<table>
<tr>
<td>TVŽ
TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
Elektrotehnički odjel</td>
<td>Vjerojatnost i statistika
(preddiplomski stručni studij elektrotehnike)</td>
<td>zadaci za 5. grupne konzultacije 5.12.2017.</td>
</tr>
</table>

Napomena: U zadacima 1. – 5. pretpostavite da se radi o binomnoj razdiobi, a u zadacima 6. – 12. pretpostavite da se radi o Poissonovoj razdiobi.

1. U Poreznoj upravi Frkljevci ukupno 10 poreznih obveznika treba predati poreznu prijavu. Na temelju podataka iz prethodnih godina utvrđeno je da u prosjeku jedna od pet poreznih prijava nije ispravno ispunjena. Izračunajte:

a) očekivani broj neispravno ispunjenih poreznih prijava;
b) vjerojatnost da će sve porezne prijave biti ispravno ispunjene;
c) vjerojatnost da će više od polovice poreznih prijava biti ispravno ispunjeno.

Rezultati: **a)** $m = 2$, **b)** $p_{10} \approx 0.10737$; **c)** $p \approx 0.96721$.

2. U tvornici električnih žarulja *I bi svjetlo* iz Podbablja utvrdili su da se prosječno proizvede 5% neispravnih žarulja. Na slučajan način izabire se točno 100 uzoraka od kojih svaki sadrži 20 žarulja. Izračunajte:

a) očekivani ukupan broj uzoraka bez ijedne neispravne žarulje;
b) vjerojatnost da slučajno odabrani uzorak sadrži barem dvije neispravne žarulje.

Rezultati: **a)** $m \approx 36$; **b)** $p \approx 0.26416$.

3. U tvornici čokolade *Mljac–mljac* iz Čečavca uočili su da je 1% proizvedenih čokoladnih pločica škartirano (npr. pločica ima manju masu od propisane). Koliko najmanje čokoladnih pločica treba proizvesti tako da vjerojatnost pojave barem jedne škartirane pločice bude strogo veća od 90%?

Rezultat: $n = 230$.

4. Vjerojatnost pojave smetnji na DVB–T prijemniku unutar slučajno odabranoga sata iznosi 2%. Izračunajte:

a) vjerojatnost da se smetnje pojave točno jednom unutar 8 uzastopnih sati;
b) očekivani broj pojava smetnji tijekom jednoga mjeseca (= 30 dana).

Rezultati: **a)** $p_1 \approx 0.1389$; **b)** $m \approx 14$.

5. Statistički podaci pokazuju da 45% darivatelja krvi ima krvnu grupu 0. Na slučajan način odabran je uzorak od 50 darivatelja krvi. Izračunajte:

a) očekivani broj darivatelja s krvnom grupom 0 u odabranom uzorku;
b) vjerojatnost da u odabranom uzorku nema nijednoga darivatelja s krvnom grupom 0.

Rezultati: **a)** $m \approx 23$; **b)** $p_1 \approx 1.04264 \cdot 10^{-13}$.

6. Tvornica alkoholnih pića *Čokanjčić* iz Šljivovca proizvodi rakiju. Uočeno je da 0.05% boca rakije ima volumni udio alkohola manji od deklariranoga. Na slučajan način izabran je uzorak od 10 000 boca. Izračunajte:

a) očekivani broj boca rakije s manjim volumnim udjelom alkohola u tom uzorku;
b) vjerojatnost da uzorak sadrži barem 6 boca s manjim volumnim udjelom alkohola.

Rezultati: **a)** $m = 5$; **b)** $p_1 \approx 0.38404$.

7. Vjerojatnost pojave kratkoga zastoja pri dnevnom emitiranju signala odašiljača iznosi 3%. Uz pretpostavku da jedan mjesec ima 30 dana, izračunajte:

a) očekivani godišnji broj pojava kratkoga zastoja;
b) vjerojatnost pojave kratkoga zastoja najviše triput godišnje.

***Rezultati*: a)** $m \approx 11$; **b)** $p_3 \approx 0.00571$.

8. Kroz naplatnu kućicu na autocesti Dugopolje – Šestanovac dnevno prođu prosječno dva automobila. Uz pretpostavku da jedan mjesec ima 30 dana, izračunajte:

a) očekivani godišnji broj automobila koji će proći kroz navedenu naplatnu kućicu;
b) vjerojatnost da u slučajno odabranom danu kroz naplatnu kućicu neće proći nijedan automobil.

