Bojan Kovačić

ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA SA SINKRONIH ONLINE GRUPNIH KONZULTACIJA IZ MATEMATIKE 2

nerecenzirana verzija, lipanj 2021.

Sadržaj

PREDGOVOR

Ova zbirka zadataka nastala je kao rezultat održavanja 20-tak sati sinkronih online grupnih konzultacija iz *Matematike* 2 na preddiplomskom stručnom studiju elektrotehnike u akademskoj godini 2020./2021. Konzultacije su bile namijenjene studentima koji su se pripremali za polaganje (online) kolokvija iz navedenoga predmeta, a služile su kao nadopuna osnovnom radnom materijalu s predavanja i auditornih vježbi. U istu je svrhu ranije napisana i pripremljena *Zbirka riješenih zadataka sa demonstratura i grupnih konzultacija* koja je sadržavala uglavnom zadatke rješavane na demonstraturama održavanih kontaktno tijekom desetak uzastopnih akademskih godina prije pandemije COVID-19. U svrhu samostalne provjere stečenoga znanja studentima su bili dostupni i online testovi u sastavu e-kolegija *Matematika* 2 na LMS *Moodle*, i to za svaku nastavnu cjelinu zasebno.

Svrha cjelokupnoga navedenoga nastavnoga materijala bila je što je više moguće olakšati studentima pripremu za polaganje kolokvija jer je cjelokupna obavezna nastava bila održana sinkrono online putem platforme MS *Teams*. Odaziv studenata na grupne konzultacije pokazao je da je takav oblik nastave i potreban i koristan u propisanim uvjetima održavanja beskontaktne nastave.

Koristim priliku najljepše zahvaliti svima koji su na bilo koji način sudjelovali u nastanku ove zbirke. Tu posebno mislim na svoje studente iz nastavnih grupa E i F u ak. god. 2020./2021. koji su svojim pitanjima postavljenima na konzultacijama ili na forumu u sastavu ranije spomenutoga e-kolegija *Matematika* 2 značajno utjecali na detaljnije pojašnjavanje postupaka rješavanja pojedinih zadataka. Upravo zbog toga se može reći da su gotovo svi zadaci iz ove zbirke „akademski ispitani“ na studentima kojima su bili inicijalno namijenjeni, a što, uvjeren sam, vrlo doprinosi kvaliteti i korisnosti zbirke.

Svjestan sam da je i nakon višestrukih korektura teksta „preživio“ izvjestan broj nenamjernih pogrešaka (ponajprije „tipfelera“). Sve kritike i pokude za njih preuzimam isključivo na sebe. Unaprijed najljepše zahvaljujem svima koji me pismeno ili usmeno upozore na neku od tih pogrešaka ili mi svojom argumentiranom primjedbom pomognu u daljnjem poboljšanju kvalitete ovoga teksta.

U Zagrebu, početkom lipnja 2021.

Bojan Kovačić

1. POGLAVLJE:

INTEGRALNI RAČUN I PRIMJENE

1. **Isključivo deriviranjem** pokažite da je funkcija $F(x)=x\cdot \operatorname{tg} x+\ln(\cos x)+2021^{2021}$ antiderivacija funkcije $f(x)=\dfrac{x}{\cos^2 x}$. (Nije potrebno određivati prirodne domene.)

Rješenje: Treba (samo) provjeriti jednakost $F'=f$. Koristeći osnovna pravila za deriviranje imamo redom:

$$F'(x)=(x)'\cdot \operatorname{tg} x+x\cdot(\operatorname{tg} x)'+\frac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)'+0=1\cdot \operatorname{tg} x+x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)=$$
$$=\operatorname{tg} x+\frac{x}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tg} x+\frac{x}{\cos^2 x}-\operatorname{tg} x=\frac{x}{\cos^2 x}=f(x).$$

2. **Isključivo deriviranjem** pokažite da je funkcija $F(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{e^x}$ standardna antiderivacija funkcije $f(x)=\dfrac{2\cdot\cos x}{e^x}$.

Rješenje: Prirodna domena obiju funkcija je skup $\mathbb{R}$. Zbog toga treba (samo) provjeriti jednakost $F'=f$. Koristeći osnovna pravila za deriviranje imamo redom:

$$F'(x)=\frac{(\sin x-\cos x)'\cdot e^x-(\sin x-\cos x)\cdot(e^x)'}{(e^x)^2}=\frac{(\cos x-(-\sin x))\cdot e^x-(\sin x-\cos x)\cdot e^x}{(e^x)^2}=$$
$$=\frac{(\cos x+\sin x-(\sin x-\cos x))\cdot e^x}{(e^x)^2}=\frac{\cos x+\sin x-\sin x+\cos x}{e^x}=\frac{2\cdot\cos x}{e^x}=f(x).$$

3. Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y=6\cdot\sqrt{1-x^2}$, $y=0$, $x=0$ i $x=1$ oko osi:

a) apscisa;
b) ordinata.

Rješenja: **a)** Traženi je volumen jednak:

$$V_1=\pi\cdot\int_0^1\left(6\cdot\sqrt{1-x^2}\right)^2\cdot \mathrm{d}x=\pi\cdot\int_0^1 36\cdot\left(1-x^2\right)\cdot \mathrm{d}x=36\cdot\pi\cdot\left(\left(x-\frac{1}{3}\cdot x^3\right)_0^1\right)=$$
$$=36\cdot\pi\cdot\left(1-\frac{1}{3}-(0-0)\right)=36\cdot\frac{2}{3}\cdot\pi=24\cdot\pi \text{ kub. jed.}$$

b) Traženi je volumen jednak:

$$V_2=2\cdot\pi\cdot\int_0^1 6\cdot x\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot \mathrm{d}x=6\cdot\pi\cdot\int_0^1 2\cdot x\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot \mathrm{d}x.$$

Uvedimo zamjenu:

$$t := 1 - x^2,$$
$$\mathrm{d}t = \left(1 - x^2\right)' \cdot \mathrm{d}x = (-2 \cdot x) \cdot \mathrm{d}x \Leftrightarrow 2 \cdot x \cdot \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t,$$
$$0 \mapsto 1 - 0^2 = 1 - 0 = 1,$$
$$1 \mapsto 1 - 1^2 = 1 - 1 = 0.$$

Dobivamo:

$$V_y = 6 \cdot \pi \cdot \int_1^0 \sqrt{t} \cdot (-\mathrm{d}t) = 6 \cdot \pi \cdot \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{d}t = 6 \cdot \pi \cdot \left(\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+1} \cdot t^{\frac{1}{2}+1} \right)_0^1 \right) = 6 \cdot \pi \cdot \left(\left(\frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot t^{\frac{3}{2}} \right)_0^1 \right) =$$
$$= 6 \cdot \pi \cdot \left(\left(\frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} \right)_0^1 \right) = 6 \cdot \pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\left(t^{\frac{3}{2}} \right)_0^1 \right) = 4 \cdot \pi \cdot \left(1^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}} \right) = 4 \cdot \pi \cdot (1 - 0) = 4 \cdot \pi \text{ kub. jed.}$$

4. Izračunajte duljinu luka ravninske krivulje $y = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{ch}(2 \cdot x)$ iznad segmenta $\left[0, \frac{1}{2} \cdot \ln 2\right]$.

Rješenje: Koristeći osnovni hiperbolni identitet $\mathrm{ch}^2(2 \cdot x) - \mathrm{sh}^2(2 \cdot x) = 1$, definicijsku formulu $\mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ i relaciju $e^{a \cdot \ln x} = x^a$, $\forall x > 0$, dobivamo da je tražena duljina jednaka:

$$l = \int_0^{\frac{1}{2} \cdot \ln 2} \sqrt{1 + \left(\left(\frac{1}{2} \cdot \mathrm{ch}(2 \cdot x) \right)' \right)^2} \cdot \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2} \cdot \ln 2} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2} \cdot \mathrm{sh}(2 \cdot x) \cdot (2 \cdot x)' \right)^2} \cdot \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2} \cdot \ln 2} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2} \cdot \mathrm{sh}(2 \cdot x) \cdot 2 \right)^2} \cdot \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2} \cdot \ln 2} \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(2 \cdot x)} \cdot \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2} \cdot \ln 2} \sqrt{\mathrm{ch}^2(2 \cdot x)} \cdot \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2} \cdot \ln 2} \mathrm{ch}(2 \cdot x) \cdot \mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2} \cdot \mathrm{sh}(2 \cdot x) \right)_0^{\frac{1}{2} \cdot \ln 2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\mathrm{sh}(2 \cdot x) \right)_0^{\frac{1}{2} \cdot \ln 2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\mathrm{sh}\left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln 2 \right) - \mathrm{sh}(2 \cdot 0) \right) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{sh}(\ln 2) - 0) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{sh}(\ln 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 - 2^{-1}}{4} = \frac{3}{8} \text{ jed. duljine.}$$

5. Izračunajte prosječnu vrijednost funkcije $f(t)=\dfrac{1}{3\cdot\left(t^3+t\right)}$ na segmentu $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right]$.

Rješenje: Rastavimo funkciju $f_1(t)=\dfrac{1}{t^3+t}$ na parcijalne razlomke. Vrijedi identitet:

$$t^3+t=t\cdot\left(t^2+1\right),\ \forall t\in\mathbb{R},$$

pa rastav ima oblik:

$$\frac{1}{t^3+t}=\frac{A}{t}+\frac{B\cdot t+C}{t^2+1},\ \text{za neke } A,B,C\in\mathbb{R}.$$

Odredimo nepoznate koeficijente A,B i C. Imamo redom:

$$1=A\cdot\left(t^2+1\right)+(B\cdot t+C)\cdot t\Rightarrow$$

$$\begin{cases} t=0\Rightarrow A=1, \\ t=1\Rightarrow 2\cdot A+B+C=1, \\ t=-1\Rightarrow 2\cdot A+B-C=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} A=1, \\ B+C=-1, \\ B-C=-1 \end{cases}\Leftrightarrow (A,B,C)=(1,-1,0).$$

Zbog toga je:

$$\frac{1}{t^3+t}=\frac{1}{t}-\frac{t}{t^2+1}\Rightarrow f=\frac{1}{3\cdot\left(t^3+t\right)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t^3+t}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{t^2+1}\right).$$

Tako je tražena prosječna vrijednost jednaka:

$$\overline{f}=\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{t^2+1}\right)\cdot\mathrm{d}t=\frac{1}{\frac{1}{6}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{t^2+1}\right)\cdot\mathrm{d}t=2\cdot\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{t^2+1}\right)\cdot\mathrm{d}t.$$

Odredimo standardnu antiderivaciju funkcije f_1 (jer je izraz u zagradi jednak upravo toj funkciji). U tu svrhu uočimo da je

$$\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2+1}\right)\cdot\mathrm{d}t=\int\frac{1}{t}\cdot\mathrm{d}t-\int\frac{t}{t^2+1}\cdot\mathrm{d}t.$$

Prvi je član na desnoj strani tablični integral. Pripadna standardna antiderivacija jednaka je $\ln t$ (apsolutna vrijednost nije potrebna jer polaznu funkciju promatramo na segmentu $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right]$ čiji su svi elementi pozitivni realni brojevi.)

Drugi član na desnoj strani odredimo metodom zamjene. Zamijenimo:

$$x := t^2 + 1,$$
$$\mathrm{d}x = \left(t^2+1\right)' \cdot \mathrm{d}t = (2\cdot t + 0)\cdot \mathrm{d}t = 2\cdot t\cdot \mathrm{d}t \Leftrightarrow t\cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{d}x.$$

Tako dobivamo:

$$\int \frac{t}{t^2+1}\cdot \mathrm{d}t = \int \frac{\frac{1}{2}}{x}\cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot \int \frac{1}{x}\cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot \ln|x| = \frac{1}{2}\cdot \ln\left(t^2+1\right).$$

(U posljednjem izrazu apsolutnu vrijednost smo zamijenili običnom zagradom jer za svaki $t \in \mathbb{R}$ očito vrijedi $t^2+1>0.$)

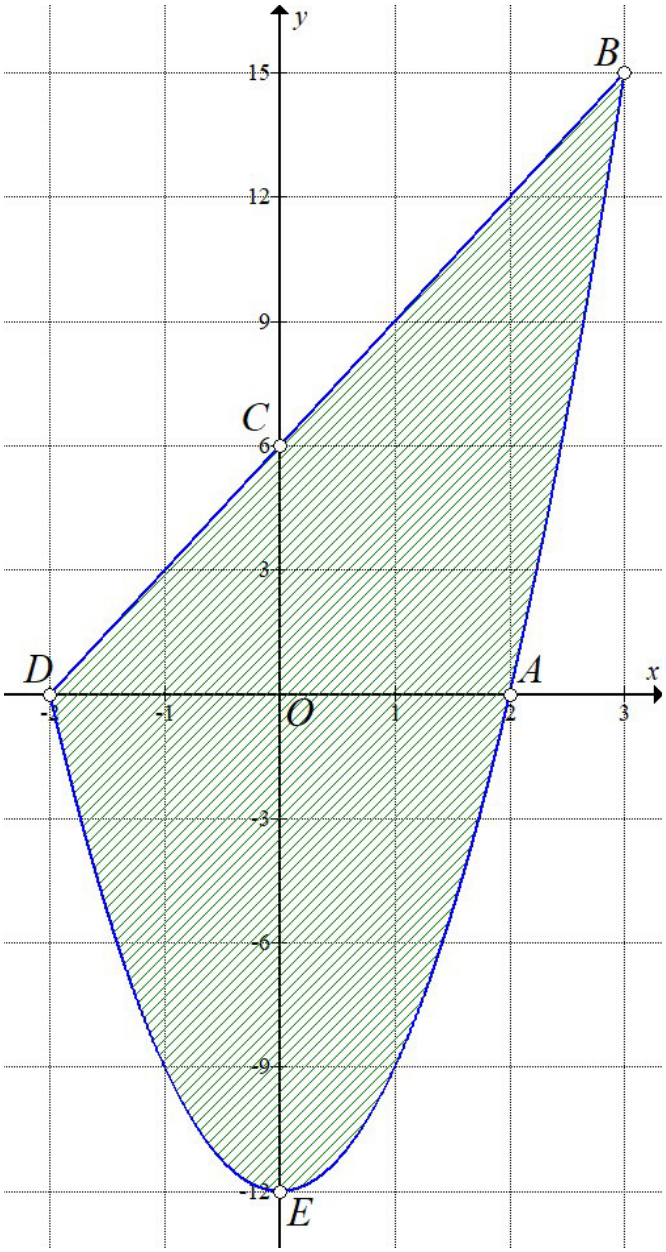
Tako sada imamo:

$$\overline{f} = 2\cdot\left(\left(\ln t - \frac{1}{2}\cdot \ln\left(t^2+1\right)\right)_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\right) = \left(2\cdot \ln t - \ln\left(t^2+1\right)\right)_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \left(\ln\left(t^2\right) - \ln\left(t^2+1\right)\right)_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\ln\left(\frac{t^2}{t^2+1}\right)\right)_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \ln\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}\right) - \ln\left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2+1}\right) = \ln\left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+1}\right) - \ln\left(\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{9}+1}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}}\right) - \ln\left(\frac{\frac{1}{9}}{\frac{10}{9}}\right) = \ln\left(\frac{1}{5}\right) - \ln\left(\frac{1}{10}\right) = \ln\left(\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{10}}\right) = \ln 2.$$

6. Izračunajte površinu ravninskoga lika osjenčanoga na donjoj slici. (Krivulja $\widehat{BDE}$ je parabola čija jednadžba ima oblik $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, za neke $a, b, c \in \mathbb{R}$.)



Slika 1

Rješenje: Jednadžba parabole $\widehat{BED}$ je

$$y = \frac{-12}{(0-2)\cdot(0+2)} \cdot (x-2)\cdot(x+2) = \frac{-12}{-4} \cdot \left(x^2 - 4\right) = 3 \cdot x^2 - 12,$$

dok je jednadžba pravca BD

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{6} = 1 \Leftrightarrow -3 \cdot x + y = 6 \Leftrightarrow y = 3 \cdot x + 6.$$

Primijetimo da za svaki $x \in [-2,3]$ vrijedi nejednakost:

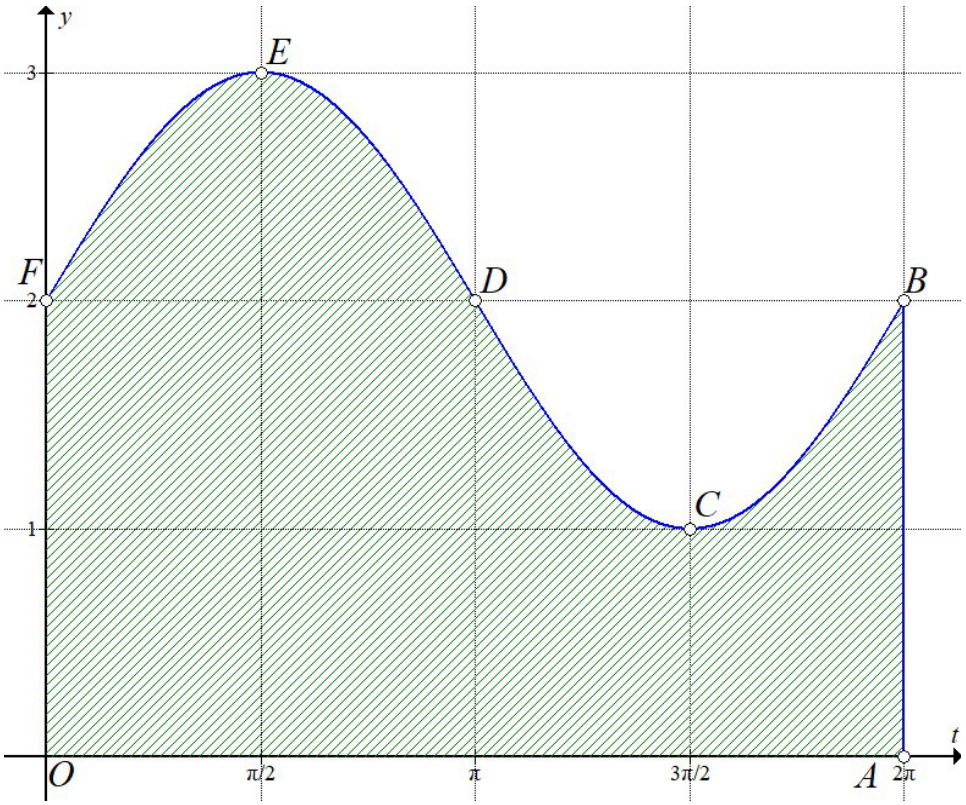
$$3 \cdot x + 6 \geq 3 \cdot x^2 - 12.$$

(Na tom je segmentu pravac BD iznad parabole $\widehat{BED}$.) Zbog toga je tražena površina jednaka:

$$P = \int_{-2}^{3} \left(3 \cdot x + 6 - \left(3 \cdot x^2 - 12\right)\right) \cdot \mathrm{d}x = \int_{-2}^{3} \left(-3 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 18\right) \cdot \mathrm{d}x = \left(-x^3 + \frac{3}{2} \cdot x^2 + 18 \cdot x\right)_{-2}^{3} =$$

$$= -27 + \frac{27}{2} + 54 - \left(-(-8) + 6 + (-36)\right) = \frac{125}{2} = 62.5 \text{ kv. jed.}$$

7. Na donjoj je slici prikazan krivocrtni trapez $OABF$. Krivulja $\widehat{BF}$ je sinusoida čija jednadžba ima oblik $y = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + B$, za neke $A, \omega > 0$, $\varphi \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ i $B \in \mathbb{R}$.



Slika 2.

a) Izračunajte površinu zadanoga krivocrtnoga trapeza.

b) Odredite volumen rotacijskoga tijela koje nastaje rotacijom zadanoga krivocrtnoga trapeza oko osi apscisa.

c) Odredite volumen rotacijskoga tijela koje nastaje rotacijom zadanoga krivocrtnoga trapeza oko osi ordinata.

Rješenje: Odredimo najprije jednadžbu sinusoide. Njezin temeljni period je očito jednak $T = 2\cdot\pi$, pa zaključujemo da je $\omega = \frac{2\cdot\pi}{T} = \frac{2\cdot\pi}{2\cdot\pi} = 1.$

Pripadna harmonijska funkcija poprima najveću vrijednost kad je $\sin(\omega\cdot t+\varphi) = 1$ i ta je vrijednost jednaka $A+B.$ Iz slike se vidi da je $A+B=3.$

Pripadna harmonijska funkcija poprima najmanju vrijednost kad je $\sin(\omega\cdot t+\varphi) = -1$ i ta je vrijednost jednaka $-A+B.$ Iz slike se vidi da je $-A+B=1.$

Tako iz sustava $\begin{cases} A+B=3, \\ -A+B=1 \end{cases}$ slijedi $(A,B)=(1,2).$

Preostaje odrediti fazni pomak φ. Za $t=0$ vrijednost pripadne harmonijske funkcije treba biti jednaka 2, pa dobivamo:

$$2 = 1\cdot\sin(1\cdot 0+\varphi)+2 \Leftrightarrow \sin\varphi = 0.$$

U intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ ova jednadžba ima jedinstveno rješenje $\varphi = 0.$ Tako smo dobili:

$$y = 1\cdot\sin(1\cdot t+0)+2 \Leftrightarrow y = \sin t + 2.$$

a) Tražena je površina jednaka:

$$P = \int_0^{2\cdot\pi} (\sin t+2)\cdot \mathrm{d}t = \left(-\cos t + 2\cdot t\right)_0^{2\cdot\pi} = -\cos(2\cdot\pi)+2\cdot(2\cdot\pi)-(-\cos 0+2\cdot 0) =$$
$$= -1+4\cdot\pi+1+0 = 4\cdot\pi \text{ kv. jed.}$$

b) Traženi je volumen jednak:

$$V_1 = \pi\cdot\int_0^{2\cdot\pi} (\sin t+2)^2\cdot \mathrm{d}t = \pi\cdot\int_0^{2\cdot\pi} (\sin^2 t+4\cdot\sin t+4)\cdot \mathrm{d}t =$$
$$= \pi\cdot\int_0^{2\cdot\pi}\left(\frac{1}{2}\cdot(1-\cos(2\cdot t))+4\cdot\sin t+4\right)\cdot \mathrm{d}t = \pi\cdot\int_0^{2\cdot\pi}\left(\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\cos(2\cdot t)+4\cdot\sin t+\frac{9}{2}\right)\cdot \mathrm{d}t =$$
$$= \pi\cdot\left(\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin(2\cdot t)-4\cdot\cos t+\frac{9}{2}\cdot t\right)_0^{2\cdot\pi} = \pi\cdot(-4+9\cdot\pi+4-0) = 9\cdot\pi^2 \text{ kub. jed.}$$

c) Traženi je volumen jednak:

$$V_2 = 2\cdot\pi\cdot\int_0^{2\cdot\pi} t\cdot(\sin t+2)\cdot \mathrm{d}t.$$

Ovaj određeni integral odredimo metodom djelomične integracije. Imamo redom:

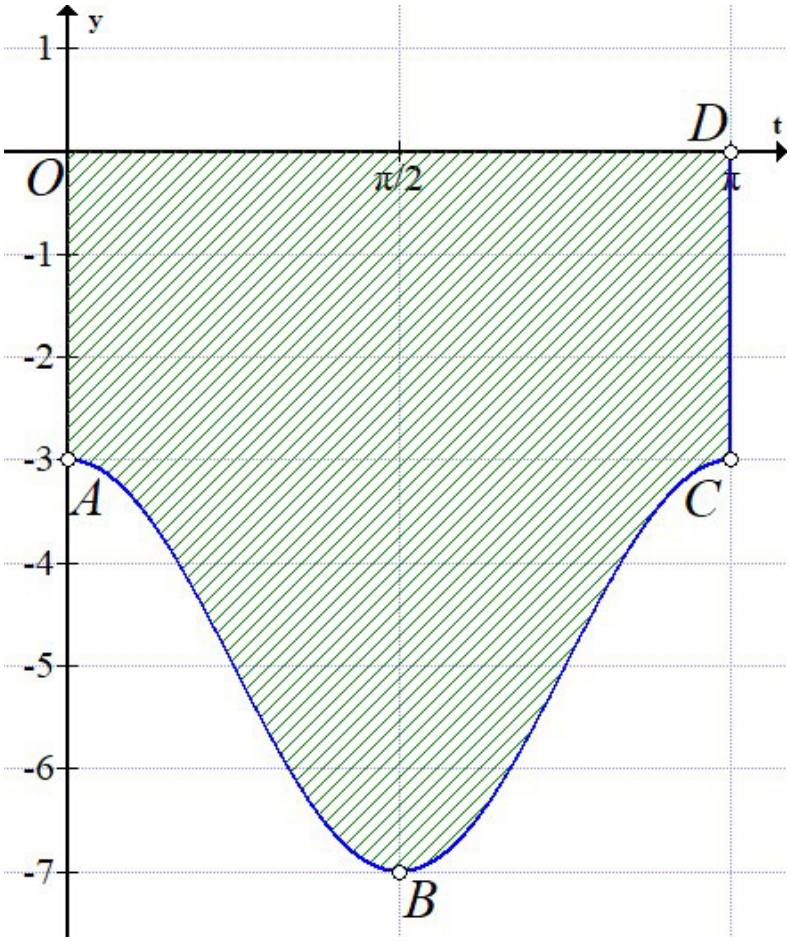
$$V_2 = \left| \begin{matrix} u = t & v = \int (\sin t + 2)\cdot \mathrm{d}t = 2\cdot t - \cos t \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}t & \mathrm{d}v = (\sin t + 2)\cdot \mathrm{d}t \end{matrix} \right| = 2\cdot\pi\cdot\left(\left(2\cdot t^2 - t\cdot\cos t\right)_0^{2\cdot\pi} - \int_0^{2\cdot\pi} (2\cdot t - \cos t)\cdot \mathrm{d}t \right) =$$

$$= 2\cdot\pi\cdot\left(2\cdot 4\cdot\pi^2 - 2\cdot\pi\cdot\cos(2\cdot\pi) - 0 + 0 - \left(t^2 - \sin t\right)_0^{2\cdot\pi}\right) =$$

$$= 2\cdot\pi\cdot\left(8\cdot\pi^2 - 2\cdot\pi - \left(4\cdot\pi^2 - \sin(2\cdot\pi) - 0 + 0\right)\right) =$$

$$= 2\cdot\pi\cdot\left(8\cdot\pi^2 - 2\cdot\pi - 4\cdot\pi^2\right) = 2\cdot\pi\cdot\left(4\cdot\pi^2 - 2\cdot\pi\right) = 8\cdot\pi^3 - 4\cdot\pi^2 \text{ kub. jed.}$$

8. Na donjoj je slici prikazan krivocrtni trapez $ACDO$. Krivulja $\overset{\frown}{AC}$ je dio kosinusoide čija jednadžba ima oblik $y = A\cdot\cos(\omega\cdot t + \varphi) + B$, za neke $A, \omega > 0$, $\varphi \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ i $B \in \mathbb{R}$.



Slika 2.

a) Izračunajte površinu zadanoga lika.

b) Odredite volumen rotacijskoga tijela koje nastaje rotacijom zadanoga lika oko osi apscisa.

c) Odredite volumen rotacijskoga tijela koje nastaje rotacijom zadanoga lika oko osi ordinata.

Rješenje: Odredimo najprije jednadžbu kosinusoide. Iz slike vidimo da je temeljni period pripadne harmonijske funkcije $T=\pi$. Tako iz jednakosti $\omega=\frac{2\cdot\pi}{T}$ slijedi $\omega=2$.

Najveća vrijednost pripadne harmonijske funkcije postiže se kad je $\cos(\omega\cdot t+\varphi)=1$ i iznosi $A+B$. Iz slike se vidi da je ta vrijednost jednaka -3 , pa je $A+B=-3$.

Najmanja vrijednost pripadne harmonijske funkcije postiže se kad je $\cos(\omega\cdot t+\varphi)=-1$ i iznosi $-A+B$. Iz slike se vidi da je ta vrijednost jednaka -7 , pa je $-A+B=-7$.

Tako iz sustava $\begin{cases} A+B=-3, \\ -A+B=-7 \end{cases}$ slijedi $(A,B)=(2,-5)$.

