TVŽ TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	**Vjerojatnost i statistika** (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	**zadaci za 7. grupne konzultacije 19.12.2017.**

1. Funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable *X* definirana je pravilom:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a-x}{2}, & \text{za } x\in[-1,1],\\ 0, & \text{inače.}\end{cases}$$

a) Odredite vrijednost realnoga parametra *a*.
b) Izračunajte očekivanje i standardnu devijaciju varijable *X*.
c) Odredite pravilo funkcije razdiobe vjerojatnosti varijable *X*. Potom na istoj slici nacrtajte grafove funkcije gustoće i funkcije razdiobe vjerojatnosti.
d) Izračunajte $P(0<X<2)$.

Rezultati: **a)** $a=1$; **b)** $E(X)=-\frac{1}{3}$, $\sigma(X)=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}$; **c)** $F(x)=\begin{cases}0, & \text{za } x<-1,\\ -\frac{1}{4}\cdot x^2+\frac{1}{2}\cdot x+\frac{3}{4}, & \text{za } x\in[-1,1],\\ 1, & \text{za } x>1.\end{cases}$ **d)** $P(0<X<2)=\frac{1}{4}$.

2. Funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable *Y* definirana je pravilom:

$$f(y)=\begin{cases}a\cdot e^{1-y}, & \text{za } y\ge 1,\\ 0, & \text{inače.}\end{cases}$$

a) Odredite vrijednost realnoga parametra *a*.
b) Izračunajte očekivanje i standardnu devijaciju varijable *Y*.
c) Odredite pravilo funkcije razdiobe vjerojatnosti varijable *Y*. Potom na istoj slici nacrtajte grafove funkcije gustoće i funkcije razdiobe vjerojatnosti.
d) Izračunajte $P(2\le Y<3)$.

Rezultati: **a)** $a=1$; **b)** $E(Y)=2,\ \sigma(Y)=1$; **c)** $F(y)=\begin{cases}1-e^{1-y}, & \text{za } y\ge 1,\\ 0, & \text{inače.}\end{cases}$ **d)** $P(2\le Y<3)=\frac{e-1}{e^2}$.

3. Martina i Andrijana svakoga radnoga dana zajedno dolaze na nastavu, a sastaju se na Trgu kralja Tomislava. Martina uvijek dolazi prva i čeka Andrijanu između 10 i 15 minuta. Trenutak Andrijanina dolaska u tom vremenskom intervalu je slučajan. Neka je *M* jednolika slučajna varijabla koja označava trajanje Martinina čekanja.

a) Odredite funkciju gustoće varijable *M*.
b) Izračunajte očekivano trajanje Martinina čekanja i pripadnu standardnu devijaciju.
c) Odredite pravilo funkcije razdiobe vjerojatnosti varijable *M*. Potom na istoj slici nacrtajte grafove funkcije gustoće i funkcije razdiobe vjerojatnosti.
d) Izračunajte vjerojatnost da će Martina čekati više od 12, ali manje od 14 minuta.

Rezultati: **a)** $M\sim U(10,15)$, pa je $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & \text{za } x\in[10,15],\\ 0, & \text{inače.}\end{cases}$ **b)** $E(M)=\frac{25}{2},\ \sigma(M)=\frac{5}{6}\cdot\sqrt{3}$,

c) $F(x)=\begin{cases}0, & \text{za } x<10,\\ \frac{1}{5}\cdot x-2, & \text{za } x\in[10,15],\\ 1, & \text{za } x>15.\end{cases}$ **d)** $P(12<M<14)=\frac{2}{5}$.

4. Slavica svakoga radnoga dana putuje taksijem na posao. Utvrdila je da vrijeme čekanja od trenutka poziva do trenutka dolaska taksija iznosi najmanje jednu minutu, a najviše pet minuta. Neka je S slučajna varijabla koja označava Slavičino dnevno vrijeme čekanja.

a) Odredite funkciju gustoće varijable S.
b) Izračunajte očekivano vrijeme Slavičina čekanja i pripadnu standardnu devijaciju.
c) Odredite pravilo funkcije razdiobe vjerojatnosti varijable S. Potom na istoj slici nacrtajte grafove funkcije gustoće i funkcije razdiobe vjerojatnosti.
d) Izračunajte vjerojatnost da će Slavica čekati taksi najviše tri minute.

Rezultati: **a)** $S \sim U(1,5)$, pa je $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, \text{ za } x \in [1,5], \\ 0, \text{ inače.} \end{cases}$; **b)** $E(S) = 3,\ \sigma(S) = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}$;

c) $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ za } x < 1, \\ \frac{1}{4} \cdot x - \frac{1}{4}, \text{ za } x \in [1,5], \\ 1, \text{ za } x > 5. \end{cases}$ **d)** $P(S \le 3) = \frac{1}{2}$.

