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3^C)=(1-P(A_1))\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)+$$
$$+P(A_1)\cdot(1-P(A_2))\cdot P(A_3)+P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot(1-P(A_3))=$$
$$=0.1\cdot 0.85\cdot 0.8+0.9\cdot 0.15\cdot 0.8+0.9\cdot 0.85\cdot 0.2=0.329=\frac{329}{1000}.$$

b) Očito je $B = A_1\cdot A_2\cdot A_3$, pa zbog nezavisnosti događaja dobivamo:

$$P(B)=P(A_1\cdot A_2\cdot A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=0.9\cdot 0.85\cdot 0.8=0.612=\frac{153}{250}.$$

4. Označimo s n traženi broj bacanja. Pritom je očito $n\in\mathbb{N}$. Neka je $A=$ {Dario će barem jednom postići koš}. Tada je A^C = {Dario nijednom neće postići koš}. Odredimo vjerojatnost događaja A^C. Očito je A^C = {Dario neće postići koš u 1. bacanju} · {Dario neće postići koš u 2. bacanju} · … {Dario neće postići koš u n-tom bacanju}, pa zbog međusobne nezavisnosti pojedinih bacanja slijedi:

$$P(A^C)=\underbrace{(1-0.75)\cdot(1-0.75)\cdot\ldots\cdot(1-0.75)}_{n\text{ puta}}=0.25^n,$$
$$P(A)=1-P(A^C)=1-0.25^n.$$

Prema zahtjevu zadatka mora vrijediti nejednakost $P(A)\ge 99\%=0.99$, pa dobivamo eksponencijalnu nejednadžbu $1-0.25^n\ge 0.99$. Odavde je $0.25^n\le 0.01$, pa logaritmiranjem po bazi 10 dobivamo $n\cdot(2\cdot\log 5-2)\le -2$, odnosno $n\ge\frac{1}{1-\log 5}\approx 3.32193.$

Najmanji $n\in\mathbb{N}$ koji zadovoljava ovu nejednakost je $n=4$.

5. Neka je n traženi broj bacanja. Pritom je očito $n\in\mathbb{N}$. Neka su $B=${Bojan je pogodio „tricu“}, $K=${Kruno je pogodio „tricu“} i $A=${pogođena je barem jedna trica}. Iz podataka u zadatku zaključujemo da vrijede jednakosti $P(B)=70\%=0.7$, $P(K)=60\%=0.6$.

Promotrimo događaj A^C. Očito je A^C = {nije pogođena nijedna „trica“} = {Bojan je promašio oba bacanja i Kruno je promašio svih n bacanja} = {Bojan je promašio oba bacanja} · {Kruno je promašio svih n bacanja} = {Bojan je promašio 1. bacanje} · {Bojan je promašio 2. bacanje} · {Kruno je promašio 1. bacanje}· {Kruno je promašio 2. bacanje} · … · {Kruno je promašio n-to bacanje}. Zbog nezavisnosti događaja slijedi:

$$P(A^C)=(1-P(B))^2\cdot(1-P(K))^n=(1-0.7)^2\cdot(1-0.6)^n=0.3^2\cdot 0.4^n,$$
$$P(A)=1-P(A^C)=1-0.3^2\cdot 0.4^n.$$

Prema zahtjevu zadatka mora vrijediti nejednakost $P(A)\ge 99\%=0.99$. Tako dobivamo eksponencijalnu nejednadžbu $1-0.3^2\cdot 0.4^n\ge 0.99$, odnosno $0.4^n\le\frac{1}{9}$. Logaritmiranjem po bazi 10 dobijemo $n\cdot(2\cdot\log 2-1)\le -2\cdot\log 3$, a odatle je $n\ge\frac{2\cdot\log 3}{1-2\cdot\log 2}\approx 2.39796.$

Najmanji $n\in\mathbb{N}$ koji zadovoljava ovu nejednakost je $n=3$.

