 <p>TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE Elektrotehnički odjel</p>	<p>Vjerojatnost i statistika (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)</p>	<p>10. domaća zadaća</p>
--	---	---------------------------------

Napomena: U svim zadacima treba koristiti tablicu standardne normalne razdiobe.

1. Neka je X neprekidna slučajna varijabla takva da je $X \sim N(0, 1)$. S točnošću od 10^{-5} odredite:

- a) $P(X \leq 1.16)$,
- b) $P(X \leq -0.59)$;
- c) $P(X < 2.7)$;
- d) $P(X < -1.42)$;
- e) $P(X \geq 2.31)$;
- f) $P(X \geq -1.05)$;
- g) $P(X > 1.84)$;
- h) $P(X > -2.4)$.

Rezultati: a) 0.87698; b) 0.2776; c) 0.99653; d) 0.0778; e) 0.01044; f) 0.85314; g) 0.03288; h) 0.9918.

2. Neka je X neprekidna slučajna varijabla takva da je $X \sim N(100, 4.5^2)$. S točnošću od 10^{-5} odredite:

- a) $P(X \leq 90)$,
- b) $P(X \leq 110)$;
- c) $P(X < 87)$;
- d) $P(X < 106)$;
- e) $P(X \geq 92)$;
- f) $P(X \geq 112)$;
- g) $P(X > 95)$;
- h) $P(X > 115)$.

Rezultati: a) 0.01313; b) 0.98687; c) 0.00193; d) 0.90879; e) 0.96228; f) 0.00383; g) 0.86674; h) 0.00043.

3. Neka je X neprekidna slučajna varijabla takva da je $X \sim N(0, 1)$. S točnošću od 10^{-2} riješite (po x) sljedeće jednadžbe:

- a) $P(X \leq x) = 0.72575$;
- b) $P(X < x) = 0.9222$;
- c) $P(X \geq x) = 0.18943$;
- d) $P(X > x) = 0.01743$.

Rezultati: a) $x = 0.6$; b) $x = 1.42$; c) $x = 0.88$; d) $x = 2.11$.

4. Neka je X neprekidna slučajna varijabla takva da je $X \sim N(150, 20^2)$. Riješite (po x) sljedeće jednadžbe u skupu \mathbb{N} :

- a) $P(X \leq x) = 0.40129$;
- b) $P(X < x) = 0.69146$;
- c) $P(X \geq x) = 0.06681$;
- d) $P(X > x) = 0.93319$.

Rezultati: a) $x = 145$; b) $x = 160$; c) $x = 180$; d) $x = 120$.

5. Neka je $X \sim N(x, 6.4^2)$. Odredite $x \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi jednakost: $P(X \leq 100) = 0.94092$.

Rezultat: $x = 90$.

6. Neka je $X \sim N(x, 10^2)$. Odredite $x \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi jednakost: $P(X < 40) = 0.02275$.

Rezultat: $x = 40$.

7. Neka je $X \sim N(x, 4^2)$. Odredite $x \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi jednakost: $P(X \geq 20) = 0.00621$.

Rezultat: $x = 10$.

8. Neka je $X \sim N(x, 5^2)$. Odredite $x \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi jednakost: $P(X > 10) = 0.97725$.

Rezultat: $x = 20$.

9. Neka je $X \sim N(160, x^2)$. Odredite $x \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi jednakost: $P(X \leq 150) = 0.15866$.

Rezultat: $x = 10$.

10. Neka je $X \sim N(300, x^2)$. Odredite $x \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi jednakost: $P(X < 320) = 0.89435$.

Rezultat: $x = 16$.

11. Neka je $X \sim N(250, x^2)$. Odredite $x \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi jednakost: $P(X \geq 230) = 0.99379$.

Rezultat: $x = 8$.

12. Neka je $X \sim N(90, x^2)$. Odredite $x \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi jednakost: $P(X > 100) = 0.02275$.

Rezultat: $x = 5$.

13. Neka je $X \sim N(0, 1)$. S točnošću od 10^{-5} izračunajte:

- a) $P(0.42 \leq X \leq 0.71)$;
- b) $P(0.17 < X \leq 0.53)$;
- c) $P(0.29 \leq X < 0.87)$;
- d) $P(0.07 < X < 0.62)$;
- e) $P(-0.11 \leq X \leq 0.18)$;
- f) $P(-0.64 < X < -0.55)$.

Rezultati: a) 0.09839; b) 0.13445; c) 0.19376; d) 0.20447; e) 0.11522; f) 0.03007.