5. Na pisač Veleučilišta u Svrzigaćama u prosjeku se upute tri zahtjeva za ispis u jednom satu. Pretpostavimo da je trenutak upućivanja zahtjeva za ispis slučajan. Neka je X eksponencijalna slučajna varijabla koja označava vrijeme (u satima) između dvaju uzastopnih zahtjeva za ispis. Odredite:

a) očekivano vrijeme proteklo između dva uzastopna zahtjeva za ispis;
b) vjerojatnost da će između dva uzastopna zahtjeva za ispis proći najviše 5 minuta;
c) koliko najmanje, počevši od trenutka upućivanja prvoga zahtjeva, trebamo čekati na drugi zahtjev tako da vjerojatnost upućivanja drugoga zahtjeva u tom vremenu bude barem 90%.

Rezultati: $X \sim Exp(3)$. **a)** $E(X) = 20$ minuta; **b)** $p = 1 - e^{-\frac{1}{4}} \approx 0.2212$; **c)** $t_{\min} = \frac{1}{3} \cdot \ln 10 \approx 46$ minuta.

6. Prosječan minutni broj posjetâ internetskoj stranici *Podnevnoga lista* jednak je 2. Pretpostavimo da je trenutak posjete stranici slučajan. Neka je Y eksponencijalna slučajna varijabla koja označava vrijeme (u minutama) između dviju uzastopnih posjeta. Odredite:

a) očekivano trajanje vremena između dvije uzastopne posjete;
b) vjerojatnost da će između dvije uzastopne posjete proći najmanje 40 sekundi;
c) vjerojatnost da će između dvije uzastopne posjete proći najmanje 1 minuta i 40 sekundi ako u prvoj minuti mjerenja (računajući od trenutka prve od tih dviju posjeta) ne bude zabilježena nijedna posjeta.

Rezultati: $X \sim Exp(2)$. **a)** $E(X) = 30$ sekundi; **b)** i **c)** $p = e^{-\frac{4}{3}} \approx 0.264$.

7. Neka je X standardna normalna slučajna varijabla.

a) Odredite $P(X < 0.12)$.
b) Nađite $x \in \mathbb{R}$ takav da je $P(X \ge x) = 0.1335$.

***Rezultati*: a)** $p = 0.54776$; **b)** $x = 1.11$.

8. Neka je X standardna normalna slučajna varijabla.

a) Odredite $P(X > -0.5)$.
b) Nađite $x \in \mathbb{R}$ takav da je $P(X \leq x) = 0.02275$

Rezultati: **a)** $p = 0.69146$; **b)** $x = -2$.

9. Neka je $Y \sim N(1, 2^2)$.

a) Odredite $P(0.8 \leq X < 1.2)$.
b) Nađite $x \in \mathbb{R}$ takav da je $P(X \geq x) = 0.02807$.

Rezultati: **a)** $p = 0.07966$; **b)** $x = 2.82$.

10. Neka je $Z_1 \sim N(x, 20^2)$. Odredite $x \in \mathbb{R}$ tako da vrijedi jednakost $P(Z_1 \leq 10) = 0.15866$.

Rezultat: $x = 30$.

11. Neka je $Z_2 \sim N(60, \sigma^2)$. Odredite $\sigma > 0$ tako da vrijedi jednakost $P(Z_2 > 50) = 0.97725$.

Rezultat: $\sigma = 5$.

12. Prosječna brzina vozila tipa *Ficho* je normalna slučajna varijabla čije je očekivanje 50 km/h, a standardna devijacija 10 km/h. Izračunajte:

a) vjerojatnost da slučajno odabrano vozilo tipa *Ficho* ima prosječnu brzinu između 45 km/h i 55 km/h;
b) vjerojatnost da slučajno odabrano vozilo tipa *Ficho* ima prosječnu brzinu veću od 60 km/h;
c) vjerojatnost da slučajno odabrano vozilo tipa *Ficho* ima prosječnu brzinu manju od 40 km/h;
d) očekivanu najveću prosječnu brzinu za 90% svih vozila tipa *Ficho*.

Rezultati: **a)** $p_1 = 0.38292$; **b)** i **c)** $p_2 = p_3 = 0.15866$; **d)** $v_{\max} \approx 62.8$ km/h .

13. Ukupan godišnji prihod trgovačkoga lanca *Zumkon* je normalna slučajna varijabla čije je očekivanje 10 000 000 €, a standardna devijacija 2 000 000 €. Izračunajte:

a) vjerojatnost da će u slučajno odabranoj godini trgovački lanac *Zumkon* imati godišnji prihod između 9 000 000 € i 13 000 000 €;
b) vjerojatnost da će u slučajno odabranoj godini trgovački lanac *Zumkon* ostvariti godišnji prihod strogo manji od 8 000 000 €;
c) vjerojatnost da će u slučajno odabranoj godini trgovački lanac *Zumkon* ostvariti godišnji prihod strogo veći od 15 000 000 €;
d) najveći iznos x takav da se s vjerojatnošću od barem 95% može tvrditi da će u slučajno odabranoj godini trgovački lanac *Zumkon* ostvariti prihod strogo veći od x €.

Rezultati: **a)** $p_1 = 0.62645$; **b)** $p_2 = 0.15866$; **c)** $p_3 = 0.06681$; **d)** $x = 6\ 700\ 000$.

DETALJNIJA RJEŠENJA ZADATAKA

1. a) Koristit ćemo osnovna svojstva funkcije gustoće vjerojatnosti. Ona mora biti definirana i nenegativna na skupu $\mathbb{R}$, te mora vrijediti jednakost: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot \mathrm{d}x = 1$.

