TVŽ TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	**Vjerojatnost i statistika** (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	**4. domaća zadaća**

1. Promatramo slučajni pokus *izvlačenje prvoga broja u igri* LOTO 6/45.

a) Ako je poznato da je izvučen neparan broj, izračunajte vjerojatnost da je taj broj djeljiv s 5.
b) Ako je poznato da je izvučen paran broj, izračunajte vjerojatnost da je taj broj djeljiv s 4.
c) Ako je poznato da je izvučen prost broj, izračunajte vjerojatnost da je taj broj strogo manji od 20.
d) Ako je poznato da je izvučen broj koji je potencija nekoga prirodnoga broja s cjelobrojnim eksponentom ne manjim od 2, izračunajte vjerojatnost da je taj broj strogo veći od 15.

Rezultati: **a)** $p = \frac{1}{9}$; **b)** $p = \frac{11}{45}$; **c)** $p = \frac{8}{45}$; **d)** $p = \frac{4}{45}$.

2. Ako je $P(A) = x$, $P(B) = y$ i $P(A|B) = z$, pri čemu su $x, y, z \in \langle 0, 1\rangle$, izrazite pomoću varijabli x, y i z sljedeće vjerojatnosti:

a) $P(A^C)$;
b) $P(B^C)$;
c) $P(A \cdot B)$;
d) $P(B \cdot A)$;
e) $P(B|A)$;
f) $P(A|B^C)$;
g) $P(B^C|A)$;
h) $P(B|A^C)$;
i) $P(A^C|B)$.

Rezultati: **a)** $1 - x$; **b)** $1 - y$; **c)** i **d)** $y \cdot z$; **e)** $\frac{y \cdot z}{x}$; **f)** $\frac{x - y \cdot z}{1 - y}$; **g)** $1 - \frac{y \cdot z}{x}$; **h)** $\frac{z-1}{x-1} \cdot y$; **i)** $\frac{z-1}{y-1} \cdot y$ **.**

3. Na kraju akademske godine 2016./2017. voditelj redovitoga preddiplomskoga stručnoga studija elektrotehnike na Visokoj tehničkoj školi u Šupljoj Lipi utvrdio je da, u odnosu na ukupan broj brucoša upisanih na tu visokoobrazovnu ustanovu u dotičnoj akademskoj godini, njih 40% nije položilo *Matematiku* 1, trećina nije položila *Osnove elektrotehnike* 1, dok četvrtina nije položila niti jedan od tih dvaju predmeta. Izračunajte vjerojatnost da slučajno odabrani brucoš:

a) nije položio *Matematiku* 1 ako je poznato da nije položio *Osnove elektrotehnike* 1;
b) nije položio *Osnove elektrotehnike* 1 ako je poznato da nije položio *Matematiku* 1;
c) nije položio *Matematiku* 1 ako je poznato da je položio *Osnove elektrotehnike* 1;
d) nije položio *Osnove elektrotehnike* 1 ako je poznato da je položio *Matematiku* 1;
e) nije položio barem jedan od navedenih dvaju predmeta;
f) ima položen barem jedan od navedenih dvaju predmeta;
g) ima položena oba navedena predmeta.

Rezultati: **a)** $p = \frac{3}{4}$; **b)** $p = \frac{5}{8}$; **c)** $p = \frac{9}{40}$; **d)** $p = \frac{5}{36}$; **e)** $p = \frac{29}{60}$; **f)** $p = \frac{3}{4}$; **g)** $p = \frac{31}{60}$.

4. U ponoć su na parkiralištu kraj zgrade Tehničkoga veleučilišta u Konavoskoj 2 bila parkirana 3 crna i 2 siva BMW–a, 2 crna i 3 siva Forda, te 4 crne i 2 sive Toyote. Ujutro se ispostavilo da je ukraden automobil crne boje. Izračunajte vjerojatnost da je ukradena Toyota.

Rezultat: $p = \frac{4}{9}$.

5. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i neka su $A, B \in \mathcal{F}$ takvi da je $P(B) > 0$. Pokažite da vrijedi nejednakost:

$$P(A \mid B) \geq \frac{P(A) + P(B) - 1}{P(B)}.$$

Uputa: Iskoristite nejednakost $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \leq 1$.

6. Neka su A i B nezavisni događaji takvi da je $P(A) = 0.6$ i $P(A + B) = 0.7$. Izračunajte:

a) $P(B)$;
b) $P(B|A)$;
c) $P(A|B)$;
d) $P(B|A^C)$;
e) $P(A|B^C)$.

Rezultati: **a)**, **b)** i **d)** $p = \frac{1}{16}$; **c)** i **e)** $p = \frac{3}{5}$.

7. Na stručnom studiju komunikacijske i računalne tehnike Veleučilišta u Špičkovini upisano je 40 studenata, od kojih je njih 10 ženskoga spola. Na stručnom studiju automatizacije i procesnoga računarstva istoga veleučilišta upisano je 30 studenata, od kojih je njih 8 ženskoga spola. Sa svakoga smjera slučajno i nezavisno izabran je po jedan student.

a) Izračunajte vjerojatnost da su oba izabrana studenta ženskoga spola.
b) Izračunajte vjerojatnost da je točno jedan od izabranih studenata muškoga spola.
c) Ako je poznato da je točno jedan od izabranih studenata ženskoga spola, izračunajte vjerojatnost da je riječ o studentici komunikacijske i računalne tehnike.

