TVZ TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	**Vjerojatnost i statistika** (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	**5. domaća zadaća**

1. Na zrakoplov su ispaljene točno tri pojedinačne rakete „zemlja–zrak“. Vjerojatnost da će zrakoplov biti pogođen prvom od njih iznosi 50%, drugom 80% i trećom 99%. Vjerojatnost da zrakoplov bude srušen točno jednim pogotkom rakete iznosi 40%, s dva pogotka raketâ 75%, a s tri pogotka raketâ 100%. Izračunajte vjerojatnost da slučajno odabrani zrakoplov bude srušen.

Uputa i rezultat: Za svaki $i \in [3]_0$ neka su H_i := {zrakoplov je pogođen s točno i raketa} i A = {zrakoplov je srušen}. Tada je $H = \{H_0, H_1, H_2, H_3\}$ potpun sustav događaja, te su $P(H_0) = 0.001$, $P(H_1) = 0.104$, $P(H_2) = 0.535$, $P(H_3) = 0.396$, $P(A|H_0) = 0$, $P(A|H_1) = 0.4$, $P(A|H_2) = 0.75$ i $P(A|H_3) = 1$. Prema formuli potpune vjerojatnosti slijedi $P(A) = 0.83885$.

2. U košari se nalazi ukupno 16 banana među kojima je 10 zrelih. Pohlepni majmun je iz košare uzeo 5 banana i pojeo ih. Vlasnik majmuna je potom na slučajan način izabrao jednu od preostalih banana, te se pokazalo da je izabrana banana zrela. Izračunajte vjerojatnost da je majmum pojeo barem jednu zrelu bananu.

Uputa i rezultat: Za svaki $i \in [5]_0$ neka je H_i := {majmun je pojeo ukupno i zrelih banana}. Tada je skup $H = \{H_0, H_1, H_2, H_3, H_4, H_5\}$ potpuni sustav događaja, te su $P(H_0) = \frac{1}{728}$, $P(H_1) = \frac{25}{728}$, $P(H_2) = \frac{75}{364}$, $P(H_3) = \frac{75}{182}$, $P(H_4) = \frac{15}{52}$ i $P(H_5) = \frac{3}{52}$. Neka je A := {izabrana banana je zrela}. Tada je $P(A \mid H_i) = \frac{10-i}{11}$, za svaki $i \in [5]_0$, pa je tražena vjerojatnost jednaka $p = 1 - P(H_0|A)$ = (prema Bayesovoj formuli) $= 1 - \frac{P(H_0) \cdot P(A \mid H_0)}{\sum_{i=0}^{5} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)} = \frac{999}{1001}$.

3. Iljko, Smiljko i Bosiljko jedini polažu ispit iz *Vjerojatnosti i statistike* na izvanrednom apsolventskom ispitnom roku Veleučilišta u Frkljevcima. Bude li Iljko bio prvi na redu, vjerojatnost da će položiti ispit iznosi 90%. Bude li Smiljko prvi na redu, vjerojatnost da će položiti ispit iznosi 80%. Bude li Bosiljko prvi na redu, vjerojatnost da će položiti ispit iznosi 85%. Ako je po završetku ispita poznato da osoba koja je prva polagala ispit nije uspjela položiti ispit, izračunajte vjerojatnost da je ta osoba bio Smiljko. (*Napomena*: Pretpostavljamo da ispitivač ne preferira nikoga od njih trojice, tj. da svatko od njih ima jednaku vjerojatnost da prvi polaže ispit.)

Uputa i rezultat: Neka su B = {Bosiljko je prvi polagao ispit}, I = {Iljko je prvi polagao ispit}, S = {Smiljko je prvi polagao ispit} i A = {osoba koja je prva polagala ispit nije položila ispit}. Tada je $H = \{B, I, S\}$ potpuni sustav događaja, te je $P(B) = P(I) = P(S) = \frac{1}{3}, P(A \mid B) = \frac{3}{20}, P(A \mid I) = \frac{1}{10}, P(A \mid S) = \frac{1}{5}$.
Prema Bayesovoj formuli je $P(S \mid A) = \frac{P(S) \cdot P(A \mid S)}{P(B) \cdot P(A \mid B) + P(I) \cdot P(A \mid I) + P(S) \cdot P(A \mid S)} = \frac{4}{9}$.