Funkcija *f* je očito definirana na skupu $\mathbb{R}$, pa je taj zahtjev ispunjen.

Za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$ vrijedi $f(x) = 0$, pa je na tom skupu funkcija *f* očito nenegativna. Za svaki $x \in [-1,1]$ vrijedi $f(x) = \frac{a-x}{2}$, pa moramo postaviti zahtjev $\frac{a-x}{2} \geq 0$. Odavde je $a - x \geq 0$, odnosno $x \leq a$. Ta nejednakost mora vrijediti za svaki $x \in [-1,1]$ ili, ekvivalentno, za $-1 \leq x \leq 1$. Sada iz nejednakosti $x \leq a$ i $x \leq 1$ slijedi da mora vrijediti nejednakost $a \geq 1$. Zbog toga u daljnjem pretpostavljamo da je $a \geq 1$.

Preostaje provjeriti jednakost $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot \mathrm{d}x = 1$. Iako se na prvi pogled čini da ćemo morati računati nepravi integral, to zapravo nije točno. Naime, kako znamo iz predmeta *Matematika* 2, određeni ili nepravi integral nulfunkcije $g(x) = 0$ na *bilo kojem* intervalu jednak je nuli. Zbog toga trebamo računati navedeni nepravi integral funkcije *f* samo na onim dijelovima skupa $\mathbb{R}$ na kojima je funkcija *f* različita od nulfunkcije. U ovom je slučaju riječ o segmentu $[-1,1]$, pa imamo:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\cdot \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{a-x}{2}\right)\cdot \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\cdot x\right)\cdot \mathrm{d}x = \left[\frac{a}{2}\cdot x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2\right]_{-1}^{1} =$$
$$= \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{a}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{a}{2} - \frac{1}{4} + \frac{a}{2} + \frac{1}{4} = a.$$

Dakle, jednakost $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot \mathrm{d}x = 1$ je ekvivalentna jednakosti $a = 1$. Ta vrijednost zadovoljava uvjet $a \geq 1$, pa je ona rješenje podzadatka. Zaključimo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{2}, \text{ za } x \in [-1,1], \\ 0, \text{ inače.} \end{cases}$$

b) Koristit ćemo definicijske relacije očekivanja i standardne devijacije neprekidne slučajne varijable, pri čemu ćemo neprave integrale računati samo na segmentu $[-1,1]$. Tako redom imamo:

$$E(X) = \int\limits_{-1}^{1} x\cdot f(x)\cdot \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} x\cdot\left(\frac{1-x}{2}\right)\cdot \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}\cdot x - \frac{1}{2}\cdot x^2\right)\cdot \mathrm{d}x =$$
$$= \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot x^3\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right) = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3},$$

$$V(X)=\int_{-1}^{1} x^2\cdot f(x)\cdot \mathrm{d}x-(E(X))^2=\int_{-1}^{1} x^2\cdot\left(\frac{1-x}{2}\right)\cdot\mathrm{d}x-\left(-\frac{1}{3}\right)^2=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}\cdot x^2-\frac{1}{2}\cdot x^3\right)\cdot\mathrm{d}x-\frac{1}{9}=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot x^3-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot x^4\right]_{-1}^{1}-\frac{1}{9}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{9}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{2}{9},$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}.$$

c) Prema definiciji funkcije razdiobe vjerojatnosti vrijedi jednakost:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{t} f(t)\cdot\mathrm{d}t.$$

Stoga ćemo razlikovati točno tri slučaja:

I. $x<-1$. U ovome je slučaju $F(x)=\int_{-\infty}^{-1} f(t)\cdot\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{-1} 0\cdot\mathrm{d}t=0.$

II. $x\in[-1,1]$. U ovome je slučaju:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\cdot\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{-1} f(t)\cdot\mathrm{d}t+\int_{-1}^{x} f(t)\cdot\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{-1} 0\cdot\mathrm{d}t+\int_{-1}^{x}\left(\frac{1-t}{2}\right)\cdot\mathrm{d}t=$$

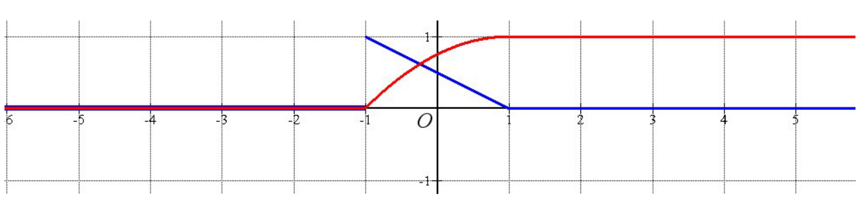
$$=0+\int_{-1}^{x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot t\right)\cdot\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{2}\cdot t-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot t^2\right]_{-1}^{x}=\left(\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{4}\cdot x^2\right)-\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}\cdot x^2+\frac{1}{2}\cdot x+\frac{3}{4}.$$

III. $x>1$. U ovome je slučaju $F(x)=1$, što lako možemo provjeriti ovako:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\cdot\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{-1} f(t)\cdot\mathrm{d}t+\int_{-1}^{1} f(t)\cdot\mathrm{d}t+\int_{1}^{x} f(t)\cdot\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{-1} 0\cdot\mathrm{d}t+\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-t}{2}\right)\cdot\mathrm{d}t+\int_{1}^{x} 0\cdot\mathrm{d}t\overset{\text{prema }\mathbf{a})}{=}0+1+0=1.$$

Dakle, $F(x)=\begin{cases}0, \text{ za } x<-1,\\ -\frac{1}{4}\cdot x^2+\frac{1}{2}\cdot x+\frac{3}{4}, \text{ za } x\in[-1,1],\\ 1, \text{ za } x>1.\end{cases}$ Grafovi funkcija *f* i *F* prikazani su na slici 1.

