

1. Slučajna varijabla X zadana je s: $X \sim U(6)$ i $R(X) = [6]$.

- Napišite tablicu razdiobe slučajne varijable X .
- Isključivo koristeći rješenje a) podzadatka izračunajte vjerojatnost da varijabla X poprimi vrijednost ne veću od 2.
- Isključivo koristeći rješenje a) podzadatka izračunajte vjerojatnost da varijabla X poprimi vrijednost ne manju od 3.
- Isključivo koristeći rješenje a) podzadatka izračunajte vjerojatnost da varijabla X poprimi vrijednost strogo veću od 4.
- Isključivo koristeći rješenje a) podzadatka izračunajte vjerojatnost da varijabla X poprimi vrijednost strogo manju od 5.
- Izračunajte očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju slučajne varijable X .

Rezultati: a) $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$; b) $P(X \leq 2) = \frac{1}{3}$; c) $P(X \geq 3) = \frac{2}{3}$; d) $P(X > 4) = \frac{1}{3}$;
 e) $P(X < 5) = \frac{2}{3}$; f) $E(X) = \frac{7}{2}$, $V(X) = \frac{35}{12}$, $\sigma(X) = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{105}$.

2. Diskretna slučajna varijabla X ima sliku $R(X) = [n]$, za neki $n \in \mathbb{N}$, i raspodijeljena je prema jednolikoj razdiobi.

- Izrazite očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju slučajne varijable X kao funkciju varijable n .
- Što se može reći o vrijednosti broja n ako je poznato da je očekivanje varijable X prirodan broj?
- Ako očekivanje varijable X iznosi 6, izračunajte njezinu varijancu i standardnu devijaciju.
- Ako je varijanca varijable X jednaka njezinu očekivanju, izračunajte pripadnu standardnu devijaciju.
- Ako je očekivanje varijable X trostruko veće od njezine standardne devijacije, izračunajte pripadnu varijancu.

Uputa i rješenje: a) Iz $X \sim U(n)$ slijedi $E(X) = \sum_{k=1}^n \left(k \cdot \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$. Nadalje,
 $V(X) = \sum_{k=1}^n \left(k^2 \cdot \frac{1}{n}\right) - [E(X)]^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n k^2 - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{1}{12} \cdot (n-1) \cdot (n+1)$,
 te konačno $\sigma(X) = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{3 \cdot (n-1) \cdot (n+1)}$; b) n je neparan prirodan broj; c) $V(X) = 10$, $\sigma(X) = \sqrt{10}$;
 d) $\sigma(X) = 4$; e) $V(X) = \frac{1}{4}$.

3. Diskretna slučajna varijabla X zadana je s: $X \sim B(8, 0.25)$.

- Izračunajte očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju varijable X .
- Izračunajte vjerojatnost da slučajna varijabla X poprimi vrijednost jednaku 6
- Izračunajte vjerojatnost da slučajna varijabla X poprimi vrijednost ne manju od 3.
- Izračunajte vjerojatnost da slučajna varijabla X poprimi vrijednost ne veću od 4.
- Izračunajte vjerojatnost da slučajna varijabla X poprimi vrijednost strogo manju od 6.
- Izračunajte vjerojatnost da slučajna varijabla X poprimi vrijednost strogo veću od 1.

Rezultati: a) $E(X) = 2$, $V(X) = \frac{3}{2}$, $\sigma(X) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6}$; b) $p_6 := P(X = 6) = \frac{63}{16384}$; c) $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (p_0 + p_1 + p_2) = \frac{21\,067}{65\,536}$; d) $P(X \leq 4) = \frac{63\,747}{65\,536}$; e) $P(X < 6) = 1 - P(X \geq 6) = 1 - (p_6 + p_7 + p_8) = \frac{65\,259}{65\,536}$; f) $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = \frac{41\,479}{65\,536}$.

4. Na kuglačkom turniru kuglač Jure Šplentrić bilježio je broj pogođenih čunjeva u jednom bacanju. Dobio je podatke prikazane u Tablici 1.