4. Severina ima dvoje djece, pri čemu su mogući spolovi svakoga djeteta jednakovjerojatni. Neka su p_1 vjerojatnost da je starije dijete sin Luka i p_2 vjerojatnost da je mlađe dijete Luka ako starije dijete nije Luka. Ako znamo da se Severina sigurno ima sina Luku, izračunajte vjerojatnost da Severina ima kćerku.

Uputa i rezultat: Promatrajmo uređene parove (starije dijete, mlađe dijete). Tada su:

$$P(\text{Luka, sin}) = P((\text{sin, sin})) \cdot P(\text{starije dijete je sin Luka}) = \frac{1}{4} \cdot p_1,$$

P(Luka, kćerka) = P((kćerka, Luka) = (analogno kao i P(Luka, sin)) = $\frac{1}{4} \cdot p_1$,

P(sin, Luka) = P((sin, sin)) · P(starije dijete se ne zove Luka) · P(mlađe dijete se zove Luka ako ime starijega djeteta nije Luka) = $\frac{1}{4} \cdot (1 - p_1) \cdot p_2$.

Tada je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p = \frac{P((\text{Luka, kćerka})) + P((\text{kćerka, Luka}))}{P((\text{Luka, sin})) + P((\text{sin, Luka})) + P((\text{Luka, kćerka})) + P((\text{kćerka, Luka}))} = \frac{2 \cdot p_1}{3 \cdot p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2}.$$

5. Prema zračnoj luci grada Brbljograda vozi točno tri tipa taxi-prijevoza: *Papreno skupi*, *Bezobrazno skupi* i *Užasno skupi*. U odnosu na ukupan broj svih taxi-vozila, vozila *Papreno skupoga* ima 40%, a vozila *Bezobrazno skupoga* 35%. Vozači svih taxi-vozila nisu baš točni u pravodobnosti dovoženja putnika u zračnu luku, pa vjerojatnosti da će svaki od triju tipova taxi-prijevoza (u navedenom redoslijedu) prekasno dovesti putnika u zračnu luku iznose redom 0.1, 0.15 i 0.2. Ako je neki putnik slučajno odabrao tip taxi-prijevoza i pravodobno stigao u zračnu luku, izračunajte vjerojatnost da se vozio u taxiju tipa *Papreno skupi*.

<u>*Uputa i rezultat*</u>: Neka su B = {odabrani tip taxi-prijevoza je *Bezobrazno skupi*}, P = {odabrani tip taxi-prijevoza je *Papreno skupi*}, U = {odabrani tip taxi-prijevoza je *Užasno skupi*} i A = {putnik je pravodobno stigao u zračnu luku}. Tada je $H = \{B, P, U\}$ potpuni sustav događaja, te je $P(B) = \frac{7}{20}$, $P(P) = \frac{2}{5}$, $P(U) = \frac{1}{4}$, $P(A \mid B) = \frac{17}{20}$, $P(A \mid P) = \frac{9}{10}$, $P(A \mid U) = \frac{4}{5}$. Prema Bayesovoj formuli slijedi $P(P \mid A) = \frac{144}{343}$.

6. **(De Mèrèov paradoks)** Je li vjerojatnije da će se u 4 uzastopna i nezavisna bacanja simetrične igraće kocke pojaviti barem jedna „jedinica“ ili da će se u 24 uzastopna i nezavisna bacanja dviju simetričnih igraćih kocaka barem jednom pojaviti par „jedinica“? Obrazložite svoj odgovor.

<u>*Uputa i rezultat*</u>: Neka su A = {u 4 uzastopna i nezavisna bacanja simetrične igraće kocke pojavila se barem jedna „jedinica“} i B = {u 24 uzastopna i nezavisna bacanja dviju simetričnih igraćih kocaka barem jednom se pojavio par „jedinica“} Prema Bernoullijevoj shemi je $P(A^C) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$ i $P(B^C) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$. Budući da je $P(B^C) > P(A^C)$, slijedi da je $P(A) = 1 - P(A^C) > 1 - P(B^C) = P(B)$, pa je prvi događaj vjerojatniji.

7. Prema statističkim podatcima, uspješnost neke medicinske terapije iznosi 90%. Izračunajte vjerojatnost da na uzorku od 40 pacijenata terapija bude uspješna u točno 80% slučajeva.

<u>*Rezultat*</u>: $p \approx 0.156$.

8. Robot poslužuje 15 punktova istoga tipa. Vjerojatnost da tijekom jednoga sata svaki pojedini punkt treba robotovu uslugu iznosi 40%. Izračunajte vjerojatnost da tijekom jednoga sata robot posluži točno 4 punkta.