(Graf funkcije *f* izvučen je plavom bojom, a graf funkcije *F* crvenom bojom.)



Slika 1.

d) Koristimo svojstvo funkcije razdiobe vjerojatnosti:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

Tako odmah dobivamo da je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P(0 < X < 2) = F(2) - F(0) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

2. **a)** Prirodna domena zadane funkcije je očito skup $\mathbb{R}$. Zbog stroge pozitivnosti eksponencijalne funkcije e^x, zadana funkcija će biti nenegativna na $\mathbb{R}$ ako i samo ako vrijedi nejednakost $a \geq 0$. Stoga nadalje pretpostavljamo da je $a \geq 0$.

Analogno kao u zadatku 1. a) računamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cdot \mathrm{d}y = \int_{1}^{+\infty} f(y)\cdot \mathrm{d}y = \int_{1}^{+\infty} a\cdot e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y = \lim_{b\to+\infty}\left(\int_1^b a\cdot e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(a\cdot\int_1^b e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y\right) =$$

$$= a\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\int_1^b e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y\right) = a\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\left[-e^{1-y}\right]_1^b\right) = a\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(-e^{1-b}-(-1)\right) = a\cdot(0+1) = a,$$

jer su

$$\int e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y = \left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ t := 1-y,\\ \mathrm{d}t = (1-y)'\cdot \mathrm{d}y = -1\cdot \mathrm{d}y \Rightarrow \mathrm{d}y = -\mathrm{d}t\end{array}\right\} = \int e^t\cdot(-\mathrm{d}t) = -\int e^t\cdot \mathrm{d}t = -e^t = -e^{1-y} + C,\ C\in\mathbb{R},$$

$$\lim_{y\to+\infty} e^{1-y} = \left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ t := 1-y,\\ \text{kad } y\to+\infty,\text{ onda } t\to-\infty\end{array}\right\} = \lim_{t\to-\infty} e^t = 0.$$

Tako iz zahtjeva $\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cdot \mathrm{d}y = 1$ izravno slijedi $a = 1$. Ta vrijednost zadovoljava uvjet $a \geq 0$, pa je ona rješenje ovoga podzadatka. Zaključimo:

$$f(y) = \begin{cases} e^{1-y}, & \text{za } y \geq 1,\\ 0, & \text{inače.}\end{cases}$$

b) Odredimo najprije neodređene integrale $\int y\cdot e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y$ i $\int y^2\cdot e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y$. Primjenom metode djelomične integracije i rezultata dobivenih u **a)** podzadatku dobivamo:

$$\int y\cdot e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y = \left|\begin{array}{ll} u = y & v = \int e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y = -e^{1-y}\\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}y & \mathrm{d}v = e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y\end{array}\right| = -y\cdot e^{1-y} - \int -e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y =$$

$$= -y\cdot e^{1-y} + \int e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y = -y\cdot e^{1-y} - e^{1-y} = (-y-1)\cdot e^{1-y} + C,\ C\in\mathbb{R},$$

$$\int y^2\cdot e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y=\begin{vmatrix} u=y^2 & v=\int e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y=-e^{1-y}\\ \mathrm{d}u=2\cdot y\cdot \mathrm{d}y & \mathrm{d}v=e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y\end{vmatrix}=-y^2\cdot e^{1-y}-\int -e^{1-y}\cdot 2\cdot y\cdot \mathrm{d}y=$$
$$=-y^2\cdot e^{1-y}+2\cdot\int y\cdot e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y=-y^2\cdot e^{1-y}+2\cdot(-y-1)\cdot e^{1-y}=(-y^2-2\cdot y-2)\cdot e^{1-y}+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Primijenimo definicijske formule za očekivanje i standardnu devijaciju neprekidne slučajne varijable, pri čemu neprave integrale računamo na intervalu $[1,+\infty\rangle$ na kojemu je zadana funkcija različita od nulfunkcije. Dobivamo:

$$E(Y)=\int_1^{+\infty} y\cdot f(y)\cdot \mathrm{d}y=\int_1^{+\infty} y\cdot e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y=\lim_{b\to+\infty}\left(\left[(-y-1)\cdot e^{1-y}\right]_1^b\right)=$$
$$=\lim_{b\to+\infty}\left((-b-1)\cdot e^{1-b}-(-1-1)\cdot e^{1-1}\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(2-\frac{b+1}{e^{b-1}}\right)=2-\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b+1}{e^{b-1}}\right)\overset{\text{L'Hôpitalovo pravilo}}{=}$$
$$=2-\lim_{b\to+\infty}\left[\left(\frac{b+1}{e^{b-1}}\right)\right]'=2-\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1+0}{e^{b-1}\cdot 1}\right)=2-\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{b-1}}\right)=2-0=2,$$
$$V(Y)=\int_1^{+\infty} y^2\cdot f(y)\cdot \mathrm{d}y-\left(E(Y)\right)^2=\int_1^{+\infty} y^2\cdot e^{1-y}\cdot \mathrm{d}y-2^2=\lim_{b\to+\infty}\left(\left[(-y^2-2\cdot y-2)\cdot e^{1-y}\right]_1^b\right)-4=$$
$$=\lim_{b\to+\infty}\left((-b^2-2\cdot b-2)\cdot e^{1-b}-(-1-2\cdot 1-2)\cdot e^{1-1}\right)-4=\lim_{b\to+\infty}\left(5-(b^2+2\cdot b+2)\cdot e^{1-b}\right)-4=$$
$$=5-\lim_{b\to+\infty}\frac{b^2+2\cdot b+2}{e^{b-1}}-4=1-\lim_{b\to+\infty}\frac{b^2+2\cdot b+2}{e^{b-1}}\overset{\text{L'Hôpitalovo pravilo}}{=}1-\lim_{b\to+\infty}\frac{2\cdot b+2}{e^{b-1}\cdot 1}\overset{\text{L'Hôpitalovo pravilo}}{=}$$
$$=1-\lim_{b\to+\infty}\frac{2\cdot 1}{e^{b-1}\cdot 1}=1-0=1,$$
$$\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{1}=1.$$

c) Sada ćemo razlikovati točno dva slučaja.

I. $t<1$. U ovome je slučaju $F(y)=\int_{-\infty}^{y} f(t)\cdot \mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{y} 0\cdot \mathrm{d}t=0.$

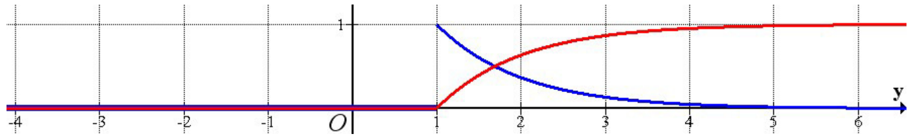
II. $t\geq 1$. U ovome je slučaju:

$$F(y)=\int_{-\infty}^{y} f(t)\cdot \mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{1} f(t)\cdot \mathrm{d}t+\int_1^{y} f(t)\cdot \mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{1} 0\cdot \mathrm{d}t+\int_1^{y} e^{1-t}\cdot \mathrm{d}t=$$
$$=\left[-e^{1-t}\right]_1^y=-e^{1-y}-(-e^{1-1})=-e^{1-y}+1=1-e^{1-y}.$$

Dakle,

$$F(y)=\begin{cases}1-e^{1-y},\ \text{za } y\geq 1,\\ 0,\ \text{za } y<1.\end{cases}$$

Grafovi funkcija f i F prikazani su na slici 2. (Graf funkcije f izvučen je plavom, a graf funkcije F crvenom bojom.)



Slika 2.

d) Koristimo svojstvo funkcije razdiobe vjerojatnosti:

$$P(a \le Y < b) = F(b) - F(a).$$

Tako odmah dobivamo da je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P(2 \le Y < 3) = F(3) - F(2) = \left(1 - e^{1-3}\right) - \left(1 - e^{1-2}\right) = e^{-1} - e^{-2} = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} = \frac{e-1}{e^2}.$$

3. Iz podataka u zadatku zaključujemo da je M neprekidna jednolika slučajna varijabla. Njezina slika je segment $[10,15]$ jer je vrijeme čekanja neki realan broj upravo iz toga intervala. Dakle, $M \sim U(10,15)$.

a) Odmah imamo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{15-10}, \text{ za } x \in [10,15], \\ 0, \text{ inače} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{5}, \text{ za } x \in [10,15], \\ 0, \text{ inače.} \end{cases}$$

b) Odmah imamo:

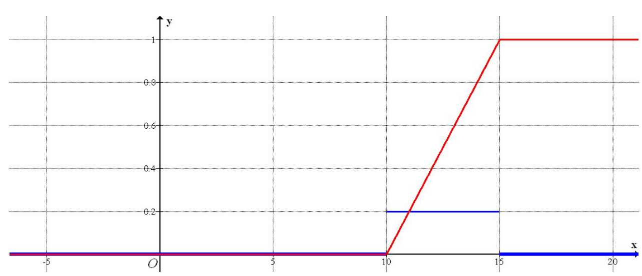
$$E(M) = \frac{10+15}{2} = \frac{25}{2} = 12.5,$$

$$\sigma(M) = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (15-10) = \frac{5}{6} \cdot \sqrt{3}.$$

c) Odmah imamo:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ za } x < 10, \\ \dfrac{x-10}{15-10}, \text{ za } x \in [10,15], \\ 1, \text{ za } x > 15 \end{cases} = \begin{cases} 0, \text{ za } x < 10, \\ \dfrac{x-10}{5}, \text{ za } x \in [10,15], \\ 1, \text{ za } x > 15 \end{cases} = \begin{cases} 0, \text{ za } x < 10, \\ \dfrac{1}{5} \cdot x - 2, \text{ za } x \in [10,15], \\ 1, \text{ za } x > 15. \end{cases}$$

Grafovi funkcija f i F prikazani su na slici 3. (Graf funkcije f izvučen je plavom, a graf funkcije F crvenom bojom.)