14. Neka je $X \sim N(190, 20^2)$. S točnošću od 10^{-5} izračunajte:

- a) $P(180 \leq X \leq 200)$;
- b) $P(195 < X \leq 210)$;
- c) $P(160 \leq X < 175)$;
- d) $P(180 < X < 190)$.

Rezultati: a) 0.38293; b) 0.24264; c) 0.15982; d) 0.19146.

15. Otpor neke vrste otpornika je normalna slučajna varijabla s očekivanjem $1.2 \text{ k}\Omega$ i standardnom devijacijom 80Ω .

- a) Izračunajte vjerojatnost da otpor slučajno izabranoga otpornika ne bude strogo veći od $1.5 \text{ k}\Omega$.
- b) Izračunajte vjerojatnost da otpor slučajno izabranoga otpornika ne bude strogo manji od $1 \text{ k}\Omega$.
- c) Izračunajte vjerojatnost da otpor slučajno izabranoga otpornika istodobno ne bude manji od 900Ω i veći od $1.4 \text{ k}\Omega$.
- d) Ako imamo na raspolaganju ukupno 40 otpornika promatrane vrste, kolika je vjerojatnost da najmanje tri od njih imaju pojedinačni otpor istovremeno ne manji od 950Ω i ne veći od $1.35 \text{ k}\Omega$?
- e) Ako na raspolaganju imamo ukupno 30 otpornika promatrane vrste, koliki je očekivani broj otpornika koji imaju pojedinačni otpor ne veći od $1.13 \text{ k}\Omega$?
- f) Koliko bismo najmanje otpornika promatrane vrste trebali imati na raspolaganju kako bismo bili sigurni da barem pet otpornika ima pojedinačni otpor ne manji od $1.6 \text{ k}\Omega$?

Rezultati: a) $p = 0.64617$; b) $p = 0.59871$; c) $p = 0.24488$; d) $p = 0.9911$; e) $n = 14$; f) $n = 16$.

16. Broj bodova na pismenom ispitu iz *Vjerojatnosti i statistike* je normalna slučajna varijabla s očekivanjem 70 bodova i standardnom devijacijom 10 bodova. U pravilu, 10% najboljih studenata dobiva ocjenu „izvrstan“, a 25% najlošijih studenata ocjenu „nedovoljan“. Izračunajte:

- a) najmanji broj bodova potreban za položiti ispit;
- b) najmanji broj bodova potreban za ocjenu „izvrstan“.

Rezultati: a) $N \approx 57$ bodova; b) $N = 90$ bodova.


17. Masa (iskazana u kg) studenata Politehničkoga veleučilišta u Šupljoj Lipi je normalna slučajna varijabla s očekivanjem 88 kg i standardnom devijacijom 10 kg. Na tom veleučilištu studira ukupno 500 studenata. Izračunajte:

- a) vjerojatnost da slučajno izabrani student ima masu između 75 kg i 80 kg;
- b) vjerojatnost da slučajno izabrani student ima masu strogo manju od 85 kg;
- c) očekivani broj studenata čija je masa najmanje 100 kg.

Rezultati: a) $p = 0,11505$; b) $p = 0.38209$; c) $n \approx 58$.

18. Količnik inteligencije studenata Veleučilišta u Špičkovini je normalna slučajna varijabla raspodijeljena prema normalnoj razdiobi $N(115, 8^2)$. Na tom veleučilištu studira ukupno 200 studenata. Izračunajte:

- a) vjerojatnost da slučajno odabrani student ima količnik inteligencije strogo veći od 95, ali ne veći od 105;

 <p>TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE Elektrotehnički odjel</p>	<p>Vjerojatnost i statistika (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)</p>	<p>10. domaća zadaća</p>
--	---	---------------------------------

- b) vjerojatnost da slučajno odabrani student ima količnik inteligencije strogo manji od 100;
- c) očekivani broj natprosječno inteligentnih studenata (tj. studenata čiji je kvocijent inteligencije strogo veći od 130).

Rezultati: a) $p = 0.09944$; b) $p = 0.03034$; c) $n \approx 6$.

19. Računalo generira ukupno 1000 slučajnih dekadskih znamenaka, pri čemu su za svaku pojedinu poziciju sve znamenke jednakovjerojatne. Koristeći odgovarajući Moivre–Laplaceov poučak izračunajte vjerojatnost da se znamenka 0 u navedenom zapisu pojavljuje:

- a) točno 120 puta;
- b) najviše 95 puta;
- c) između 90 i 100 puta;
- d) najmanje 100 puta.