6. Svaki slobodni udarac možemo shvatiti kao Bernoullijev pokus s točno dvama ishodima: „uspjeh" (postignut je zgoditak) i „neuspjeh" (nije postignut zgoditak). Taj slučajni pokus se ponavlja točno $n = 6$ puta, a vjerojatnost „uspjeha" u svakom ponavljanju pokusa iznosi $p = 40\% = 0.4$.

a) Tražimo vjerojatnost da se dogode točno $k = 3$ „uspjeha". Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(A) = \binom{6}{3} \cdot 0.4^3 \cdot (1-0.4)^{6-3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} \cdot 0.4^3 \cdot 0.6^3 = 0.27648 = \frac{864}{3125}.$$

b) Promotrimo događaj B^C = {Ivan Rakitić će postići najviše jedan zgoditak}. Očito je B^C = {Ivan Rakitić neće postići nijedan zgoditak} + {Ivan Rakitić će postići točno jedan zgoditak}. Ti događaji su disjunktni, pa imamo:

$$P(B^C) = (1-0.4)^6 + \binom{6}{1} \cdot 0.4 \cdot (1-0.4)^{6-1} = 0.6^6 + 6 \cdot 0.4 \cdot 0.6^5,$$

$$P(B) = 1 - P(B^C) = 1 - 0.6^6 - 6 \cdot 0.4 \cdot 0.6^5 = \frac{2396}{3125} = 0.76672.$$

c) Tražena vjerojatnost jednaka je vjerojatnosti da se u svim pokusima kao ishod pojavi „neuspjeh". Dakle, $P(C) = (1-0.4)^6 = 0.6^6 = \frac{729}{15625} = 0.046656$.

7. I u ovom se slučaju radi o Bernoullijevu pokusu s točno dva ishoda: pobjeda Miami Heata i pobjeda Indiana Pacersa. Radi podataka u zadatku, proglasimo pobjedu Miami Heata „uspjehom", a pobjedu Indiana Pacersa „neuspjehom". Dakle, vjerojatnost „uspjeha" iznosi $p = 55\% = 0.55$. Međutim, ne znamo ukupan broj izvedenih pokusa. Znamo da se sigurno moraju odigrati četiri utakmice i da je moguće odigrati ukupno najviše sedam utakmica (u slučaju kad prvih šest utakmica završe s po tri pobjede svake momčadi, a u posljednjoj, sedmoj utakmici pobijedi momčad Miami Heata).

a) Zadani događaj je disjunktna unija događaja {odigrane su točno 4 utakmice i u sve četiri utakmice je pobijedila momčad Miami Heata}, {odigrano je točno 5 utakmica i u njih 4 je pobijedila momčad Miami Heata}, {odigrano je točno 6 utakmica i u njih 4 je pobijedila momčad Miami Heata} i {odigrano je točno 7 utakmica i u njih 4 je pobijedila momčad Miami Heata}. Stoga je:

$$P(A) = 0.55^4 + \binom{5}{4} \cdot 0.55^4 \cdot (1-0.55)^{5-4} + \binom{6}{4} \cdot 0.55^4 \cdot (1-0.55)^{6-4} + \binom{7}{4} \cdot 0.55^4 \cdot (1-0.55)^{7-4} =$$

$$= 0.55^4 + \binom{5}{5-1} \cdot 0.55^4 \cdot 0.45 + \binom{6}{6-4} \cdot 0.55^4 \cdot 0.45^2 + \binom{7}{7-4} \cdot 0.55^4 \cdot 0.45^3 =$$

$$= 0.55^4 + \binom{5}{1} \cdot 0.55^4 \cdot 0.45 + \binom{6}{2} \cdot 0.55^4 \cdot 0.45^2 + \binom{7}{3} \cdot 0.55^4 \cdot 0.45^3 =$$

$$= 0.55^4 + 5 \cdot 0.55^4 \cdot 0.45 + \frac{6 \cdot 5}{2!} \cdot 0.55^4 \cdot 0.45^2 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} \cdot 0.55^4 \cdot 0.45^3 =$$

$$= 0.55^4 + 5 \cdot 0.55^4 \cdot 0.45 + 15 \cdot 0.55^4 \cdot 0.45^2 + 35 \cdot 0.55^4 \cdot 0.45^3 =$$