***Rezultati*: a)** $m = 720$; **b)** $p = \frac{1}{e^2} \approx 0.13534$.

9. Agent životnoga osiguranja tjedno proda prosječno dvije police životnoga osiguranja. Izračunajte vjerojatnost da će u slučajno odabranom tjednu agent prodati:

a) barem jednu policu životnoga osiguranja;
b) barem dvije, ali najviše pet polica životnoga osiguranja;
c) jednu policu životnoga osiguranja u slučajno odabranom danu toga tjedna. (Pretpostavljamo da tjedan ima točno pet radnih dana.)

***Rezultati*: a)** $p_1 = 1 - e^{-2} \approx 0.86466$; **b)** $p_2 = \frac{64}{15 \cdot e^2} \approx 0.57743$; **c)** $p_3 = \frac{2}{5 \cdot e^{0.4}} \approx 0.26813$.

10. U tvornici keksa *Keksić* iz Crnoga Dabra uočili su da se proizvodi 0.5% pakiranja keksa s masom strogo manjom od deklarirane. Koliko najmanje pakovanja keksa treba proizvesti tako da vjerojatnost pojave barem jednoga pakovanja čija je masa strogo manja od deklarirane bude strogo veća od 50%?

***Rezultat*:** $n = 139$.

11. U tvornici mesnih prerađevina *Jegerčić* iz Kobasičara uočili su da se proizvodi 1% pakiranja hrenovki s masom strogo manjom od deklarirane. Koliko najmanje pakiranja hrenovki treba proizvesti tako da vjerojatnost pojave barem dva pakovanja čija je masa strogo manja od deklarirane bude strogo veća od 30%?

***Rezultat*:** $n = 110$.

12. Očekivani broj telefonskih poziva koje u jednoj minuti primi recepcija hotela *Svakoga gosta tri dana dosta* je jednak 3. Pretpostavimo da su brojevi poziva koje recepcija primi u dvije različite minute međusobno nezavisni. Izračunajte vjerojatnost da će u te dvije različite minute recepcija primiti najmanje dva poziva.

***Rezultat*:** $p_1 = 1 - \frac{7}{e^6} \approx 0.98265$.

DETALJNIJA RJEŠENJA ZADATAKA

1. Neka je X binomna slučajna varijabla koja mjeri ukupan broj neispravno ispunjenih poreznih prijava. Odredimo njezine parametre. Ukupan broj izvedenih pokusa jednak je ukupnom broju predanih poreznih prijava, tj. $n = 10$. Odredimo vjerojatnost uspjeha u jednom pokusu, odnosno vjerojatnost da slučajno odabrana prijava bude ispravno ispunjena. Iz zadanih podataka zaključujemo da su od ukupno pet poreznih prijava ispravno ispunjene njih četiri, pa je $p = \frac{4}{5} = 0.8$. Dakle, $X \sim B\left(10,\ \frac{4}{5}\right)$.

a) Odredimo najprije matematičko očekivanje varijable X. Ono je jednako $E(X) = 10 \cdot \frac{4}{5} = 8$.

To znači da je očekivani broj ispravno ispunjenih poreznih prijava jednak 8. Odatle slijedi da je očekivani broj neispravno ispunjenih poreznih prijava jednak $10 - 8 = 2$.

b) Tražimo $P(X = 10)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(X = 10) = \left(\frac{4}{5}\right)^{10} = \frac{1\ 048\ 576}{9\ 765\ 625} \approx 0.10737.$$

c) Polovica ukupnoga broja predanih poreznih prijava jednaka je $\frac{1}{2} \cdot 10 = 5$. Dakle, tražimo $P(X \geq 6)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) =$$

$$= \binom{10}{6} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^6 \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right)^{10-6} + \binom{10}{7} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^7 \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right)^{10-7} + \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^8 \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right)^{10-8} +$$

$$+ \binom{10}{9} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^9 \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right)^{10-9} + \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{10} \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right)^{10-10} = \frac{9\ 445\ 376}{9\ 765\ 625} \approx 0.96721.$$