Preostaje odrediti fazni pomak φ. U jednadžbu kosinusoide uvrstimo $t=0$, $(A,B,\omega)=(2,-5,2)$ i $y=-3$. Dobivamo:

$$-3=2\cdot\cos(2\cdot 0+\varphi)-5 \Leftrightarrow \cos\varphi=1.$$

U intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\rangle$ ova jednadžba ima jedinstveno rješenje $\varphi=0$. Dakle, jednadžba kosinusoide je:

$$y=2\cdot\cos(2\cdot t)-5.$$

a) Primijetimo da za svaki $t\in[0,\pi]$ vrijedi nejednakost $2\cdot\cos(2\cdot t)-5<0$. Zbog toga je tražena površina jednaka:

$$P=\int_0^{\pi}-(2\cdot\cos(2\cdot t)-5)\cdot \mathrm{d}t=\int_0^{\pi}(5-2\cdot\cos(2\cdot t))\cdot \mathrm{d}t=$$
$$=\left(5\cdot t-\sin(2\cdot t)\right)\Big|_0^{\pi}=5\cdot\pi-0-(0-0)=5\cdot\pi \text{ kv. jed.}$$

b) Traženi je volumen jednak:

$$V=\pi\cdot\int_0^{\pi}(2\cdot\cos(2\cdot t)-5)^2\cdot \mathrm{d}t=\pi\cdot\int_0^{\pi}(4\cdot\cos^2(2\cdot t)-20\cdot\cos(2\cdot t)+25)\cdot \mathrm{d}t=$$
$$=\pi\cdot\int_0^{\pi}\left(4\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot(1+\cos(4\cdot t)\right)-20\cdot\cos(2\cdot t)+25\right)\cdot \mathrm{d}t=$$
$$=\pi\cdot\int_0^{\pi}\left(2\cdot\cos(4\cdot t)-20\cdot\cos(2\cdot t)+27\right)\cdot \mathrm{d}t=$$

$$= \pi \cdot \left(\left(2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sin(4 \cdot t) - 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot t) + 27 \cdot t \right)_0^{\pi} \right) =$$

$$= \pi \cdot (0 - 0 + 27 \cdot \pi - (0 - 0 + 0)) = 27 \cdot \pi^2 \text{ kub. jed.}$$

c) Ponovno zbog očite nejednakosti $2 \cdot \cos(2 \cdot t) - 5 < 0,\ \forall t \in [0, \pi]$, zaključujemo da je traženi volumen jednak:

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{\pi} t \cdot (-(2 \cdot \cos(2 \cdot t) - 5) \cdot \mathrm{d}t = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{\pi} t \cdot (5 - 2 \cdot \cos(2 \cdot t)) \cdot \mathrm{d}t =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = t & v = \int (5 - 2 \cdot \cos(2 \cdot t)) \cdot \mathrm{d}t = 5 \cdot t - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot t) = 5 \cdot t - \sin(2 \cdot t) \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}t & \mathrm{d}v = (5 - 2 \cdot \cos(2 \cdot t)) \cdot \mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

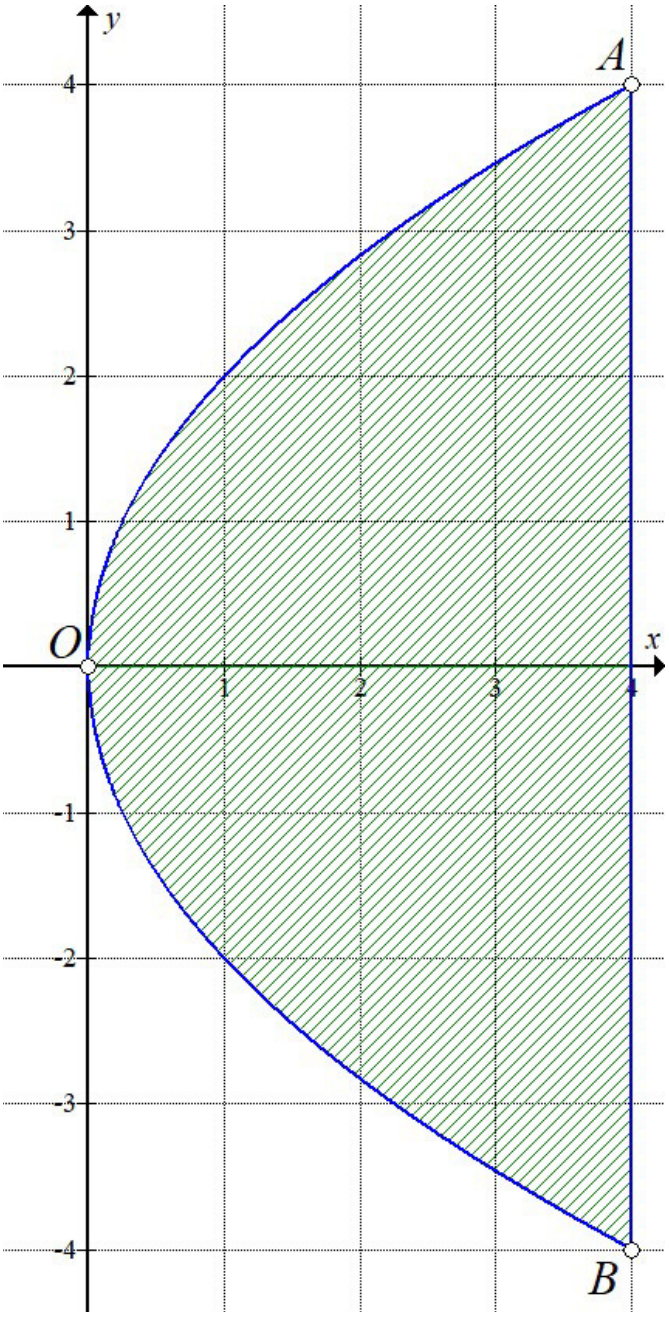
$$= 2 \cdot \pi \cdot \left(\left(5 \cdot t^2 - t \cdot \sin(2 \cdot t) \right)_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (5 \cdot t - \sin(2 \cdot t) \cdot \mathrm{d}t \right) =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot \left(5 \cdot \pi^2 - 0 - 0 + 0 - \left(\frac{5}{2} \cdot t^2 + \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot t) \right)_0^{\pi} \right) =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot \left(5 \cdot \pi^2 - \left(\frac{5}{2} \cdot \pi^2 + \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{2} \right) \right) =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot \frac{5}{2} \cdot \pi^2 = 5 \cdot \pi^3 \text{ kub. jed.}$$

9. Na donjoj je slici prikazan ravninski lik OAB. Krivulja $\widehat{AOB}$ je dio parabole čija jednadžba ima oblik $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$, za neki $p > 0$.



Slika 3.

a) Izračunajte **opseg** zadanoga lika.

b) Izračunajte **površinu** zadanoga lika.

c) Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotiranjem zadanoga lika oko osi **apscisa**.

d) Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotiranjem zadanoga lika oko osi **ordinata**.

Rješenje: Odredimo najprije jednadžbu parabole $\widehat{AOB}$. Iz slike vidimo da ona prolazi točkom $A=(4,4)$, pa uvrštavanjem $x=y=4$ u izraz $y^2=2\cdot p\cdot x$ dobivamo jednadžbu $4^2=2\cdot p\cdot 4$, otkuda je $p=\frac{4^2}{2\cdot 4}=\frac{4}{2}=2.$ Dakle, jednadžba parabole $\widehat{AOB}$ glasi: $y^2=4\cdot x.$

a) Duljina dužine $\overline{AB}$ jednaka je $\left|\overline{AB}\right|=4+4=8$ jed. duljine. Preostaje odrediti duljinu luka $\widehat{AB}$. Zbog očite osne simetrije lika s obzirom na os apscisa, ta je duljina dvostruko veća od duljine luka $\widehat{OA}$. Tu ćemo duljinu najlakše izračunati tako da izraz $y^2=4\cdot x$ shvatimo kao *funkciju varijable y*, tj. kao $x=\frac{1}{4}\cdot y^2$, pa traženu duljinu odredimo promatrajući odgovarajući određeni integral *po varijabli y*. Tako odmah imamo:

$$\left|\widehat{AB}\right|=2\cdot\left|\widehat{OA}\right|=2\cdot\int_0^4\sqrt{1+\left(\left(\frac{1}{4}\cdot y^2\right)'\right)^2}\cdot\mathrm{d}y=2\cdot\int_0^4\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\cdot y\right)^2}\cdot\mathrm{d}y=2\cdot\int_0^4\sqrt{1+\frac{y^2}{4}}\cdot\mathrm{d}y=$$

$$=2\cdot\int_0^4\sqrt{\frac{y^2+4}{4}}\cdot\mathrm{d}y=2\cdot\int_0^4\frac{\sqrt{y^2+4}}{\sqrt{4}}\cdot\mathrm{d}y=2\cdot\int_0^4\frac{\sqrt{y^2+4}}{2}\cdot\mathrm{d}y=\int_0^4\sqrt{y^2+4}\cdot\mathrm{d}y=$$

$$=\left(\frac{y}{2}\cdot\sqrt{y^2+4}+\frac{4}{2}\cdot\ln\left(y+\sqrt{y^2+4}\right)\right)_0^4=2\cdot\sqrt{20}+2\cdot\ln\left(4+\sqrt{20}\right)-0-2\cdot\ln\left(\sqrt{4}\right)=$$

$$=2\cdot\sqrt{20}+2\cdot\ln\left(4+\sqrt{20}\right)-2\cdot\ln 2=2\cdot\sqrt{4\cdot 5}+2\cdot\ln\left(\frac{4+\sqrt{20}}{2}\right)=4\cdot\sqrt{5}+2\cdot\ln\left(\frac{4+2\cdot\sqrt{5}}{2}\right)=$$

$$=4\cdot\sqrt{5}+2\cdot\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\text{ jed. duljine.}$$

Dakle, traženi je opseg jednak:

$$O=\left|\widehat{AOB}\right|+\left|\overline{AB}\right|=4\cdot\sqrt{5}+2\cdot\ln\left(2+\sqrt{5}\right)+8\approx 19.832\text{ jed. duljine.}$$

b) Ponovno zbog osne simetrije zadanoga lika s obzirom na os apscisa slijedi da je tražena površina jednaka:

$$P=2\cdot\left(4^2-\int_0^4\frac{y^2}{4}\cdot\mathrm{d}y\right)=2\cdot\left(16-\frac{1}{4}\cdot\int_0^4 y^2\cdot\mathrm{d}y\right)=2\cdot\left(16-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot y^3\right)_0^4\right)=$$

$$=2\cdot\left(16-\frac{1}{12}\cdot\left(y^3\right)_0^4\right)=2\cdot\left(16-\frac{1}{12}\cdot\left(4^3-0^3\right)\right)=2\cdot\left(16-\frac{64}{12}\right)=2\cdot\left(16-\frac{16}{3}\right)=\frac{64}{3}\text{ kv. jed.}$$

c) Prilikom određivanja volumena traženoga rotacijskoga tijela možemo postupiti na dva načina: integrirati po varijabli x ili integrirati po varijabli y. U prvom je

slučaju formula za računanje volumena standardna, dok u drugom slučaju os apscisa trebamo shvatiti kao os ordinata kad je pravilo funkcije zadano kao funkcija varijable x. Konkretno, u prvome je slučaju odmah

$$V_1 = \pi \cdot \int_0^4 4 \cdot x \cdot \mathrm{d}x = \pi \cdot \left(2 \cdot x^2\right)_0^4 = \pi \cdot \left(2 \cdot 4^2 - 2 \cdot 0^2\right) = 32 \cdot \pi \text{ kub. jed.},$$

dok u drugom slučaju od volumena valjka čiji su polumjer osnovke i visina dugi 4 jed. duljine trebamo oduzeti volumen rotacijskoga paraboloida nastaloga rotacijom ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $x = \frac{y^2}{4}$, $x = 0$, $y = 0$ i $y = 4$ oko osi apscisa:

$$V_1 = 4^2 \cdot \pi \cdot 4 - 2 \cdot \pi \cdot \int_0^4 y \cdot \frac{y^2}{4} \cdot \mathrm{d}y = 64 \cdot \pi - \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^4 y^3 \cdot \mathrm{d}y = 64 \cdot \pi - \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot y^4\right)_0^4 =$$

$$= 64 \cdot \pi - \frac{\pi}{8} \cdot \left(4^4 - 0^4\right) = 64 \cdot \pi - 32 \cdot \pi = 32 \cdot \pi \text{ kub. jed.}$$

d) I u ovom slučaju možemo postupiti analogno kao u prethodnom podzadatku. Koristeći prvi način i pravilo $y = 2 \cdot \sqrt{x}$ kojim je zadan luk $\widehat{OA}$ odmah dobivamo:

$$V_2 = 2 \cdot \left(2 \cdot \pi \cdot \int_0^4 x \cdot 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \mathrm{d}x\right) = 8 \cdot \pi \cdot \int_0^4 x^{\frac{3}{2}} \cdot \mathrm{d}x = 8 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{\frac{3}{2}+1} \cdot x^{\frac{3}{2}+1}\right)_0^4 = \frac{16}{5} \cdot \pi \cdot \left(x^{\frac{5}{2}}\right)_0^4 =$$

$$= \frac{16}{5} \cdot \pi \cdot \left(4^{\frac{5}{2}} - 0^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{16}{5} \cdot 2^5 \cdot \pi = \frac{512}{5} \cdot \pi \text{ kub. jed.},$$

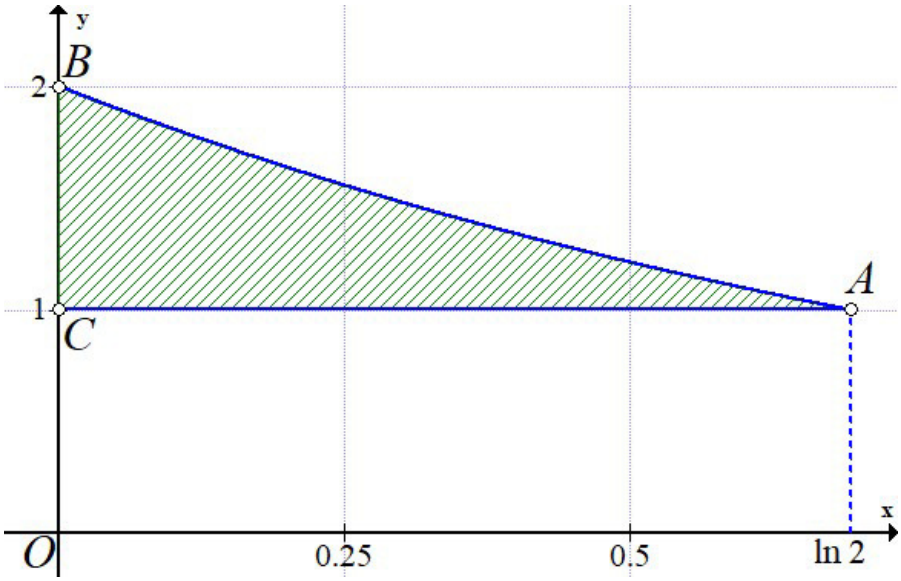
dok koristeći drugi način, odnosno oduzimajući volumen rotacijskoga paraboloida nastaloga rotacijom ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $x = \frac{y^2}{4}$, $x = 0$, $y = 0$ i $y = 4$ od volumena valjka čiji su polumjer osnovke 4 jed. duljine i visina 4 jed. duljine i množeći dobivenu razliku s 2, dobivamo:

$$V_2 = 2 \cdot \left(4^2 \cdot \pi \cdot 4 - \pi \cdot \int_0^4 \left(\frac{y^2}{4}\right)^2 \cdot \mathrm{d}y\right) = 128 \cdot \pi - 2 \cdot \pi \cdot \int_0^4 \frac{y^4}{16} \cdot \mathrm{d}y = 128 \cdot \pi - \frac{\pi}{8} \cdot \int_0^4 y^4 \cdot \mathrm{d}y =$$

$$= 128 \cdot \pi - \frac{\pi}{8} \cdot \left(\frac{1}{4+1} \cdot y^{4+1}\right)_0^4 = 128 \cdot \pi - \frac{\pi}{40} \cdot \left(y^5\right)_0^4 = 128 \cdot \pi - \frac{\pi}{40} \cdot \left(4^5 - 0^5\right) =$$

$$= 128 \cdot \pi - \frac{\pi}{40} \cdot 4^5 \cdot \pi = 128 \cdot \pi - \frac{128}{5} \cdot \pi = \frac{512}{5} \cdot \pi \text{ kub. jed.}$$

10. Na donjoj je slici prikazan krivocrtni trokut ABC. Pritom je stranica $\widehat{AB}$ dio krivulje čija jednadžba ima oblik $y = b \cdot e^{a \cdot x}$, za neke $a, b \in \mathbb{R}$.



Slika 4.

a) Izračunajte **opseg** zadanoga trokuta.

b) Izračunajte **površinu** zadanoga trokuta.

c) Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotiranjem zadanoga trokuta oko osi **apscisa**.

d) Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotiranjem zadanoga trokuta oko osi **ordinata**.

Rješenje: Odredimo najprije jednadžbu stranice $\widehat{AB}$. Iz slike vidimo da su $A = (\ln 2, 1)$, $B = (0, 2)$ i $C = (0, 1)$. Budući da krivulja $y = b \cdot e^{a \cdot x}$ prolazi točkama A i B, dobivamo sljedeći sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} 2 = b \cdot e^{a \cdot 0}, \\ 1 = b \cdot e^{a \cdot \ln 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = b \cdot 1, \\ 1 = b \cdot e^{\ln\left(2^a\right)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = b, \\ 1 = b \cdot 2^a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = b, \\ 2^0 = b \cdot 2^a. \end{cases}$$

Iz prve jednadžbe je očito $b = 2$, pa uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobivamo $2^0 = 2 \cdot 2^a$, odnosno $1 + a = 0$, a odatle je $a = -1$. Dakle, jednadžba stranice $\widehat{AB}$ glasi:

$$y = 2 \cdot e^{-x}.$$

a) Iz slike se vidi da su $\left|\overline{AC}\right| = \ln 2$ i $\left|\overline{BC}\right| = 1$. Preostaje odrediti duljinu stranice $\widehat{AB}$. Ta je duljina jednaka duljini luka krivulje $y = 2 \cdot e^{-x}$ iznad segmenta $[0, \ln 2]$, pa imamo redom:

$$l=\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+\left(\left(2\cdot e^{-x}\right)'\right)^2}\cdot \mathrm{d}x=\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+\left(2\cdot(-1)\cdot e^{-x}\right)^2}\cdot \mathrm{d}x=\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+4\cdot e^{-2\cdot x}}\cdot \mathrm{d}x.$$

Ovaj ćemo integral odrediti metodom zamjene:

$$t:=\sqrt{1+4\cdot e^{-2\cdot x}},$$

$$e^{-2\cdot x}=\frac{t^2-1}{4},$$

$$\mathrm{d}t=\frac{4\cdot(-2)\cdot e^{-2\cdot x}}{2\cdot\sqrt{1+4\cdot e^{-2\cdot x}}}\cdot \mathrm{d}x=\frac{4\cdot(-2)\cdot\frac{t^2-1}{4}}{2\cdot t}\cdot \mathrm{d}x=\frac{1-t^2}{t}\cdot \mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{t}{1-t^2}\cdot \mathrm{d}t,$$

$$0\mapsto\sqrt{1+4\cdot e^{-2\cdot 0}}=\sqrt{1+4\cdot 1}=\sqrt{5},$$

$$\ln 2\mapsto\sqrt{1+4\cdot e^{-2\cdot\ln 2}}=\sqrt{1+4\cdot e^{\ln\left(2^{-2}\right)}}=\sqrt{1+4\cdot 2^{-2}}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}.$$

Tako dobivamo:

$$\left|\widehat{AB}\right|=\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{2}}t\cdot\frac{t}{1-t^2}\cdot \mathrm{d}t=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\frac{t^2}{t^2-1}\cdot \mathrm{d}t=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\cdot \mathrm{d}t=\left(t+\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}=$$

$$=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right|-\sqrt{2}-\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|=$$

$$=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}\right|-\sqrt{2}-\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}\right|=$$

$$=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{4}\right|-\sqrt{2}-\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{1}\right|=$$

$$=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{2^2}\right|-\sqrt{2}-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)=$$

$$=\sqrt{5}+\ln\left(\sqrt{5}-1\right)-\sqrt{2}-\ln 2-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\text{ jed. duljine.}$$

Dakle, traženi je opseg jednak:

$$O=\left|\widehat{AB}\right|+\left|\overline{BC}\right|+\left|\overline{CA}\right|=\ln 2+1+\sqrt{5}+\ln\left(\sqrt{5}-1\right)-\sqrt{2}-\ln 2-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)=$$

$$=1+\sqrt{5}+\ln\left(\sqrt{5}-1\right)-\sqrt{2}-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\approx 2.91516\text{ jed. duljine.}$$

b) Traženu površinu možemo odrediti na dva načina: integriranjem po varijabli x i integriranjem po varijabli y. U prvome je slučaju od površine lika omeđenoga krivuljama $y = 2\cdot e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$ i $x = \ln 2$ potrebno oduzeti površinu pravokutnika čije stranice imaju duljine ln 2 jed. duljine i 1 jed. duljine:

$$P = \int_0^{\ln 2} 2\cdot e^{-x}\cdot \mathrm{d}x - (1\cdot \ln 2) = \left(2\cdot \frac{1}{-1}\cdot e^{-x}\right)_0^{\ln 2} - \ln 2 = \left(-2\cdot e^{-\ln 2} - \left(-2\cdot e^{-0}\right)\right) - \ln 2 =$$

$$= -2\cdot e^{\ln\left(2^{-1}\right)} + 2\cdot 1 - \ln 2 = -2\cdot 2^{-1} + 2 - \ln 2 = -1 + 2 - \ln 2 = 1 - \ln 2 \text{ kv. jed.}$$

U drugom slučaju najprije izrazimo varijablu x kao funkciju varijable y:

$$y = 2\cdot e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{y}{2} \Leftrightarrow -x = \ln\left(\frac{y}{2}\right) \Leftrightarrow x = -\ln\left(\frac{y}{2}\right) = -(\ln y - \ln 2) = \ln 2 - \ln y,$$

pa dobijemo:

$$P = \int_1^2 (\ln 2 - \ln y)\cdot \mathrm{d}y = \left((\ln 2)\cdot y - (y\cdot \ln y - y)\right)_1^2 = \left((\ln 2 + 1)\cdot y - y\cdot \ln y)\right)_1^2 =$$

$$= (\ln 2 + 1)\cdot 2 - 2\cdot \ln 2 - ((\ln 2 + 1)\cdot 1 - 1\cdot \ln 1) =$$

$$= 2\cdot \ln 2 + 2 - 2\cdot \ln 2 - \ln 2 - 1 - 0 = 1 - \ln 2 \text{ kv. jed.}$$

c) Traženi volumen možemo odrediti na dva načina: integriranjem po varijabli x i integriranjem po varijabli y. U prvome je slučaju od volumena rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y = 2\cdot e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$ i $x = \ln 2$ potrebno oduzeti volumen valjka kojemu je polumjer osnovke jednak 1 jed. duljine, a visina ln 2 jed. duljine:

$$V_1 = \pi\cdot \int_0^{\ln 2} \left(2\cdot e^{-x}\right)^2\cdot \mathrm{d}x - 1^2\cdot \pi\cdot \ln 2 = \pi\cdot\left(\int_0^{\ln 2} 4\cdot e^{-2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x - \ln 2\right) =$$

$$= \pi\cdot\left(\left(4\cdot \frac{1}{-2}\cdot e^{-2\cdot x}\right)_0^{\ln 2} - \ln 2\right) = \pi\cdot\left(\left(-2\cdot e^{-2\cdot x}\right)_0^{\ln 2} - \ln 2\right) =$$

$$= \pi\cdot\left(-2\cdot e^{-2\cdot \ln 2} - \left(-2\cdot e^{-2\cdot 0}\right) - \ln 2\right) = \pi\cdot\left(-2\cdot e^{\ln\left(2^{-2}\right)} + 2\cdot 1 - \ln 2\right) =$$

$$= \pi\cdot\left(-2\cdot 2^{-2} + 2 - \ln 2\right) = \left(\frac{3}{2} - \ln 2\right)\cdot \pi \text{ kub. jed.}$$

Koristeći dio rješenja **b)** podzadatka u kojemu smo dobili jednadžbu stranice $\widehat{AB}$ kao funkciju varijable y

$$x = \ln 2 - \ln y,$$

u drugom slučaju odmah dobivamo:

$$V_1 = 2\cdot\pi\cdot\int_1^2 y\cdot(\ln 2-\ln y)\cdot \mathrm{d}y = 2\cdot\pi\cdot\left(\ln 2\cdot\int_1^2 y-\int_1^2 y\cdot\ln y\cdot \mathrm{d}y\right)=$$

$$=2\cdot\pi\cdot\left(\ln 2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot y^2\right)_1^2-\int_1^2 y\cdot\ln y\cdot \mathrm{d}y\right)=\left|\begin{array}{ll} u=\ln y & v=\int y\cdot \mathrm{d}y=\frac{1}{2}\cdot y^2 \\ \mathrm{d}u=\frac{1}{y}\cdot \mathrm{d}y & \mathrm{d}v=y\cdot \mathrm{d}y \end{array}\right|=$$

$$=2\cdot\pi\cdot\left(\ln 2\cdot\frac{1}{2}\cdot(2^2-1^2)-\left(\frac{1}{2}\cdot y^2\cdot\ln y\right)_1^2+\int_1^2\frac{1}{2}\cdot y^2\cdot\frac{1}{y}\cdot \mathrm{d}y\right)=$$

$$=2\cdot\pi\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\ln 2-\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\ln 2+\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\ln 1+\frac{1}{2}\cdot\int_1^2 y\cdot \mathrm{d}y\right)=$$

$$=2\cdot\pi\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\ln 2-2\cdot\ln 2+0+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot y^2\right)_1^2\right)=$$

$$=2\cdot\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\ln 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(2^2-1^2\right)\right)=2\cdot\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\ln 2+\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{3}{2}-\ln 2\right)\cdot\pi \text{ kub. jed.}$$

d) Traženi volumen možemo odrediti na dva načina: integriranjem po varijabli x i integriranjem po varijabli y. U prvome je slučaju od volumena rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y=2\cdot e^{-x}$, $y=0$, $x=0$ i $x=\ln 2$ potrebno oduzeti volumen valjka kojemu je polumjer osnovke jednak ln 2 jed. duljine, a visina 1 jed. duljine:

$$V_2 = 2\cdot\pi\cdot\int_0^{\ln 2} x\cdot 2\cdot e^{-x}\cdot \mathrm{d}x-(\ln 2)^2\cdot\pi\cdot 1=4\cdot\pi\cdot\int_0^{\ln 2} x\cdot e^{-x}\cdot \mathrm{d}x-\left(\ln^2 2\right)\cdot\pi=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} u=x & v=\int e^{-x}\cdot \mathrm{d}x=-e^{-x} \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x & \mathrm{d}v=e^{-x}\cdot \mathrm{d}x \end{array}\right|=4\cdot\pi\cdot\left(\left(-x\cdot e^{-x}\right)_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2}\left(-e^{-x}\right)\cdot \mathrm{d}x\right)-\left(\ln^2 2\right)\cdot\pi=$$

$$=4\cdot\pi\cdot\left(-(\ln 2)\cdot e^{-\ln 2}+\int_0^{\ln 2} e^{-x}\cdot \mathrm{d}x\right)-\left(\ln^2 2\right)\cdot\pi=$$

$$=4\cdot\pi\cdot\left(-(\ln 2)\cdot e^{\ln\left(2^{-1}\right)}-\left(e^{-x}\right)_0^{\ln 2}\right)-\left(\ln^2 2\right)\cdot\pi=$$

$$=4\cdot\pi\cdot\left(-(\ln 2)\cdot 2^{-1}-\left(e^{-\ln 2}-e^0\right)\right)-\left(\ln^2 2\right)\cdot\pi=$$

$$=4\cdot\pi\cdot\left(-(\ln 2)\cdot 2^{-1}-2^{-1}+1\right)-\left(\ln^2 2\right)\cdot\pi=$$

$$=\left(2-2\cdot\ln 2-\ln^2 2\right)\cdot\pi\approx 0.41863 \text{ kub. jed.}$$

U drugom slučaju, koristeći dio rješenja **b)** podzadatka u kojemu smo dobili jednadžbu stranice $\widehat{AB}$ kao funkciju varijable y

$$x = \ln 2 - \ln y\,,$$

odmah dobivamo:

$$V_2 = \pi \cdot \int_1^2 (\ln 2 - \ln y)^2 \cdot \mathrm{d}y = \pi \cdot \int_1^2 \left(\ln^2 2 - 2\cdot \ln 2 \cdot \ln y + \ln^2 y\right)\cdot \mathrm{d}y =$$

$$= \pi \cdot \left(\int_1^2 \ln^2 2 \cdot \mathrm{d}y - 2\cdot \ln 2 \cdot \int_1^2 \ln y \cdot \mathrm{d}y + \int_1^2 \ln^2 y \cdot \mathrm{d}y \right) =$$

$$= \pi \cdot \left(\ln^2 2 \cdot (y)_1^2 - 2\cdot \ln 2 \cdot (y\cdot \ln y - y)_1^2 + \int_1^2 \ln^2 y \cdot \mathrm{d}y \right) = \left| \begin{array}{ll} u = \ln^2 y & v = \int \mathrm{d}y = y \\ \mathrm{d}u = \dfrac{2\cdot \ln y}{y}\cdot \mathrm{d}y & \mathrm{d}v = \mathrm{d}y \end{array} \right| =$$

$$= \pi \cdot \left(\ln^2 2 \cdot (2-1) - 2\cdot \ln 2 \cdot (2\cdot \ln 2 - 2 - 1\cdot \underbrace{\ln 1}_{=0} + 1) + \left(y\cdot \ln^2 y\right)_1^2 - 2\cdot \int_1^2 \ln y \cdot \mathrm{d}y \right) =$$

$$= \pi \cdot \left(\ln^2 2 - 4\cdot \ln^2 2 + 2\cdot \ln 2 + 2\cdot \ln^2 2 - 1\cdot \underbrace{\ln^2 1}_{=(\ln 1)^2 = 0^2 = 0} - 2\cdot (y\cdot \ln y - y)_1^2 \right) =$$

$$= \pi \cdot \left(-\ln^2 2 + 2\cdot \ln 2 - 2\cdot \left(2\cdot \ln 2 - 2 - 1\cdot \underbrace{\ln 1}_{=0} + 1 \right) \right)$$

$$= \left(2 - 2\cdot \ln 2 - \ln^2 2\right)\cdot \pi \approx 0.41863 \text{ kub. jed.}$$

11. Izračunajte prosječnu vrijednost funkcije $f(t) = \pi \cdot \mathrm{ctg}^3 t$ na segmentu $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Rješenje: Koristeći osnovne trigonometrijske identitete imamo redom:

$$\overline{f} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}} \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \pi \cdot \mathrm{ctg}^3 t \cdot \mathrm{d}t = \frac{4}{\pi} \cdot \pi \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 t}{\sin^3 t} \cdot \mathrm{d}t = 4 \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \cdot (\sin t)^{-3} \cdot \mathrm{d}t =$$

$$= 4 \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cdot \cos t \cdot (\sin t)^{-3} \cdot \mathrm{d}t = 4 \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 t\right) \cdot \cos t \cdot (\sin t)^{-3} \cdot \mathrm{d}t \left\{ \begin{array}{l} \text{zamjena:} \\ x := \sin t, \\ \mathrm{d}x = \cos t \cdot \mathrm{d}t, \\ \dfrac{\pi}{4} \mapsto \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \dfrac{\pi}{2} \mapsto \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \end{array} \right\} =$$

$$=4\cdot\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\left(1-x^2\right)\cdot x^{-3}\cdot \mathrm{d}x=4\cdot\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\left(x^{-3}-x^{-1}\right)\cdot \mathrm{d}x=4\cdot\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\left(x^{-3}-\frac{1}{x}\right)\cdot \mathrm{d}x=$$

$$=4\cdot\left(\left(\frac{1}{-3+1}\cdot x^{-3+1}-\ln x\right)_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\right)=4\cdot\left(\left(\frac{-1}{2}\cdot x^{-2}-\ln x\right)_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\right)=$$

$$=4\cdot\left(-\frac{1}{2}-0-\left(-\frac{1}{2}\cdot 2-\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\right)=4\cdot\left(-\frac{1}{2}+1+\ln\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)\right)=2+4\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\ln 2=2-2\cdot\ln 2.$$

12. Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y=\dfrac{x}{x^2+4}$, $y=0$, $x=0$ i $x=2$ oko osi **ordinata.**

Rješenja: Traženi je volumen jednak:

$$V=2\cdot\pi\cdot\int_0^2 x\cdot\frac{x}{x^2+4}\cdot \mathrm{d}x=2\cdot\pi\cdot\int_0^2\frac{x^2}{x^2+4}\cdot \mathrm{d}x=2\cdot\pi\cdot\int_0^2\left(1-\frac{4}{x^2+4}\right)\cdot \mathrm{d}x=$$

$$=2\cdot\pi\cdot\left(\left(x-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)_0^2\right)=2\cdot\pi\cdot\left(\left(x-2\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)_0^2\right)=$$

$$=2\cdot\pi\cdot\left(2-2\cdot\underbrace{\operatorname{arctg}(1)}_{=\frac{\pi}{4}}-0+2\cdot\underbrace{\operatorname{arctg}(0)}_{=0}\right)=4\cdot\pi-\pi^2 \text{ kub. jed.}$$

13. Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}$, $y=0$, $x=0$ i $x=1$ oko osi **apscisa**.