<i>Broj pogođenih čunjeva</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	<i>Ukupno</i>
<i>Broj bacanja</i>	5	6	7	13	15	30	24	20	15	5	140

Tablica 1.

Uz pretpostavku da su navedeni podaci raspodijeljeni prema binomnoj razdiobi, odredite parametre prilagođene binomne razdiobe i izračunajte pripadne teorijske frekvencije.

Rezultati: $X \sim B(73, 0.07)$. Pripadne teorijske frekvencije dane su u Tablici 2.

<i>Broj pogođenih čunjeva</i>	<i>Teorijski broj bacanja</i>	<i>Korigirani teorijski broj bacanja</i>
0	0.70046	1
1	3.848764	4
2	10.42891	10
3	18.57766	19
4	24.47057	24
5	25.41782	25
6	21.68259	22
7	15.62079	16
8	9.700005	10
≥ 9	9.552434	9
<i>Ukupno:</i>		140

Tablica 2.

5. Svih 200 studenata 2. godine studija elektrotehnike na Visokoj tehničkoj školi u Šašu anketirano je o količini popušanih cigareta tijekom jednoga dana. Dobiveni rezultati prikazani su u Tablici 3.

<i>Broj popušanih cigareta</i>	0 - 2	2 - 4	4 - 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	<i>Ukupno</i>
<i>Broj studenata</i>	10	43	69	52	21	5	200

Tablica 3.

Uz pretpostavku da su navedeni podaci raspodijeljeni prema binomnoj razdiobi, odredite parametre prilagođene binomne razdiobe i izračunajte pripadne teorijske frekvencije.

Rezultati: $X \sim B(76, 0.07)$. Pripadne teorijske frekvencije dane su u Tablici 4.

<i>Broj popušanih cigareta</i>	<i>Teorijski broj studenata</i>	<i>Korigirani teorijski broj studenata</i>
0 - 2	18.40516	18
2 - 4	57.27333	57
4 - 6	67.92169	68
6 - 8	39.71908	40
8 - 10	13.37574	13
10 - 12	3.304997	4
<i>Ukupno:</i>		200

Tablica 4.

6. U rodilištu bolnice u Mrduši Donjoj zamijetili su da je od 100 novorođene djece ukupno 60 dječaka. Izračunajte vjerojatnost da među desetero slučajno odabrane novorođenčadi nema niti jedne djevojčice.

Rezultat: $p = 0.006047$.

7. Zadana je binomna slučajna varijabla $X \sim B(n, p)$ čije je očekivanje jednako njezinoj standardnoj devijaciji. Pokažite da je tada nužno $p = \frac{1}{n+1}$.

Uputa i rezultat: $E(X) = \sigma(X) \Rightarrow (n \cdot p)^2 = n \cdot p \cdot (1-p) \Rightarrow n \cdot p = 1-p \Rightarrow p = \frac{1}{n+1}$.

8. Slučajna varijabla X zadana je s $X \sim Po(9)$.

- Izračunajte očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju varijable X .
- Izračunajte vjerojatnost da varijabla X poprimi vrijednost jednaku 12.
- Izračunajte vjerojatnost da varijabla X poprimi vrijednost ne veću od 6.
- Izračunajte vjerojatnost da varijabla X poprimi vrijednost ne manju od 4.
- Izračunajte vjerojatnost da varijabla X poprimi vrijednost strogo manju od 3.
- Izračunajte vjerojatnost da varijabla X poprimi vrijednost strogo veću od 2.

Rezultati: a) $E(X) = V(X) = 9$, $\sigma(X) = 3$; b) ≈ 0.07277 ; c) ≈ 0.20678 ; d) ≈ 0.97877 ; e) ≈ 0.00623 ; f) ≈ 0.99377 .

9. Svih 100 studenata prve godine računarstva Veleučilišta u Frkljercima anketirano je o ukupnom broju dana utrošenih na pripremu za polaganje predroka iz kolegija *Vjerojatnost i statistika*. Rezultati su navedeni u Tablici 5.

Broj dana	1	2	3	4	5	6	7	Ukupno
Broj studenata	17	12	16	19	4	9	13	100

Tablica 5.