2. Neka je X binomna slučajna varijabla koja označava broj uzoraka bez ijedne neispravne žarulje. Odredimo njezine parametre. Ukupan broj izvedenih pokusa jednak je ukupnom broju uzoraka. Dakle, $n = 100$. Izračunajmo vjerojatnost da slučajno odabrani uzorak ne sadrži nijednu neispravnu žarulju. Vjerojatnost da je slučajno odabrana žarulja neispravna iznosi $5\% = \frac{1}{20} = 0.05$, pa je vjerojatnost da je slučajno odabrana žarulja ispravna $1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$. Zbog toga vjerojatnost da je svih 20 žarulja u uzorku ispravno iznosi $p = \left(\frac{19}{20}\right)^{20} \approx 0.35847$. Dakle, $X \sim B(100,\ 0.35847)$.

a) Traženi je broj jednak matematičkom očekivanju varijable X. Ono iznosi $E(X) = n \cdot p = 100 \cdot 0.35847 = 35.847 \approx 36$. Dakle, traženi je broj jednak 36.

b) Promotrimo suprotan događaj, tj. da uzorak sadrži najviše jednu neispravnu žarulju. Izračunajmo vjerojatnost toga događaja. On se razlaže na točno dva disjunktna događaja: da su sve žarulje u uzorku ispravne i da uzorak sadrži točno jednu neispravnu žarulju. Stoga je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p = 1 - \left(\left(\frac{19}{20} \right)^{20} + \binom{20}{19} \cdot \left(\frac{19}{20} \right)^{19} \cdot \left(1 - \frac{19}{20} \right) \right) \approx 0.26416.$$

3. Neka je n traženi broj. Neka je X binomna slučajna varijabla koja mjeri ukupan broj proizvedenih škartiranih pločica. Iz podataka u zadatku slijedi da je vjerojatnost da je slučajno odabrana pločica škartirana jednaka $1\% = \frac{1}{100} = 0.01$. Dakle, $X \sim B\left(n,\ \frac{1}{100}\right)$. Vjerojatnost da su u uzorku od n pločica sve pločice ispravne jednaka je $p_1 = \left(1 - \frac{1}{100}\right)^n = \left(\frac{99}{100}\right)^n$, pa je vjerojatnost da isti uzorak sadrži barem jednu neispravnu pločicu jednaka $p_2 = 1 - \left(\frac{99}{100}\right)^n$. Prema zahtjevu zadatka mora vrijediti nejednakost $p_2 \geq 90\% = 0.9,$ pa dobivamo eksponencijalnu nejednadžbu:

$$1 - \left(\frac{99}{100}\right)^n \geq 0.9.$$

Riješimo tu nejednadžbu na uobičajen način:

$$\begin{aligned}
&1 - \left(\frac{99}{100}\right)^n \geq 0.9, \\
&\left(\frac{99}{100}\right)^n \leq 1 - 0.9, \\
&\left(\frac{99}{100}\right)^n \leq 0.1, \quad /\log \\
&n \cdot (\log 99 - \log 100) \leq \log(0.1) \\
&n \cdot (\log 99 - 2) \leq -1, \quad / (\log 99 - 2) < 0 \\
&n \geq \frac{1}{2 - \log 99} \approx 229.11.
\end{aligned}$$

Najmanji $n \in \mathbb{N}$ koji je rješenje gornje nejednadžbe je $n = 230$.

4. **a)** Neka je X binomna slučajna varijabla koja mjeri ukupan broj smetnji u vremenskom intervalu od 8 sati. Iz podataka u zadatku zaključujemo da je $X \sim B(8,\ 2\%) = B\left(8,\ \frac{1}{50}\right)$. Tražimo vjerojatnost $P(X = 1)$. Ona je jednaka:

$$P(X = 1) = \binom{8}{1} \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{50}\right)^{8-1} \approx 0.1389.$$

b) Neka je Y binomna slučajna varijabla koja mjeri ukupan broj smetnji u vremenskom intervalu od 30 dana = $30 \cdot 24 = 720$ sati. Iz podataka u zadatku zaključujemo da je $Y \sim B(720,\ 2\%) = B\left(720,\ \frac{1}{50}\right)$. Tražimo očekivanje varijable Y. Ono je jednako:

$$E(Y) = 720 \cdot \frac{1}{50} = 14.4.$$

Dakle, traženi broj je približno jednak 14.

