

1. Zadana je realna funkcija

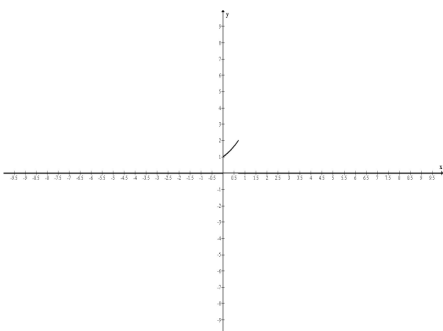
$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{za } x \in [0, a]; \\ 0, & \text{inače;} \end{cases}$$

gdje je  $a \in \mathbb{R}$  parametar.

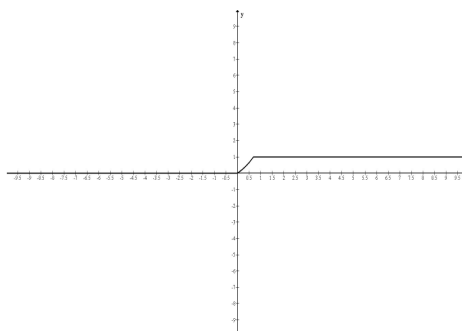
- Odredite vrijednost parametra  $a$  tako da  $f$  bude funkcija gustoće neke neprekidne slučajne varijable  $X$ .
- Za neprekidnu slučajnu varijablu  $X$  iz **a)** podzadatka odredite funkciju razdiobe vjerojatnosti, očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju.
- Izračunajte  $P(0.5 \leq X < 1)$ .
- Prikažite grafički funkciju gustoće i funkciju razdiobe vjerojatnosti varijable  $X$  iz **a)** podzadatka.

Rezultati: **a)**  $a = \ln 2$ ; **b)**  $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x < 0; \\ e^x - 1, & \text{za } x \in [0, \ln 2]; \\ 1, & \text{za } x > \ln 2. \end{cases}$   $E(X) = 2 \cdot \ln 2 - 1 \approx 0.38629$ ,  $V(X) = 1 - 2 \cdot \ln^2 2 \approx$

$\approx 0.03909$ ,  $\sigma(X) = \sqrt{1 - 2 \cdot \ln^2 2} \approx 0.19772$ . **c)**  $p = 2 - \sqrt{e} \approx 0.35128$ ; **d)** Vidjeti Slike 1 i 2.



Slika 1.



Slika 2.

2. Zadana je realna funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{za } x \in [a, 2 \cdot \pi]; \\ 0, & \text{inače;} \end{cases}$$

gdje je  $a \in \mathbb{R}$  parametar.

- Odredite vrijednost parametra  $a$  tako da  $f$  bude funkcija gustoće neke neprekidne slučajne varijable  $X$ .
- Za neprekidnu slučajnu varijablu  $X$  iz **a)** zadatka odredite funkciju razdiobe vjerojatnosti, očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju.
- Izračunajte  $P\left(\frac{7}{4} \cdot \pi < X < \frac{5}{2} \cdot \pi\right)$ .
- Prikažite grafički funkciju gustoće i funkciju razdiobe vjerojatnosti varijable  $X$  iz **a)** zadatka.

**Rezultati:** a)  $a = \frac{3}{2} \cdot \pi$ ;

$$\text{b) } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x < \frac{3}{2} \cdot \pi; \\ 1 + \sin x, & \text{za } x \in \left[ \frac{3}{2} \cdot \pi, 2 \cdot \pi \right]; \\ 1, & \text{za } x > 2 \cdot \pi. \end{cases} \quad E(X) = 1 + \frac{3}{2} \cdot \pi \approx 5.71239, \quad V(X) = \pi - 3 \approx 0.14159,$$

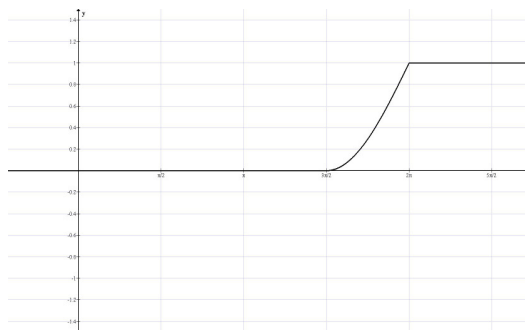
$$\sigma(X) = \sqrt{\pi - 3} \approx 0.37629.$$

c)  $p = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \approx 0.70711$ ;

d) Vidjeti Slike 3. i 4.



Slika 3.



Slika 4.

3. Zadana je realna funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{a}{2}, & \text{za } x \in [2, 3]; \\ 0, & \text{inače;} \end{cases}$$

gdje je  $a \in \mathbb{R}$  parametar.