Rezultat: a) $p = 0.03763$; b) $p = 0.31763$; c) $p = 0.38683$; d) $p = 0.47898$.

20. Prosjak Luka utvrdio je da dobije novčić u prosjeku od svakoga dvadesetpetoga prolaznika koji prođe ulicom. Koliko najmanje prolaznika treba proći ulicom tako da vjerojatnost da će Luka skupiti barem 200 novčića iznosi 90%? (

Uputa i rezultat: Primijenite integralni Moivre – Laplaceov poučak. Dobiva se $n \approx 5465$.

21. Neka je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Procijenite postotak vrijednosti slučajne varijable X koji se nalazi u segmentu:

- a) $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$;
- b) $[\mu - 2 \cdot \sigma, \mu + 2 \cdot \sigma]$.

Kakvi se rezultati dobivaju ako se primijeni Čebiševljeva nejednakost?

Rezultati: a) $\approx 68.27\%$. Pomoću Čebiševljeve nejednakosti dobiva se praktično beskorisna procjena da je vjerojatnost da X poprimi vrijednosti iz navedenoga intervala nenegativna.

b) $\approx 95.45\%$. Pomoću Čebiševljeve nejednakosti dobiva se procjena da se u navedenom intervalu sigurno nalazi barem 75% vrijednosti varijable X .

22. Na slučajno odabranom uzorku od 130 studenata stručnoga studija elektrotehnike na Veleučilištu u Gaćelezima provedeno je ispitivanje psihofizičkih osobina. Dobiveni rezultati prikazani su u Tablici 1.

Uz pretpostavku da su navedeni podaci raspodijeljeni prema normalnoj razdiobi, odredite parametre prilagođene normalne razdiobe i izračunajte pripadne teorijske frekvencije.

<i>Broj bodova na ispitivanju psihofizičkih osobina</i>	<i>Broj ispitanika</i>
50-60	7
60-66	5
66-70	6
70-74	17
74-78	30
78-82	21
82-86	15
86-90	20
90-96	6
96-100	3
<i>Ukupno:</i>	130

Tablica 1.

Rezultati: $\mu \approx 78.23077$, $\sigma = 9.41075$, tj. $X \sim (78.23077, 9.41075)$. Pripadne teorijske frekvencije su redom:

$$f_1' = 3.42663, f_2' = 9.16501, f_3' = 12.22432, f_4' = 17.63047, f_5' = 21.28193,$$

$$f_6' = 21.50156, f_7' = 18.18197, f_8' = 12.86827, f_9' = 9.88477, f_{10}' = 3,83507$$

23. Vjerojatnost rođenja dječaka u Kraljevini Bušbumbuj iznosi $p = 0.515$. Izračunajte vjerojatnost da među ukupno 1000 novorođenčadi bude više djevojčica.

Uputa i rezultat: Provjerite da je u ovom slučaju binomnu razdiobu moguće aproksimirati normalnom. Dobiva se $p \approx 0.00131$.

24. Pretpostavimo da je vjerojatnost rođenja dječaka jednaka vjerojatnosti rođenja djevojčice. Izračunajte vjerojatnost da među ukupno 2000 novorođenčadi bude između 970 i 1020 dječaka.

Uputa i rezultat: Provjerite da je u ovom slučaju binomnu razdiobu moguće aproksimirati normalnom. Dobiva se $p \approx 0.73429$.

25. U Tablici 2. su prikazani podaci o plaći isplaćenoj za prosinac 2017. godine u tvrtki *Drp-komerc* d.o.o. iz Gaćeleza.

<i>Iznos plaće [000 kn]</i>	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21
<i>Broj zaposlenih</i>	2	3	3	12	28	46	38	24	10

Tablica 2.

- a) Izračunajte prosječnu plaću isplaćenu za prosinac 2017. i pripadnu standardnu devijaciju.
- b) Uz pretpostavku da su plaće raspodijeljene prema normalnoj razdiobi, odredite pripadne teorijske frekvencije.
- c) Utvrdite segment u kojem se nalazi 95.45% svih plaća u promatranoj tvrtki.

Uputa: Vidite Zadatak 8 iz točke 4.5. Za c) primijenite Čebiševljevu nejednakost za $k = 2$.

26. Proučite funkcije NORMSDIST, NORMDIST, NORMINV i NORMSINV u MS Excelu i njihovu sintaksu. Što je rezultat primjene svake od tih funkcija?