5. Neka je X binomna slučajna varijabla koja mjeri ukupan broj davatelja krvi s krvnom grupom 0. Iz podataka u zadatku zaključujemo da je $X \sim B(50,\ 45\%) = B\left(50,\ \frac{9}{20}\right)$.

a) Tražimo matematičko očekivanje varijable X. Ono je jednako $E(X) = 50 \cdot \frac{9}{20} = \frac{45}{2} = 22.5$. Dakle, traženi broj je približno jednak 23.

b) Tražimo vjerojatnost $P(X = 0)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(X = 0) = \left(1 - \frac{9}{20}\right)^{50} = \left(\frac{11}{20}\right)^{50} \approx 1.04264 \cdot 10^{-13}.$$

6. Neka je X Poissonova slučajna varijabla koja mjeri broj boca s manjim volumnim udjelom alkohola. Odredimo njezin parametar. Ukupan broj pokusa jednak je ukupnom broju boca u uzorku, tj. $n = 10000$. Vjerojatnost da slučajno odabrana boca ima manji volumni udio alkohola jednaka je $p = 0.05\% = \frac{0.05}{100} = \frac{5}{10000}$. Stoga je $\lambda = n \cdot p = 10000 \cdot \frac{5}{10000} = 5$. Dakle, $X \sim Po(5)$.

a) Tražimo matematičko očekivanje varijable X. Ono je jednako njezinom parametru, tj. $E(X) = \lambda = 5$. Dakle, traženi broj je jednak 5.

b) Tražimo $P(X \geq 6)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \sum_{k=0}^{5}\left(\frac{5^k}{k!} \cdot e^{-5}\right) = 1 - \left(\sum_{k=0}^{5}\frac{5^k}{k!}\right) \cdot e^{-5} = 1 - \left(1 + \frac{5}{1!} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!} + \frac{5^5}{5!}\right) \cdot e^{-5}$$
$$= 1 - \frac{1097}{12} \cdot e^{-5} \approx 0.38404.$$

7. Neka je X Poissonova slučajna varijabla koja mjeri ukupan godišnji broj pojave zastoja. Analogno kao u Zadatku 6. zaključujemo da su $n = 12 \cdot 30 = 360$ i $p = 3\% = 0.03$, pa je $\lambda = n \cdot p = 360 \cdot 0.03 = 10.8$. Dakle, $X \sim Po(10.8)$.

a) Tražimo očekivanje varijable X. Odmah slijedi $E(X) = \lambda = 10.8$. Dakle, traženi je broj približno jednak 11.

b) Tražimo $P(X \leq 3)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(X \le 3) = \sum_{k=0}^{3}\left(\frac{10.8^k}{k!}\cdot e^{-10.8}\right) = \sum_{k=0}^{3}\left(\frac{10.8^k}{k!}\right)\cdot e^{-10.8} = \left(\frac{10.8^0}{0!}+\frac{10.8^1}{1!}+\frac{10.8^2}{2!}+\frac{10.8^3}{3!}\right)\cdot e^{-10.8} =$$

$$= \frac{35009}{125\cdot e^{10.8}} \approx 0.00571.$$

8. Neka je X Poissonova slučajna varijabla koja mjeri ukupan dnevni broj vozila. Iz podataka u zadatku zaključujemo da je $X \sim Po(2)$.

a) Traženi je broj jednak $m = 12\cdot 30\cdot 2 = 720$.

b) Tražimo $P(X=0)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(X=0) = \frac{2^0}{0!}\cdot e^{-2} = \frac{1}{e^2} \approx 0.13534.$$

9. Neka je X Poissonova slučajna varijabla koja mjeri ukupan tjedni broj prodanih polica osiguranja. Iz podataka u zadatku zaključujemo da je $X \sim Po(2)$.