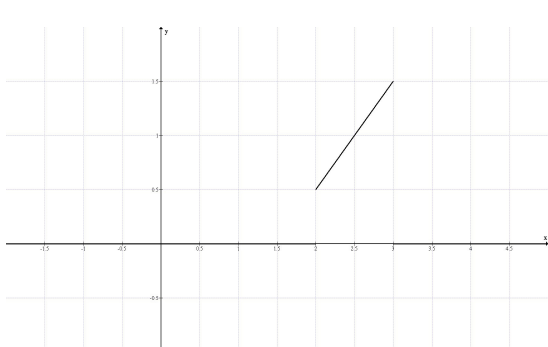
- Odredite vrijednost parametra  $a$  tako da  $f$  bude funkcija gustoće neke neprekidne slučajne varijable  $X$ .
- Za neprekidnu slučajnu varijablu  $X$  iz a) podzadatka odredite funkciju razdiobe vjerojatnosti, očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju.
- Izračunajte  $P\left(1 \leq X \leq \frac{5}{2}\right)$ .
- Prikažite grafički funkciju gustoće i funkciju razdiobe vjerojatnosti varijable  $X$  iz a) podzadatka.

**Rezultati:** a)  $a = -3$ ;

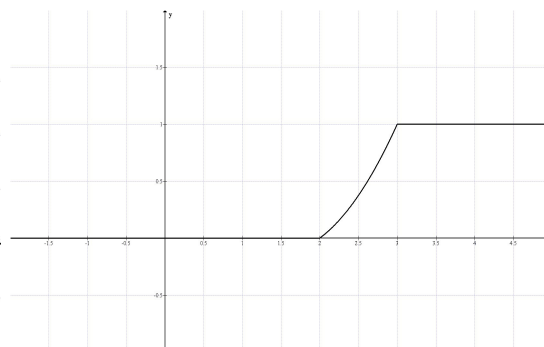
$$\text{b) } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x < 2; \\ \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{3}{2} \cdot x + 1, & \text{za } x \in [2, 3]; \\ 1, & \text{za } x > 3. \end{cases} \quad E(X) = \frac{31}{12}, \quad V(X) = \frac{11}{144}, \quad \sigma(X) = \frac{1}{12} \cdot \sqrt{11};$$

c)  $p = \frac{3}{8}$ ;

d) Vidjeti Slike 5. i 6.



Slika 5.



Slika 6.

4. Zadana je realna funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & \text{za } x \in [0, 1]; \\ 0, & \text{inače;} \end{cases}$$

gdje je  $a \in \mathbb{R}$  parametar.

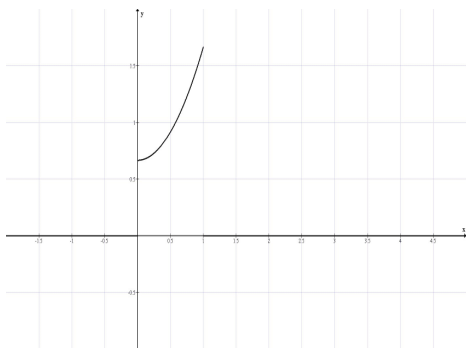
- Odredite vrijednost parametra  $a$  tako da  $f$  bude funkcija gustoće neke neprekidne slučajne varijable  $X$ .
- Za neprekidnu slučajnu varijablu  $X$  iz **a)** podzadatka odredite funkciju razdiobe vjerojatnosti, očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju.
- Izračunajte  $P\left(\frac{1}{2} < X < 1\right)$ .
- Prikažite grafički funkciju gustoće i funkciju razdiobe vjerojatnosti varijable  $X$  iz **a)** podzadatka.

**Rezultati:** **a)**  $a = \frac{2}{3}$ ;

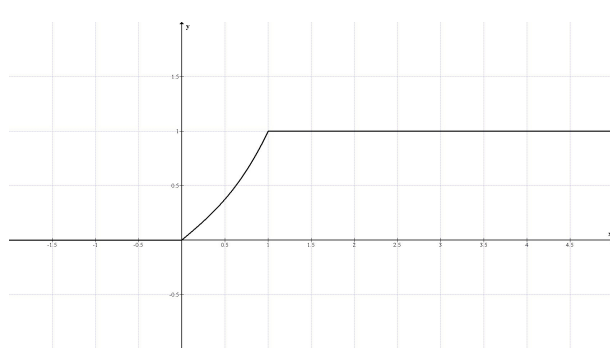
$$\text{b) } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x < 0; \\ \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{2}{3} \cdot x, & \text{za } x \in [0, 1]; \\ 1, & \text{za } x > 1. \end{cases} \quad E(X) = \frac{7}{12}, \quad V(X) = \frac{59}{720}, \quad \sigma(X) = \frac{1}{60} \cdot \sqrt{295};$$

**c)**  $p = \frac{5}{8}$ ;

**d)** Vidjeti Slike 7. i 8.



Slika 7.