Rješenje: Traženi je volumen jednak:

$$V=\pi\cdot\int_0^1\left(\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2\cdot \mathrm{d}x=\pi\cdot\int_0^1\frac{4}{x^2+1}\cdot \mathrm{d}x=4\cdot\pi\cdot\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\cdot \mathrm{d}x=4\cdot\pi\cdot\left(\left(\operatorname{arctg} x\right)_0^1\right)=$$

$$=4\cdot\pi\cdot(\underbrace{\operatorname{arctg} 1}_{=\frac{\pi}{4}}-\underbrace{\operatorname{arctg} 0}_{=0})=\pi^2 \text{ kub. jed.}$$

14. Izračunajte duljinu luka ravninske krivulje $y=\sqrt{4-x^2}$ iznad segmenta $[0,2]$.

1. *rješenje*: Tražena je duljina jednaka:

$$l=\int_0^2\sqrt{1+\left(\left(\sqrt{4-x^2}\right)'\right)^2}\cdot\mathrm{d}x=\int_0^2\sqrt{1+\left(\frac{0-2\cdot x}{2\cdot\sqrt{4-x^2}}\right)^2}\cdot\mathrm{d}x=\int_0^2\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2}\cdot\mathrm{d}x=$$

$$=\int_0^2\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\cdot\mathrm{d}x=\int_0^2\sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\cdot\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4-x^2}}\cdot\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\cdot\mathrm{d}x=2\cdot\int_0^2\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\cdot\mathrm{d}x=$$

$$=2\cdot\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)_0^2=2\cdot(\underbrace{\arcsin 1}_{=\frac{\pi}{2}}-\underbrace{\arcsin 0}_{=0})=\pi \text{ jed. duljine.}$$

2. *rješenje*: Iz $y=\sqrt{4-x^2}$ slijedi $y^2=4-x^2$, odnosno $x^2+y^2=4$. Odatle zaključujemo da je zadana krivulja četvrtina središnje kružnice polumjera 2 (jer je riječ o dijelu te kružnice u prvom kvadratu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini). Njezina je duljina jednaka četvrtini opsega navedene kružnice, tj.

$$l=\frac{1}{4}\cdot(2\cdot 2\cdot\pi)=\pi \text{ jed. duljine.}$$

15. Izračunajte duljinu luka ravninske krivulje $y=\ln(\sin x)$ iznad segmenta $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$.

Rješenje: Tražena je duljina jednaka:

$$l=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\left(\left(\ln(\sin x)\right)'\right)^2}\cdot\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}\cdot\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}\cdot\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}}\cdot\mathrm{d}x=$$

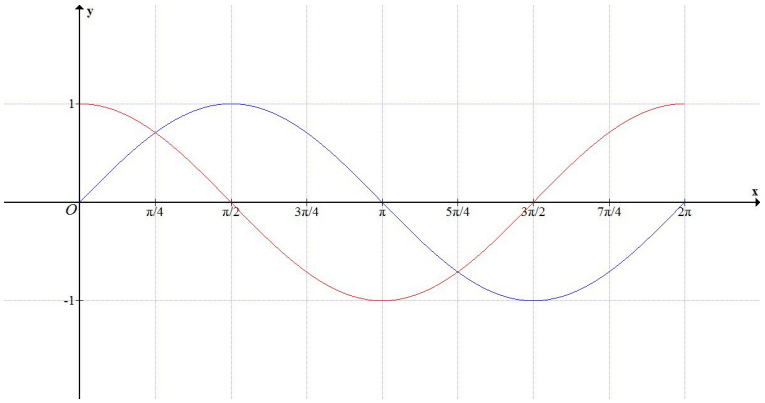
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}}\cdot\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}\cdot\mathrm{d}x=\left(\ln\left(\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\ln\left(\frac{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)}\right)=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)=$$

$$=\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)}\right)=\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}\right)=\ln\left(\sqrt{2}+1\right) \text{ jed. duljine.}$$

16. Odredite $\int_0^{2\cdot\pi}\sqrt{2}\cdot\min\{\sin t,\cos t\}\cdot\mathrm{d}t$. Rješenje zadatka **obavezno** popratite odgovarajućom skicom.

Napomena: $\min\{x,y\}$ jednak je manjem od brojeva x i y.

Rješenje: Skicirajmo funkcije $f_1(t)=\sin t$ i $f_2(t)=\cos t$ na segmentu $[0,2\cdot\pi]$. Dobivamo sliku 5.



Slika 5.

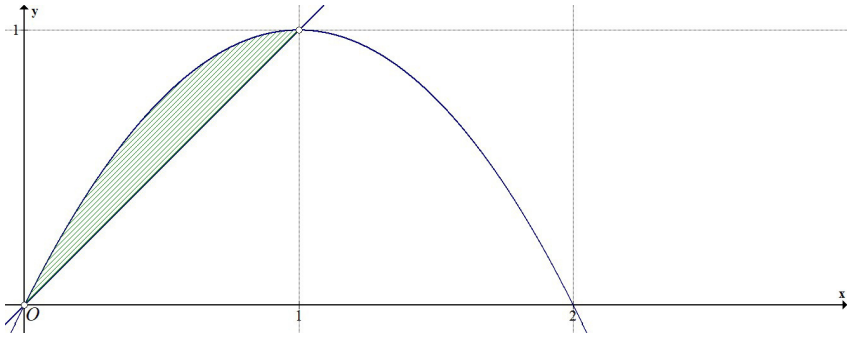
Tako zaključujemo da je traženi integral jednak:

$$I=\sqrt{2}\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin t\cdot \mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\cdot\pi}\cos t\cdot \mathrm{d}t+\int_{\frac{5}{4}\cdot\pi}^{2\cdot\pi}\sin t\cdot \mathrm{d}t\right)=\sqrt{2}\cdot\left(\left(-\cos t\right)_0^{\frac{\pi}{4}}+\left(\sin t\right)_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\cdot\pi}+\left(-\cos t\right)_{\frac{5}{4}\cdot\pi}^{2\cdot\pi}\right)=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-4.$$

17. Ravninski lik omeđen krivuljama $y=x$ i $y=2\cdot x-x^2$ rotira oko osi ordinata. Izračunajte volumen nastaloga rotacijskoga tijela. Rješenje zadatka **obavezno** popratite odgovarajućom skicom.

Rješenje: Skicirajmo zadane krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 6.



Slika 6.

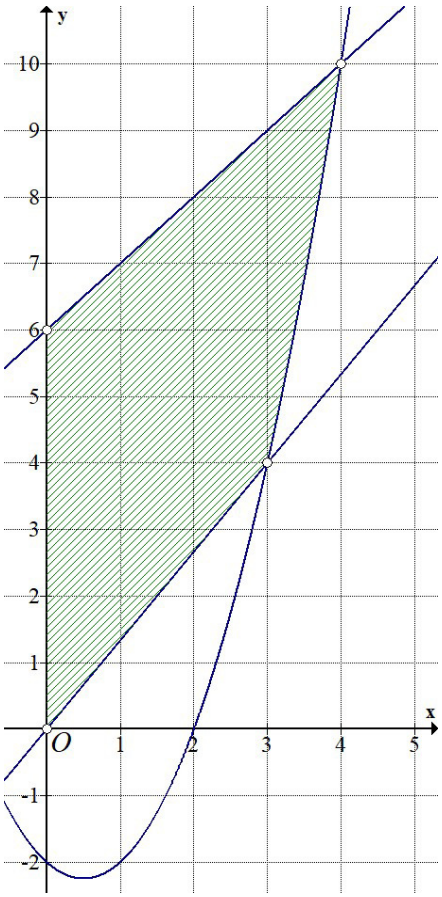
Tako zaključujemo da je traženi volumen jednak:

$$V=2\cdot\pi\cdot\int_0^1 x\cdot\left(\left(2\cdot x-x^2\right)-x\right)\cdot \mathrm{d}x=2\cdot\pi\cdot\int_0^1 x\cdot\left(x-x^2\right)\cdot \mathrm{d}x=2\cdot\pi\cdot\int_0^1\left(x^2-x^3\right)\cdot \mathrm{d}x=$$

$$=2\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot x^3-\frac{1}{4}\cdot x^4\right)_0^1=\frac{\pi}{6}\ \text{kub. jed.}$$

18. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y = x^2 - x - 2$, $4 \cdot x - 3 \cdot y = 0$, $x - y + 6 = 0$ i $x = 0$. Rješenje zadatka **obavezno** popratite odgovarajućom skicom.

Rješenje: Skicirajmo zadane krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 7.



Slika 7.

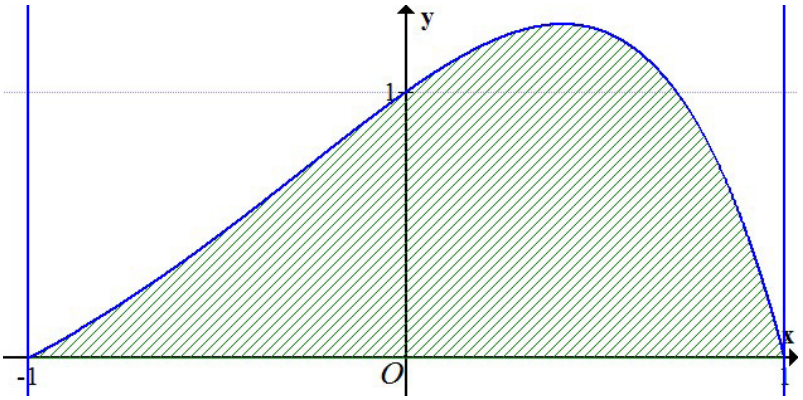
Tako zaključujemo da je tražena površina jednaka:

$$P = \frac{5+6}{2} \cdot 3 + \int_3^4 \left(x + 6 - (x^2 - x - 2) \right) \cdot \mathrm{d}x = \frac{33}{2} + \int_3^4 \left(-x^2 + 2 \cdot x + 8 \right) \cdot \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{33}{2} + \left(-\frac{1}{3} \cdot x^3 + x^2 + 8 \cdot x \right) \Big|_3^4 = \frac{33}{2} + \frac{8}{3} = \frac{115}{6} \text{ kv. jed.}$$

19. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y=\left(1-x^2\right)\cdot e^x$, $x=-1$ i $x=1$.

Rješenje: Skicirajmo zadane krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 8.



Slika 8.

Tako zaključujemo da je tražena površina jednaka:

$$P=\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)\cdot e^x\cdot \mathrm{d}x=\begin{vmatrix} u=1-x^2 & v=\int e^x\cdot \mathrm{d}x=e^x \\ \mathrm{d}u=-2\cdot x\cdot \mathrm{d}x & \mathrm{d}v=e^x\cdot \mathrm{d}x \end{vmatrix}=\left(\left(1-x^2\right)\cdot e^x\right)_{-1}^{1}-$$

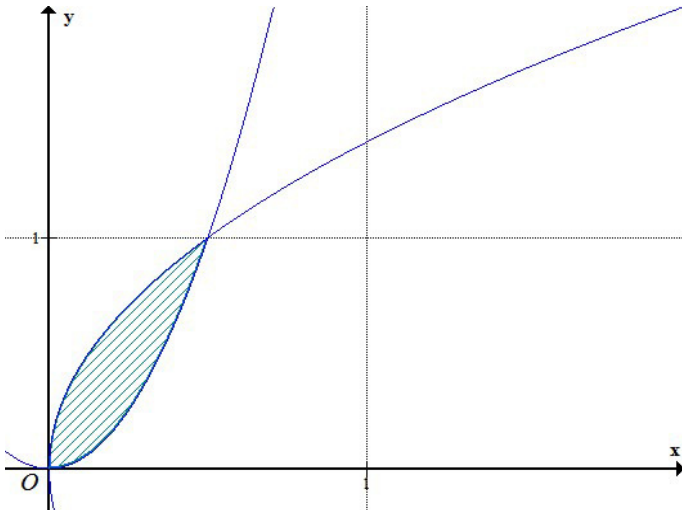
$$-\int_{-1}^{1}(-2)\cdot x\cdot e^x\cdot \mathrm{d}x=(1-1)\cdot e^1-(1-1)\cdot e^{-1}+\int_{-1}^{1}2\cdot x\cdot e^x\cdot \mathrm{d}x=0-0+\int_{-1}^{1}2\cdot x\cdot e^x\cdot \mathrm{d}x=$$

$$=\begin{vmatrix} u=2\cdot x & v=\int e^x\cdot \mathrm{d}x=e^x \\ \mathrm{d}u=2\cdot \mathrm{d}x & \mathrm{d}v=e^x\cdot \mathrm{d}x \end{vmatrix}=(2\cdot x\cdot e^x)_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}2\cdot e^x\cdot \mathrm{d}x=(2\cdot x\cdot e^x-2\cdot e^x)_{-1}^{1}=$$

$$=2\cdot 1\cdot e^1-2\cdot e^1-(2\cdot(-1)\cdot e^{-1}-2\cdot e^{-1})=2\cdot e-2\cdot e+2\cdot e^{-1}+2\cdot e^{-1}=4\cdot e^{-1}\ \text{kv. jed.}$$

20. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $K_1 \ldots y^2 = 2 \cdot x$ i $K_2 \ldots y = 4 \cdot x^2$. Rješenje zadatka **obavezno** popratite odgovarajućom skicom!

Rješenje: Skicirajmo zadane krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 9.



Slika 9.

Odredimo sjecišta zadanih krivulja. U tu svrhu riješimo sustav jednadžbi

$$\begin{cases} y^2 = 2 \cdot x, \\ y = 4 \cdot x^2. \end{cases}$$

Uvrštavanjem druge jednadžbe sustava u prvu jednadžbu sustava dobivamo:

$$\begin{aligned} &\left(4 \cdot x^2\right)^2 = 2 \cdot x, \\ &16 \cdot x^4 = 2 \cdot x \quad ,/:2 \\ &8 \cdot x^4 - x = 0, \\ &x \cdot \left(8 \cdot x^3 - 1\right) = 0, \\ &x \cdot \left((2 \cdot x)^3 - 1^3\right) = 0, \\ &x \cdot (2 \cdot x - 1) \cdot \left(4 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1\right) = 0. \end{aligned}$$

Jednadžba $4 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1 = 0$ nema realnih rješenja jer je njezina diskriminanta $D = 2^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 4 - 16 = -12$ strogo negativna. Zbog toga mora biti $x = 0$ ili $2 \cdot x - 1 = 0$. Rješenje prve jednadžbe je (trivijalno) $x_1 = 0$, a druge $x_2 = \frac{1}{2}$. Uvrštavanjem tih vrijednosti npr. u drugu jednadžbu sustava dobijemo $y_1 = 0,\ y_2 = 1$. Dakle, sjecišta zadanih krivulja su točke $S_1 = O = (0,0)$ i $S_2 = \left(\frac{1}{2},\ 1\right)$.

Tako zaključujemo da je tražena površina jednaka:

$$P=\frac{1}{2}\cdot 1-\int_0^1 \frac{1}{2}\cdot y^2\cdot \mathrm{d}y-\int_0^{\frac{1}{2}} 4\cdot x^2\cdot \mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 y^2\cdot \mathrm{d}y-4\cdot\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\cdot \mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot y^3\right)_0^1-$$

$$-4\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot x^3\right)_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}-4\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\text{ kv. jed.}$$

21. Riješite Cauchyjevu zadaću: $\begin{cases} F'(x)=4\cdot\dfrac{\sin(2\cdot x)}{e^{\cos(2\cdot x)}}, \\ F(0)=\dfrac{2}{e}. \end{cases}$

Rješenje: Najprije ćemo odrediti skup *svih* funkcija F takvih da je $F'(x)=4\cdot\dfrac{\sin(2\cdot x)}{e^{\cos(2\cdot x)}}$. Taj je skup *neodređeni integral* funkcije F. Potom ćemo iz dobivenoga skupa funkcija izdvojiti onu koja za $x=0$ ima vrijednost $2\cdot e$.

Imamo redom:

$$I=\int 4\cdot\frac{\sin(2\cdot x)}{e^{\cos(2\cdot x)}}\cdot \mathrm{d}x=\int 4\cdot\sin(2\cdot x)\cdot e^{-\cos(2\cdot x)}\cdot \mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ t:=-\cos(2\cdot x),\\ \mathrm{d}t=(-\cos(2\cdot x))'\cdot \mathrm{d}x=2\cdot\sin(2\cdot x)\cdot \mathrm{d}x\\ 4\cdot\sin(2\cdot x)\cdot \mathrm{d}x=2\cdot \mathrm{d}t\end{array}\right\}=$$

$$=\int 2\cdot e^t\cdot \mathrm{d}t=2\cdot e^t=2\cdot e^{-\cos(2\cdot x)}+C, C\in\mathbb{R}\Rightarrow$$

$$\frac{2}{e}=2\cdot e^{-\cos(2\cdot 0)}+C\Leftrightarrow\frac{2}{e}=2\cdot e^{-1}+C\Leftrightarrow\frac{2}{e}=\frac{2}{e}+C\Leftrightarrow C=0\Rightarrow$$

$$F(x)=2\cdot e^{-\cos(2\cdot x)}=\frac{2}{e^{\cos(2\cdot x)}}.$$

22. Odredite $\displaystyle\int\frac{8}{t^3-4\cdot t}\cdot \mathrm{d}t$.

Rješenje: Podintegralnu funkciju najprije rastavimo na parcijalne razlomke. Dobivamo:

$$t^3-4\cdot t=t\cdot\left(t^2-4\right)=t\cdot(t-2)\cdot(t+2)\Rightarrow$$

$$\frac{8}{t^3-4\cdot t}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-2}+\frac{C}{t+2}\Rightarrow$$

$$8=A\cdot(t-2)\cdot(t+2)+B\cdot t\cdot(t+2)+C\cdot t\cdot(t-2)\Rightarrow$$

$$\begin{cases} t=-2 \Rightarrow 8\cdot C=8 \Leftrightarrow C=1, \\ t=0 \Rightarrow -4\cdot A=8 \Leftrightarrow A=-2, \Rightarrow (A,B,C)=(-2,1,1). \\ t=2 \Rightarrow 8\cdot B=8 \Leftrightarrow B=1 \end{cases}$$

Zbog toga je:

$$I=\int\left(\frac{-2}{t}+\frac{1}{t-2}+\frac{1}{t+2}\right)\cdot \mathrm{d}t=(-2)\cdot\int\frac{1}{t}\cdot \mathrm{d}t+\int\frac{1}{t-2}\cdot \mathrm{d}t+\int\frac{1}{t+2}\cdot \mathrm{d}t=$$

$$=(-2)\cdot\ln|t|+\ln|t-2|+\ln|t+2|=\ln\left|\frac{(t-2)\cdot(t+2)}{t^2}\right|=\ln\left|\frac{t^2-4}{t^2}\right|=\ln\left|1-\frac{4}{t^2}\right|+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

23. Odredite $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{8\cdot x-x^2}}$.

Rješenje: Imamo redom:

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-\left(x^2-8\cdot x\right)}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-\left(\left(\sqrt{1}\cdot x-\frac{8}{2\cdot\sqrt{1}}\right)^2-\left(\frac{8}{2\cdot\sqrt{1}}\right)^2\right)}}=$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-\left((x-4)^2-4^2\right)}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4^2-(x-4)^2}}=\arcsin\left(\frac{x-4}{4}\right)+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

24. Riješite Cauchyjevu zadaću: $\begin{cases} F'(t)=16\cdot t^3\cdot\ln t, \\ F(1)=-1. \end{cases}$

Rješenje: Postupimo analogno kao u zadatku 21. Imamo redom:

$$I=\int 16\cdot t^3\cdot\ln t\cdot \mathrm{d}t=\left|\begin{array}{ll} u=\ln t & v=\int 16\cdot t^3\cdot \mathrm{d}t=16\cdot\frac{1}{3+1}\cdot t^{3+1}=4\cdot t^4 \\ \mathrm{d}u=\frac{1}{t}\cdot \mathrm{d}t & \mathrm{d}v=16\cdot t^3\cdot \mathrm{d}t \end{array}\right|=$$

$$=4\cdot t^4\cdot\ln t-\int 4\cdot t^4\cdot\frac{1}{t}\cdot \mathrm{d}t=4\cdot t^4\cdot\ln t-\int 4\cdot t^3\cdot \mathrm{d}t=4\cdot t^4\cdot\ln t-4\cdot\frac{1}{3+1}\cdot t^{3+1}=$$

$$=4\cdot t^4\cdot\ln t-t^4=t^4\cdot(4\cdot\ln t-1)+C,\ C\in\mathbb{R}\Rightarrow$$

$$-1=1^4\cdot(4\cdot\ln 1-1)+C\Leftrightarrow -1=1\cdot(0-1)+C\Leftrightarrow C=0\Rightarrow$$

$$F(t)=t^4\cdot(4\cdot\ln t-1).$$

25. Odredite $\int 15\cdot \mathrm{sh}^5 x\cdot \mathrm{d}x$.

Rješenje: Koristeći osnovni hiperbolni identitet imamo redom:

$$I=\int 15\cdot \mathrm{sh}^4 x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \mathrm{d}x=\int 15\cdot\left(\mathrm{sh}^2 x\right)^2\cdot \mathrm{sh}\,x\cdot \mathrm{d}x=\int 15\cdot\left(\mathrm{ch}^2 x-1\right)^2\cdot \mathrm{sh}\,x\cdot \mathrm{d}x=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ t:=\mathrm{ch}\,x,\\ \mathrm{d}t=(\mathrm{ch}\,x)'\cdot \mathrm{d}x=\mathrm{sh}\,x\cdot \mathrm{d}x\end{array}\right\}=15\cdot\int\left(t^2-1\right)^2\cdot \mathrm{d}t=15\cdot\int\left(t^4-2\cdot t^2+1\right)\cdot \mathrm{d}t=$$

$$=15\cdot\left(\frac{1}{4+1}\cdot t^{4+1}-2\cdot\frac{1}{2+1}\cdot t^{2+1}+t\right)=3\cdot t^5-10\cdot t^3+15\cdot t=$$

$$=3\cdot \mathrm{ch}^5 x-10\cdot \mathrm{ch}^3 x+15\cdot \mathrm{ch}\,x+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

26. Odredite prosječnu vrijednost funkcije $f(x)=2\cdot\pi\cdot x\cdot\cos(4\cdot x)$ na segmentu $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

Rješenje: Tražena je vrijednost jednaka:

$$\overline{f}=\frac{1}{\frac{\pi}{4}-0}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\cdot\pi\cdot x\cdot\cos(4\cdot x)\cdot \mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\cdot 2\cdot\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\cdot\cos(4\cdot x)\cdot \mathrm{d}x=$$

$$=\left|\begin{array}{ll}u=x & v=\int\cos(4\cdot x)\cdot \mathrm{d}x=\frac{1}{4}\cdot\sin(4\cdot x)\\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x & dv=\cos(4\cdot x)\cdot \mathrm{d}x\end{array}\right|=$$

$$=8\cdot\left(\left(\frac{1}{4}\cdot x\cdot\sin(4\cdot x)\right)_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{4}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(4\cdot x)\cdot \mathrm{d}x\right)=$$

$$=8\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\left(\frac{\pi}{4}\cdot\underbrace{\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)}_{=\sin\pi=0}-0\cdot\sin(4\cdot 0)\right)-\left(\frac{-1}{4}\cdot\cos(4\cdot x)\right)_0^{\frac{\pi}{4}}\right)=$$

$$=2\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\left(\cos(4\cdot x)\right)_0^{\frac{\pi}{4}}\right)=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\underbrace{\cos\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)}_{=\cos\pi=-1}-\underbrace{\cos(4\cdot 0)}_{=\cos 0=1}\right)=\frac{1}{2}\cdot(-1-1)=-1.$$

27. Zadana je krivulja $y = x^2 - x - 6$. Neka su A i B redom sjecište te krivulje s negativnim dijelom osi apscisa, odnosno sjecište te krivulje s osi ordinata. S točnošću od 10^{-5} izračunajte duljinu luka $\widehat{AB}$.

Rješenje: Rješenja jednadžbe $x^2 - x - 6 = 0$ su $x_1 = -2,\ x_2 = 3$. Zbog toga je tražena duljina jednaka:

$$\left|\widehat{AB}\right| = \int_{-2}^{0} \sqrt{1 + \left(\left(x^2 - x - 6\right)'\right)^2} \cdot \mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} \sqrt{1 + (2 \cdot x - 1)^2} \cdot \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} \text{zamjena:} \\ t := 2 \cdot x - 1, \\ \mathrm{d}t = 2 \cdot \mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{d}t, \\ -2 \mapsto 2 \cdot (-2) - 1 = -5, \\ 0 \mapsto 2 \cdot 0 - 1 = -1 \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{-5}^{-1} \sqrt{1 + t^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \cdot \int_{-5}^{-1} \sqrt{1 + t^2} \cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{t}{2} \cdot \sqrt{1 + t^2} + \frac{1}{2} \cdot \ln\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right) \right)_{-5}^{-1} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\sqrt{1 + (-1)^2} + \ln\left(-1 + \sqrt{1 + (-1)^2}\right) - \left((-5) \cdot \sqrt{1 + (-5)^2} + \ln\left(-5 + \sqrt{1 + (-5)^2}\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(-\sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{2} - 1\right) + 5 \cdot \sqrt{26} - \ln\left(\sqrt{26} - 5\right)\right) \approx 6.37799 \text{ jed. duljine.}$$

28. Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y = \frac{4}{\pi} \cdot e^{2 \cdot x}$, $x = \ln 2$ i objema koordinatnim osima oko osi:

a) apscisa;
b) ordinata.