a) Tražimo $P(X \ge 1)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(X \ge 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{2^0}{0!}\cdot e^{-2} = 1 - \frac{1}{e^2} \approx 0.86466.$$

b) Tražimo $P(2 \le X \le 5)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(2 \le X \le 5) = \sum_{k=2}^{5}\left(\frac{2^k}{k!}\cdot e^{-2}\right) = \left(\sum_{k=2}^{5}\frac{2^k}{k!}\right)\cdot e^{-2} = \left(\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}+\frac{2^5}{5!}\right)\cdot e^{-2} = \frac{64}{15\cdot e^2} \approx 0.57743.$$

c) Neka je Y Poissonova slučajna varijabla koja mjeri ukupan dnevni broj prodanih polica. Iz podataka u zadatku zaključujemo da je $Y \sim Po\left(\frac{2}{5}\right)$. Tražimo $P(Y=1)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$P(Y=1) = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^1}{1!}\cdot e^{-\frac{2}{5}} = \frac{2}{5\cdot e^{\frac{2}{5}}} = \frac{2}{5\cdot \sqrt[5]{e^2}} \approx 0.26813.$$

10. Neka je n traženi broj. Neka je X Poissonova slučajna varijabla koja mjeri ukupan broj pakiranja keksa s masom strogo manjom od deklarirane. Iz podataka u zadatku slijedi da je $X \sim Po(n\cdot 0.5\%) = Po\left(\frac{n}{200}\right)$. Vjerojatnost da će među ukupno n pakiranja biti barem jedno pakiranje s masom strogo manjom od deklarirane jednaka je:

$$P(X \ge 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{\left(\frac{n}{200}\right)^0}{0!}\cdot e^{-\frac{n}{200}} = 1 - e^{-\frac{n}{200}}.$$

Prema zahtjevu zadatka ta vjerojatnost mora biti jednaka ili veća od $50\% = \frac{1}{2}$, pa dobivamo eksponencijalnu nejednadžbu:

$$1 - e^{-\frac{n}{200}} \geq \frac{1}{2}.$$

Riješimo tu nejednadžbu na uobičajen način:

$$e^{-\frac{n}{200}} \leq 1 - \frac{1}{2},$$

$$e^{-\frac{n}{200}} \leq \frac{1}{2}, \quad / \ln$$

$$-\frac{n}{200} \leq \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 1 - \ln 2 = 0 - \ln 2 = -\ln 2, \quad / \cdot (-200)$$

$$n \geq 200 \cdot \ln 2 \approx 138.63.$$

Najmanji $n \in \mathbb{N}$ koji zadovoljava tu nejednadžbu je $n = 139$.

11. Neka je n traženi broj. Neka je X Poissonova slučajna varijabla koja mjeri ukupan broj pakiranja hrenovki s masom strogo manjom od deklarirane. Analogno kao u prethodnom zadatku zaključujemo da je $X \sim Po\left(\frac{n}{100}\right)$, pa iz zahtjeva $P(X \geq 2) > \frac{30}{100} = 0.3$, koristeći

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - \left(1 + \frac{n}{100}\right) \cdot e^{-\frac{n}{100}},$$

dobivamo nejednadžbu $1 - \left(1 + \frac{n}{100}\right) \cdot e^{-\frac{n}{100}} \geq 0.3$. Koristeći MATLAB dobijemo $n \geq 109.735$. Najmanji $n \in \mathbb{N}$ koji zadovoljava tu nejednadžbu je $n = 110$.

12. Neka je X_i Poissonova slučajna varijabla koja mjeri broj poziva u i-toj minuti, za i = 1, 2. Iz podataka u zadatku zaključujemo da je $X_i \sim Po(3)$. Koristeći pretpostavku o nezavisnosti promatranih varijabli slijedi da je tražena vjerojatnost jednaka:

$$\begin{aligned}
P(X_1 + X_2 \geq 2) &= 1 - P(X_1 + X_2 < 2) = 1 - (P(X_1 + X_2 = 0) + P(X_1 + X_2 = 1)) = \\
&= 1 - (P(X_1 = 0,\ X_2 = 0) + P(X_1 = 0,\ X_2 = 1) + P(X_1 = 1,\ X_2 = 0)) = \\
&= 1 - (P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 0) + P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 0)) = \\
&= 1 - (e^{-3} \cdot e^{-3} + e^{-3} \cdot 3 \cdot e^{-3} + 3 \cdot e^{-3} \cdot e^{-3}) = 1 - 7 \cdot e^{-6} \approx 0.98265.
\end{aligned}$$