<u>*Rezultat*</u>: $p \approx 0.127$.

9. Vjerojatnost kvara nekoga tipa elektroničkoga uređaja tijekom određenoga vremenskoga razdoblja iznosi 5%. Izračunajte vjerojatnost da na uzorku od 20 slučajno odabranih elektroničkih uređaja istoga tipa tijekom dotičnoga vremenskoga razdoblja zabilježimo:

a) točno 3 kvara;
b) najviše 3 kvara;
c) barem 3 kvara.

<u>*Rezultati*</u>: **a)** $p = 0.0595821$; **b)** $p = 0.984098$; **c)** $p = 0.0754841$.

10. U redovnom prometu na prugama Republike Nigdjezemske nalazi se 8 garnitura tipa *Nagibalo*. Vjerojatnost povlačenja jedne garniture iz redovnoga prometa tijekom jedne kalendarske godine iznosi 10%. Izračunajte vjerojatnost da će tijekom jedne godine iz redovnoga prometa biti povučeno:

a) točno 25% svih garnitura;
b) najviše 20% svih garnitura;
c) barem 30% svih garnitura.

<u>*Rezultati*</u>: **a)** $p = 0.148803$; **b)** $p = 0.813105$; **c)** $p = 0.0380918$.

11. Studenti stručnoga studija komunikacijske i računalne tehnologije Visoke škole za elektrotehniku u Bektežu polažu ispit iz *Vjerojatnosti i statistike* u točno dvije dvorane. U prvoj dvorani se nalazi 30 redovnih studenata i 20 izvanrednih studenata, a u drugoj 20 redovnih studenata i 30 izvanrednih studenata. Na slučajan način biramo jednoga studenta. Izračunajte vjerojatnost da je odabrani student izvanredni student.

<u>*Uputa i rezultat*</u>: Neka su H_1 := {odabrani student je iz prve dvorane} i H_2 := {odabrani student je iz druge dvorane}. Skup $H = \{H_1, H_2\}$ je potpuni sustav događaja, te su $P(H_1) = P(H_2) = 0.5$. Neka je A := {odabrani student je izvanredni student}. Tada su $P(A|H_1) = 0.4$ i $P(A|H_2) = 0.6$. Prema formuli potpune vjerojatnosti slijedi $P(A) = 0.5$

12. Nakon odlučujuće utakmice u prvenstvu, svi igrači NK *Akumulator* iz Piškorevaca trebali su se izjasniti o ostanku ili odlasku dotadašnjega trenera. Klub ima ukupno 24 igrača, od kojih su polovica igrači u dobi između 25 i 30 godina, četvrtina igrači mlađi od 25 godina, a ostali igrači stariji od 30 godina. Poznato je da je trećina igrača mlađih od 25 godina i trećina igrača starijih od 30 godina glasovala za odlazak dotadašnjega trenera, dok je 75% igrača u dobi između 25 i 30 godina glasovalo za ostanak dotadašnjega trenera. Na slučajan način biramo jednoga igrača. Izračunajte vjerojatnost da je izabrani igrač glasao za ostanak dotadašnjega trenera.

<u>*Uputa i rezultat*</u>: Neka su H_1 = {izabrani igrač je mlađi od 25 godina}, H_2 = {izabrani igrač ima između 25 i 30 godina} i H_3 = {izabrani igrač je stariji od 30 godina}. Skup $H = \{H_1, H_2, H_3\}$ je potpuni sustav događaja i pritom su $P(H_1) = P(H_3) = 0.25, P(H_2) = 0.5$. Neka je A = {izabrani igrač je glasao za ostanak dotadašnjega trenera}. Tada su $P(A|H_1) = P(A|H_3) = \frac{2}{3}$ i $P(A|H_2) = 0.75$. Primjenom formule potpune vjerojatnosti dobivamo $P(A) = \frac{17}{24}$.

13. 51% od ukupnoga broja stanovnika grada Brbljograda tvore žene. 98% od ukupnoga broja žena i 40% od ukupnoga broja muškaraca su nepušači. Na slučajan način biramo jednoga stanovnika Brbljograda i utvrđujemo da je pušač. Izračunajte vjerojatnost da je izabrani stanovnik žena.

<u>*Uputa i rezultat*</u>: Primijenite Bayesovu formulu za A = {slučajno odabrana osoba je žena} i B = {slučajno odabrana osoba je pušač}. Dobiva se $P(A|B) \approx 0.033530572$.