$$= 0.55^4 \cdot (1 + 5 \cdot 0.45 + 15 \cdot 0.45^2 + 35 \cdot 0.45^3) = 0.86719329296875 \approx 0.86719.$$

b) U ovom slučaju tražimo vjerojatnost da su odigrane točno četiri utakmice i da je u sve četiri utakmice pobijedila momčad Miami Heata. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(B) = 0.55^4 = 0.09150625 \approx 0.09151.$$

c) U ovom je slučaju odigrano ukupno 6 utakmica i u točno dvije utakmice je pobijedila momčad Miami Heata. Dakle, tražimo vjerojatnost da se u 6 slučajnih pokusa dogode točno dva „uspjeha“. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(C) = \binom{6}{2} \cdot 0.55^2 \cdot (1-0.55)^{6-2} = \frac{6 \cdot 5}{2!} \cdot 0.55^2 \cdot 0.45^4 = 15 \cdot 0.55^2 \cdot 0.45^4 = 0.186065859375 \approx 0.18607.$$

8. Svaki Karlov izlazak na ispit možemo shvatiti kao Bernoullijev pokus s točno dvama ishodima: „uspjeh“ (ispit je položen) i „neuspjeh“ (ispit nije položen). Iz podataka u zadatku zaključujemo da vjerojatnost „uspjeha“ iznosi $p = 40\% = 0.4$.

a) Neka je *n* traženi broj izlazaka na ispit. Očito je $n \in \mathbb{N}$. Vjerojatnost da Karlo neće položiti ispit ni u jednom izlasku na ispit iznosi $(1-0.4)^n = 0.6^n$. Stoga je vjerojatnost suprotnoga događaja, a to je upravo vjerojatnost da će Karlo položiti ispit u posljednjem, *n*-tom izlasku na ispit (ako položi ispit u nekom pokušaju, onda više ne izlazi na isti ispit), iznosi $1-0.4^n$. Ta vjerojatnost treba biti jednaka ili veća od 90%, pa dobivamo eksponencijalnu nejednadžbu $1-0.6^n \geq 0.9$, odnosno $0.6^n \leq 0.1$. Odatle logaritmiranjem po bazi 10 slijedi $n \geq \dfrac{1}{1-\log 6} \approx 4.50758..$. Najmanji $n \in \mathbb{N}$ koji zadovoljava ovu nejednadžbu je $n = 5$.

b) Neka je *p* traženi dio gradiva. *p* je ujedno i vjerojatnost polaganja ispita u svakom pokušaju. Vjerojatnost da će Karlo položiti ispit u prvom pokušaju iznosi *p*. Vjerojatnost da će Karlo položiti ispit u drugom pokušaju iznosi $(1-p)\cdot p$, a vjerojatnost da će položiti ispit u trećem pokušaju $(1-p)^2 \cdot p$. Pripadni događaji su međusobno disjunktni, pa je vjerojatnost da će Karlo položiti ispit najkasnije u trećem pokušaju jednaka zbroju navedenih vjerojatnosti, tj. $p+(1-p)\cdot p+(1-p)^2 \cdot p = p^3 - 3\cdot p^2 + 3\cdot p = (p-1)^3 + 1$. Ta vjerojatnost mora biti jednaka ili veća od 90%, pa dobivamo nejednadžbu $(p-1)^3 + 1 \geq 0.9$. Odatle je $p \geq 1 - \sqrt[3]{0.1} \approx 0.53584 = 53.584\%$.

9. I u ovom zadatku se radi o Bernoullijevu pokusu. „Uspjeh“ je zaokruživanje točnoga odgovora. Njegova je vjerojatnost jednaka $p = \dfrac{1}{4}$ jer je samo jedan od četiri odgovora točan. Tražimo vjerojatnost da je Nevesinko točno odgovorio na barem pet pitanja, odnosno da se pojavilo najmanje pet „uspjeha“. To znači da je Nevesinko točno odgovorio ili na pet ili na šest ili na sedam ili na osam ili na devet ili na svih deset pitanja. Pripadni događaji su međusobno disjunktni, pa slijedi da je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p = \sum_{k=5}^{10} \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10-k} = \frac{40961}{524288} \approx 0.07813.$$