Slika 3.

d) Koristimo svojstvo funkcije razdiobe vjerojatnosti:

$$P(a < M < b) = F(b) - F(a).$$

Tako odmah dobivamo da je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P(12 < M < 14) = F(14) - F(12) = \left(\frac{1}{5}\cdot 14 - 2\right) - \left(\frac{1}{5}\cdot 12 - 2\right) = \frac{14}{5} - \frac{12}{5} = \frac{2}{5}.$$

4. Iz podataka u zadatku zaključujemo da je S neprekidna jednolika slučajna varijabla. Njezina slika je segment $[1,5]$ jer je vrijeme čekanja neki realan broj upravo iz toga intervala. Dakle, $M \sim U(1,5)$.

a) Odmah imamo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5-1}, & \text{za } x \in [1,5], \\ 0, & \text{inače} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & \text{za } x \in [1,5], \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

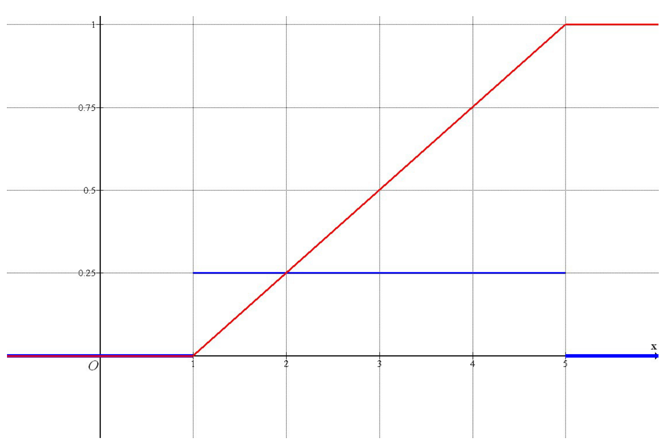
b) Odmah imamo:

$$E(S) = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3,$$
$$\sigma(S) = \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot(5-1) = \frac{4}{6}\cdot\sqrt{3} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}.$$

c) Odmah imamo:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x < 1, \\ \dfrac{x-1}{5-1}, & \text{za } x \in [1,5], \\ 1, & \text{za } x > 5 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{za } x < 1, \\ \dfrac{x-1}{4}, & \text{za } x \in [1,5], \\ 1, & \text{za } x > 5 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{za } x < 1, \\ \dfrac{1}{4}\cdot x - \dfrac{1}{4}, & \text{za } x \in [1,5], \\ 1, & \text{za } x > 5. \end{cases}$$

Grafovi funkcija f i F prikazani su na slici 4. (Graf funkcije f izvučen je plavom, a graf funkcije F crvenom bojom.)



Slika 4.

d) Koristimo svojstvo funkcije razdiobe vjerojatnosti:

$$P(a \le S \le b) = F(b) - F(a).$$

Tako odmah dobivamo da je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P(S \le 3) = P(0 \le S \le 3) = F(3) - F(0) = \left(\frac{1}{4} \cdot 3 - \frac{1}{4}\right) - 0 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

5. **a)** Prema podacima u zadatku, u jednom se satu na pisač upute prosječno tri zahtjeva za ispis. To znači da između dvaju zahtjeva protekne prosječno $\frac{1}{3}$ sata = 20 minuta. Ta vrijednost je ujedno i traženo očekivanje varijable X.

Na temelju ovoga podatka možemo odrediti parametar a varijable X. Naime, znamo da je očekivanje svake eksponencijalne slučajne varijable jednako recipročnoj vrijednosti njezina parametra. Tako iz jednadžbe $\frac{1}{a} = \frac{1}{3}$ odmah slijedi $a = 3,$ pa je $X \sim Exp(3).$

b) Primijetimo da je 5 minuta = $\frac{5}{60} = \frac{1}{12}$ sati. Dakle, tražimo vjerojatnost $P\left(X \le \frac{1}{12}\right)$. Neka je F funkcija razdiobe vjerojatnosti varijable X. Tada je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P\left(X \le \frac{1}{12}\right) = F\left(\frac{1}{12}\right) = 1 - e^{-3 \cdot \frac{1}{12}} = 1 - e^{-\frac{1}{4}}.$$

c) Neka je t traženo vrijeme. Znamo da mora vrijediti nejednakost $P(X \le t) \ge 90\%$. Prema **b)** podzadatku je $P(X \le t) = F(t) = 1 - e^{-3 \cdot t}$, pa dobivamo eksponencijalnu nejednadžbu:

$$1 - e^{-3 \cdot t} \ge 90\% = 0.9 .$$

Riješimo tu nejednadžbu na uobičajen način:

$$\begin{aligned}
&1 - e^{-3 \cdot t} \ge 0.9, \\
&-e^{-3 \cdot t} \ge 0.9 - 1, \\
&e^{-3 \cdot t} \le 0.1, \quad / \ln \\
&-3 \cdot t \le \ln 0.1, \\
&t \ge -\frac{\ln 0.1}{3} = -\frac{\ln\left(\frac{1}{10}\right)}{3} = -\frac{\ln 1 - \ln 10}{3} = -\frac{0 - \ln 10}{3} = -\frac{-\ln 10}{3} = \frac{1}{3} \cdot \ln 10.
\end{aligned}$$

Dakle, traženo vrijeme je $t_{\min} = \frac{1}{3} \cdot \ln 10$ sati ≈ 46 minuta.