Uz pretpostavku da su navedeni podaci raspodijeljeni prema Poissonovoj razdiobi, odredite parametar prilagođene Poissonove razdiobe i izračunajte pripadne teorijske frekvencije.

Rezultati: $\lambda = 3.8$, pa je $X \sim Po(3.8)$. Pripadne teorijske frekvencije navedene su Tablici 6.

Broj dana	Teorijski broj studenata	Korigirani teorijski broj studenata
1	10.73797	11
2	16.1517	16
3	20.45882	21
4	19.43588	19
5	14.77127	15
6	9.355135	9
7	9.08924	9
Ukupno:		100

Tablica 6.

10. Na autocesti Svinjarevci – Bubnjarci praćene su prometne nesreće tijekom jedne godine, te iznos nastale materijalne štete u svakoj od njih. Dobiveni podaci navedeni su u Tablici 7.

<i>Iznos materijalne štete</i> [000 €]	0 - 1	1 - 2	2 - 3	3 - 4	4 - 5	5 - 6	6 - 7	7 - 8	8 - 9	<i>Ukupno</i>
<i>Broj prometnih nesreća</i>	18	23	44	50	55	45	30	20	15	300

Tablica 7.

Uz pretpostavku da su navedeni podaci raspodijeljeni prema Poissonovoj razdiobi, odredite parametar prilagođene Poissonove razdiobe i izračunajte pripadne teorijske frekvencije.

Rezultati: $\lambda = 4.32$, pa je $X \sim Po(4.43)$. Pripadne teorijske frekvencije navedene su u Tablici 8.

<i>Iznos materijalne štete</i> [000 €]	<i>Teorijski broj</i> <i>prometnih nesreća</i>	<i>Korigirani teorijski broj</i> <i>prometnih nesreća</i>
0 - 1	3.989965	4
1 - 2	17.23665	17
2 - 3	37.23116	37
3 - 4	53.61287	54
4 - 5	57.9019	58
5 - 6	50.02724	50
6 - 7	36.01962	36
7 - 8	22.22925	22
8 - 9	21.75134	22
<i>Ukupno:</i>		300

Tablica 8.

11. Očekivani broj dnevnih kvarova na autobusima prijevozne tvrtke „Čizmatrans“ iznosi 2. Uz pretpostavku da su dnevni kvarovi raspodijeljeni prema Poissonovoj razdiobi, izračunajte vjerojatnost da se u slučajno izabranom danu neće pokvariti niti jedno vozilo.

Rezultat: $p = 0.135335$.


12. Pripremajući se za važnu nogometnu utakmicu, Luka Modrić izvodi slobodne udarce prema голу s udaljenosti od 25 metara. Na gol-crti stoji vratar Lovre Kalinić čiji je zadatak obraniti svaki Lukin udarac prema голу. Lovre je trenutno u izvrsnoj formi, pa je vjerojatnost da Luka postigne zgoditak u svakom pojedinom udarcu jednaka 0.1. Dogovor je da Luka puca na gol sve dok prvi put ne postigne zgoditak. Izračunajte:

- očekivani ukupan broj Lukinih udaraca na gol;
- vjerojatnost da će Luka postići zgoditak u petom pokušaju;
- vjerojatnost da će Luka postići zgoditak u najviše sedmom pokušaju;
- vjerojatnost da Luka neće postići zgoditak niti nakon desetoga udarca.

Rezultati: a) $E(X) = 10$; b) $p = 0.03874$; c) $p = 0.5217$; d) $p = 0.34868$.

13. Na Visokoj uzaludnoj školi u Špičkovini student Kalasancije Blentavić polaže ispit pred povjerenstvom iz predmeta *Vjerojatnost i statistika*. Kalasancije se relativno slabo pripremio za ispit, pa je vjerojatnost da će točno odgovoriti na slučajno izabrano pitanje jednaka 0.1. Međutim, Kalasancije ne zna da je njegov utjecajni stric Jozo Blentavić vrlo ljubazno zamolio sve članove ispitnoga povjerenstva da Kalasanciju postavljaju različita pitanja sve dok on točno ne odgovori na posljednje postavljeno pitanje i da mu potom zaključuje ocjenu *dovoljan(2)*. Izračunajte:

- očekivani broj pitanja koja će biti postavljena Kalasanciju;
- vjerojatnost da Kalasancije položi ispit točno odgovorivši na drugo postavljeno pitanje;
- vjerojatnost da ni nakon sedmoga postavljenoga pitanja Kalasancije ne položi ispit.