Rješenje: **a)** Traženi volumen možemo odrediti na dva načina (integriranjem po varijabli x i integriranjem po varijabli y). Mi ćemo odabrati integriranje po varijabli x. Imamo redom:

$$V_1 = \pi \cdot \int_0^{\ln 2} \left(\frac{4}{\pi} \cdot e^{2 \cdot x} \right)^2 \cdot \mathrm{d}x = \pi \cdot \int_0^{\ln 2} \frac{16}{\pi^2} \cdot e^{4 \cdot x} \cdot \mathrm{d}x = \pi \cdot \frac{16}{\pi^2} \cdot \int_0^{\ln 2} e^{4 \cdot x} \cdot \mathrm{d}x = \frac{16}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot e^{4 \cdot x} \right)_0^{\ln 2} =$$

$$= \frac{16}{\pi} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(e^{4 \cdot \ln 2} - e^{4 \cdot 0}\right) = \frac{4}{\pi} \cdot \left(e^{\ln\left(2^4\right)} - e^0\right) = \frac{4}{\pi} \cdot \left(2^4 - 0\right) = \frac{64}{\pi} \text{ kub. jed.}$$

b) Traženi volumen možemo odrediti na dva načina (integriranjem po varijabli x i integriranjem po varijabli y). Mi ćemo odabrati integriranje po varijabli x. Imamo redom:

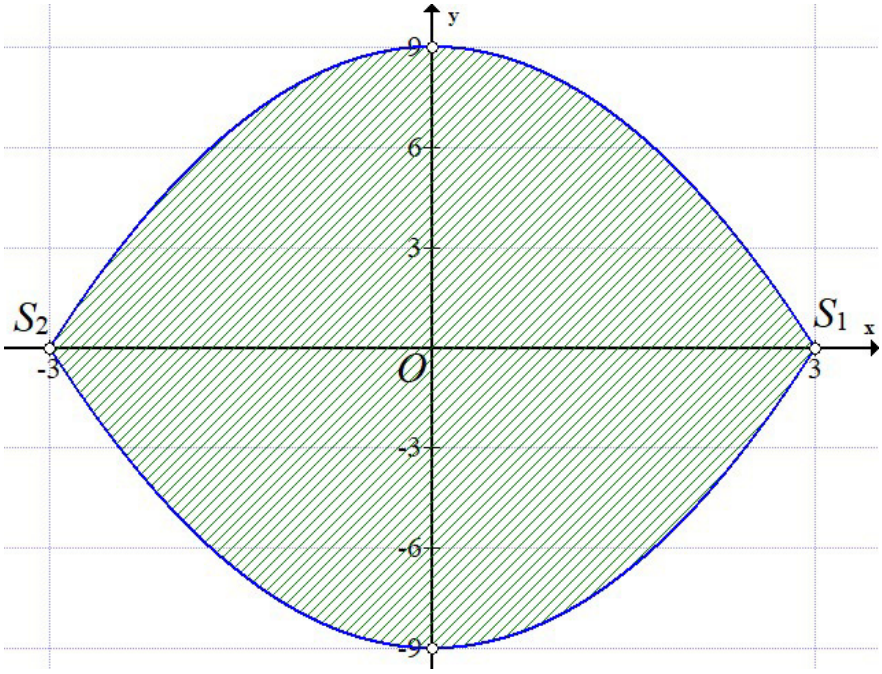
$$V_2 = 2\cdot\pi\cdot\int_0^{\ln 2}\frac{4}{\pi}\cdot x\cdot e^{2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x = 2\cdot\pi\cdot\frac{4}{\pi}\cdot\int_0^{\ln 2} x\cdot e^{2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u = x & v = \int e^{2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x} \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & \mathrm{d}v = e^{2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x \end{matrix}\right| =$$

$$= 8\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{2\cdot x}\right)_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2}\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x\right) = 8\cdot\frac{1}{2}\cdot\left((\ln 2)\cdot e^{2\cdot\ln 2} - 0\cdot e^{2\cdot 0} - \left(\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x}\right)_0^{\ln 2}\right) =$$

$$= 4\cdot\left((\ln 2)\cdot \underbrace{e^{\ln(2^2)}}_{=2^2=4} - 0 - \frac{1}{2}\cdot\left(e^{2\cdot\ln 2} - e^{2\cdot 0}\right)\right) = 4\cdot\left(4\cdot\ln 2 - 0 - \frac{1}{2}\cdot(4-1)\right) = 16\cdot\ln 2 - 6 \text{ kub. jed.}$$

29. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y = x^2 - 9$ i $y = 9 - x^2$.

Rješenje: Skicirajmo zadane krivulje u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Dobivamo sliku 10.



Slika 10.

Iz sustava $\begin{cases} y = x^2 - 9, \\ y = 9 - x^2 \end{cases}$ izjednačavanjem desnih strana jednadžbi dobivamo:

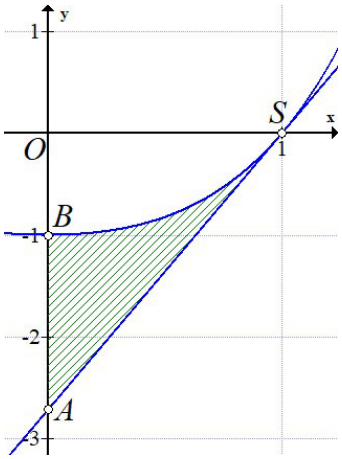
$$x^2 - 9 = 9 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + x^2 = 9 + 9 \Leftrightarrow 2\cdot x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = 3.$$

Dobiveni ravninski lik je očito osno simetričan s obzirom na obje koordinatne osi, pa je zbog toga tražena površina jednaka:

$$P = 4\cdot\int_0^3\left(9 - x^2\right)\cdot \mathrm{d}x = 4\cdot\left(\left(9\cdot x - \frac{1}{3}\cdot x^3\right)_0^3\right) = 4\cdot\left(27 - \frac{1}{3}\cdot 27 - 0 + 0\right) = 4\cdot 18 = 72 \text{ kv. jed.}$$

30. U sjecištu krivulje $K \ldots y=(x-1)\cdot e^x$ s osi apscisa povučena je tangenta t na krivulju. Izračunajte površinu ravninskoga lika kojega zatvaraju K, t i os **ordinata**.

Rješenje: Skicirajmo krivulju K i njezinu tangentu povučenu u sjecištu krivulje K s osi apscisa. Dobivamo sliku 11.



Slika 11.

Budući da je $e^x>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, apscisu sjecišta krivulje K s osi apscisa dobivamo iz jednadžbe $x-1=0$. Odatle je $x=1$. Dakle, $S=(1,0)$.

Napišimo eksplicitnu jednadžbu tangente t na krivulju K u točki S. Koristeći pravilo za deriviranje umnoška dviju funkcija imamo redom:

$$y-0=\left(\left((x-1)\cdot e^x\right)'\right)_{x=1}\cdot(x-1)\Leftrightarrow y=\left(1\cdot e^x+(x-1)\cdot e^x\right)_{x=1}\cdot(x-1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y=\left(x\cdot e^x\right)_{x=1}\cdot(x-1)\Leftrightarrow y=1\cdot e^1\cdot(x-1)\Leftrightarrow y=e\cdot x-e.$$

Tako zaključujemo da je tražena površina jednaka:

$$P=\int_0^1\left((x-1)\cdot e^x-(e\cdot x-e)\right)\cdot\mathrm{d}x=e\cdot\int_0^1\left((x-1)\cdot e^{x-1}-(x-1)\right)\cdot\mathrm{d}x=$$
$$=e\cdot\int_0^1\left((x-1)\cdot\left(e^{x-1}-1\right)\right)\cdot\mathrm{d}x=\begin{vmatrix} u=x-1 & v=\int\left(e^{x-1}-1\right)\cdot\mathrm{d}x=e^{x-1}-x \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x & \mathrm{d}v=\left(e^{x-1}-1\right)\cdot\mathrm{d}x\end{vmatrix}=$$
$$=e\cdot\left(\left((x-1)\cdot\left(e^{x-1}-x\right)\right)_0^1-\int_0^1\left(e^{x-1}-x\right)\cdot\mathrm{d}x\right)=$$
$$=e\cdot\left(0-(-1)\cdot\left(e^{0-1}-0\right)-\left(e^{x-1}-\frac{1}{2}\cdot x^2\right)_0^1\right)=e\cdot\left(e^{-1}-\left(1-\frac{1}{2}-e^{-1}+0\right)\right)=$$
$$=2-\frac{1}{2}\cdot e\ \text{kv. jed.}$$

2. POGLAVLJE:

NIZOVI I REDOVI

1. Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom krivulje $y=\dfrac{1}{x+1}$ iznad intervala $[0,+\infty\rangle$ oko osi **apscisa**.

Rješenje: Koristeći formulu za računanje volumena rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom ravninskoga lika oko osi apscisa i definiciju nepravoga integrala kojemu interval integracije nije omeđen odozgo dobivamo:

$$V=\pi\cdot\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right)^2\cdot\mathrm{d}x=\pi\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\int_0^b\frac{1}{(x+1)^2}\cdot\mathrm{d}x\right)=\pi\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\int_0^b(x+1)^{-2}\cdot\mathrm{d}x\right)=$$

$$=\pi\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{-2+1}\cdot(x+1)^{-2+1}\right)\Bigg|_0^b\right)=(-\pi)\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{x+1}\right)\Bigg|_0^b\right)=(-\pi)\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b+1}-\frac{1}{0+1}\right)=$$

$$=(-\pi)\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\underbrace{b+1}_{\to+\infty}}-1\right)=(-\pi)\cdot(0-1)=\pi\ \text{kub. jed.}$$

2. Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom krivulje $y=\dfrac{1}{(x-1)^3}$ iznad intervala $[2,+\infty\rangle$ oko osi **ordinata**.

Rješenje: Koristeći formulu za računanje volumena rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom ravninskoga lika oko osi ordinata dobivamo:

$$V=2\cdot\pi\cdot\int_2^{+\infty}x\cdot\frac{1}{(x-1)^3}\cdot\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ t:=x-1,\\ x=t+1,\\ \mathrm{d}t=(x-1)'\cdot\mathrm{d}x=(1-0)\cdot\mathrm{d}x=\mathrm{d}x,\\ 2\mapsto 2-1=1,\\ +\infty\mapsto\lim\limits_{b\to+\infty}(b-1)=+\infty\end{array}\right\}=2\cdot\pi\cdot\int_1^{+\infty}\frac{t+1}{t^3}\cdot\mathrm{d}t=$$

$$=2\cdot\pi\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\int_1^b\frac{t+1}{t^3}\cdot\mathrm{d}t\right)=2\cdot\pi\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\int_1^b\left(\frac{t}{t^3}+\frac{1}{t^3}\right)\cdot\mathrm{d}t\right)=2\cdot\pi\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\int_1^b\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}\right)\cdot\mathrm{d}t\right)=$$

$$=2\cdot\pi\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\int_1^b\left(t^{-2}+t^{-3}\right)\cdot\mathrm{d}t\right)=2\cdot\pi\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{-2+1}\cdot t^{-2+1}+\frac{1}{-3+1}\cdot t^{-3+1}\right)\Bigg|_1^b\right)=$$

$$=2\cdot\pi\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\left(-\frac{1}{t}-\frac{1}{2\cdot t^2}\right)\Bigg|_1^b\right)=2\cdot\pi\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{\underbrace{b}_{\to+\infty}}-\frac{1}{\underbrace{2\cdot b^2}_{\to+\infty}}-\left(-\frac{1}{1}-\frac{1}{2\cdot 1^2}\right)\right)=$$

$$=2\cdot\pi\cdot\left(0-0+1+\frac{1}{2}\right)=2\cdot\pi\cdot\frac{3}{2}=3\cdot\pi\ \text{kub. jed.}$$

3. Izračunajte nepravi integral $I=\int\limits_{-\infty}^{0} 4\cdot t\cdot e^{2\cdot t}\cdot \mathrm{d}t$.

Rješenje: Koristeći definiciju nepravoga integrala kojemu je interval integracije nije omeđen odozdo dobivamo:

$$I=\lim_{a\to-\infty}\left(\int\limits_{a}^{0} 4\cdot t\cdot e^{2\cdot t}\cdot \mathrm{d}t\right)=\left|\begin{matrix} u=4\cdot t & v=\int e^{2\cdot t}\cdot \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot t} \\ \mathrm{d}u=(4\cdot t)'\cdot \mathrm{d}t=4\cdot \mathrm{d}t & \mathrm{d}v=e^{2\cdot t}\cdot \mathrm{d}t \end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left(\left(4\cdot t\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot t}\right)\Big|_{a}^{0}-\int\limits_{a}^{0} 4\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot t}\right)=\lim_{a\to-\infty}\left(\left(2\cdot t\cdot e^{2\cdot t}\right)\Big|_{a}^{0}-\int\limits_{a}^{0} 2\cdot e^{2\cdot t}\right)=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left(\left(2\cdot t\cdot e^{2\cdot t}\right)\Big|_{a}^{0}-\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot t}\right)\Big|_{a}^{0}\right)=\lim_{a\to-\infty}\left(\left(2\cdot t\cdot e^{2\cdot t}-e^{2\cdot t}\right)\Big|_{a}^{0}\right)=\lim_{a\to-\infty}\left(\left((2\cdot t-1)\cdot e^{2\cdot t}\right)\Big|_{a}^{0}\right)=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left(\left(\frac{2\cdot t-1}{e^{-2\cdot t}}\right)\Big|_{a}^{0}\right)=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{2\cdot 0-1}{e^{-2\cdot 0}}-\frac{2\cdot a-1}{e^{-2\cdot a}}\right)=\lim_{a\to-\infty}\left(-1-\frac{2\cdot a-1}{e^{-2\cdot a}}\right)=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}(-1)-\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{2\cdot a-1}{e^{-2\cdot a}}\right)=-1-\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{(2\cdot a-1)'}{\left(e^{-2\cdot a}\right)'}\right)=-1-\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{2-0}{e^{-2\cdot a}\cdot(-2\cdot a)'}\right)=$$

$$=-1-\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{2}{e^{-2\cdot a}\cdot(-2)}\right)=-1+\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{e^{-2\cdot a}}\right)=-1+\lim_{a\to-\infty}\left(e^{\overbrace{2\cdot a}^{\to-\infty}}\right)=-1+0=-1.$$

4. Izračunajte nepravi integral $I=\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{2}{x^2+2\cdot x+2}\cdot \mathrm{d}x.$

Rješenje: Analogno kao u prethodnom zadatku dobivamo:

$$I=\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{2}{\left(x+\frac{2}{1\cdot 2}\right)^2-\left(\frac{2}{1\cdot 2}\right)^2+2}\cdot \mathrm{d}x=\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{2}{(x+1)^2+1}\cdot \mathrm{d}x=\left\{\begin{matrix} \text{zamjena:} \\ t:=x+1, \\ \mathrm{d}t=(x+1)'\cdot \mathrm{d}x=(1+0)\cdot \mathrm{d}x=\mathrm{d}x, \\ -\infty\mapsto \lim\limits_{a\to-\infty}(a+1)=-\infty, \\ -1\mapsto -1+1=0 \end{matrix}\right\}=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{2}{t^2+1}\cdot \mathrm{d}t=2\cdot\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{1}{t^2+1}\cdot \mathrm{d}t=2\cdot\lim_{a\to-\infty}\left(\int\limits_{a}^{0}\frac{1}{t^2+1}\cdot \mathrm{d}t\right)=2\cdot\lim_{a\to-\infty}\left((\operatorname{arctg} t)\Big|_{a}^{0}\right)=$$

$$=2\cdot\lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg} 0-\underbrace{\operatorname{arctg} a}_{\to\left(\frac{-\pi}{2}\right)}\right)=2\cdot\left(0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi.$$

5. Izračunajte nepravi integral $I=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln 2}{x\cdot\ln^2 x}\cdot\mathrm{d}x.$

Rješenje: Uočimo da podintegralna funkcija nije definirana za $x=0$, tj. u donjoj granici intervala integracije. Korištenjem definicije nepravoga integrala kojemu podintegralna funkcija nije definirana u donjoj granici intervala integracije slijedi:

$$I=\lim_{a\to 0+}\left(\int\limits_a^{\frac{1}{2}}\frac{\ln 2}{x\cdot\ln^2 x}\cdot\mathrm{d}x\right)=\left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ t:=\ln x,\\ \mathrm{d}t=(\ln x)'\cdot\mathrm{d}x=\frac{1}{x}\cdot\mathrm{d}x,\\ a\mapsto\ln a,\\ \frac{1}{2}\to\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 1-\ln 2=0-\ln 2=-\ln 2\end{array}\right\}=\lim_{a\to 0+}\left(\int\limits_{\ln a}^{-\ln 2}\frac{\ln 2}{t^2}\cdot\mathrm{d}t\right)=$$

$$=(\ln 2)\cdot\lim_{a\to 0+}\left(\int\limits_{\ln a}^{-\ln 2}t^{-2}\cdot\mathrm{d}t\right)=(\ln 2)\cdot\lim_{a\to 0+}\left(\left(\frac{1}{-2+1}\cdot t^{-2+1}\right)\Bigg|_{\ln a}^{-\ln 2}\right)=(\ln 2)\cdot\lim_{a\to 0+}\left(\left(\frac{-1}{t}\right)\Bigg|_{\ln a}^{-\ln 2}\right)=$$

$$=(\ln 2)\cdot\lim_{a\to 0+}\left(\frac{-1}{-\ln 2}+\frac{1}{\underbrace{\ln a}_{\to-\infty}}\right)=(\ln 2)\cdot\left(\frac{1}{\ln 2}+0\right)=\ln 2\cdot\frac{1}{\ln 2}=1.$$

6. Izračunajte nepravi integral $I=\int\limits_0^2\sqrt{\frac{2}{2-x}}\cdot\mathrm{d}x.$

Rješenje: Uočimo da podintegralna funkcija nije definirana za $x=2$, tj. u gornjoj granici segmenta integracije. Korištenjem definicije nepravoga integrala kojemu podintegralna funkcija nije definirana u gornjoj granici intervala integracije slijedi:

$$I=\lim_{b\to 2-}\left(\int\limits_0^b\sqrt{\frac{2}{2-x}}\cdot\mathrm{d}x\right)=\lim_{b\to 2-}\left(\int\limits_0^b\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x}}\cdot\mathrm{d}x\right)=\sqrt{2}\cdot\lim_{b\to 2-}\left(\int\limits_0^b\frac{1}{\sqrt{2-x}}\cdot\mathrm{d}x\right)=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ t:=2-x,\\ \mathrm{d}t=(2-x)'\cdot\mathrm{d}x=(0-1)\cdot\mathrm{d}x=-\mathrm{d}x\Leftrightarrow\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t,\\ 0\mapsto 2-0=2,\\ b\mapsto 2-b\end{array}\right\}=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\lim_{b\to 2-}\left(\int\limits_2^{2-b}\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot(-\mathrm{d}t)\right)=\sqrt{2}\cdot\lim_{b\to 2-}\left(\int\limits_{2-b}^{2}\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\mathrm{d}t\right)=\sqrt{2}\cdot\lim_{b\to 2-}\left(\int\limits_{2-b}^{2}t^{\frac{-1}{2}}\cdot\mathrm{d}t\right)=$$

$$= \sqrt{2}\cdot\lim_{b\to 2-}\left(\left(\frac{1}{\frac{-1}{2}+1}\cdot t^{\frac{-1}{2}+1}\right)\Bigg|_{2-b}^{2}\right) = \sqrt{2}\cdot\lim_{b\to 2-}\left(\left(2\cdot t^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_{2-b}^{2}\right) = \sqrt{2}\cdot\lim_{b\to 2-}\left(\left(2\cdot\sqrt{t}\right)\Big|_{2-b}^{2}\right) =$$

$$= 2\cdot\sqrt{2}\cdot\lim_{b\to 2-}\left(\left(\sqrt{t}\right)\Big|_{2-b}^{2}\right) = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\lim_{b\to 2-}\left(\sqrt{2}-\sqrt{\underbrace{2-b}_{\to 2-2=0}}\right) = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{2}-0\right) = 2\cdot 2 = 4.$$

7. Riješite rekurziju:

$$\begin{cases} a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\cdot a_{n-1}, \text{ za svaki } n\in\mathbb{N},\ n\geq 2, \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

Rješenje: Uočimo da za svaki $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$, vrijedi identitet:

$$1+\frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}.$$

Primjenom metode teleskopiranja dobivamo:

$$\left.\begin{aligned} &a_1 = 1, \\ &a_2 = \frac{2+1}{2}\cdot a_1 = \frac{3}{2}\cdot a_1, \\ &a_3 = \frac{3+1}{3}\cdot a_2 = \frac{4}{3}\cdot a_2, \\ &a_4 = \frac{4+1}{4}\cdot a_3 = \frac{5}{4}\cdot a_3, \\ &\vdots \\ &a_n = \frac{n+1}{n}\cdot a_{n-1} \end{aligned}\right\}.$$

$$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdot\ldots\cdot a_n = \left(a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdot\ldots\cdot a_{n-1}\right)\cdot\left(1\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}\right),$$

$$a_n = \frac{n+1}{2} = \frac{1}{2}\cdot n+\frac{1}{2}.$$

8. Riješite rekurziju:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2\cdot n, \text{ za svaki } n\in\mathbb{N},\ n\geq 2, \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

Rješenje: Koristit ćemo formulu za zbroj prvih n članova aritmetičkoga niza $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$S_n = \frac{n}{2}\cdot(b_1 + b_n),\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Primjenom metode teleskopiranja dobivamo:

$$\left.\begin{aligned} &a_1 = 1, \\ &a_2 = a_1 + 2\cdot 2, \\ &a_3 = a_2 + 2\cdot 3, \\ &\vdots \\ &a_n = a_{n-1} + 2\cdot n \end{aligned}\right\} +$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) + (1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + 2\cdot n),$$

$$a_n = 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + 2\cdot n = 2\cdot(1 + 2 + 3 + \ldots + n) - 1 = 2\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} - 1 = n^2 + n - 1.$$

9. Riješite rekurziju:

$$\begin{cases} a_n = 9\cdot a_{n-1} - 8\cdot a_{n-2}, \text{ za svaki } n\in\mathbb{N},\ n\geq 3, \\ a_1 = 11,\ a_2 = 67. \end{cases}$$

Rješenje: Pripadna karakteristična jednadžba glasi:

$$k^2 = 9\cdot k - 8 \Leftrightarrow k^2 - 9\cdot k + 8 = 0.$$

Njezina su rješenja $k_1 = 1,\ k_2 = 8$. Zbog toga je opće rješenje rekurzije:

$$a_n = B\cdot 1^n + A\cdot 8^n = A\cdot 8^n + B,\ A, B\in\mathbb{R}.$$

Nepoznate konstante $A, B\in\mathbb{R}$ odredimo iz početnih uvjeta:

$$\begin{cases} 11 = a_1 = A\cdot 8^1 + B, \\ 67 = a_2 = A\cdot 8^2 + B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\cdot A + B = 11, \\ 64\cdot A + B = 67 \end{cases} \Leftrightarrow (A, B) = (1, 3).$$

Dakle, rješenje zadatka je niz:

$$a_n = 8^n + 3.$$

10. Riješite rekurziju:

$$\begin{cases} a_n = 10 \cdot a_{n-1} - 25 \cdot a_{n-2}, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N},\ n \geq 3, \\ a_1 = 25,\ a_2 = 200. \end{cases}$$

Rješenje: Pripadna karakteristična jednadžba glasi:

$$k^2 = 10 \cdot k - 25 \Leftrightarrow k^2 - 10 \cdot k + 25 = 0.$$

Ona ima jedinstveno rješenje $k = 5$. Zbog toga je opće rješenje rekurzije:

$$a_n = (A \cdot n + B) \cdot 5^n,\ A, B \in \mathbb{R}.$$

Nepoznate konstante $A, B \in \mathbb{R}$ odredimo iz početnih uvjeta:

$$\begin{cases} 25 = a_1 = (A \cdot 1 + B) \cdot 5^1, \\ 200 = a_2 = (A \cdot 2 + B) \cdot 5^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 5, \\ 2 \cdot A + B = 8 \end{cases} \Leftrightarrow (A, B) = (3, 2).$$

Dakle, rješenje zadatka je niz:

$$a_n = (3 \cdot n + 2) \cdot 5^n.$$

11. Dokažite da je red $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2+1\right)^{3 \cdot n}}{\left(2 \cdot n^3+1\right)^{2 \cdot n}}$ konvergentan. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Primijenit ćemo Cauchyjev kriterij. Budući da su i brojnik i nazivnik općega člana reda prirodni brojevi, ne koristimo apsolutne vrijednosti. Tako imamo redom:

$$r = \lim_n \left(\sqrt[n]{\frac{\left(n^2+1\right)^{3 \cdot n}}{\left(2 \cdot n^3+1\right)^{2 \cdot n}}} \right) = \lim_n \left(\frac{\sqrt[n]{\left(n^2+1\right)^{3 \cdot n}}}{\sqrt[n]{\left(2 \cdot n^3+1\right)^{2 \cdot n}}} \right) = \lim_n \left(\frac{\left(n^2+1\right)^3}{\left(2 \cdot n^3+1\right)^2} \right) =$$

$$= \lim_n \left(\frac{n^6 + 3 \cdot n^4 + 3 \cdot n^2 + 1}{4 \cdot n^6 + 4 \cdot n^3 + 1} \right) = \lim_n \left(\frac{1 + 3 \cdot \frac{1}{n^2} + 3 \cdot \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6}}{4 + 4 \cdot \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^6}} \right) = \frac{1 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0}{4 + 4 \cdot 0 + 0} = \frac{1}{4} < 1.$$

Odatle zaključujemo da je zadani red konvergentan, što smo i trebali dokazati.

12. Dokažite da je red $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+n+1}{5^n}$ konvergentan. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Primijenit ćemo D'Alembertov kriterij. Budući da su brojnik i nazivnik općega člana reda prirodni brojevi, pri računanju granične vrijednosti ne koristimo apsolutnu vrijednost. Tako imamo redom:

$$a_n=\frac{n^2+n+1}{5^n}\Rightarrow a_{n+1}=\frac{(n+1)^2+(n+1)+1}{5^{n+1}}=\frac{n^2+2\cdot n+1+n+1+1}{5^{n+1}}=\frac{n^2+3\cdot n+3}{5^{n+1}}\Rightarrow$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{n^2+3\cdot n+3}{5^{n+1}}}{\frac{n^2+n+1}{5^n}}=\frac{n^2+3\cdot n+3}{5\cdot\left(n^2+n+1\right)}\Rightarrow$$

$$r=\lim_n\left(\frac{n^2+3\cdot n+3}{5\cdot\left(n^2+n+1\right)}\right)=\lim_n\left(\frac{1+3\cdot\frac{1}{n}+3\cdot\frac{1}{n^2}}{5\cdot\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\right)=\frac{1+3\cdot 0+3\cdot 0}{5\cdot(1+0+0)}=\frac{1}{5}<1.$$

Odatle zaključujemo da zadani red konvergira, što smo i tvrdili.

13. Dokažite da je red $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot(2\cdot n+1)}$ konvergentan. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Primijenit ćemo Raabeov kriterij. Budući da su i brojnik i nazivnik općega člana reda prirodni brojevi, ne koristimo apsolutnu vrijednost. Imamo redom:

$$a_n=\frac{1}{n\cdot(2\cdot n+1)}\Rightarrow a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)\cdot(2\cdot(n+1)+1)}=\frac{1}{(n+1)\cdot(2\cdot n+3)}\Rightarrow$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)\cdot(2\cdot n+3)}}{\frac{1}{n\cdot(2\cdot n+1)}}=\frac{n\cdot(2\cdot n+1)}{(n+1)\cdot(2\cdot n+3)}=\frac{2\cdot n^2+n}{2\cdot n^2+5\cdot n+3}\Rightarrow$$

$$r=\lim_n\left(n\cdot\left(1-\frac{2\cdot n^2+n}{2\cdot n^2+5\cdot n+3}\right)\right)=\lim_n\left(n\cdot\left(\frac{2\cdot n^2+5\cdot n+3-\left(2\cdot n^2+n\right)}{2\cdot n^2+5\cdot n+3}\right)\right)=$$

$$=\lim_n\left(n\cdot\left(\frac{4\cdot n+3}{2\cdot n^2+5\cdot n+3}\right)\right)=\lim_n\left(\frac{4\cdot n^2+3\cdot n}{2\cdot n^2+5\cdot n+3}\right)=\lim_n\left(\frac{4+3\cdot\frac{1}{n}}{2+5\cdot\frac{1}{n}+3\cdot\frac{1}{n^2}}\right)=$$

$$=\frac{4+3\cdot 0}{2+5\cdot 0+3\cdot 0}=\frac{4}{2}=2>1.$$

Odatle zaključujemo da zadani red konvergira, što smo i tvrdili.

14. Dokažite da je red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+1}$ konvergentan. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Uočimo da se predznaci članova reda pravilno izmjenjuju: +, -, +, -, ..., što znači da je zadani red alternirajući. Zbog toga primjenjujemo Leibnizov kriterij.

Označimo $b_n := \frac{1}{n^2+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Niz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je strogo padajući niz pozitivnih racionalnih brojeva (jer je funkcija $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, f(n)=n^2+1$ strogo rastuća) i ima graničnu vrijednost $L=0$. Dakle, polazni red je konvergentan, što smo i tvrdili.

15. Dokažite da je red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n^2}$ divergentan. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Primijenimo Cauchyjev kriterij, pri čemu koristimo jednakost $\lim_n \left(\sqrt[n]{n}\right)=1$. Uočimo da su e^n, $n^2>0, \forall n\in\mathbb{N}$, pa ne moramo koristiti apsolutne vrijednosti. Imamo redom:

$$r=\lim_n\left(\sqrt[n]{\frac{e^n}{n^2}}\right)=\lim_n\left(\frac{\sqrt[n]{e^n}}{\sqrt[n]{n^2}}\right)=\lim_n\left(\frac{e}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}\right)=\frac{e}{1^2}=e>1.$$

Prema Cauchyjevu kriteriju, zadani red je divergentan, što smo i tvrdili.

16. Odredite područje konvergencije reda $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^{n-1}}$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Primijenimo Cauchyjev kriterij. Budući da *ne znamo* predznak izraza $x+1$, moramo koristiti apsolutnu vrijednost. Imamo redom:

$$r=\lim_n\left(\sqrt[n]{\left|\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^{n-1}}\right|}\right)=\lim_n\left(\frac{\sqrt[n]{|x+1|^n}}{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{2^{n-1}}}\right)=\lim_n\frac{|x+1|}{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}\cdot\underbrace{2^{1-\overbrace{\frac{1}{n}}^{\to 0}}}_{\to 2^{1-0}=2}}=\frac{|x+1|}{1\cdot 2}=\frac{|x+1|}{2}.$$

Zadani red će (sigurno) konvergirati ako vrijedi $r<1$. Zbog toga riješimo nejednadžbu $r<1$ po nepoznanici x koristeći $(|x|<a)\Leftrightarrow(-a<x<a)$, $\forall a>0$:

$$\frac{|x+1|}{2}<1\Leftrightarrow|x+1|<2\Leftrightarrow -2<x+1<2\Leftrightarrow -2-1<x<2-1\Leftrightarrow -3<x<1\Leftrightarrow x\in\langle -3,1\rangle.$$

Preostaje provjeriti konvergenciju reda u slučajevima kad je $r=1$, odnosno $x\in\{-3,1\}$. Za $x=-3$ dobivamo red:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-3+1)^n}{n\cdot 2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2}{n}=2\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$

Red $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ je alternirajući red, pa za ispitivanje njegove konvergencije možemo primijeniti Leibnizov kriterij. Niz $b_n=\frac{1}{n}$ je strogo padajući niz pozitivnih racionalnih brojeva i ima graničnu vrijednost jednaku 0. Zbog toga red $2\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ konvergira.