Slika 8.

5. Zadana je realna funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{4}{3}, & \text{za } x \in [1, 2]; \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

a) Izračunajte  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx$ .

b) Postoji li neprekidna slučajna varijabla  $X$  takva da je  $f$  njezina funkcija gustoće? Ako postoji, odredite funkciju razdiobe vjerojatnosti, očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju te slučajne varijable. Ako ne postoji, obrazložite svoj odgovor.

Rezultati: a) 1;

b) Ne postoji jer za  $x \in [1, \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}]$  vrijedi nejednakost  $f(x) < 0$ , što je u suprotnosti s osnovnim svojstvom nenegativnosti funkcije gustoće na cijelom skupu  $\mathbb{R}$ .

6. Zadana je realna funkcija  $f(x) = e^{-2|x|}$ .

a) Pokažite da postoji neprekidna slučajna varijabla  $X$  takva da je funkcija  $f$  njezina funkcija gustoće.

b) Odredite funkciju razdiobe vjerojatnosti, očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju slučajne varijable  $X$  iz a) podzadatka.

c) Izračunajte  $P(-1 \leq X \leq 1)$ .

d) Prikažite grafički funkciju gustoće i funkciju razdiobe vjerojatnosti varijable  $X$  iz a) podzadatka.

Rezultati: a) Zbog stroge pozitivnosti eksponencijalne funkcije, za svaki  $x \in \mathbb{R}$  vrijedi nejednakost  $f(x) > 0$ .

Nadalje, funkcija  $f$  je parna, pa vrijedi:  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 2 \cdot \int_0^{+\infty} f(x) \cdot dx$ . Budući da za svaki  $x \in [0, +\infty)$  vrijedi

jednakost  $|x| = x$ , to za svaki  $x \in [0, +\infty)$  vrijedi jednakost  $f(x) = e^{-2 \cdot x}$ , pa je  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 2 \cdot \int_0^{+\infty} e^{-2 \cdot x} \cdot dx = 1$ .

Slijedi tvrdnja podzadatka.

b) Za  $x < 0$  je  $\int_{-\infty}^x f(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^x e^{2 \cdot t} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot e^{2 \cdot x}$ , dok za  $x > 0$  dobivamo:

$$\int_{-\infty}^x f(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^0 f(t) \cdot dt + \int_0^x f(t) \cdot dt = \frac{1}{2} + \int_0^x e^{-2 \cdot t} \cdot dt = 1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-2 \cdot x}.$$

Dakle, funkcija razdiobe varijable  $X$  je  $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot e^{2 \cdot x}, & \text{za } x < 0; \\ 1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-2 \cdot x}, & \text{za } x \geq 0. \end{cases}$  Nadalje,  $E(X) = \frac{1}{4}$ ,  $V(X) = \frac{5}{32}$  i

$$\sigma(X) = \frac{1}{8} \cdot \sqrt{10}.$$

c)  $p = 1 - \frac{1}{e^2}$ .

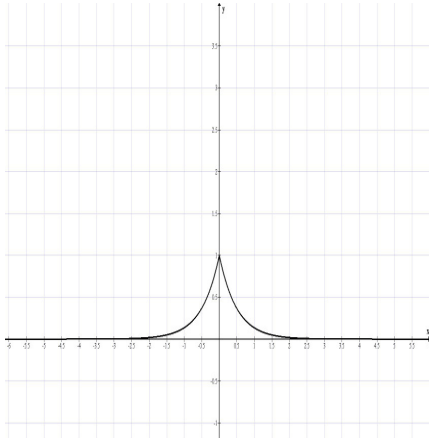
d) Vidjeti Slike 9. i 10.



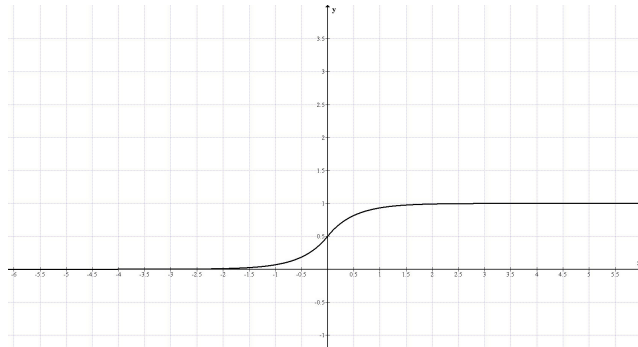
TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU  
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE  
Elektrotehnički odjel

**Vjerojatnost i statistika**  
(preddiplomski stručni  
studij elektrotehnike)

**8. domaća zadaća**



Slika 9.



Slika 10.