6. a) Prema podacima u zadatku, u jednoj minuti zabilježe se prosječno dvije posjete To znači da između dviju posjeta protekne prosječno $\frac{1}{2}$ minute = 30 sekundi. Ta vrijednost je ujedno i traženo očekivanje varijable *Y*.

Na temelju ovoga podatka možemo odrediti parametar *a* varijable *Y*. Naime, znamo da je očekivanje svake eksponencijalne slučajne varijable jednako recipročnoj vrijednosti njezina parametra. Tako iz jednadžbe $\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$ odmah slijedi $a=2,$ pa je $Y \sim Exp(2)$.

b) Primijetimo da je 40 sekundi = $\frac{40}{60}=\frac{2}{3}$ minute. Dakle, tražimo vjerojatnost $P\left(X \geq \frac{2}{3}\right)$.
Neka je *F* funkcija razdiobe vjerojatnosti varijable *Y*. Tada je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P\left(X \geq \frac{2}{3}\right)=1-P\left(X \leq \frac{2}{3}\right)=1-F\left(\frac{2}{3}\right)=1-\left(1-e^{-2\cdot\frac{2}{3}}\right)=e^{-\frac{4}{3}}.$$

c) Znamo da je između dvije uzastopne posjete proteklo više od jedne minute. Budući da je 1 minuta 40 sekundi = $1+\frac{40}{60}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$ minuta, tražimo uvjetnu vjerojatnost $P\left(X \geq \frac{5}{3} \mid X>1\right)$. Prema definiciji uvjetne vjerojatnosti imamo:

$$P\left(X \geq \frac{5}{3} \mid X>1\right)=\frac{P\left(X \geq \frac{5}{3}, X>1\right)}{P(X>1)}=\frac{P\left(X \geq \frac{5}{3}\right)}{P(X>1)}=\frac{1-P\left(X<\frac{5}{3}\right)}{1-P(X<1)}=\frac{1-F\left(\frac{5}{3}\right)}{1-F(X<1)}=$$

$$=\frac{1-\left(1-e^{-2\cdot\frac{5}{3}}\right)}{1-\left(1-e^{-2\cdot 1}\right)}=\frac{e^{-2\cdot\frac{5}{3}}}{e^{-2\cdot 1}}=e^{-\frac{10}{3}-(-2)}=e^{-\frac{4}{3}}.$$

<u>***Napomena***</u>: U rješenjima zadataka 7. – 13. s F^* je označena funkcija razdiobe vjerojatnosti standardne normalne slučajne varijable.

7. a) Odmah imamo: $P(X<0.12)=F^*(0.12)=0.54476.$

b) Iz zadane jednakosti slijedi:

$$P(X \geq x)=0.1335 \Leftrightarrow 1-P(X \leq x)=0.1335 \Leftrightarrow P(X \leq x)=1-0.1335=0.8665 \Leftrightarrow F^*(x)=0.8665.$$

Iz tablice vrijednosti funkcije F^* očitamo: $F^*(1.11)=0.8665.$ Zbog injektivnosti funkcije F^* slijedi $x=1.11.$

8. a) Odmah imamo:

$$P(X>-0.5)=1-P(X \leq -0.5)=1-F^*(-0.5)=1-(1-F^*(0.5))=F^*(0.5)=0.69146.$$

b) Iz zadane jednakosti slijedi $F^*(x) = 0.02275$. Koristeći rezultate zadataka 2.a) i 3.a) s predavanja, imamo redom:

$$F^*(x) = 0.02275 \Leftrightarrow P(X \le x) = 0.00275 \Leftrightarrow P(X \ge 2 \cdot 0 - x) = 0.00275 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P(X \ge -x) = 0.00275 \Leftrightarrow 1 - P(X \le -x) = 0.00275 \Leftrightarrow P(X \le -x) = 0.99725 \Leftrightarrow$$
$$P(X \le -x) = F^*(2) \Leftrightarrow 0 = -x - 1 \cdot 2 \Leftrightarrow -x - 2 = 0 \Leftrightarrow -x = 2 \Leftrightarrow x = -2.$$

9. **a)** Imamo redom:

$$P(0.8 \le X < 1.2) = F^*\left(\frac{1.2-1}{2}\right) - F^*\left(\frac{0.8-1}{2}\right) = F^*(0.1) - F^*(-0.1) = F^*(0.1) - (1 - F^*(0.1)) =$$
$$= 2 \cdot F^*(0.1) - 1 = 2 \cdot 0.53983 - 1 = 0.07966.$$

b) Imamo redom:

$$P(X \ge x) = 0.02807 \Leftrightarrow 1 - P(X \le x) = 0.02807 \Leftrightarrow P(X \le x) = 0.97193 \Leftrightarrow F^*\left(\frac{x-1}{2}\right) = 0.97193.$$

Iz tablice vrijednosti funkcije F^* očitamo: $F^*(1.91) = 0.97193$. Zbog injektivnosti funkcije F^* mora vrijediti jednakost $\frac{x-1}{2} = 1.91$, a odatle je $x = 2.82$.