Za $x=1$ dobivamo red:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1+1)^n}{n\cdot 2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n\cdot 2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n}=2\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}.$$

Red $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ je harmonijski red i on je divergentan. Zbog toga red $2\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ divergira.

Dakle, traženi interval konvergencije je $[-3,1\rangle$.

17. Odredite područje konvergencije reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2021)^{2\cdot n}}{\sqrt{n}}$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Primijenimo Cauchyjev kriterij. Primijetimo da je $\frac{(x-2021)^{2\cdot n}}{\sqrt{n}} \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, pa ne koristimo apsolutnu vrijednost. Koristimo i jednakost $\lim_n \left(\sqrt[n]{n}\right) = 1$. Imamo redom:

$$r = \lim_n \left(\sqrt[n]{\frac{(x-2021)^{2\cdot n}}{\sqrt{n}}} \right) = \lim_n \left(\frac{\sqrt[n]{(x-2021)^{2\cdot n}}}{\sqrt[n]{\sqrt{n}}} \right) = \lim_n \left(\frac{(x-2021)^2}{\sqrt{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}}} \right) = (x-2021)^2.$$

Prema Cauchyjevu kriteriju, zadani red konvergira ako je $r < 1$. Odatle je $(x-2021)^2 < 1$. Odatle slijedi $|x-2021| < 1$, odnosno $-1 < x-2021 < 1$, odnosno $2020 < x < 2022$, pa zaključujemo da je $x \in \langle 2020, 2022 \rangle$.

Preostaje ispitati konvergenciju zadanoga reda za $x = 2020$ i za $x = 2022$. Očito je:

$$(2020-2021)^{2\cdot n} = (-1)^{2\cdot n} = \left((-1)^2\right)^n = 1^n = 1,$$
$$(2022-2021)^{2\cdot n} = 1^{2\cdot n} = 1,$$

pa u oba slučaja dobijemo red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$. Riječ je o Dirichletovu redu za $p = \frac{1}{2}$. Taj red divergira.

Tako zaključujemo da je područje konvergencije zadanoga reda interval $\langle 2020, 2022 \rangle$.

18. Odredite područje konvergencije reda $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)!}$.

Rješenje: Primijenit ćemo D'Alembertov kriterij. Budući da *ne znamo* predznak izraza $x-1$, moramo koristiti apsolutnu vrijednost. Imamo redom:

$$a_n = \frac{(x-1)^n}{(n+1)!} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{(x-1)^{n+1}}{((n+1)+1)!} = \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+2)!} \Rightarrow$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+2)!}}{\frac{(x-1)^n}{(n+1)!}} = \frac{\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+2)\cdot(n+1)!}}{\frac{(x-1)^n}{(n+1)!}} = \frac{x-1}{n+2} \Rightarrow$$

$$r = \lim_n \left|\frac{x-1}{n+2}\right| = \lim_n \left(\frac{|x-1|}{n+2}\right) = 0.$$

Posljednja granična vrijednost je jednaka nuli jer za varijablu (prema kojoj tražimo graničnu vrijednost) smatramo n, dok x u tom istom izrazu smatramo konstantom. Dakle, vrijednost r jednaka je 0 *za svaki* $x \in \mathbb{R}$, pa zaključujemo da zadani red konvergira za svaki $x \in \mathbb{R}$. Prema tome, traženo je područje konvergencije skup $\mathbb{R}$.

19. Odredite područje konvergencije reda $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{2\cdot n\cdot x}}{n^2+2021}$.

Rješenje: Primijenit ćemo D'Alembertov kriterij. Očito su $e^{2\cdot n\cdot x}$, $n^2+2021>0$ za svaki $x\in\mathbb{R}$ i svaki $n\in\mathbb{N}_0$, pa ne koristimo apsolutnu vrijednost. Imamo redom:

$$a_n=\frac{e^{2\cdot n\cdot x}}{n^2+2021}\Rightarrow a_{n+1}=\frac{e^{2\cdot(n+1)\cdot x}}{(n+1)^2+2021}=\frac{e^{2\cdot n\cdot x+2\cdot x}}{n^2+2\cdot n+1+2021}=\frac{e^{2\cdot n\cdot x+2\cdot x}}{n^2+2\cdot n+2022}\Rightarrow$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{e^{2\cdot n\cdot x+2\cdot x}}{n^2+2\cdot n+2022}}{\dfrac{e^{2\cdot n\cdot x}}{n^2+2021}}=\frac{n^2+2021}{n^2+2\cdot n+2022}\cdot e^{2\cdot x}=\frac{1+2021\cdot\dfrac{1}{n^2}}{1+2\cdot\dfrac{1}{n}+2022\cdot\dfrac{1}{n^2}}\cdot e^{2\cdot x}\Rightarrow$$

$$r=\lim_n\left(\frac{1+2021\cdot\dfrac{1}{n^2}}{1+2\cdot\dfrac{1}{n}+2022\cdot\dfrac{1}{n^2}}\cdot e^{2\cdot x}\right)=\frac{1+0}{1+0+0}\cdot e^{2\cdot x}=e^{2\cdot x}.$$

Zadani red (sigurno) konvergira ako je $e^{2\cdot x}<1$. Odatle prirodnim logaritmiranjem obiju strana nejednakosti slijedi $2\cdot x<0$, odnosno $x<0$.

Preostaje ispitati konvergenciju reda za $x=0$. U tom slučaju dobivamo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{2\cdot n\cdot 0}}{n^2+2021}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2+2021}=\frac{1}{0^2+2021}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+2021}=\frac{1}{2021}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+2021}.$$

Odatle zaključujemo da dobiveni red konvergira ako i samo ako konvergira red $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+2021}$. No, konvergencija reda $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+2021}$ slijedi izravno iz rezultata zadatka 12. s vježbi (za $p=2$ i $\alpha=2021$.) Prema tome, polazni red konvergira i za $x=0$.

Tako zaključujemo da je traženo područje konvergencije interval $\langle-\infty,0]$.

20. Odredite područje konvergencije reda $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(1-x^2\right)^n}{2\cdot n^3}$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Primijenit ćemo Cauchyjev kriterij. Budući da ne znamo predznak izraza $1-x$, moramo koristiti apsolutnu vrijednost. Imamo redom:

$$r=\lim_n\left(\sqrt[n]{\left|\frac{\left(1-x^2\right)^n}{2\cdot n^3}\right|}\right)=\lim_n\left(\frac{\sqrt[n]{\left|1-x^2\right|^n}}{\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n^3}}\right)=\lim_n\left(\frac{\left|1-x^2\right|}{\underbrace{2^{\frac{1}{n}}}_{\to 2^0=1}\cdot\left(\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}\right)^3}\right)=\frac{\left|1-x^2\right|}{1\cdot 1^3}=\left|1-x^2\right|=\left|x^2-1\right|.$$

Zadani red će (sigurno) konvergirati bude li $r<1$. Tako dobivamo nejednadžbu $\left|x^2-1\right|<1$ koja je ekvivalentna nejednadžbi $-1<x^2-1<1$, odnosno nejednadžbi $0<x^2<2$. Odatle uzimanjem drugoga korijena slijedi $0<|x|<\sqrt{2}$. Ta je nejednadžba ekvivalentna sustavu $\begin{cases}-\sqrt{2}<x<\sqrt{2},\\ x\neq 0\end{cases}$ čije je rješenje skup $\left\langle-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\rangle\setminus\{0\}$.

Preostaje ispitati konvergenciju polaznoga reda za $x\in\left\{-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\right\}$.

Za $x\in\left\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\}$ dobivamo red $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-2)^n}{2\cdot n^3}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2\cdot n^3}$. Označimo li $a_n=\frac{1}{2\cdot n^3}$, onda lagano vidimo da je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strogo padajući niz strogo pozitivnih racionalnih brojeva čija je granična vrijednost $L=\lim_n\left(\frac{1}{2\cdot n^3}\right)=0$. Primjenom Leibnizova kriterija zaključujemo da polazni red konvergira za $x\in\left\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\}$.

Za $x=0$ dobivamo red $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-0)^n}{2\cdot n^3}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1^n}{2\cdot n^3}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2\cdot n^3}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$. Red $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$ je Dirichletov red za $p=3$, pa taj red konvergira. Zbog toga je i red $\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$ konvergentan, što znači da zadani red konvergira i za $x=0$.

Tako zaključujemo da je traženo područje konvergencije segment $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$.

21. Funkciju $f(x)=6\cdot x\cdot \ln x$ aproksimiramo Taylorovim polinomom T_3 stupnja 3 oko točke $c=1$. Izračunajte $T_3(1.1)$.

Rješenje: Odredimo vrijednosti zadane funkcije i prvih triju njezinih derivacija u točki c. Imamo redom:

$$f(x)=6\cdot x\cdot \ln x, \qquad f(1)=6\cdot 1\cdot \ln 1=6\cdot 1\cdot 0=0,$$
$$f'(x)=6\cdot \ln x+6\cdot x\cdot \frac{1}{x}=6\cdot \ln x+6 \qquad f'(1)=6\cdot \ln 1+6=6\cdot 0+6=6,$$
$$f''(x)=6\cdot \frac{1}{x}=6\cdot x^{-1}, \qquad f''(1)=6\cdot 1^{-1}=6,$$
$$f'''(x)=-6\cdot x^{-2}, \qquad f'''(1)=-6.$$

Tako slijedi:

$$T_3(x)=0+\frac{6}{1!}\cdot (x-1)^1+\frac{6}{2!}\cdot (x-1)^2+\frac{-6}{3!}\cdot (x-1)^3=6\cdot (x-1)+3\cdot (x-1)^2-(x-1)^3\Rightarrow$$
$$T_3(1.1)=6\cdot 0.1+3\cdot 0.1^2-0.1^3=0.629.$$

Napomena 1. Koristeći program *WolframAlpha* dobije se $f(1.1)\approx 0.62904719$. Relativna pogreška aproksimacije iznosi približno 0.0075%.

22. Funkciju $f(x)=3\cdot e^x\cdot \sin x$ aproksimiramo MacLaurinovim polinomom M_3 stupnja 3. Izračunajte $M_3(-0.1)$.

Rješenje: Odredimo vrijednosti zadane funkcije i prvih triju njezinih derivacija u točki c. Imamo redom:

$$f(x)=3\cdot e^x\cdot \sin x, \qquad f(0)=3\cdot e^0\cdot \sin 0=3\cdot 1\cdot 0=0,$$
$$f'(x)=3\cdot e^x\cdot (\sin x+\cos x) \qquad f'(0)=3\cdot e^0\cdot (\sin 0+\cos 0)=3\cdot 1\cdot (1+0)=3,$$
$$f''(x)=6\cdot e^x\cdot \cos x, \qquad f''(0)=6\cdot e^0\cdot \cos 0=6\cdot 1\cdot 1=6,$$
$$f'''(x)=6\cdot e^x\cdot (\cos x-\sin x), \qquad f'''(0)=6\cdot e^0\cdot (\cos 0-\sin 0)=6\cdot 1\cdot (1-0)=6.$$

Tako slijedi:

$$M_3(x)=0+\frac{3}{1!}\cdot x^1+\frac{6}{2!}\cdot x^2+\frac{6}{3!}\cdot x^3=x^3+3\cdot x^2+3\cdot x\Rightarrow$$
$$M_3(-0.1)=(-0.1)^3+3\cdot (-0.1)^2+3\cdot (-0.1)=-0.271.$$

Napomena 2. Koristeći program *WolframAlpha* dobije se $f(-0.1)\approx -0.27099903$. Relativna pogreška aproksimacije iznosi približno $3.57\cdot 10^{-4}$%.

23. Funkciju $g(t)=e^{100-t^2}$ aproksimiramo Taylorovim polinomom T_2 stupnja 2 u okolini točke $c=10$. Izračunajte $T_2(10.2)$.

Rješenje: Odredimo vrijednosti zadane funkcije i prvih dviju njezinih derivacija u točki $c=10$. Imamo redom:

$$\begin{aligned} g(t)&=e^{100-t^2} & g(10)&=e^{100-10^2}=e^{100-100}=e^0=1,\\ g'(t)&=-2\cdot t\cdot e^{100-t^2} & g'(10)&=-2\cdot 10\cdot e^{100-10^2}=-20,\\ g''(t)&=\left(4\cdot t^2-2\right)\cdot e^{100-t^2} & g''(10)&=\left(4\cdot 10^2-2\right)\cdot e^{100-10^2}=398. \end{aligned}$$

Tako slijedi:

$$\begin{aligned} &T_2(t)=1+\frac{-20}{1!}\cdot(t-10)^1+\frac{398}{2!}\cdot(t-10)^2=199\cdot(t-10)^2-20\cdot(t-10)+1\Rightarrow\\ &T_3(10.2)=199\cdot 0.2^2-20\cdot 0.2+1=4.96. \end{aligned}$$

Napomena 3. Koristeći program *WolframAlpha* dobije se $g(10.2)\approx 0.0175974724$. Relativna pogreška aproksimacije iznosi približno 28 086%. Ova ogromna pogreška posljedica je „premaloga“ stupnja polinoma kojim smo aproksimirali polaznu funkciju.

24. Izračunajte koeficijent uz x^3 u MacLaurinovu razvoju realne funkcije $f(x)=x\cdot\cos(4\cdot x)$ u red potencija.

Rješenje: Znamo da MacLaurinov razvoj u red funkcije $g(x)=\cos x$ glasi:

$$\cos x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\cdot x^{2\cdot k}}{(2\cdot k)!}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\ldots$$

U ovaj red umjesto x uvrstimo $4\cdot x$:

$$\cos(4\cdot x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\cdot(4\cdot x)^{2\cdot k}}{(2\cdot k)!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\cdot 4^{2\cdot k}}{(2\cdot k)!}\cdot x^{2\cdot k}.$$

Dobiveni red pomnožimo s x:

$$f(x)=x\cdot\cos(4\cdot x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\cdot 4^{2\cdot k}}{(2\cdot k)!}\cdot x^{2\cdot k+1}.$$

Član toga reda koji sadrži x^3 dobijemo za $2\cdot k+1=3$, tj. za $k=1$. Zbog toga traženi koeficijent računamo tako da u izraz $\frac{(-1)^k\cdot 4^{2\cdot k}}{(2\cdot k)!}$ uvrstimo $k=1$. Konačno imamo:

$$a_1 = \frac{(-1)^1 \cdot 4^{2\cdot 1}}{(2\cdot 1)!} = \frac{(-1)\cdot 16}{2} = -8.$$

25. Izračunajte koeficijent uz t^4 u MacLaurinovu razvoju funkcije $g(t) = e^{6\cdot t} - 3\cdot \cos^2 t$.

Rješenje: Primijenit ćemo identitet

$$\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot \cos(2\cdot t)$$

Tako je

$$g(t) = e^{6\cdot t} - \frac{3}{2}\cdot \cos(2\cdot t) - \frac{3}{2}.$$

Znamo da vrijede jednakosti:

$$e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\cdot t^n,$$

$$\cos t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2\cdot n)!}\cdot t^{2\cdot n}.$$

U prvoj jednakosti umjesto t pišemo $6\cdot t$, a u drugoj umjesto t pišemo $2\cdot t$. Dobivamo:

$$e^{6\cdot t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\cdot (6\cdot t)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6^n}{n!}\cdot t^n$$

$$\cos(2\cdot t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2\cdot n)!}\cdot (2\cdot t)^{2\cdot n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2\cdot n}}{(2\cdot n)!}\cdot t^{2\cdot n}.$$

U prvom od tih dvaju redova član koji sadrži t^4 dobijemo za $n = 4$, dok u drugom redu takav član dobijemo za $2\cdot n = 4$, tj. za $n = 2$. Slobodni član u funkciji g ne utječe na vrijednost koeficijenata uz potencije varijable t. Zbog toga je traženi koeficijent jednak:

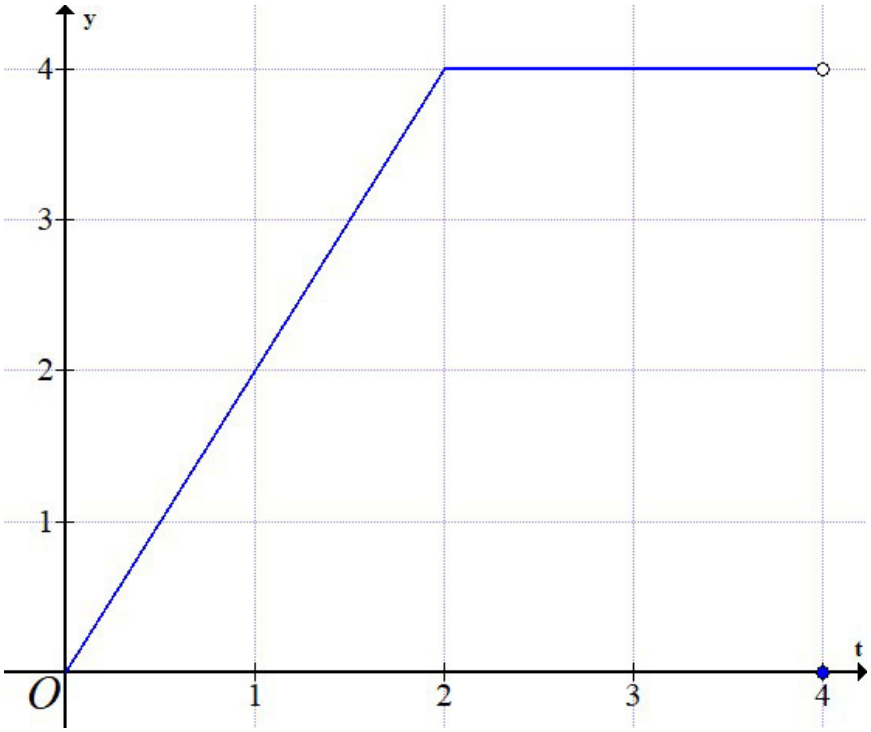
$$\frac{6^4}{4!} - \frac{3}{2}\cdot \frac{(-1)^4 \cdot 2^{2\cdot 2}}{(2\cdot 2)!} = \frac{6^4 - 3\cdot 2^3}{4!} = \frac{1296 - 24}{24} = 53.$$

26. 4-periodična funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ima svojstvo:

$$f(t)=\begin{cases}2\cdot t, & \text{za } t\in[0,2],\\ 4, & \text{za } t\in\langle 2,4\rangle.\end{cases}$$

a) **Isključivo grafički** provjerite valjanost Dirichletovih uvjeta za funkciju f na segmentu $[0,4]$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Nacrtajmo graf funkcije f na segmentu $[0,4]$. Dobivamo sliku 12.



Slika 12.

Iz slike vidimo da funkcija f na segmentu $[0,4]$ ima točno jednu točku prekida prve vrste (to je $t=4$) i da nema nijedan strogi lokalni ekstrem. Zbog toga vrijede oba Dirichletova uvjeta.

b) Aproksimirajte zadanu funkciju na segmentu $[0,4]$ Fourierovim polinomom F_3 stupnja 3.

Rješenje: U ovome su slučaju $x_0 = 0$ i $T = 4$, pa računamo redom:

$$a_0 = \frac{1}{4}\cdot\int_0^4 f(t)\cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\cdot\left(\int_0^2 f(t)\cdot \mathrm{d}t + \int_2^4 f(t)\cdot \mathrm{d}t\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(\int_0^2 2\cdot t\cdot \mathrm{d}t + \int_2^4 4\cdot \mathrm{d}t\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(\left(t^2\right)\Big|_0^2 + (4\cdot t)\Big|_2^4\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(2^2 - 0^2 + 4\cdot(4-2)\right) = \frac{1}{4}\cdot 12 = 3,$$

$$a_n = \frac{2}{4}\cdot\int_0^4 f(t)\cdot\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\cdot t\right)\cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\left(\int_0^2 f(t)\cdot\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\cdot t\right)\cdot \mathrm{d}t + \int_2^4 f(t)\cdot\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\cdot t\right)\cdot \mathrm{d}t\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\int_0^2 2\cdot t\cdot\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\cdot t\right)\cdot \mathrm{d}t + \int_2^4 4\cdot\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\cdot t\right)\cdot \mathrm{d}t\right) =$$

$$= \int_0^2 t\cdot\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\cdot t\right)\cdot \mathrm{d}t + 2\cdot\int_2^4 \cos\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\cdot t\right)\cdot \mathrm{d}t = \left\{\begin{array}{l} \text{zamjena:} \\ x := \frac{n\cdot\pi}{2}\cdot t \Leftrightarrow t = \frac{2}{n\cdot\pi}\cdot x, \\ \mathrm{d}t = \frac{2}{n\cdot\pi}\cdot \mathrm{d}x, \\ 0 \mapsto 0, \\ 2 \mapsto n\cdot\pi, \\ 4 \mapsto 2\cdot n\cdot\pi \end{array}\right\}$$

$$= \int_0^{n\cdot\pi} \frac{2}{n\cdot\pi}\cdot x\cdot\cos x\cdot\frac{2}{n\cdot\pi}\cdot \mathrm{d}x + 2\cdot\int_{n\cdot\pi}^{2\cdot n\cdot\pi} \cos x\cdot\frac{2}{n\cdot\pi}\cdot \mathrm{d}x =$$

$$= \left(\frac{2}{n\cdot\pi}\right)^2\cdot\int_0^{n\cdot\pi} x\cdot\cos x\cdot \mathrm{d}x + 2\cdot\frac{2}{n\cdot\pi}\cdot\int_{n\cdot\pi}^{2\cdot n\cdot\pi} \cos x\cdot \mathrm{d}x =$$

$$= \left(\frac{2}{n\cdot\pi}\right)^2\cdot\left(\left(\cos x + x\cdot\sin x\right)\Big|_0^{n\cdot\pi}\right) + \frac{4}{n\cdot\pi}\cdot\left(\left(\sin x\right)\Big|_{n\cdot\pi}^{2\cdot n\cdot\pi}\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{n\cdot\pi}\right)^2\cdot\left(\underbrace{\cos(n\cdot\pi)}_{=(-1)^n} + n\cdot\pi\cdot\underbrace{\sin(n\cdot\pi)}_{=0} - (\underbrace{\cos 0}_{=1} + \underbrace{0\cdot\sin 0}_{=0})\right) +$$

$$+ \frac{4}{n\cdot\pi}\cdot\left(\underbrace{\sin(2\cdot n\cdot\pi)}_{=0} - \underbrace{\sin(n\cdot\pi)}_{=0}\right) =$$

$$= \frac{4}{n^2\cdot\pi^2}\cdot\left((-1)^n - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-8}{n^2\cdot\pi^2}, & \text{za neparne } n, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

$$b_n=\int_0^2 t\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\cdot t\right)\cdot\mathrm{d}t+2\cdot\int_2^4\sin\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\cdot t\right)\cdot\mathrm{d}t=\left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ x:=\dfrac{n\cdot\pi}{2}\cdot t\Leftrightarrow t=\dfrac{2}{n\cdot\pi}\cdot x,\\ \mathrm{d}t=\dfrac{2}{n\cdot\pi}\cdot\mathrm{d}x,\\ 0\mapsto 0,\\ 2\mapsto n\cdot\pi,\\ 4\mapsto 2\cdot n\cdot\pi\end{array}\right\}=$$

$$=\int_0^{n\cdot\pi}\frac{2}{n\cdot\pi}\cdot x\cdot\sin x\cdot\frac{2}{n\cdot\pi}\cdot\mathrm{d}x+2\cdot\int_{n\cdot\pi}^{2\cdot n\cdot\pi}\sin x\cdot\frac{2}{n\cdot\pi}\cdot\mathrm{d}x=$$

$$=\left(\frac{2}{n\cdot\pi}\right)^2\cdot\int_0^{n\cdot\pi}x\cdot\sin x\cdot\mathrm{d}x+2\cdot\frac{2}{n\cdot\pi}\cdot\int_{n\cdot\pi}^{2\cdot n\cdot\pi}\sin x\cdot\mathrm{d}x=$$

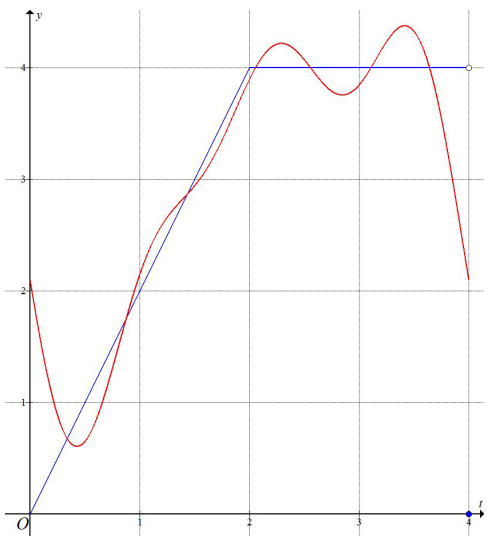
$$=\left(\frac{2}{n\cdot\pi}\right)^2\cdot\left(\left(\sin x-x\cdot\cos x\right)\Big|_0^{n\cdot\pi}\right)-\frac{4}{n\cdot\pi}\cdot\left(\left(\cos x\right)\Big|_{n\cdot\pi}^{2\cdot n\cdot\pi}\right)=$$

$$=\left(\frac{2}{n\cdot\pi}\right)^2\cdot\left(\underbrace{\sin(n\cdot\pi)}_{=0}-n\cdot\pi\cdot\underbrace{\cos(n\cdot\pi)}_{=(-1)^n}-(\underbrace{\sin 0}_{=0}-\underbrace{0\cdot\cos 0}_{=0})\right)-$$

$$-\frac{4}{n\cdot\pi}\cdot\left(\underbrace{\cos(2\cdot n\cdot\pi)}_{=1}-\underbrace{\cos(n\cdot\pi)}_{=(-1)^n}\right)=\frac{4}{n\cdot\pi}\cdot\left((-1)^{n+1}-1+(-1)^n\right)=\frac{-4}{n\cdot\pi},\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Sada lako nalazimo da je traženi polinom (vidjeti sliku 13.):

$$F_3(t)=3-\frac{8}{\pi^2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)-\frac{4}{\pi}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)-\frac{2}{\pi}\cdot\sin\left(\pi\cdot t\right)-\frac{8}{9\cdot\pi^2}\cdot\cos\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\cdot t\right)-$$
$$-\frac{4}{3\cdot\pi}\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\cdot t\right).$$



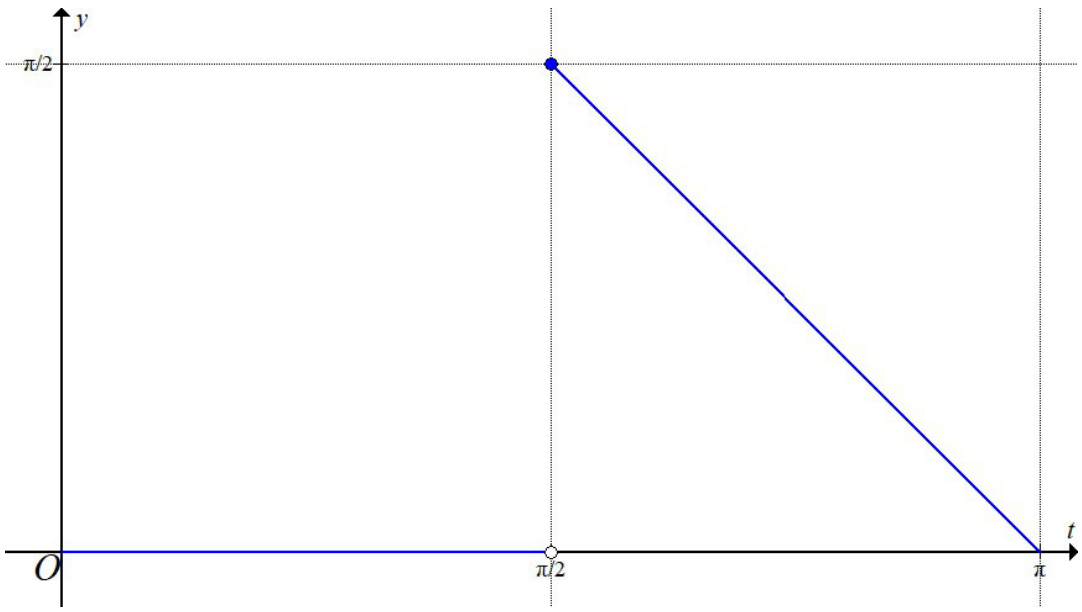
Slika 13.

27. π - periodična funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ima svojstvo:

$$f(t)=\begin{cases}0, \text{ za } t\in\left\langle 0,\dfrac{\pi}{2}\right\rangle,\\ \pi-t, \text{ za } t\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right].\end{cases}$$

a) **Isključivo grafički** provjerite valjanost Dirichletovih uvjeta za funkciju f na segmentu $[0,\pi]$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Nacrtajmo graf zadane funkcije na segmentu $[0,\pi]$. Dobivamo sliku 14.



Slika 14.

