**1.** Promatramo slučajni pokus *izvlačenje prvoga broja u igri LOTO* 6/45. Pretpostavimo da su svi mogući ishodi toga slučajnoga pokusa jednako vjerojatni. Neka su $\omega_k$ = {izvučen je broj $k$}, za svaki $k \in [45]$, i $\Omega = \{\omega_k : k \in [45]\}$. Definiramo slučajnu varijablu $X : \Omega \to \mathbb{N}$ s

$$X(\{\omega_k\}) = k + 1.$$

**a)** Napišite tablicu razdiobe slučajne varijable $X$.
**b)** Isključivo koristeći rješenje **a)** podzadatka izračunajte vjerojatnost da izvučeni broj bude strogo manji od 15.
**c)** Isključivo koristeći rješenje **a)** podzadatka izračunajte vjerojatnost da izvučeni broj ne bude strogo manji od 20.
**d)** Isključivo koristeći rješenje **a)** podzadatka izračunajte vjerojatnost da izvučeni broj bude strogo veći od 25.
**e)** Isključivo koristeći rješenje **a)** podzadatka izračunajte vjerojatnost da izvučeni broj ne bude strogo veći od 30.
**f)** Izračunajte očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju slučajne varijable $X$.

*Rezultati*: **a)** $X \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & \ldots & 45 & 46 \\ \frac{1}{45} & \frac{1}{45} & \ldots & \frac{1}{45} & \frac{1}{45} \end{pmatrix}$; **b)** $P(X < 15) = \frac{13}{45}$; **c)** $P(X \geq 20) = \frac{3}{5}$; **d)** $P(X > 25) = \frac{7}{15}$; **e)** $P(X \leq 30) = \frac{29}{45}$; **f)** $E(X) = 24$, $V(X) = \frac{506}{3}$, $\sigma(X) = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{1518}$.

**2.** Na raspolaganju nam je 40 elektroničkih uređaja, od kojih je točno 15 neispravnih. Na slučajan način biramo jedan uređaj i utvrđujemo je li ispravan. Neka su $\omega_1$ = {uređaj je ispravan}, $\omega_2$ = {uređaj je neispravan}, te $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. Definiramo slučajnu varijablu $X : \Omega \to \{0, 1\}$ s:

$$X(\{\omega_k\}) = \begin{cases} 1, & \text{za } k = 1; \\ 0, & \text{za } k = 2. \end{cases}$$

**a)** Napišite tablicu razdiobe slučajne varijable $X$.
**b)** Izračunajte očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju slučajne varijable $X$.
**c)** Napišite tablicu razdiobe slučajne varijable $Y = X^2$. Što uočavate?

*Rezultati*: **a)** $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$; **b)** $E(X) = \frac{3}{8}$, $V(X) = \frac{15}{64}$, $\sigma(X) = \frac{1}{8}\cdot\sqrt{15}$. **c)** $X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$. Slučajne varijable $X$ i $X^2$ imaju istu tablicu razdiobe.

**3.** Tablica razdiobe slučajne varijable $X$ je $X \sim \begin{pmatrix} -\pi & -\frac{\pi}{2} & 0 & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & p \end{pmatrix}$.

**a)** Odredite vrijednost $p$.
**b)** Izračunajte očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju varijable $X$.
**c)** Odredite tablice razdiobâ slučajnih varijabli $Y = \sin(X)$ i $Z = \cos(X)$. Izračunajte očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju svake od njih.

 

*Rezultati*: **a)** $p=\frac{1}{5}$; **b)** $E(X)=\frac{\pi}{10}$, $V(X)=\frac{39}{100}\cdot\pi^2$, $\sigma(X)=\frac{1}{100}\cdot\sqrt{39}\cdot\pi$; **c)** $Y\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$, $E(Y) = 0$, $V(Y)=\frac{2}{5}$, $\sigma(Y)=\frac{1}{5}\cdot\sqrt{10}$. $Z\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{3}{10}\end{pmatrix}$, $E(Z) = 0$, $V(Z)=\frac{3}{5}$, $\sigma(Z)=\frac{1}{5}\cdot\sqrt{3}$.

**4.** Tablica razdiobe slučajne varijable $X$ je $X\sim\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1 & 2\\ p & 2\cdot p & 3\cdot p & 4\cdot p\end{pmatrix}$.

**a)** Odredite vrijednost $p$.
**b)** Izračunajte očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju varijable $X$.
**c)** Provjerite valjanost jednakosti: $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$.

*Rezultati*: **a)** $p=\frac{1}{10}$; **b)** $E(X)=\frac{7}{10}$, $V(X)=\frac{201}{100}$, $\sigma(X)=\frac{1}{10}\cdot\sqrt{201}$; **c)** $E(X^2)=\frac{5}{2}$, pa lagano slijedi tvrdnja.

**5.** Tablica razdiobe slučajne varijable $X$ je $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ p & \frac{1}{2}\cdot p & \frac{3}{2}\cdot p & 2\cdot p\end{pmatrix}$.

**a)** Odredite vrijednost $p$.
**b)** Izračunajte očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju varijable $X$.
**c)** Bez određivanja pripadne tablice razdiobe izračunajte varijancu i standardnu devijaciju slučajne varijable $Y=10\cdot X+2017$.

*Rezultati*: **a)** $p=\frac{1}{5}$; **b)** $E(X)=\frac{19}{10}$, $V(X)=\frac{129}{100}$, $\sigma(X)=\frac{1}{10}\cdot\sqrt{129}$; **c)** $V(Y) = 129$, $\sigma(Y)=\sqrt{129}$.

**6.** Bacamo simetričnu igraću kocku sve dok se ne pojavi broj 6. (Pretpostavljamo da su svi mogući ishodi pojedinoga bacanja jednako vjerojatni.) Neka slučajna varijabla $X$ označava ukupan broj bacanja. Napišite tablicu razdiobe varijable $X$ i izračunajte njezino očekivanje. (*Uputa*: Primijenite formulu $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\cdot x^n=1+2\cdot x+3\cdot x^2+4\cdot x^3+\ldots=\frac{1}{(1-x)^2}$.)

*Rezultati*: $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n & \ldots\\ \frac{1}{6} & \frac{5}{36} & \frac{25}{216} & \frac{125}{1296} & \ldots & \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6} & \ldots\end{pmatrix}$, $E(X)=6$.

**7.** Pretpostavimo da je vjerojatnost rođenja sina jednaka vjerojatnosti rođenja kćerke. Neka je $X$ slučajna varijabla koja broji sinove u obiteljima s točno troje djece. Odredite tablicu razdiobe varijable $X$, pa izračunajte vjerojatnost da u obitelji bude neparan broj kćerki.

*Uputa i rezultati*: Najprije pokažite da vrijedi: $P(X=k)=\binom{3}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$. Koristeći tu formulu dobiva se $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8}\end{pmatrix}$, $p=\frac{1}{2}$.