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	7. domaća zadaća
--	--	-------------------------

Rezultati: a) 10; b) $p_2 = 0.09$; c) $p = 0.4783$.

14. Odredite parametar geometrijske razdiobe kojoj je očekivanje za 50% veće od varijance, pa izračunajte vjerojatnost da slučajna varijabla s takvom razdiobom poprimi vrijednost strogo veću od 2.

Rezultat: $p = \frac{1}{3}$, $P(X > 2) = \frac{4}{9}$.

15. Odredite parametar geometrijske razdiobe kojoj se očekivanje i standardna devijacija odnose kao 5 : 4, pa napišite pripadnu funkciju razdiobe.

Rezultat: $p = \frac{9}{25}$. Funkcija razdiobe je $F(k) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{2 \cdot k}$, za svaki $k \in \mathbb{N}$.

16. Neka je X geometrijska slučajna varijabla s parametrom p . Izračunajte $E\left(\frac{1}{X}\right)$.

(Uputa: Koristite jednakost $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = \ln \frac{1}{1-x}$.)

Uputa i rezultat: $E\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-p)^{k-1} \cdot p}{k} = \frac{p}{1-p} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-p)^k}{k} = \frac{p}{1-p} \cdot \ln \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p}{1-p} \cdot \ln \frac{1}{p} = -\frac{p \cdot \ln p}{1-p}$.

17. Prema neslužbenim rezultatima izbora za mjesnoga načelnika, za kandidata Đuru Propalića iz Svrzigaća glasovalo je ukupno 700 od 10 000 birača. Sumnjajući u objavljene rezultate izbora, njegov sin Ivo Propalić odlučio je ići mjestom i pitati ljude za koga su glasovali na izborima sve dok ne susretne prvoga čovjeka koji je glasovao za njegovoga oca. Je li razumno pretpostaviti da će Ivo završiti anketiranje nakon 100 anketiranih ljudi? Objasnite svoj odgovor.

Uputa i rezultat: Neka je X slučajna varijabla koja mjeri broj anketiranih ljudi. X ima geometrijsku razdiobu s parametrom $p = 0.07$. Dobiva se $E(X) = 700$, $\sigma(X) \approx 20$. Stoga se može očekivati da će broj anketiranih ljudi biti u segmentu [680, 720], pa nije razumno pretpostaviti da će Ivo završiti anketiranje već nakon 100 anketiranih ljudi.

18. Psihijatar želi odrediti koji je antidepresiv najpogodniji za njegovoga novoga pacijenta. Vjerojatnost da će među dostupnim antidepresivima odabrati onaj koji će imati pozitivan učinak za pacijenta iznosi 0.4. Izračunajte očekivani broj antidepresiva koje će psihijatar trebati isprobati sve dok ne nađe pogodni antidepresiv.

Rezultat: ≈ 3 .

19. Novopečeni bračni par Štef i Francika žarko želi imati kćerku. Zbog toga su se dogovorili da će Francika rađati djecu sve dok se ne rodi kćerka. Vjerojatnost rođenja kćerke iznosi 0.48. Izračunajte vjerojatnost da će Štef i Francika imati najmanje petero djece.

Uputa i rezultat: Neka je X slučajna varijabla koja mjeri ukupan broj djece. Tada je X geometrijska slučajna varijabla s parametrom $p = 0.48$. Tražimo $P(X \geq 5)$. Ta vjerojatnost je jednaka $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 0.07311616$.

20. Proučite funkcije BINOMDIST i POISSON u MS Excelu i njihove sintakse. Što je rezultat primjene svake od tih dviju funkcija?