Iz slike vidimo da funkcija f na segmentu $[0,\pi]$ ima točno jednu točku prekida prve vrste (to je $t=\dfrac{\pi}{2}$) i da ima točno jednu točku strogoga lokalnoga ekstrema (to je točka $T=\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$). Zbog toga vrijede oba Dirichletova uvjeta.

b) Aproksimirajte zadanu funkciju na segmentu $[0,\pi]$ Fourierovim polinomom F_4 stupnja 4.

Rješenje: U ovome su slučaju $x_0 = 0$ i $T = \pi$, pa računamo redom:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} f(t)\cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - t)\cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\left(\pi\cdot t - \frac{1}{2}\cdot t^2\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\left(\pi^2 - \frac{1}{2}\cdot\pi^2 - \left(\pi\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{4}\right)\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi}{8},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} f(t)\cdot\cos\left(\frac{2\cdot n\cdot\pi}{\pi}\cdot t\right)\cdot \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - t)\cdot\cos(2\cdot n\cdot t)\cdot \mathrm{d}t = \left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ x := \pi - t \Leftrightarrow t = \pi - x,\\ \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x,\\ \frac{\pi}{2} \mapsto \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},\\ \pi \mapsto \pi - \pi = 0\end{array}\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos(2\cdot n\cdot(\pi - x))\cdot \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos(2\cdot n\cdot x)\cdot \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\left(\left(\frac{1}{(2\cdot n)^2}\cdot(\cos(2\cdot n\cdot x) + 2\cdot n\cdot x\cdot\sin(2\cdot n\cdot x)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{(2\cdot n)^2}\cdot\left(\underbrace{\cos(n\cdot\pi)}_{=(-1)^n} + n\cdot\pi\cdot\underbrace{\sin(n\cdot\pi)}_{=0} - (\underbrace{\cos 0}_{=1} + 0)\right) = \frac{(-1)^n - 1}{2\cdot\pi\cdot n^2} = \begin{cases}\frac{-1}{n^2\cdot\pi}, & \text{za neparne } n,\\ 0, & \text{inače.}\end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} f(t)\cdot\sin\left(\frac{2\cdot n\cdot\pi}{\pi}\cdot t\right)\cdot \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - t)\cdot\sin(2\cdot n\cdot t)\cdot \mathrm{d}t = \left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ x := \pi - t \Leftrightarrow t = \pi - x,\\ \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x,\\ \frac{\pi}{2} \mapsto \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},\\ \pi \mapsto \pi - \pi = 0\end{array}\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\sin(2\cdot n\cdot(\pi - x))\cdot \mathrm{d}x = \left(\frac{-2}{\pi}\right)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\sin(2\cdot n\cdot x)\cdot \mathrm{d}x =$$

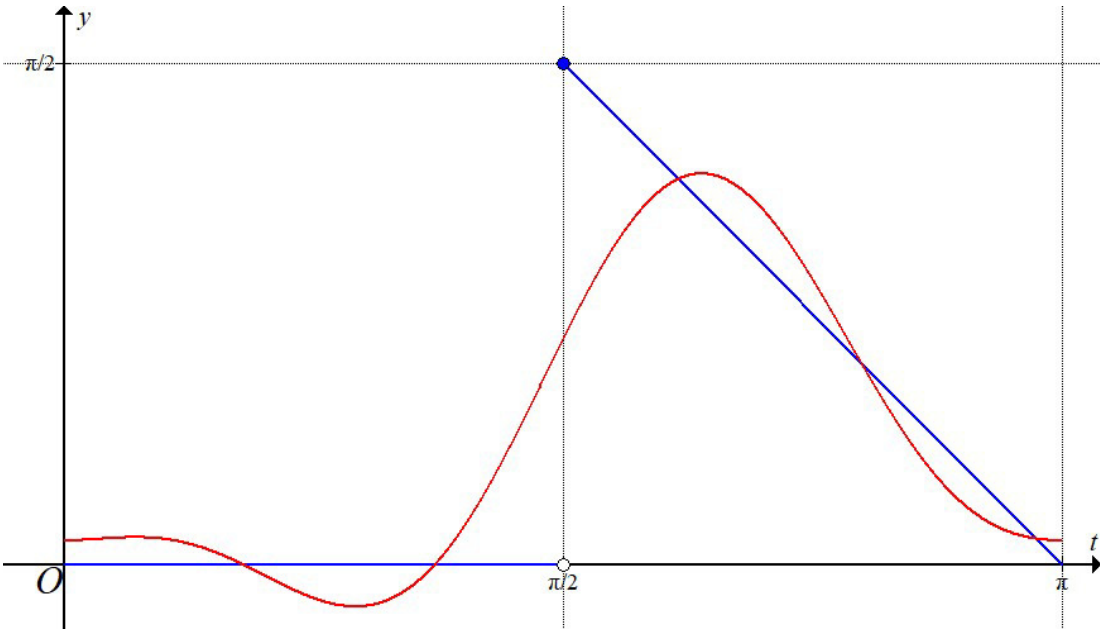
$$= \left(\frac{-2}{\pi}\right)\cdot\left(\left(\frac{1}{(2\cdot n)^2}\cdot(\sin(2\cdot n\cdot x) - 2\cdot n\cdot x\cdot\cos(2\cdot n\cdot x)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$=\left(\frac{-2}{\pi}\right)\cdot\frac{1}{(2\cdot n)^2}\cdot\left(\underbrace{\sin(n\cdot\pi)}_{=0}-n\cdot\pi\cdot\underbrace{\cos(n\cdot\pi)}_{=(-1)^n}-(\underbrace{\sin 0}_{=1}-0)\right)=\frac{2\cdot n\cdot\pi\cdot(-1)^n}{4\cdot\pi\cdot n^2}=\frac{(-1)^n}{2\cdot n},\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Budući da su članovi Fourierova reda oblika $a_n\cdot\cos(2\cdot n\cdot t)$, odnosno $b_n\cdot\sin(2\cdot n\cdot t)$, sve članove polinoma F_4 dobit ćemo uzimajući $n=1,2$. Tako imamo:

$$F_4(t)=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{\pi}\cdot\cos(2\cdot t)-\frac{1}{2}\cdot\sin(2\cdot t)+\frac{1}{4}\cdot\sin(4\cdot t).$$

Dobiveni Fourierov polinom prikazan je crvenom bojom na slici 15.



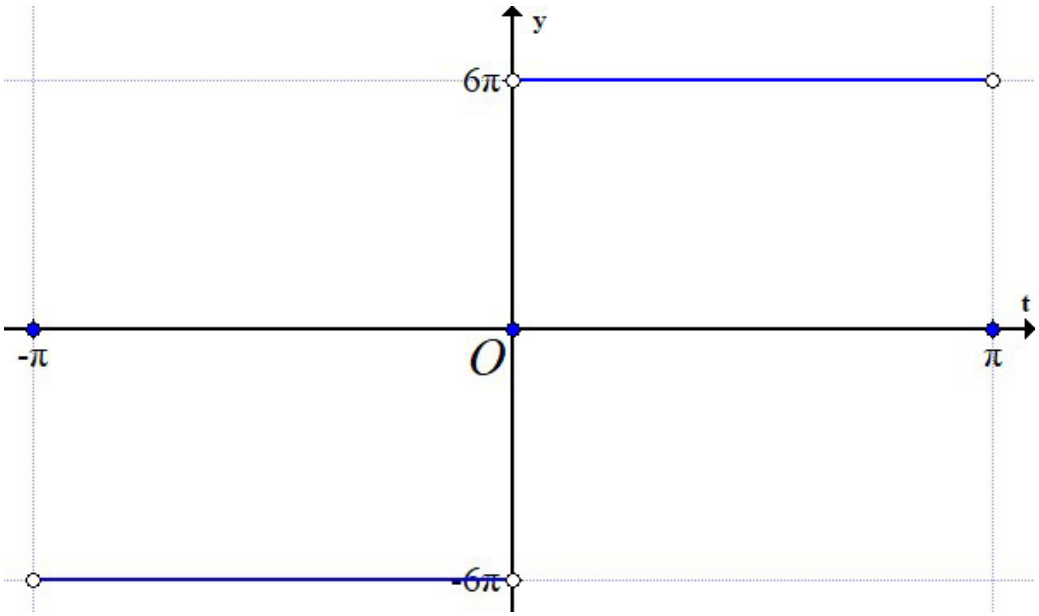
Slika 15.

28. Neparna $(2\cdot\pi)$-periodična realna funkcija $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ima svojstvo:

$$g(t)=6\cdot\pi,\ \text{za}\ t\in\langle 0,\pi\rangle.$$

a) Isključivo grafički provjerite valjanost Dirichletovih uvjeta na segmentu $[-\pi,\pi]$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Nacrtajmo najprije graf zadane funkcije na segmentu $[-\pi,\pi]$. Dobivamo sliku 16.



Slika 16.

Iz slike 1. vidimo da na segmentu $[-\pi,\pi]$ zadana funkcija ima točno tri prekida $(t=-\pi,\ t=0\ \text{i}\ \ t=\pi)$, a nema nijedan strogi lokalni ekstrem. Zbog toga vrijede oba Dirichletova uvjeta.

b) Neka je P skup svih točaka prekida funkcije g na segmentu $[-\pi,\pi]$. Za svaki $p\in P$ izračunajte zbroj Fourierova reda funkcije g na tom segmentu.

Rješenje: Odmah imamo:

$$S(-\pi)=S(\pi)=\frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{t\to(-\pi)+}g(t)+\lim_{t\to\pi-}g(t)\right)=\frac{1}{2}\cdot(-6\cdot\pi+6\cdot\pi)=0,$$

$$S(0)=\frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{t\to 0-}g(t)+\lim_{t\to 0+}g(t)\right)=\frac{1}{2}\cdot(-6\cdot\pi+6\cdot\pi)=0.$$

c) Aproksimirajte zadanu funkciju Fourierovim polinomom 3. stupnja na segmentu $[-\pi,\ \pi]$.

Rješenje: Prema pretpostavci, funkcija g je neparna. To znači da njezin razvoj u Fourierov red sadrži samo članove oblika $b_n \cdot \sin(n \cdot t),\ n \in \mathbb{N}$. Odredimo analitički izraz za Eulerove koeficijente:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} 6 \cdot \pi \cdot \sin(n \cdot t) \cdot \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \cdot 6 \cdot \pi \cdot \int_0^{\pi} \sin(n \cdot t) \cdot \mathrm{d}t = 12 \cdot \left(\left(\left(-\frac{1}{n} \right) \cdot \cos(n \cdot t) \right) \Big|_0^{\pi} \right) =$$

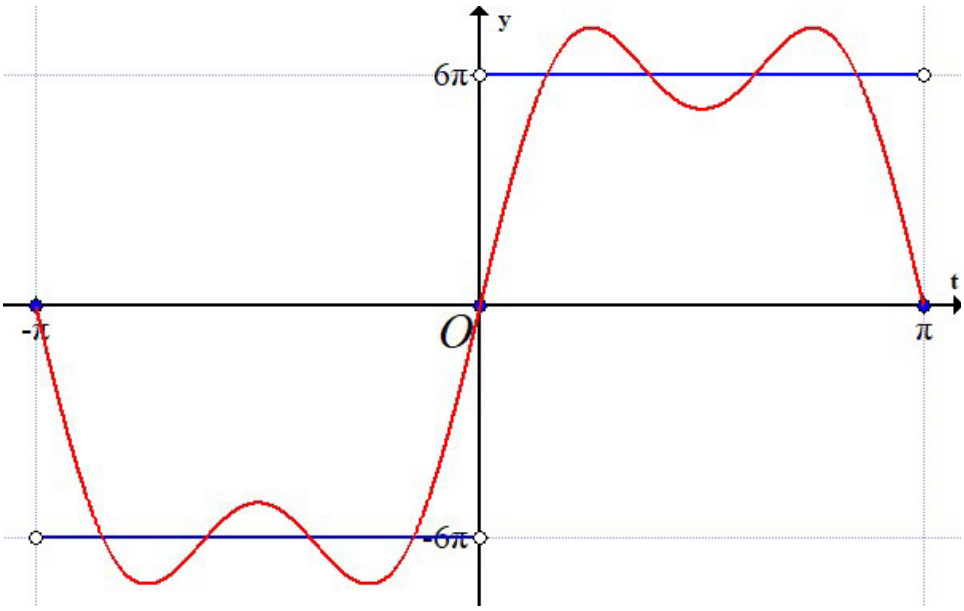
$$= \left(\frac{-12}{n} \right) \cdot \left((\cos(n \cdot t)) \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{12 - 12 \cdot \cos(n \cdot \pi)}{n} = \begin{cases} \dfrac{24}{n}, & \text{za neparne } n, \\ 0, & \text{za parne } n \end{cases}$$

$$\Rightarrow b_1 = 24,\ b_3 = 8.$$

Dakle, traženi polinom je:

$$F_3(t) = 24 \cdot \sin t + 8 \cdot \sin(3 \cdot t).$$

Vidjeti sliku 17.



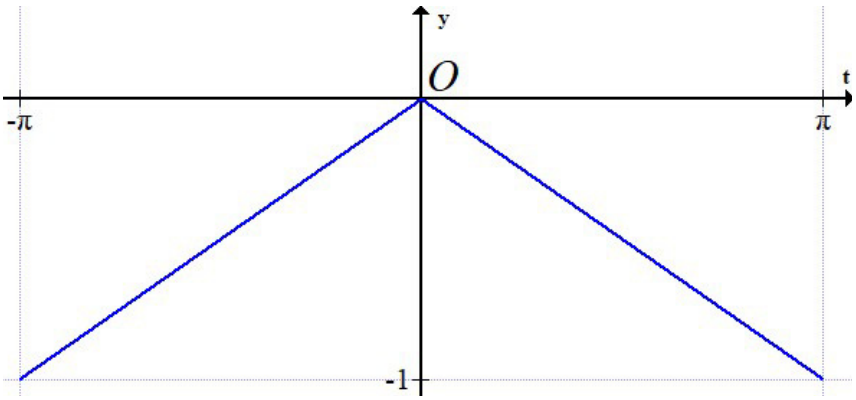
Slika 17.

29. **Parna** $(2\cdot\pi)$-periodična realna funkcija $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ima svojstvo:

$$g(t)=\frac{t}{\pi},\ \text{za } t\in[-\pi,0].$$

a) **Isključivo grafički** provjerite valjanost Dirichletovih uvjeta na segmentu $[-\pi,\pi]$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Nacrtajmo najprije graf zadane funkcije na segmentu $[-\pi,\pi]$. Dobivamo sliku 18.



Slika 18.

Iz slike vidimo da je funkcija g neprekidna na zadanom segmentu i da na tom segmentu ima točno jednu točku strogoga lokalnoga ekstrema (ta je točka O). Dakle, vrijede oba Dirichletova uvjeta.

b) Funkciju g razvijemo u Fourierov red na zadanom segmentu. Izračunajte zbroj toga reda u svakom od krajeva segmenta.

Rješenje: Odmah imamo:

$$S(-\pi)=S(\pi)=\frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{t\to(-\pi)+}g(t)+\lim_{t\to\pi-}g(t)\right)=\frac{1}{2}\cdot(-1+(-1))=-1.$$

c) Aproksimirajte zadanu funkciju Fourierovim polinomom 3. stupnja na segmentu $[-\pi,\ \pi]$.

Rješenje: Prema pretpostavci, funkcija g je parna. To znači da njezin razvoj u Fourierov red sadrži samo članove oblika $a_n\cdot\cos(n\cdot t),\ n\in\mathbb{N}_0$. Odredimo analitički izraz za Eulerove koeficijente Fourierova reda:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0}g(t)\cdot\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0}\frac{t}{\pi}\cdot\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0}t\cdot\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi^2}\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\cdot t^2\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}\right)=\frac{1}{\pi^2}\cdot\left(0-\frac{1}{2}\cdot\pi^2\right)=-\frac{1}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0} g(t)\cdot\cos(n\cdot t)\cdot \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0}\frac{t}{\pi}\cdot\cos(n\cdot t)\cdot \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0} t\cdot\cos(n\cdot t)\cdot \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\cdot\left(\left(\frac{1}{n^2}\cdot\left(n\cdot t\cdot\sin t+\cos(n\cdot t)\right)\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}\right) = \frac{2}{n^2\cdot\pi^2}\cdot\left(1-\underbrace{\cos(n\cdot(-\pi))}_{=\cos(n\cdot\pi)}\right) =$$

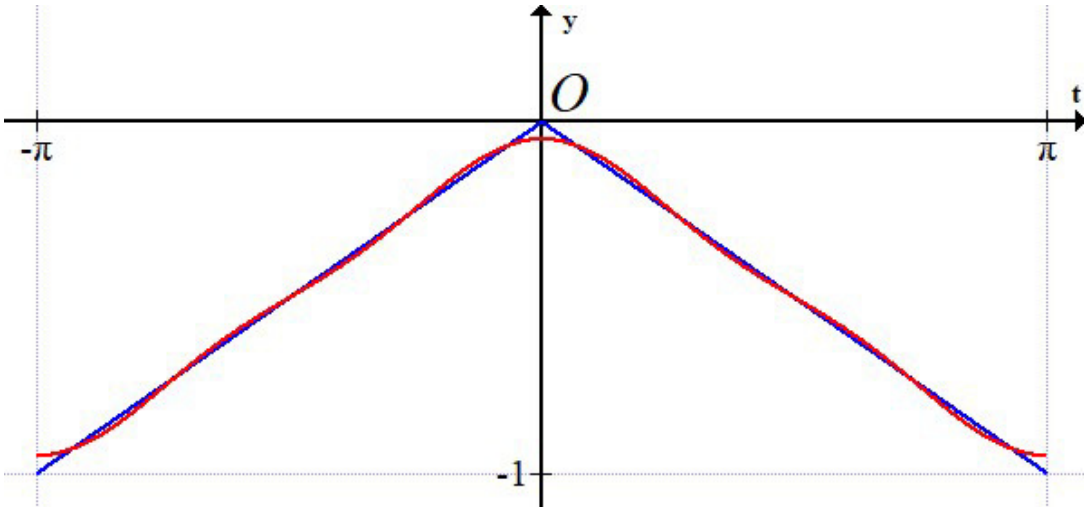
$$= \begin{cases} \dfrac{4}{n^2\cdot\pi^2}, & \text{za neparne } n\in\mathbb{N}, \\ 0, & \text{za parne } n\in\mathbb{N}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{4}{\pi^2},\ a_3 = \frac{4}{9\cdot\pi^2}.$$

Dakle, traženi polinom je:

$$F_3(t) = -\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\cdot\cos t+\frac{4}{9\cdot\pi^2}\cdot\cos(3\cdot t).$$

Vidjeti sliku 19.



Slika 19.

30. Za svaki $x \in \mathbb{R}$ označimo s $\lfloor x \rfloor$ najveći cijeli broj jednak ili manji od x. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana pravilom:

$$f(x) = x - \lfloor x \rfloor \ .$$

a) Dokažite da je f periodična funkcija i odredite joj temeljni period.

Rješenje: Pretpostavimo da je P bilo koji period funkcije f. Budući da je $D(f) = \mathbb{R}$, onda $x \in D(f) \Rightarrow x + P \in D(f)$ (jer je zbroj dvaju realnih brojeva uvijek realan broj). Iz definicije perioda funkcije slijedi:

$$\begin{aligned} & f(x+P) = f(x) \Rightarrow \\ & x + P - \lfloor x + P \rfloor = x - \lfloor x \rfloor \Rightarrow \\ & P = \lfloor x + P \rfloor - \lfloor x \rfloor, \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Desna strana posljednje jednakosti je cijeli broj (jer je razlika dvaju cijelih brojeva), pa takva mora biti i lijeva strana. To znači da je $P \in \mathbb{Z}$. Nadalje, primijetimo da *neovisno o dobivenoj jednakosti* $P = \lfloor x + P \rfloor - \lfloor x \rfloor$, $\forall x \in \mathbb{R}$, vrijedi sljedeći „lanac“:

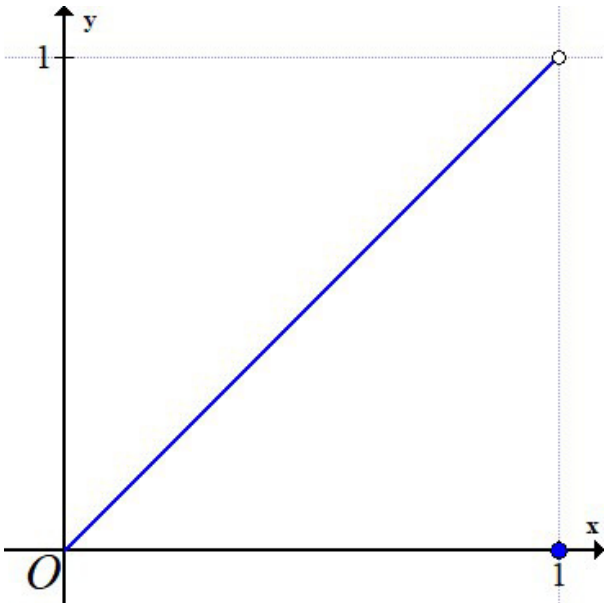
$$\begin{aligned} & \lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1 \Leftrightarrow \\ & \lfloor x \rfloor + P \le x + P < \lfloor x \rfloor + 1 + P \Leftrightarrow \\ & \lfloor x + P \rfloor = \lfloor x \rfloor + P \Leftrightarrow \\ & \lfloor x + P \rfloor - \lfloor x \rfloor = P, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall P \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Zbog toga je jednakost $+P = \lfloor x + P \rfloor - \lfloor x \rfloor$ istinita za svaki $P \in \mathbb{Z}$. Time smo dokazali da je f periodična i da je svaki cijeli broj njezin period. Temeljni period te funkcije je, prema definiciji, njezin najmanji strogo pozitivni period, pa odatle slijedi da je njezin temeljni period jednak najmanjem strogo pozitivnom cijelom broju, a taj je jednak 1.

Zaključimo: f je periodična s temeljnim periodom $T = 1$.

b) Nacrtajte graf funkcije f na segmentu $[0, 0+T]$, gdje je T temeljni period funkcije f. Provjerite valjanost Dirichletovih uvjeta za funkciju f na tom segmentu.

Rješenje: Vidjeti sliku 20. Graf funkcije f crtamo na segmentu $[0,1]$. Iz slike vidimo da na tom segmentu funkcija f ima točno jedan prekid (u točki $x = 1$) i da nema nijedan strogi lokalni ekstrem. Dakle, vrijede oba Dirichletova uvjeta.



Slika 20.

c) Odredite skup svih točaka prekida funkcije f. Nađite zbrojeve Fourierova reda za funkciju f na segmentu $[0,0+T]$ za sve njezine točke prekida koje pripadaju tom segmentu.

Rješenje: Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{Z}$ vrijede jednakosti:

$$\lim_{x \to k-} f(x) = 1,$$
$$\lim_{x \to k+} f(x) = f(k) = 0.$$

Dakle, f ima prekid u svakoj cjelobrojnoj točki, pa je skup svih točaka prekida funkcije g jednak $\mathbb{Z}$.

U **a)** podzadatku smo dokazali da je $T = 1$. Cijeli brojevi koji pripadaju segmentu $[0,1]$ su 0 i 1. Tako odmah imamo:

$$S(0) = S(1) = \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{x \to 0+} f(x) + \lim_{x \to 1-} f(x) \right) = \frac{1}{2} \cdot (0+1) = \frac{1}{2}.$$

d) Aproksimirajte funkciju f na segmentu $[0,0+T]$ Fourierovim polinomom čiji su članovi prva četiri člana pripadnoga Fourierova reda.

Rješenje: U **a)** podzadatku smo dokazali da je f 1-periodična funkcija. Također, za svaki $x \in [0,1\rangle$ je $\lfloor x \rfloor = 0$. Odatle slijedi da je

$$f(x) = x, \ \forall x \in [0,1\rangle.$$

Točka $x=1$ ne „kvari“ određeni integral funkcije f na segmentu $[0,1]$. Naime, funkcija f na segmentu $[0,1]$ je ograničena i ima konačno mnogo točaka prekida prve vrste, pa je integrabilna. Tako imamo redom:

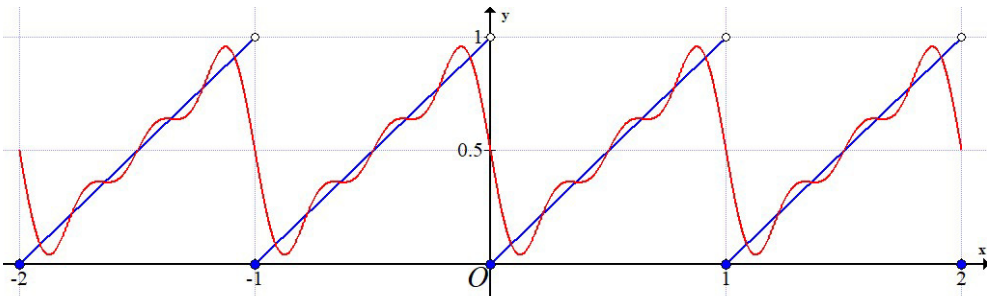
$$a_0=\int_0^1 x\cdot \mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}\cdot x^2\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\cdot\left(\left(x^2\right)\Big|_0^1\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1^2-0^2\right)=\frac{1}{2}\cdot(1-0)=\frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}a_n&=2\cdot\int_0^1 x\cdot\cos(2\cdot n\cdot\pi\cdot x)\cdot\mathrm{d}x=\\&=2\cdot\left(\left(\frac{1}{(2\cdot n\cdot\pi)^2}\cdot(\cos(2\cdot n\cdot\pi\cdot x)+2\cdot n\cdot\pi\cdot x\cdot\sin(2\cdot n\cdot\pi\cdot x)\right)\Big|_0^1\right)=\\&=\frac{2}{(2\cdot n\cdot\pi)^2}\cdot\left(\underbrace{\cos(2\cdot n\cdot\pi)}_{=1}+2\cdot n\cdot\pi\cdot\underbrace{\sin(2\cdot n\cdot\pi)}_{=0}-(\underbrace{\cos 0}_{=1}+0)\right)=\frac{2}{(2\cdot n\cdot\pi)^2}\cdot(1-1)=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n&=2\cdot\int_0^1 x\cdot\sin(2\cdot n\cdot\pi\cdot x)\cdot\mathrm{d}x=\\&=2\cdot\left(\left(\frac{1}{(2\cdot n\cdot\pi)^2}\cdot(\sin(2\cdot n\cdot\pi\cdot x)-2\cdot n\cdot\pi\cdot x\cdot\cos(2\cdot n\cdot\pi\cdot x)\right)\Big|_0^1\right)=\\&=\frac{2}{(2\cdot n\cdot\pi)^2}\cdot\left(\underbrace{\sin(2\cdot n\cdot\pi)}_{=0}-2\cdot n\cdot\pi\cdot\underbrace{\cos(2\cdot n\cdot\pi)}_{=1}-(\underbrace{\sin 0}_{=1}-0)\right)=\frac{-2^2\cdot n\cdot\pi}{(2\cdot n\cdot\pi)^2}=\frac{-1}{n\cdot\pi}.\end{aligned}$$

Tako konačno dobivamo (vidjeti sliku 21.):

$$F(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot x)-\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\sin(4\cdot\pi\cdot x)-\frac{1}{3\cdot\pi}\cdot\sin(6\cdot\pi\cdot x).$$



Slika 21.

3. POGLAVLJE:

OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

1. **Isključivo deriviranjem** pokažite da je

$$y^2 = x^3 - C \cdot x,\ C \in \mathbb{R},$$

opće rješenje obične diferencijalne jednadžbe

$$2 \cdot x \cdot y \cdot y' - y^2 = 2 \cdot x^3.$$

Rješenje: Koristeći pravilo za deriviranje implicitno zadane funkcije imamo redom:

$$\begin{aligned} &\left(y^2\right)' = \left(x^3 - C \cdot x\right)' \Rightarrow \\ &2 \cdot y \cdot y' = 3 \cdot x^2 - C \quad / \cdot x \\ &2 \cdot x \cdot y \cdot y' = 3 \cdot x^3 - C \cdot x. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem toga izraza i polaznoga izraza za y^2 na lijevu stranu zadane jednadžbe slijedi:

$$3 \cdot x^3 - C \cdot x - \left(x^3 - C \cdot x\right) = 3 \cdot x^3 - C \cdot x - x^3 + C \cdot x = 2 \cdot x^3,$$

a to je upravo desna strana polazne jednadžbe. Time je tvrdnja zadatka dokazana.

2. **Isključivo deriviranjem** pokažite da je funkcija

$$y = 2021 \cdot e^x - (x - 2021)^2$$

partikularno rješenje obične diferencijalne jednadžbe

$$y''' - y'' = 2.$$

Rješenje: Odredimo prve tri derivacije zadane funkcije. Imamo redom:

$$\begin{aligned} y' &= 2021 \cdot e^x - 2 \cdot (x - 2021) \cdot (x - 2021)' = \\ &= 2021 \cdot e^x - 2 \cdot (x - 2021) \cdot 1 \\ &= 2021 \cdot e^x - 2 \cdot (x - 2021), \\ y'' &= 2021 \cdot e^x - 2 \cdot (1 - 0) = 2021 \cdot e^x - 2, \\ y''' &= 2021 \cdot e^x - 0 = 2021 \cdot e^x. \end{aligned}$$

Odatle odmah slijedi:

$$y''' - y'' = 2021 \cdot e^x - \left(2021 \cdot e^x - 2\right) = 2021 \cdot e^x - 2021 \cdot e^x + 2 = 2,$$

što je i trebalo dokazati.

3. Riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} x\cdot(\sin y)\cdot y' + \cos y = 0, \\ y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Rješenje: Transformirajmo zadanu običnu diferencijalnu jednadžbu ovako:

$$x\cdot(\sin y)\cdot y' = -\cos y \Rightarrow$$
$$y' = \frac{-\cos y}{x\cdot\sin y} = \frac{-1}{x}\cdot\frac{\cos y}{\sin y} = \frac{-1}{x}\cdot\operatorname{ctg} y.$$

Vidimo da se radi o običnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. reda sa razdvojenim varijablama. Očitamo:

$$f(x) = \frac{-1}{x},\ g(y) = \operatorname{ctg} y.$$

Sva rješenja jednadžbe $\operatorname{ctg} y = 0$ su $y = \dfrac{\pi}{2} + k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Nijedno od njih očito nije jednako $\dfrac{\pi}{3}$, pa slijedi:

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\operatorname{ctg} y} = \int\frac{-1}{x}\cdot\mathrm{d}x + C \Rightarrow \int\operatorname{tg} y\cdot\mathrm{d}y = -\ln|x| + C \Rightarrow -\ln|\cos y| = -\ln|x| + C.$$

Uvrštavanjem početnoga uvjeta $\left(x = \dfrac{1}{2},\ y = \dfrac{\pi}{3}\right)$ dobivamo:

$$-\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| = -\ln\left|\frac{1}{2}\right| + C \Leftrightarrow -\ln\left|\frac{1}{2}\right| = -\ln\left|\frac{1}{2}\right| + C \Leftrightarrow C = 0.$$

Zbog toga je:

$$-\ln|\cos y| = -\ln|x| \Leftrightarrow |\cos y| = |x| \Rightarrow \cos y = x \Leftrightarrow y = \arccos x.$$

Apsolutne vrijednosti smo smjeli izbrisati jer iz početnoga uvjeta slijedi $\left|\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$ i $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} > 0$. Dakle, rješenje zadatka je funkcija

$$y = \arccos x.$$

4. Riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} x^2 \cdot y' - 1 = y^2, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Rješenje: Transformirajmo zadanu običnu diferencijalnu jednadžbu ovako:

$$x^2 \cdot y' = y^2 + 1 \Rightarrow$$
$$y' = \frac{y^2+1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2+1\right).$$

Vidimo da se radi o običnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. reda sa razdvojenim varijablama. Očitamo:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \; g(y) = y^2 + 1.$$

Polinom $g(y) = y^2 + 1$ očito nema realnih nultočaka, pa slijedi:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = \int \frac{1}{x^2} \cdot \mathrm{d}x + C \Rightarrow \operatorname{arctg} y = \frac{-1}{x} + C.$$

Uvrštavanjem početnoga uvjeta $(x = 1, \; y = 0)$ dobivamo:

$$\operatorname{arctg} 0 = -\frac{1}{1} + C \Leftrightarrow 0 = C - 1 \Leftrightarrow C = 1.$$

Zbog toga je:

$$\operatorname{arctg} y = -\frac{1}{x} + 1 \Leftrightarrow y = \operatorname{tg}\left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija

$$y = \operatorname{tg}\left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

5. Riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} x \cdot y' - 2 \cdot (\ln x) \cdot y = 0, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Rješenje: Podijelimo zadanu običnu diferencijalnu jednadžbu s x. Dobivamo:

$$y' - 2 \cdot \frac{\ln x}{x} \cdot y = 0.$$

Vidimo da se radi o homogenoj linearnoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. reda. Očitamo:

$$p(x) = -2 \cdot \frac{\ln x}{x},$$

pa slijedi:

$$\int p(x) \cdot \mathrm{d}x = \int -2 \cdot \frac{\ln x}{x} \cdot \mathrm{d}x = (-2) \cdot \int \frac{\ln x}{x} \cdot \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} \text{zamjena:} \\ t := \ln x, \\ \mathrm{d}t = (\ln x)' \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x \end{array} \right\} = (-2) \cdot \int t \cdot \mathrm{d}t =$$

$$= (-2) \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 = -t^2 = -\ln^2 x,$$

$$y = C \cdot e^{-\int p(x) \cdot \mathrm{d}x} = C \cdot e^{-\left(-\ln^2 x\right)} = C \cdot e^{\ln^2 x}.$$

Uvrštavanjem početnoga uvjeta $(x = y = 1)$ dobivamo:

$$1 = C \cdot e^{\ln^2 1} \Leftrightarrow 1 = C \cdot e^{0^2} \Leftrightarrow 1 = C \cdot e^0 \Leftrightarrow C = 1.$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija

$$y = e^{\ln^2 x}.$$

Napomena 1. Vrijedi identitet:

$$e^{\ln^2 x} = e^{(\ln x) \cdot (\ln x)} \left(e^{\ln x}\right)^{\ln x} = x^{\ln x}, \ \forall x > 0.$$

Zbog toga rješenje zadatka možemo zapisati u obliku

$$y = x^{\ln x}.$$

6. Riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} y' + 2\cdot(\operatorname{ctg} x)\cdot y = 0, \\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2. \end{cases}$$

Rješenje: Vidimo da se radi o homogenoj linearnoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. reda. Očitamo:

$$p(x) = 2\cdot \operatorname{ctg} x,$$

pa slijedi:

$$\int p(x)\cdot \mathrm{d}x = \int 2\cdot \operatorname{ctg} x\cdot \mathrm{d}x = 2\cdot\int \operatorname{ctg} x\cdot \mathrm{d}x = 2\cdot \ln|\sin x|,$$

$$y = C\cdot e^{-2\cdot\ln|\sin x|} = C\cdot e^{\ln\left(|(\sin x)|^{-2}\right)} = C\cdot|\sin x|^{-2} = \frac{C}{|\sin x|^2} = \frac{C}{\sin^2 x}.$$

(U posljednjoj jednakosti smo koristili identitet

$$|x|^2 = x^2,\ \forall x\in\mathbb{R}.)$$

Uvrštavanjem početnoga uvjeta $\left(x = \dfrac{\pi}{4},\ y = 2\right)$ dobivamo:

$$2 = \frac{C}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}\right)} \Leftrightarrow 2 = \frac{C}{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \Leftrightarrow 2 = \frac{C}{\dfrac{1}{2}} \Leftrightarrow 2\cdot C = 2 \Leftrightarrow C = 1.$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija

$$y = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Napomena 2. Koristili smo identitet:

$$e^{a\cdot\ln x} = x^a,\ \forall x > 0,\ \forall a\in\mathbb{R}.$$

7. Riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} x \cdot y' + y - 1 = 3 \cdot x^2, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

Rješenje: Transformirajmo zadanu običnu diferencijalnu jednadžbu ovako:

$$x \cdot y' + y = 3 \cdot x^2 + 1 \Rightarrow y' + \frac{1}{x} \cdot y = 3 \cdot x + \frac{1}{x}.$$

Vidimo da se radi o nehomogenoj linearnoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. reda. Očitamo:

$$p(x) = \frac{1}{x},\ q(x) = 3 \cdot x + \frac{1}{x}.$$

Odredimo:

$$\int p(x) \cdot \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x = \ln x,$$

$$\int q(x) \cdot e^{\int p(x) \cdot \mathrm{d}x} \cdot \mathrm{d}x = \int \left(3 \cdot x + \frac{1}{x} \right) \cdot e^{\ln x} \cdot \mathrm{d}x = \int \left(3 \cdot x + \frac{1}{x} \right) \cdot x \cdot \mathrm{d}x = \int 3 \cdot x^2 \cdot \mathrm{d}x + \int 1 \cdot \mathrm{d}x = x^3 + x,$$

$$y = e^{-\ln x} \cdot \left(x^3 + x + C \right) = e^{\ln\left(x^{-1}\right)} \cdot \left(x^3 + x + C \right) = x^{-1} \cdot \left(x^3 + x + C \right) = C \cdot x^{-1} + x^2 + 1.$$

Uvrštavanjem početnoga uvjeta $(x = 1,\ y = 2)$ dobivamo:

$$2 = C \cdot 1^{-1} + 1^2 + 1 \Leftrightarrow C + 1 + 1 = 2 \Leftrightarrow C = 0.$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija

$$y = x^2 + 1.$$

8. Riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} \sin^2 x \cdot y' + \sin(2\cdot x)\cdot y = \cos x, \\ y\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right) = 0. \end{cases}$$

Rješenje: Koristit ćemo identitet $\sin(2\cdot x) = 2\cdot\sin x\cdot\cos x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Transformirajmo zadanu običnu diferencijalnu jednadžbu ovako:

$$\sin^2 x\cdot y' + 2\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot y = \cos x \Rightarrow y' + \frac{2\cdot\sin x\cdot\cos x}{\sin^2 x}\cdot y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} \Rightarrow$$
$$y' + \frac{2\cdot\cos x}{\sin x}\cdot y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} \Leftrightarrow y' + 2\cdot(\operatorname{ctg} x)\cdot y = \frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

Vidimo da se radi o nehomogenoj linearnoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. reda. Očitamo:

$$p(x) = 2\cdot\operatorname{ctg} x,\ q(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

Odredimo:

$$\int p(x)\cdot\mathrm{d}x = \int 2\cdot\operatorname{ctg} x\cdot\mathrm{d}x = 2\cdot\int\operatorname{ctg} x\cdot\mathrm{d}x = 2\cdot\ln(\sin x)$$
$$\int q(x)\cdot e^{\int p(x)\cdot\mathrm{d}x}\cdot\mathrm{d}x = \int\frac{\cos x}{\sin^2 x}\cdot e^{2\cdot\ln(\sin x)}\cdot\mathrm{d}x = \int\frac{\cos x}{\sin^2 x}\cdot e^{\ln\left((\sin x)^2\right)}\cdot\mathrm{d}x = \int\frac{\cos x}{\sin^2 x}\cdot\sin^2 x\cdot\mathrm{d}x =$$
$$= \int\cos x\cdot\mathrm{d}x = \sin x,$$
$$y = e^{-2\cdot\ln(\sin x)}\cdot\left(\sin x + C\right) = e^{\ln\left((\sin x)^{-2}\right)}\cdot\left(\sin x + C\right) = (\sin x)^{-2}\cdot\left(\sin x + C\right) =$$
$$= C\cdot(\sin x)^{-2} + (\sin x)^{-1} = \frac{C}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x}.$$

Uvrštavanjem početnoga uvjeta $\left(x = \frac{3}{2}\cdot\pi,\ y = 0\right)$ dobivamo:

$$0 = \frac{C}{\sin^2\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right)} \Leftrightarrow 0 = C - 1 \Leftrightarrow C = 1.$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija

$$y = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x} = \frac{1+\sin x}{\sin^2 x}.$$

9. Riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} y' + 2\cdot y = (x\cdot y)^2, \\ y(0) = 4. \end{cases}$$

Rješenje: Zapišimo zadanu običnu diferencijalnu jednadžbu u obliku:

$$y' + 2\cdot y = x^2\cdot y^2.$$

Vidimo da se radi o Bernoullijevoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi. Očitamo:

$$p(x) = 2,\ q(x) = x^2,\ k = 2.$$

Odredimo:

$$g(x) = e^{(1-k)\cdot\int p(x)\cdot \mathrm{d}x} = e^{(1-2)\cdot\int 2\cdot \mathrm{d}x} = e^{(-2)\cdot\int 1\cdot \mathrm{d}x} = e^{-2\cdot x},$$

$$y^{2-1} = \frac{e^{-2\cdot x}}{(1-2)\cdot\left(\int x^2\cdot e^{-2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x\right)+C} = \frac{e^{-2\cdot x}}{(-1)\cdot\left(\int x^2\cdot e^{-2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x\right)+C}.$$

Preostalu standardnu antiderivaciju odredimo dvostrukom primjenom metode djelomične integracije. Imamo redom:

$$\int x^2\cdot e^{-2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = x^2 & v = \int e^{-2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x = \frac{-1}{2}\cdot e^{-2\cdot x} \\ \mathrm{d}u = 2\cdot x\cdot \mathrm{d}x & \mathrm{d}v = e^{-2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x \end{matrix} \right| =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^2\cdot e^{-2\cdot x} - \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2\cdot \int x\cdot e^{-2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^2\cdot e^{-2\cdot x} + \int x\cdot e^{-2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x & v = \int e^{-2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x = \frac{-1}{2}\cdot e^{-2\cdot x} \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & \mathrm{d}v = e^{-2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x \end{matrix} \right| = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^2\cdot e^{-2\cdot x} + \left(\frac{-1}{2}\right)\cdot x\cdot e^{-2\cdot x} - \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot \int e^{-2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^2\cdot e^{-2\cdot x} - \frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{-2\cdot x} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot e^{-2\cdot x} =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^2\cdot e^{-2\cdot x} - \frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{-2\cdot x} - \frac{1}{4}\cdot e^{-2\cdot x}.$$

Zbog toga je:

$$y = \frac{e^{-2\cdot x}}{(-1)\cdot\left(\frac{-1}{2}\cdot x^2\cdot e^{-2\cdot x} - \frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{-2\cdot x} - \frac{1}{4}\cdot e^{-2\cdot x}\right)+C}\cdot\frac{4\cdot e^{2\cdot x}}{4\cdot e^{2\cdot x}} =$$

$$=\frac{4}{2\cdot x^2+x+1+4\cdot C\cdot e^{2\cdot x}}.$$

Uvrštavanjem početnoga uvjeta $(x=0,\ y=4)$ dobivamo:

$$4=\frac{4}{2\cdot 0^2+0+1+4\cdot C\cdot e^{2\cdot 0}}\Leftrightarrow 4=\frac{4}{4\cdot C+1}\Leftrightarrow 4\cdot C+1=1\Leftrightarrow C=0.$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija

$$y=\frac{4}{2\cdot x^2+x+1}.$$

10. Riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} y'-2\cdot y=2\cdot e^x\cdot\sqrt{y}, \\ y(0)=0. \end{cases}$$

Rješenje: Zapišimo zadanu običnu diferencijalnu jednadžbu u obliku:

$$y'-2\cdot y=2\cdot e^x\cdot y^{\frac{1}{2}}.$$

Vidimo da se radi o Bernoullijevoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi. Očitamo:

$$p(x)=-2,\ q(x)=2\cdot e^x,\ k=\frac{1}{2}.$$

Odredimo:

$$g(x)=e^{(1-k)\cdot\int p(x)\cdot \mathrm{d}x}=e^{\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\int(-2)\cdot \mathrm{d}x}=e^{\frac{1}{2}\cdot(-2)\cdot\int 1\cdot \mathrm{d}x}=e^{(-1)\cdot x}=e^{-x},$$

$$y^{\frac{1}{2}-1}=\frac{e^{-x}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\int 2\cdot e^{x\cdot}\cdot e^{-x}\cdot \mathrm{d}x\right)+C}=\frac{e^{-x}}{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(\int 1\cdot \mathrm{d}x\right)+C}=\frac{e^{-x}}{x+C}\Rightarrow$$

$$y^{\frac{-1}{2}}=\frac{e^{-x}}{x+C}\quad /^{-2}$$

$$y=\left(\frac{e^{-x}}{x+C}\right)^{-2}=\left(e^{-x}\cdot(x+C)^{-1}\right)^{-2}=\left(e^{-x}\right)^{-2}\cdot\left((x+C)^{-1}\right)^{-2}=e^{2\cdot x}\cdot(x+C)^2.$$

Uvrštavanjem početnoga uvjeta $(x=y=0)$ odmah slijedi $C=0$. Dakle, rješenje zadatka je funkcija

$$y=x^2\cdot e^{2\cdot x}.$$

11. Uz pretpostavku $y = y(t)$ riješite Cauchyjev problem

$$\begin{cases} y'' - y' - 12 \cdot y = 0, \\ y(\ln 2) = \dfrac{63}{4}, \\ y(-\ln 2) = -\dfrac{255}{16}. \end{cases}$$

Rješenje: Pripadna karakteristična jednadžba je:

$$k^2 - k - 12 = 0.$$

Njezina su rješenja $k_1 = -3,\ k_2 = 4.$ Zbog toga je opće rješenje polazne jednadžbe

$$y = C_1 \cdot e^{-3 \cdot t} + C_2 \cdot e^{4 \cdot t} \quad .$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta dobivamo:

$$\begin{cases} \dfrac{63}{4} = C_1 \cdot e^{-3 \cdot \ln 2} + C_2 \cdot e^{4 \cdot \ln 2}, \\ \dfrac{-255}{16} = C_1 \cdot e^{-3 \cdot (-\ln 2)} + C_2 \cdot e^{4 \cdot (-\ln 2)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{63}{4} = C_1 \cdot e^{\ln\left(2^{-3}\right)} + C_2 \cdot e^{\ln\left(2^{4}\right)}, \\ \dfrac{-255}{16} = C_1 \cdot e^{\ln\left(2^{3}\right)} + C_2 \cdot e^{\ln\left(2^{-4}\right)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{63}{4} = C_1 \cdot 2^{-3} + C_2 \cdot 2^{4}, \\ \dfrac{-255}{16} = C_1 \cdot 2^{3} + C_2 \cdot 2^{-4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + 128 \cdot C_2 = 126, \\ 128 \cdot C_1 + C_2 = -255 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (C_1, C_2) = (-2, 1).$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija

$$y = e^{4 \cdot t} - 2 \cdot e^{-3 \cdot t}.$$

12. Uz pretpostavku $y = y(t)$ riješite Cauchyjev problem

$$\begin{cases} y'' + 10 \cdot y' + 25 \cdot y = 0, \\ y(3) = e^{-15}, \\ y(-3) = -5 \cdot e^{15}. \end{cases}$$

Rješenje: Pripadna karakteristična jednadžba je:

$$k^2 + 10 \cdot k + 25 = 0.$$

Njezino jedinstveno rješenje je $k = -5$. Zbog toga je opće rješenje polazne jednadžbe

$$y = (C_1 \cdot t + C_2) \cdot e^{-5 \cdot t}.$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta dobivamo:

$$\begin{cases} e^{-15} = (3 \cdot C_1 + C_2) \cdot e^{-5 \cdot 3}, \\ -5 \cdot e^{15} = (-3 \cdot C_1 + C_2) \cdot e^{-5 \cdot (-3)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3 \cdot C_1 + C_2 = 1, \\ -3 \cdot C_1 + C_2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (C_1, C_2) = (1, -2).$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija

$$y = (t - 2) \cdot e^{-5 \cdot t}.$$

13. Uz pretpostavku $y = y(t)$ riješite Cauchyjev problem

$$\begin{cases} y'' + 4 \cdot y' + 29 \cdot y = 0, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{-\pi}, \\ y(\pi) = -2 \cdot e^{-2 \cdot \pi}. \end{cases}$$

Rješenje: Pripadna karakteristična jednadžba je:

$$k^2 + 4 \cdot k + 29 = 0.$$

Njezino rješenje sa strogo pozitivnim imaginarnim dijelom je $k = -2 + 5 \cdot i$. Zbog toga je opće rješenje polazne jednadžbe

$$y = (C_1 \cdot \cos(5 \cdot t) + C_2 \cdot \sin(5 \cdot t)) \cdot e^{-2 \cdot t}.$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta dobivamo:

$$\begin{cases} -e^{-\pi} = \left(C_1 \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + C_2 \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} \right) \cdot e^{(-2) \cdot \frac{\pi}{2}}, \\ -2 \cdot e^{-2 \cdot \pi} = \left(C_1 \cdot \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + C_2 \cdot \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} \right) \cdot e^{(-2) \cdot \pi}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = -1, \\ -C_1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow (C_1, C_2) = (2, -1).$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija

$$y = (2 \cdot \cos(5 \cdot t) - \sin(5 \cdot t)) \cdot e^{-2 \cdot t}.$$

14. Nađite neko partikularno rješenje obične diferencijalne jednadžbe

$$y'' - y' + y = x^2.$$

Rješenje: Pripadna karakteristična jednadžba glasi:

$$k^2 - k + 1 = 0.$$

Lako se vidi da 0 nije rješenje te jednadžbe i da je desna strana polazne jednadžbe polinom 2. stupnja. Zbog toga traženo partikularno rješenje tražimo u obliku polinoma 2. stupnja, tj. u obliku:

$$y_p = A \cdot x^2 + B \cdot x + C.$$

Odredimo prve dvije derivacije ovoga izraza:

$$y_p' = 2 \cdot A \cdot x + B,$$
$$y_p'' = 2 \cdot A.$$

Uvrštavanjem ovih triju izraza u polaznu jednadžbu dobivamo:

$$2 \cdot A - (2 \cdot A \cdot x + B) + \left(A \cdot x^2 + B \cdot x + C\right) = x^2 \Leftrightarrow$$
$$A \cdot x^2 + (-2 \cdot A + B) \cdot x + (2 \cdot A - B + C) = x^2 \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} A = 1, \\ -2 \cdot A + B = 0, \\ 2 \cdot A - B + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$(A, B, C) = (1, 2, 0).$$

Dakle, traženo partikularno rješenje je:

$$y_p = x^2 + 2 \cdot x.$$

Napomena 3. Partikularno rješenje je i svaki izraz dobiven uvrštavanjem „konkretnih“ realnih brojeva umjesto konstanti C_1 i C_2 u opće rješenje polazne jednadžbe. To opće rješenje u ovom je slučaju

$$y = \left(C_1 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x\right) + C_2 \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x\right)\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x} + x^2 + 2 \cdot x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

15. Nađite neko partikularno rješenje obične diferencijalne jednadžbe

$$2\cdot y'' + 3\cdot y' + 18\cdot x = 0.$$

Rješenje: Zapišimo zadanu jednadžbu u obliku:

$$2\cdot y'' + 3\cdot y' = -18\cdot x.$$

Pripadna karakteristična jednadžba glasi:

$$2\cdot k^2 + 3\cdot k = 0.$$

Lako se vidi da je 0 jednostruko rješenje te jednadžbe i da je desna strana polazne jednadžbe polinom 1. stupnja. Zbog toga traženo partikularno rješenje tražimo u obliku:

$$y_p = x^1\cdot\left(A\cdot x + B\right) = A\cdot x^2 + B\cdot x.$$

Odredimo prve dvije derivacije ovoga izraza:

$$y_p' = 2\cdot A\cdot x + B,$$
$$y_p'' = 2\cdot A.$$

Uvrštavanjem ovih dvaju izraza u polaznu jednadžbu dobivamo:

$$\begin{aligned}
&2\cdot(2\cdot A) + 3\cdot(2\cdot A\cdot x + B) = -18\cdot x \Leftrightarrow\\
&6\cdot A\cdot x + (4\cdot A + 3\cdot B) = -18\cdot x \Leftrightarrow\\
&\begin{cases} 6\cdot A = -18, \\ 4\cdot A + 3\cdot B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow\\
&(A, B) = (-3, 4).
\end{aligned}$$

Dakle, traženo partikularno rješenje je:

$$y_p = -3\cdot x^2 + 4\cdot x.$$

Napomena 4. Partikularno rješenje je i svaki izraz dobiven uvrštavanjem „konkretnih“ realnih brojeva umjesto konstanti C_1 i C_2 u opće rješenje polazne jednadžbe. To opće rješenje u ovom je slučaju

$$y = C_1\cdot e^{\frac{-3}{2}\cdot x} + x^2 + 2\cdot x + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

16. Nađite neko partikularno rješenje obične diferencijalne jednadžbe

$$y'' + 4 \cdot y' + 7 \cdot y = 19 \cdot e^{2 \cdot t}.$$

Rješenje: Pripadna karakteristična jednadžba glasi:

$$k^2 + 4 \cdot k + 7 = 0.$$

Lako se vidi da 2 nije rješenje te jednadžbe i da je desna strana polazne jednadžbe funkcija oblika $E \cdot e^{2 \cdot t}$. Zbog toga traženo partikularno rješenje tražimo u obliku:

$$y_p = A \cdot e^{2 \cdot t}.$$

Odredimo prve dvije derivacije ovoga izraza:

$$y_p' = 2 \cdot A \cdot e^{2 \cdot t},$$
$$y_p'' = 4 \cdot A \cdot e^{2 \cdot t}.$$

Uvrštavanjem ovih triju izraza u polaznu jednadžbu dobivamo:

$$\begin{aligned}
&4 \cdot A \cdot e^{2 \cdot t} + 4 \cdot \left(2 \cdot A \cdot e^{2 \cdot t}\right) + 7 \cdot \left(A \cdot e^{2 \cdot t}\right) = 19 \cdot e^{2 \cdot t} \Leftrightarrow \\
&6 \cdot A + 8 \cdot A + 7 \cdot A = 19 \Leftrightarrow \\
&19 \cdot A = 19 \Leftrightarrow \\
&A = 1.
\end{aligned}$$

Dakle, traženo partikularno rješenje je:

$$y_p = e^{2 \cdot t}.$$

Napomena 5. Partikularno rješenje je i svaki izraz dobiven uvrštavanjem „konkretnih“ realnih brojeva umjesto konstanti C_1 i C_2 u opće rješenje polazne jednadžbe. To opće rješenje u ovom je slučaju

$$y = \left(C_1 \cdot \cos\left(\sqrt{3} \cdot t\right) + C_2 \cdot \sin\left(\sqrt{3} \cdot t\right)\right) \cdot e^{-2 \cdot t} + e^{2 \cdot t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

17. Nađite neko partikularno rješenje obične diferencijalne jednadžbe

$$y'' + 4 \cdot y' + 4 \cdot e^{-4 \cdot t} = 0.$$

Rješenje: Zapišimo zadanu jednadžbu u obliku:

$$y'' + 4 \cdot y' = -4 \cdot e^{-4 \cdot t}.$$

Pripadna karakteristična jednadžba glasi:

$$k^2 + 4 \cdot k = 0.$$

Lako se vidi da je –4 jednostruko rješenje te jednadžbe i da je desna strana polazne jednadžbe funkcija oblika $E \cdot e^{-4 \cdot t}$. Zbog toga traženo partikularno rješenje tražimo u obliku:

$$y_p = t^1 \cdot \left(A \cdot e^{-4 \cdot t} \right) = A \cdot t \cdot e^{-4 \cdot t}.$$

Odredimo prve dvije derivacije ovoga izraza:

$$\begin{aligned} y_p' &= A \cdot e^{-4 \cdot t} + A \cdot t \cdot (-4) \cdot e^{-4 \cdot t} = (-4 \cdot A \cdot t + A) \cdot e^{-4 \cdot t}, \\ y_p'' &= -4 \cdot A \cdot e^{-4 \cdot t} + (-4 \cdot A \cdot t + A) \cdot (-4) \cdot e^{-4 \cdot t} = (16 \cdot A \cdot t - 8 \cdot A) \cdot e^{-4 \cdot t}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem ovih dvaju izraza u polaznu jednadžbu dobivamo:

$$\begin{aligned} & (16 \cdot A \cdot t - 8 \cdot A) \cdot e^{-4 \cdot t} + 4 \cdot (-4 \cdot A \cdot t + A) \cdot e^{-4 \cdot t} = -4 \cdot e^{4 \cdot t} \Leftrightarrow \\ & -8 \cdot A + 4 \cdot A = -4 \Leftrightarrow \\ & (-4) \cdot A = -4 \Leftrightarrow \\ & A = 1. \end{aligned}$$

Dakle, traženo partikularno rješenje je:

$$y_p = t \cdot e^{-4 \cdot t}.$$

Napomena 6. Partikularno rješenje je i svaki izraz dobiven uvrštavanjem „konkretnih“ realnih brojeva umjesto konstanti C_1 i C_2 u opće rješenje polazne jednadžbe. To opće rješenje u ovom je slučaju

$$y = (t + C_1) \cdot e^{-4 \cdot t} + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

18. Nađite neko partikularno rješenje obične diferencijalne jednadžbe

$$y'' + y' + y + 13 \cdot \sin(2 \cdot t) = 0.$$

Rješenje: Zapišimo zadanu običnu diferencijalnu jednadžbu u obliku:

$$y'' + y' + y = -13 \cdot \sin(2 \cdot t).$$

Pripadna karakteristična jednadžba glasi:

$$k^2 + k + 1 = 0.$$

Lako se vidi da $2 \cdot i$ nije rješenje te jednadžbe i da je desna strana polazne jednadžbe funkcija oblika $E \cdot \sin(2 \cdot t)$. Zbog toga traženo partikularno rješenje tražimo u obliku:

$$y_p = A \cdot \cos(2 \cdot t) + B \cdot \sin(2 \cdot t)$$

Odredimo prve dvije derivacije ovoga izraza:

$$y_p' = 2 \cdot B \cdot \cos(2 \cdot t) - 2 \cdot A \cdot \sin(2 \cdot t),$$
$$y_p'' = -4 \cdot B \cdot \sin(2 \cdot t) - 4 \cdot A \cdot \cos(2 \cdot t).$$

Uvrštavanjem ovih triju izraza u polaznu jednadžbu dobivamo:

$$-4 \cdot B \cdot \sin(2 \cdot t) - 4 \cdot A \cdot \cos(2 \cdot t) + 2 \cdot B \cdot \cos(2 \cdot t) - 2 \cdot A \cdot \sin(2 \cdot t) + A \cdot \cos(2 \cdot t) +$$
$$+ B \cdot \sin(2 \cdot t) = -13 \cdot \sin(2 \cdot t) \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} -3 \cdot A + 2 \cdot B = 0, \\ -2 \cdot A - 3 \cdot B = -13 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$(A, B) = (2, 3).$$

Dakle, traženo partikularno rješenje je:

$$y_p = 2 \cdot \cos(2 \cdot t) + 3 \cdot \sin(2 \cdot t).$$

Napomena 7. Partikularno rješenje je i svaki izraz dobiven uvrštavanjem „konkretnih“ realnih brojeva umjesto konstanti C_1 i C_2 u opće rješenje polazne jednadžbe. To opće rješenje u ovom je slučaju

$$y = \left(C_1 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t \right) + C_2 \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t \right) \right) \cdot e^{\frac{-1}{2} \cdot t} + 2 \cdot \cos(2 \cdot t) + 3 \cdot \sin(2 \cdot t),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