10. Koristeći rezultate zadataka 2.a) i 3.b) s predavanja imamo redom:

$$P(Z_1 \le 10) = 0.15866 \Leftrightarrow 1 - P(Z_1 \ge 10) = 0.15866 \Leftrightarrow P(Z_1 \ge 10) = 0.84134 \Leftrightarrow$$
$$P(Z_1 \ge 10) = F^*(1) \Leftrightarrow x = 10 + 20 \cdot 1 = 30.$$

11. Koristeći rezultat zadatka 3.b) s predavanja dobivamo:

$$P(Z_2 > 50) = 0.97725 \Leftrightarrow P(Z_2 > 50) = F^*(2) \Leftrightarrow 60 = 50 + 2 \cdot \sigma \Leftrightarrow 2 \cdot \sigma = 10 \Leftrightarrow \sigma = 5.$$

12. Neka je V normalna slučajna varijabla koja označava prosječnu brzinu vozila. Prema podacima u zadatku, vrijedi: $V \sim N\left(50, 10^2\right)$.

a) Tražimo vjerojatnost $P(45 \le V \le 55)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(45 \le V \le 55) = F^*\left(\frac{55-50}{10}\right) - F^*\left(\frac{45-50}{10}\right) = F^*(0.5) - F^*(-0.5) =$$
$$= F^*(0.5) - \left(1 - F^*(0.5)\right) = 2 \cdot F^*(0.5) - 1 = 2 \cdot 0.69146 - 1 = 0.38292.$$

b) Tražimo vjerojatnost $P(V > 60)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(V > 60) = 1 - P(V \le 60) = 1 - F^*\left(\frac{60-50}{10}\right) = 1 - F^*(1) = 1 - 0.84134 = 0.15866.$$

c) Tražimo vjerojatnost $P(V < 40)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(V < 40) = F^*\left(\frac{40-50}{10}\right) = F^*(-1) = 1 - F^*(1) = 1 - 0.84134 = 0.15866.$$

d) Tražimo vrijednost $v \in \mathbb{R}$ takvu da vrijedi nejednakost $P(V \le v) = 90\% = 0.9$. U tablici vrijednosti funkcije F^* *ne* postoji vrijednost 0.9, pa ćemo u toj tablici naći vrijednost najbližu 0.9. To je $F^*(1.28) = 0.89973$. Stoga mora vrijediti jednakost $P(V \le v) = F^*(1.28)$. Primijenimo rezultat zadatka 3.a) s predavanja, pa dobijemo jednadžbu $50 = v - 10 \cdot 1.28$ iz koje je $v = 62.8$ km/h.

13. Radi jednostavnosti i kratkoće pisanja, pretpostavimo da su svi novčani iznosi iskazani u 000 000 €. Neka je D normalna slučajna varijabla koja označava ukupan godišnji prihod. Prema podacima u zadatku, vrijedi: $D \sim N\left(10, 2^2\right)$.

a) Tražimo vjerojatnost $P(9 \le D \le 13)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(9 \le D \le 13) = F^*\left(\frac{13-10}{2}\right) - F^*\left(\frac{9-10}{2}\right) = F^*\left(1.5\right) - F^*\left(-0.5\right) =$$
$$= F^*\left(1.5\right) - \left(1 - F^*\left(0.5\right)\right) = F^*(1.5) + F^*(0.5) - 1 = 0.93319 + 0.69146 - 1 = 0.62465.$$

b) Tražimo vjerojatnost $P(D < 8)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(D < 8) = F^*\left(\frac{8-10}{2}\right) = F^*(-1) = 1 - F^*(1) = 1 - 0.84134 = 0.15866.$$

c) Tražimo vjerojatnost $P(D > 15)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(D > 15) = 1 - P(D \le 15) = 1 - F^*\left(\frac{15-10}{2}\right) = 1 - F^*(2.5) = 1 - 0.99379 = 0.00621.$$

d) Tražimo vrijednost $x \in \mathbb{R}$ takvu da vrijedi nejednakost $P(D > x) \ge 95\% = 0.95$. U tablici vrijednosti funkcije F^* *ne* postoji vrijednost 0.95, pa ćemo u toj tablici naći najmanju vrijednost strogo veću od 0.95. To je $F^*(1.65) = 0.95053$. Tako dobivamo nejednakost $P(D > x) \ge F^*(1.65)$. Koristeći rezultat zadatka 3.b) s predavanja, iz te nejednakosti slijedi $10 \ge x + 2 \cdot 1.65$, a odavde je $x \le 10 - 2 \cdot 1.65 = 6.7$. Stoga je tražena vrijednost jednaka 6 700 000 €.