Rezultati: **a)** $p = \frac{1}{15}$; **b)** $p = \frac{23}{60}$; **c)** $p = \frac{15}{23}$.

8. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ konačan vjerojatnosni prostor, pri čemu je $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Nađite sve događaje $A \in \mathcal{F}$ koji su nezavisni sami sa sobom.

Rezultat: $A \in \{\emptyset, \Omega\}$.

9. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i neka su $A, B \in \mathcal{F}$ takvi da je $P(B) \in \langle 0, 1 \rangle$. Pokažite da su A i B nezavisni ako i samo ako je $P(A|B) = P(A|B^C)$.

Uputa i rezultat: $(\Rightarrow)$ Ako su A i B nezavisni događaji, onda je $P(A|B) = P(A)$. Nadalje, $P(A|B^C) = \frac{P(A \cdot B^C)}{P(B^C)} = \frac{P(A) - P(A \cdot B)}{1 - P(B)} = \frac{P(A) - P(A) \cdot P(B)}{1 - P(B)} = P(A)$. Desne strane ovih jednakosti su jednake, pa takve moraju biti i lijeve strane, što dokazuje tvrdnju.

($\Leftarrow$) Iz $P(A|B) = P(A|B^C)$ slijedi $\dfrac{P(A\cdot B)}{P(B)} = \dfrac{P(A\cdot B^C)}{P(B^C)}$, odnosno $\dfrac{P(A\cdot B)}{P(B)} = \dfrac{P(A) - P(A\cdot B)}{1 - P(B)}$. Odatle množenjem s $P(B)\cdot[1 - P(B)]$ i sređivanjem slijedi $P(A\cdot B) = = P(A)\cdot P(B)$, pa su A i B nezavisni.

10. Neka su A i B događaji takvi da je $P(A)$, $P(B) > 0$. Dokažite da su A i B nezavisni događaji ako i samo ako vrijedi jednakost $P(A|B) + P(B|A) = P(A) + P(B)$.

<u>*Uputa i rezultat*</u>: Za bilo koja dva događaja A i B takva da je $P(A)$, $P(B) > 0$ vrijedi:

$$P(A\mid B)+P(B\mid A)=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}+\frac{P(A\cdot B)}{P(A)}=P(A\cdot B)\cdot\left[\frac{1}{P(B)}+\frac{1}{P(A)}\right]=P(A\cdot B)\cdot\frac{P(A)+P(B)}{P(A)\cdot P(B)}=\frac{P(A\cdot B)}{P(A)\cdot P(B)}\cdot$$
$$\cdot\left[P(A)+P(B)\right]$$

Smjer $\Rightarrow$ slijedi izravnim uvrštavanjem $P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B)$ u gornju jednakost, a smjer $\Leftarrow$ uvrštavanjem gornje jednakosti na lijevu stranu pretpostavljene jednakosti $P(A|B) + P(B|A) = P(A) + P(B)$.

11. Promatramo slučajan pokus *bacanje homogenoga tetraedra*, pri čemu su svi mogući ishodi jednako vjerojatni. Strane tetraedra su označene brojevima 1, 2, 3 i 4. Pokus ponavljamo slučajno i nezavisno dva puta zaredom i bilježimo dobiveni broj. Izračunajte vjerojatnost da je veći od dobivenih dvaju brojeva jednak 4 ako je poznato da je manji od dobivenih brojeva jednak 2.

<u>*Uputa i rezultat*</u>: Neka su A := {veći od dobivenih brojeva jednak je 4}, B := {manji od dobivenih brojeva jednak je 2}. Treba izračunati $P(A|B)$. Prema definiciji uvjetne vjerojatnosti, ta vjerojatnost je jednaka

$$P(A|B)=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{16}}{\frac{13}{16}}=\frac{2}{13}.$$

12. U nekoj grupi studenata nalazi se r studenata iz Rijeke i s studenata iz Splita. Na slučajan način odabrano je ukupno k studenata. Ako su svi odabrani studenti iz istoga grada, izračunajte vjerojatnost da je riječ o studentima iz Rijeke.

<u>*Rezultat*</u>: $p=\dfrac{\binom{r}{k}}{\binom{r}{k}+\binom{s}{k}}$.

13. Iz skupa [9] na slučajan način biramo dva broja. Pritom izabrani brojevi mogu biti jednaki. Ako je zbroj izabranih brojeva paran broj, izračunajte vjerojatnost da su oba izabrana broja neparna.

<u>*Rezultat*</u>: $p=\dfrac{5}{8}$.

14. U računalnoj dvorani se nalaze 16 ispravnih i 2 neispravna računala. Na slučajan način biramo točno dva računala jedno za drugim. Izračunajte vjerojatnost da je drugo izabrano računalo bilo neispravno ako je prvo izabrano računalo bilo ispravno.

<u>*Rezultat*</u>: $p=\dfrac{2}{17}$.