19. Nađite neko partikularno rješenje obične diferencijalne jednadžbe

$$y'' + y' + 2\cdot\left(e^x - \cos x\right) = 0.$$

Rješenje: Zapišimo zadanu običnu diferencijalnu jednadžbu u obliku:

$$y'' + y' = 2\cdot\cos x - 2\cdot e^x.$$

Pripadna karakteristična jednadžba glasi:

$$k^2 + k = 0.$$

Lako se vidi da 1 i $1\cdot i = i$ nisu rješenja te jednadžbe. Desna strana polazne jednadžbe je funkcija oblika $E_1\cdot\cos x + E_2\cdot e^x$. Primjenom načela superpozicije zaključujemo da partikularno rješenje treba tražiti u obliku:

$$y_p = A\cdot\cos x + B\cdot\sin x + C\cdot e^x.$$

Odredimo prve dvije derivacije ovoga izraza:

$$y_p' = -A\cdot\sin x + B\cdot\cos x + C\cdot e^x,$$
$$y_p'' = -A\cdot\cos x - B\cdot\sin x + C\cdot e^x.$$

Uvrštavanjem ovih dvaju izraza u polaznu jednadžbu dobivamo:

$$-A\cdot\cos x - B\cdot\sin x + C\cdot e^x + \left(-A\cdot\sin x + B\cdot\cos x + C\cdot e^x\right) = 2\cdot\cos x - 2\cdot e^x \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} -A + B = 2, \\ -A - B = 0, \\ 2\cdot C = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$(A, B, C) = (-1, 1, 1).$$

Dakle, traženo partikularno rješenje je:

$$y_p = \sin x - \cos x - e^x.$$

Napomena 8. Partikularno rješenje je i svaki izraz dobiven uvrštavanjem „konkretnih“ realnih brojeva umjesto konstanti C_1 i C_2 u opće rješenje polazne jednadžbe. To opće rješenje u ovom je slučaju

$$y = C_1\cdot e^{-x} + C_2 + \sin x - \cos x - e^x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

20. Nađite neko partikularno rješenje obične diferencijalne jednadžbe

$$y'' - 2 \cdot y' = 20 \cdot (t + \sin t).$$

Rješenje: Pripadna karakteristična jednadžba glasi:

$$k^2 - 2 \cdot k = 0.$$

Lako se vidi da je 0 rješenje te jednadžbe, kao i da $1 \cdot i = i$ nije njezino rješenje. Desna strana polazne jednadžbe je funkcija oblika $E_1 \cdot t + E_2 \cdot \sin t$. Primjenom načela superpozicije zaključujemo da partikularno rješenje treba tražiti u obliku:

$$y_p = x \cdot (A \cdot t + B) + C \cdot \cos t + D \cdot \sin t = A \cdot t^2 + B \cdot t + C \cdot \cos t + D \cdot \sin t.$$

Odredimo prve dvije derivacije ovoga izraza:

$$y_p' = 2 \cdot A \cdot t + B - C \cdot \sin t + D \cdot \cos t,$$
$$y_p'' = 2 \cdot A - C \cdot \cos t - D \cdot \sin t.$$

Uvrštavanjem ovih dvaju izraza u polaznu jednadžbu dobivamo:

$$2 \cdot A - C \cdot \cos t - D \cdot \sin t - 2 \cdot \left(2 \cdot A \cdot t + B - C \cdot \sin t + D \cdot \cos t\right) = 20 \cdot (t + \sin t) \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} -4 \cdot A = 20, \\ 2 \cdot A - 2 \cdot B = 0, \\ 2 \cdot C - D = 20, \\ -C - 2 \cdot D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$(A, B, C, D) = (-5, -5, 8, -4).$$

Dakle, traženo partikularno rješenje je:

$$y_p = (-5) \cdot t^2 - 5 \cdot t + 8 \cdot \cos t - 4 \cdot \sin t.$$

Napomena 9. Partikularno rješenje je i svaki izraz dobiven uvrštavanjem „konkretnih“ realnih brojeva umjesto konstanti C_1 i C_2 u opće rješenje polazne jednadžbe. To opće rješenje u ovom je slučaju

$$y = C_1 \cdot e^{2 \cdot t} - 5 \cdot t^2 - 5 \cdot t + C_2 + 8 \cdot \cos t - 4 \cdot \sin t,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

21. Odredite Laplaceov transformat $F = F(s)$ funkcije $f:[0,+\infty\rangle \to \mathbb{R}$ definirane pravilom:

$$f(t) = \begin{cases} 0, \text{ za } t \in [0,6\rangle, \\ 2\cdot t, \text{ za } t \geq 6. \end{cases}$$

Rješenje: Koristeći definiciju Laplaceova transformata imamo redom:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} 2\cdot t\cdot e^{-s\cdot t}\cdot \mathrm{d}t - \int_0^6 2\cdot t\cdot e^{-s\cdot t}\cdot \mathrm{d}t + \underbrace{\int_0^6 0\cdot e^{-s\cdot t}\cdot \mathrm{d}t}_{=0} = 2\cdot \underbrace{\mathcal{L}(\{t\})}_{=\frac{1}{s^2}} - \int_0^6 2\cdot t\cdot e^{-s\cdot t}\cdot \mathrm{d}t + 0 =$$

$$= \frac{2}{s^2} - 2\cdot \int_0^6 t\cdot e^{-s\cdot t}\cdot \mathrm{d}t = \left| \begin{array}{ll} u = t & v = \int e^{-s\cdot t}\cdot \mathrm{d}t = \left(-\frac{1}{s}\right)\cdot e^{-s\cdot t} \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}t & \mathrm{d}v = e^{-s\cdot t}\cdot \mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2}{s^2} - 2\cdot \left(\left(-\frac{1}{s}\cdot t\cdot e^{-s\cdot t}\right)\Bigg|_0^6 - \int_0^6 \left(-\frac{1}{s}\right)\cdot e^{-s\cdot t}\cdot \mathrm{d}t \right) =$$

$$= \frac{2}{s^2} - 2\cdot \left(-\frac{1}{s}\cdot 6\cdot e^{-6\cdot s} - 0 + \frac{1}{s}\cdot \int_0^6 e^{-s\cdot t}\cdot \mathrm{d}t \right) =$$

$$= \frac{2}{s^2} + \frac{12\cdot e^{-6\cdot s}}{s} - \frac{2}{s}\cdot \left(\left(\frac{-1}{s}\cdot e^{-s\cdot t}\right)\Bigg|_0^6 \right) =$$

$$= \frac{2}{s^2} + \frac{12\cdot e^{-6\cdot s}}{s} - \frac{2}{s}\cdot \left(\frac{-1}{s}\cdot e^{-6\cdot s} - \left(-\frac{1}{s}\cdot 1\right) \right) =$$

$$= \frac{2}{s^2} + \frac{12\cdot e^{-6\cdot s}}{s} + \frac{2\cdot e^{-6\cdot s}}{s^2} - \frac{2}{s^2} =$$

$$= 2\cdot \left(\frac{6\cdot s + 1}{s^2} \right)\cdot e^{-6\cdot s}.$$

22. Odredite Laplaceov transformat $F = F(s)$ funkcije $f:[0,+\infty\rangle \to \mathbb{R}$ definirane pravilom:

$$f(t) = \begin{cases} 5, \text{ za } t \in [0,8], \\ 10, \text{ za } t > 8. \end{cases}$$

Rješenje: Koristeći definiciju Laplaceova transformata imamo redom:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} 10 \cdot e^{-s\cdot t} \cdot \mathrm{d}t - \int_0^8 10 \cdot e^{-s\cdot t} \cdot \mathrm{d}t + \int_0^8 5 \cdot e^{-s\cdot t} \cdot \mathrm{d}t = 10 \cdot \underbrace{\mathcal{L}(\{1\})}_{=\frac{1}{s}} + \int_0^8 (5-10) \cdot e^{-s\cdot t} \cdot \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{10}{s} - 5 \cdot \int_0^8 1 \cdot e^{-s\cdot t} \cdot \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{10}{s} - 5 \cdot \left(\left(-\frac{1}{s} \cdot e^{-s\cdot t} \right) \Big|_0^8 \right) =$$

$$= \frac{10}{s} - 5 \cdot \left(-\frac{1}{s} \cdot e^{-8\cdot s} - \left(-\frac{1}{s} \cdot 1 \right) \right) =$$

$$= \frac{10}{s} + \frac{5}{s} \cdot e^{-8\cdot s} - \frac{5}{s} =$$

$$= \frac{5}{s} + \frac{5}{s} \cdot e^{-8\cdot s} =$$

$$= \frac{5}{s} \cdot \left(1 + e^{-8\cdot s}\right).$$

Napomena 10. Neka su $a,b,c \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b$ i $c > 0$. Za vježbu dokažite da je Laplaceov transformat $F = F(s)$ funkcije $f:[0,+\infty\rangle \to \mathbb{R}$ definirane pravilom

$$f(t) = \begin{cases} a, \text{ za } t \in [0,c], \\ b, \text{ za } t > c \end{cases}$$

dan pravilom

$$F(s) = \frac{a + (b-a) \cdot e^{-c\cdot s}}{s}.$$

Vrijedi li tvrdnja ako $[0,c]$ zamijenimo s $[0,c\rangle$, a $t > c$ s $t \geq c$? Objasnite svoj odgovor.

Uputa: Postupite analogno kao u rješenju zadatka 22. Tvrdnja vrijedi i u navedenom slučaju jer vrijednost integrabilne funkcije u točno jednoj točki (zapravo, rubu područja integracije) nema utjecaja na vrijednost određenoga integrala.

23. Isključivo pomoću Laplaceovih transformata riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} y'' - y = 2 \cdot e^x, \\ y(0) = 6, \\ y'(0) = 7. \end{cases}$$

Rješenje: Odredimo Laplaceov transformat svakoga člana zadane jednadžbe:

$$\begin{aligned} & y'' \mapsto s^2 \cdot F(s) - s \cdot y(0) - y'(0) = s^2 \cdot F(s) - 6 \cdot s - 7, \\ & y \mapsto F(s), \\ & e^x \mapsto \frac{1}{s-1}, \end{aligned}$$

pa uvrstimo dobivene izraze umjesto njihovih originala u jednadžbu:

$$\begin{aligned} & s^2 \cdot F(s) - 6 \cdot s - 7 - F(s) = 2 \cdot \frac{1}{s-1}, \\ & F(s) \cdot \left(s^2 - 1\right) = \frac{2}{s-1} + 6 \cdot s + 7, \\ & F(s) \cdot (s-1) \cdot (s+1) = \frac{2 + (6 \cdot s + 7) \cdot (s-1)}{s-1}, \\ & F(s) = \frac{2 + 6 \cdot s^2 + 7 \cdot s - 6 \cdot s - 7}{(s-1) \cdot (s-1) \cdot (s+1)}, \\ & F(s) = \frac{6 \cdot s^2 + s - 5}{(s-1)^2 \cdot (s+1)}. \end{aligned}$$

Rastavimo brojnik posljednjega razlomka na faktore. Riješimo jednadžbu $6 \cdot s^2 + s - 5 = 0$. Dobivamo $s_1 = -1$, $s_2 = \frac{5}{6}$. Prema osnovnom teoremu algebre slijedi:

$$6 \cdot s^2 + s - 5 = 6 \cdot (s - (-1)) \cdot \left(s - \frac{5}{6}\right) = (s+1) \cdot (6 \cdot s - 5).$$

Zbog toga je

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{(s+1) \cdot (6 \cdot s - 5)}{(s-1)^2 \cdot (s+1)} = \frac{6 \cdot s - 5}{(s-1)^2} = \frac{6 \cdot s - 6 + 1}{(s-1)^2} = \frac{6 \cdot s - 6}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^2} = \frac{6 \cdot (s-1)}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^2} = \\ &= \frac{6}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} = 6 \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}. \end{aligned}$$

Koristeći tablicu Laplaceovih transformata lako dobivamo konačno rješenje:

$$y = 6 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x+6) \cdot e^x.$$

24.Isključivo pomoću Laplaceovih transformata riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} y'' + 4 \cdot y = 16 \cdot t, \\ y(0) = -1, \\ y'(0) = 4. \end{cases}$$

Rješenje: Odredimo Laplaceov transformat svakoga člana zadane jednadžbe:

$$y'' \mapsto s^2 \cdot F(s) - s \cdot y(0) - y'(0) = s^2 \cdot F(s) - s \cdot (-1) - 4 = s^2 \cdot F(s) + s - 4,$$
$$y \mapsto F(s),$$
$$t \mapsto \frac{1}{s^2},$$

pa uvrstimo dobivene izraze umjesto njihovih originala u jednadžbu:

$$s^2 \cdot F(s) + s - 4 + 4 \cdot F(s) = 16 \cdot \frac{1}{s^2},$$
$$F(s) \cdot \left(s^2 + 4\right) = \frac{16}{s^2} - s + 4,$$
$$F(s) \cdot \left(s^2 + 4\right) = \frac{16 - s^3 + 4 \cdot s^2}{s^2},$$
$$F(s) = \frac{-s^3 + 4 \cdot s^2 + 16}{s^2 \cdot \left(s^2 + 4\right)} = \frac{-s^3}{s^2 \cdot \left(s^2 + 4\right)} + \frac{4 \cdot s^2 + 16}{s^2 \cdot \left(s^2 + 4\right)} = \frac{-s}{s^2 + 4} + \frac{4 \cdot \left(s^2 + 4\right)}{s^2 \cdot \left(s^2 + 4\right)} =$$
$$= \frac{-s}{s^2 + 4} + \frac{4}{s^2} = 4 \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{s}{s^2 + 2^2}.$$

Koristeći tablicu Laplaceovih transformata lako dobivamo konačno rješenje:

$$y = 4 \cdot t - \cos(2 \cdot t).$$

25.Isključivo pomoću Laplaceovih transformata riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} y'' + 2 \cdot y' = \sin t - 2 \cdot \cos t, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -3. \end{cases}$$

Rješenje: Odredimo Laplaceov transformat svakoga člana zadane jednadžbe:

$$y'' \mapsto s^2 \cdot F(s) - s \cdot y(0) - y'(0) = s^2 \cdot F(s) - s \cdot 1 - (-3) = s^2 \cdot F(s) - s + 3,$$
$$y' \mapsto s \cdot F(s) - y(0) = s \cdot F(s) - 1,$$
$$\sin t \mapsto \frac{1}{s^2+1},$$
$$\cos t \mapsto \frac{s}{s^2+1},$$

pa uvrstimo dobivene izraze umjesto njihovih originala u jednadžbu:

$$s^2 \cdot F(s) - s + 3 + 2 \cdot (s \cdot F(s) - 1) = \frac{1}{s^2+1} - 2 \cdot \frac{s}{s^2+1},$$
$$s^2 \cdot F(s) - s + 3 + 2 \cdot s \cdot F(s) - 2 = \frac{1 - 2 \cdot s}{s^2+1},$$
$$F(s) \cdot \left(s^2 + 2 \cdot s\right) = \frac{1 - 2 \cdot s}{s^2+1} + s - 1,$$
$$F(s) \cdot \left(s \cdot (s+2)\right) = \frac{1 - 2 \cdot s + (s-1) \cdot \left(s^2+1\right)}{s^2+1},$$
$$F(s) = \frac{1 - 2 \cdot s + s^3 - s^2 + s - 1}{\left(s^2+1\right) \cdot s \cdot (s+2)},$$
$$F(s) = \frac{s^3 - s^2 - s}{\left(s^2+1\right) \cdot s \cdot (s+2)} = \frac{s \cdot \left(s^2 - s - 1\right)}{\left(s^2+1\right) \cdot s \cdot (s+2)} = \frac{s^2 - s - 1}{\left(s^2+1\right) \cdot (s+2)} = \frac{s^2 + 1 - s - 2}{\left(s^2+1\right) \cdot (s+2)} =$$
$$= \frac{s^2+1}{\left(s^2+1\right) \cdot (s+2)} - \frac{s+2}{\left(s^2+1\right) \cdot (s+2)} = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{s-(-2)} - \frac{1}{s^2+1^2}.$$

Koristeći tablicu Laplaceovih transformata lako odredimo konačno rješenje:

$$y = e^{-2 \cdot t} - \sin t.$$

26. Isključivo pomoću Laplaceovih transformata riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} y'' - 2\cdot y' + 2\cdot y = e^x, \\ y(0) = y'(0) = 2. \end{cases}$$

Rješenje: Odredimo Laplaceov transformat svakoga člana zadane jednadžbe:

$$\begin{aligned}
&y'' \mapsto s^2\cdot F(s) - s\cdot y(0) - y'(0) = s^2\cdot F(s) - s\cdot 2 - 2 = s^2\cdot F(s) - 2\cdot s - 2,\\
&y' \mapsto s\cdot F(s) - y(0) = s\cdot F(s) - 2,\\
&y \mapsto F(s)\\
&e^x \mapsto \frac{1}{s-1},
\end{aligned}$$

pa uvrstimo dobivene izraze umjesto njihovih originala u jednadžbu:

$$\begin{aligned}
&s^2\cdot F(s) - 2\cdot s - 2 - 2\cdot(s\cdot F(s) - 2) + 2\cdot F(s) = \frac{1}{s-1},\\
&F(s)\cdot\left(s^2 - 2\cdot s + 2\right) = \frac{1}{s-1} + 2\cdot s - 2,\\
&F(s)\cdot\left(s^2 - 2\cdot s + 2\right) = \frac{1 + (s-1)\cdot(2\cdot s - 2)}{s-1},\\
&F(s) = \frac{1 + 2\cdot s^2 - 2\cdot s - 2\cdot s + 2}{(s-1)\cdot\left(s^2 - 2\cdot s + 2\right)} = \frac{2\cdot s^2 - 4\cdot s + 3}{(s-1)\cdot\left(s^2 - 2\cdot s + 2\right)}.
\end{aligned}$$

Rastavimo ovu racionalnu funkciju na parcijalne razlomke. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&\frac{2\cdot s^2 - 4\cdot s + 3}{(s-1)\cdot\left(s^2 - 2\cdot s + 2\right)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B\cdot s + C}{s^2 - 2\cdot s + 2} \Rightarrow\\
&2\cdot s^2 - 4\cdot s + 3 = A\cdot\left(s^2 - 2\cdot s + 2\right) + (B\cdot s + C)\cdot(s-1) \Rightarrow\\
&\begin{cases} s = 1 \Rightarrow A = 1, \\ s = 0 \Rightarrow 2\cdot A - C = 3, \\ s = -1 \Rightarrow 5\cdot A + 2\cdot B - 2\cdot C = 9 \end{cases} \Leftrightarrow (A, B, C) = (1, 1, -1).
\end{aligned}$$

Zbog toga je

$$F(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{s-1}{s^2 - 2\cdot s + 2} = \frac{1}{s-1} + \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1}.$$

Koristeći tablicu Laplaceovih transformata lako odredimo konačno rješenje:

$$y = e^x\cdot(1 + \cos x).$$

27. Odredite eksplicitnu jednadžbu ravninske krivulje koja dodiruje pravac $p \ldots y = -2$, a određena je običnom diferencijalnom jednadžbom $x \cdot y' + y = 2 \cdot x$. Pojednostavnite dobivenu jednadžbu što više možete.

Rješenje: Pravac p je tangenta na traženu krivulju. Njegov koeficijent smjera je $k = 0$, a prolazi točkom $T = (x_T, -2)$. Budući da je koeficijent smjera tangente *u bilo kojoj točki* krivulje jednak prvoj derivaciji izraza koji zadaje tu krivulju, uvrštavanjem $y' = 0$ i $y = 2$ u običnu diferencijalnu jednadžbu kojom je zadana krivulja dobivamo:

$$x_T \cdot 0 - 2 = 2 \cdot x_T \Leftrightarrow x_T = -1.$$

Dakle, tražena krivulja dodiruje pravac p u točki $T = (-1, -2)$.

Sada riješimo Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} x \cdot y' + y = 2 \cdot x, \\ y(-1) = -2. \end{cases}$$

Prvu jednadžbu podijelimo s x:

$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = 2,$$

pa vidimo da je riječ o nehomogenoj linearnoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. reda. Očitamo pripadne funkcije: $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = 2$ i uvrstimo ih u pripadnu formulu za opće rješenje:

$$y = e^{-\int \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x} \cdot \left(\int e^{\int \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x} \cdot 2 \cdot \mathrm{d}x + C \right) = e^{-\ln x} \cdot \left(\int e^{\ln x} \cdot 2 \cdot \mathrm{d}x + C \right) =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \left(\int x \cdot 2 \cdot \mathrm{d}x + C \right) = \frac{1}{x} \cdot \left(x^2 + C \right) = x + \frac{C}{x}.$$

Uvrštavanjem početnoga uvjeta $(x = -1,\ y = -2)$ dobivamo:

$$-2 = -1 + \frac{C}{-1} \Leftrightarrow -C - 1 = -2 \Leftrightarrow C = 1.$$

Dakle, tražena krivulja je:

$$K \ldots y = x + \frac{1}{x}.$$

28. Odredite eksplicitnu jednadžbu ravninske krivulje koja prolazi točkom $A = (3,\ 1)$ i ima svojstvo da je koeficijent smjera normale povučene na krivulju u bilo kojoj točki krivulje jednak količniku apscise i ordinate te točke.

Rješenje: Iz zadanih podataka dobivamo sljedeći Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} \dfrac{-1}{y'} = \dfrac{x}{y}, \\ y(3) = 1. \end{cases}$$

Invertiranjem prve jednakosti dobivamo:

$$-y' = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y' + \frac{1}{x} \cdot y = 0.$$

Dobili smo homogenu linearnu običnu diferencijalnu jednadžbu 1. reda. Očitamo $p(x) = \dfrac{1}{x}$, pa uvrstimo ovu funkciju u formulu za opće rješenje navedenoga tipa jednadžbe:

$$y = C \cdot e^{-\int \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x} = C \cdot e^{-\ln|x|} = C \cdot e^{\ln\left(|x|^{-1}\right)} = C \cdot |x|^{-1} = \frac{C}{|x|}.$$

Rješenje problema tražimo u okolini točke A za koju je $x_A = 3 > 0$. Zbog toga smijemo izostaviti apsolutnu vrijednost, te dobiti:

$$y = \frac{C}{x}.$$

Uvrštavanjem početnoga uvjeta $(x = 3,\ y = 1)$ dobivamo jednadžbu $\dfrac{C}{3} = 1$, iz koje je odmah $C = 3$.

Dakle, rješenje zadatka je hiperbola $y = \dfrac{3}{x}$.

29. Vrijeme poluraspada tricija iznosi 12.3 godina. Pretpostavljamo da je brzina raspadanja proporcionalna količini neraspadnutoga dijela tricija. Za koliko će se godina početna količina tricija smanjiti na petinu te količine? Zaokružite rezultat na jednu decimalu.

Rješenje: Neka su x_0 količina tricija u trenutku $t=0$, a $x=x(t)$ količina neraspadnutoga tricija nakon t godina. Na temelju podataka u zadatku možemo postaviti sljedeći Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} x' = k\cdot x, \\ x(0)=x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - k\cdot x = 0, \\ x(0)=x_0. \end{cases}.$$

Pripadna obična diferencijalna jednadžba je homogena linearna obična diferencijalna jednadžba 1. reda. Očitamo $p(x)=-k$, pa dobijemo:

$$x(t) = C\cdot e^{-\int(-k)\cdot \mathrm{d}t} = C\cdot e^{k\cdot\int 1\cdot \mathrm{d}t} = C\cdot e^{k\cdot t}.$$

Uvrštavanjem početnoga uvjeta $(t=0,\ x(t)=x_0)$ odmah dobivamo $C=x_0$. Dakle,

$$x(t) = x_0\cdot e^{k\cdot t}.$$

Izrazimo konstantu k pomoću vremena poluraspada τ. Znamo da je $x(\tau)=\frac{1}{2}\cdot x_0$, pa uvrštavanjem $t=\tau$ u pravilo funkcije x dobijemo:

$$\frac{1}{2}\cdot x_0 = x_0\cdot e^{k\cdot\tau} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{k\cdot\tau} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = k\cdot\tau \Leftrightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\tau} = \frac{\ln 1 - \ln 2}{\tau} = \frac{-\ln 2}{\tau}.$$

Tako slijedi:

$$x(t) = x_0\cdot e^{\left(\frac{-\ln 2}{\tau}\right)\cdot t} = x_0\cdot e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)\cdot \ln 2} = x_0\cdot e^{\ln\left(2^{\frac{-t}{\tau}}\right)} = x_0\cdot 2^{\frac{-t}{\tau}}.$$

Preostaje riješiti jednadžbu $x(t)=\frac{1}{5}\cdot x_0$. Lako se dobiva:

$$\frac{1}{5}\cdot x_0 = x_0\cdot 2^{\frac{-t}{\tau}} \Leftrightarrow 2^{\frac{-t}{\tau}} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{-t}{\tau} = \log_2\left(\frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow \frac{-t}{\tau} = \underbrace{\log_2 1}_{=0} - \log_2 5 \Leftrightarrow$$

$$t = \left(\log_2 5\right)\cdot\tau = \left(\log_2 5\right)\cdot 12.3 \approx 28.6 \text{ godina.}$$

30. Grad Brbljograd ima ukupno 40 000 stanovnika. „Sočni trač“ se širi gradom tako da je u svakom trenutku trenutna brzina širenja „trača“ proporcionalna broju stanovnika koji do toga trenutka **nisu** čuli „trač“. Do zaključno 9:00 sati „trač“ je čulo ukupno 4000 ljudi, a do zaključno podneva „trač“ je čula polovica grada. Koliko će ukupno ljudi čuti trač do zaključno 13:00 sati? Zaokružite rezultat na najbliži prirodan broj.

Rješenje: Neka je $N = N(t)$ broj stanovnika koji su čuli „trač“ do trenutka t. Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je početni trenutak 9:00 sati i da je t vrijeme iskazano u satima (računajući od 9:00 sati). Iz zadanih podataka dobivamo sljedeći Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} N'(t) = k \cdot (40000 - N), \\ N(0) = 4000, \\ N(3) = 20000. \end{cases}$$

gdje je $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ konstanta proporcionalnosti. Riješimo navedeni problem.

Zapišimo zadanu jednadžbu u obliku

$$N' + k \cdot N = 40000 \cdot k,$$

pa vidimo da se radi o nehomogenoj linearnoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. reda. Riješimo je koristeći formulu za rješenje toga tipa jednadžbe. Očitamo:

$$p(t) = k, \; q(t) = 40000 \cdot k,$$

pa imamo redom:

$$N(t) = e^{-\int k \cdot \mathrm{d}t} \cdot \left(\int 40000 \cdot k \cdot e^{\int k \cdot \mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}t + C \right) = e^{-k \cdot \int 1 \cdot \mathrm{d}t} \cdot \left(40000 \cdot \int k \cdot e^{k \cdot \int 1 \cdot \mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}t + C \right) =$$
$$= e^{-k \cdot t} \cdot \left(40000 \cdot \int k \cdot e^{k \cdot t} \cdot \mathrm{d}t + C \right) = e^{-k \cdot t} \cdot \left(40000 \cdot e^{k \cdot t} + C \right) = C \cdot e^{-k \cdot t} + 40000.$$

U ovu jednakost najprije uvrstimo $t = 0$, $N(0) = 4000$. Dobijemo:

$$4000 = C \cdot \underbrace{e^{-k \cdot 0}}_{=1} + 40000 \Leftrightarrow 4000 = C + 40000 \Leftrightarrow C = -36000.$$

U istu jednakost uvrstimo $t = 3$, $N(3) = 20000$, $C = -36000$, pa dobijemo:

$$20000 = 40000 - 36000 \cdot e^{3 \cdot k} \Leftrightarrow e^{3 \cdot k} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow 3 \cdot k = \ln\left(\frac{5}{9}\right) \Leftrightarrow k = \frac{1}{3} \cdot \ln\left(\frac{5}{9}\right).$$

Tako je:

$$N(t) = 40000 - 36000 \cdot e^{\frac{1}{3} \cdot \ln\left(\frac{5}{9}\right) \cdot t}.$$

Traženi je broj jednak $N(4)$, pa računamo:

$$N(4) = 40000 - 36000 \cdot e^{\frac{1}{3} \cdot \ln\left(\frac{5}{9}\right) \cdot 4} = 40000 - 36000 \cdot e^{\frac{4}{3} \cdot \ln\left(\frac{5}{9}\right)} =$$

$$= 40000 - 36000 \cdot e^{\ln\left(\left(\frac{5}{9}\right)^{\frac{4}{3}}\right)} = 40000 - 36000 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{\frac{4}{3}} \approx 23559.$$

LITERATURA

1. B. Kovačić, L. Marohnić, T. Strmečki: Repetitorij matematike za studente elektrotehnike, priručnik, Tehničko veleučilište u Zagrebu, 2016.
2. A. Aglić Aljinović et.al.: Matematika 2, Element, Zagreb, 2016.
3. S. Suljagić: Matematika 2, interna skripta, Tehničko veleučilište u Zagrebu, Zagreb, 2003.
4. B. Apsen: Repetitorij elementarne matematike, Tehnička knjiga, Zagreb, 1994.
5. B. Apsen: Repetitorij više matematike 1, Golden-marketing - Tehnička knjiga, Zagreb, 2003.
6. B.P. Demidovič, Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike, Danjar, Zagreb, 1995.
7. V.P. Minorski: Zbirka zadataka iz više matematike, Tehnička knjiga, Zagreb, 1972.